Numerik Blatt 6 17P /17P.

Jonah Blank

David Rolf

Lars Kol[illegible]

Gruppe

6.1a) $f(x) = x^4 - 4x^2 + 4$

8/8 Newton: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

$x_0 = 1,1$

$f'(x) = 4x^3 - 8x$

$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 1,27954545$ ✓

$x_2 = 1,35042286$ ✓

$x_3 = 1,38307154$ ✓

$x_4 = 1,39881785$ ✓

$x_5 = 1,40655807$ ✓

$x_6 = 1,41039623$ ✓

b) Substitution $z = x^2$

$\Rightarrow f(z) = z^2 - 4x + 4 \overset{!}{=} 0$

$z_{1/2} = 2 \pm \sqrt{0} \Rightarrow x_1 = \sqrt{2}$ ✓ $= 1,414213562$

$x_2 = -\sqrt{2}$ ✓

c) $g(x) = x^4 - 5x^2 + 6$ $x_0 = 1,1$

$g'(x) = 4x^3 - 10x$ $x_1 = 1,34913672$ ✓

Schon nach 3 Schritten ist das Verfahren mit g(x) genauer als das mit f(x) nach 6 Schritten. x_5 ist bereits das nahezu exakte Ergebnis bis zur 9. Nachkommastelle ✓

$x_2 = 1,40696836$ ✓

$x_3 = 1,41408958$ ✓

$x_4 = 1,41421352$ ✓

$x_5 = 1,41421356$ ✓

d) $g(x) = 0$ hat 4 einfache Lösungen $x_{1/2} = \pm\sqrt{2}$ und $x_{3/4} = \pm\sqrt{3}$ ✓ $f(x)=0$ hat 2 doppelte Nullstellen bei $x_{1/2} = \pm\sqrt{2}$, weshalb die Konditionierung schlechter ist. ✓ ok.

6.2) $\phi(x^{(k)}) := x^{(k)} - \gamma \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})}$ $\gamma \in \mathbb{R}$

3/3

c) $\gamma = 2$ da für eine Nullstelle bis zur $\gamma-1$ Ableitung (hier $\gamma - 1 = 1 \Leftrightarrow \gamma = 2$) ✓

4/4

b) $\phi'(x) = 1 - 2\frac{f'(x)^2 - f(x)f''(x)}{f'(x)^2}$

$= 2\frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2} - 1$ ok. (sollte eigentlich für allgemeine γ bestimmt werden)

$f(x^*) = f'(x^*) = 0$

$\Rightarrow$ "$\frac{0}{0}$": De l'Hôspital

$\frac{f(x^*)}{f'(x^*)^2}$

"$\frac{0}{0}$"

$= \lim_{x \to x^*} \frac{f'(x)}{2f'(x)f''(x)} = \lim_{x \to x^*} \frac{1}{2f''(x)} = \frac{1}{2f''(x^*)}$

$\Rightarrow \phi'(x^*) = 1 - 1 = 0$ (✓)

c) $\lim_{x \to x^*} \phi'(x) = \lim_{x \to x^*} 2\frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2} - 1$

$= 0$ ok.

siehe Teil b)

2/2

a) $\phi(x)$ ist an der Stelle $x = x^*$ nicht definiert

$\Rightarrow \lim_{x \to x^*} x - \gamma \frac{f(x)}{f'(x)} \overset{"\frac{0}{0}"}{=} x^* - \gamma \lim_{x \to x^*}\left(\frac{f'(x)}{f''(x)}\right) = x^* - \gamma \frac{0}{f''(x^*)}$ ✓

$= x^* \Rightarrow \phi(x = x^*) = x^*$ ✓