1	2	3	4
3,5	3,5	4.5	4

$\boxed{15.5/20}$

David
Jonas
Laas

Aufgabe 25)

a) $f(x) = e^x$

$g(u) = u\ln u - u$

$\frac{df}{dx} = e^x = u$ $\frac{d^2f}{dx^2} = e^x$

konvex, da $e^x > 0$ für $x \in \mathbb{R}$

b) $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$

$H = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ $2 > 0 \Rightarrow$ pos. def.

$u_1 = 2x_1 \Leftrightarrow x_1 = \frac{u_1}{2}$

$u_2 = 2x_2 \Leftrightarrow x_2 = \frac{u_2}{2}$

$\Rightarrow x_1^2 = \frac{u_1^2}{4}$ $x_2^2 = \frac{u_2^2}{4}$

$g(u) = \frac{u_1^2}{2} + \frac{u_2^2}{2} - \frac{u_1^2}{4} - \frac{u_2^2}{4}$

$= \frac{1}{4}\left[u_1^2 + u_2^2\right]$

c) $f(x) = x^3$ $f'(x) = u = 3x^2 \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{u}{3}} \Rightarrow x^3 = \sqrt{\frac{u^3}{27}}$

$f''(x) = 6x$ für $x \in \mathbb{R}\setminus 0$ konvex / konkav

muss entweder überall konvex oder überall konkav sein!

$g(u) = \frac{u\sqrt{u}}{\sqrt{3}} - \sqrt{\frac{u^3}{27}} = \frac{2u\sqrt{u}}{\sqrt{3}^3}$

$= 2\sqrt{\frac{u}{3}}^3$

erneute Traf $\hat{=}$ x neu berechnen

d) zurück: $f(x_i) = \sum_{i=1}^{n} u_i x_i - g(u_i)$

$f(x) = xe^x - e^x\ln(e^x) + e^x = e^x$

b) zurück

$f(x) = u_1(x_1)x_1 + u_2(x_2)x_2 - \left(\frac{u_1(x_1)^2 + u^2(x_2)}{4}\right)$

$= 2x_1^2 + 2x_2^2 - (x_1^2 + x_2^2)$

$= x_1^2 + x_2^2$

c) zurück

$f(x) = u(x)x - \frac{2u(x)\sqrt{u(x)}}{3\sqrt{3}}$

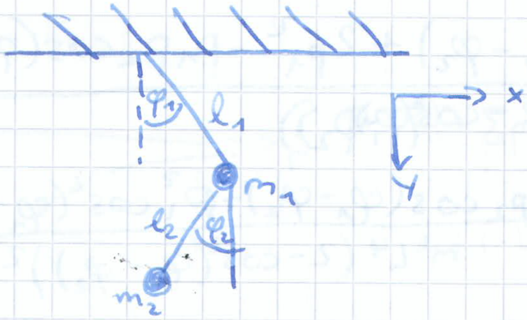
$= 3x^3 - \frac{6x^2\sqrt{3}x}{2\sqrt{3}}$ f

$(=0)$

$= x^3$

3,5/5

2 a)



b) Es wird vereinfachend angenommen, dass $m_1 = m_2 = m$; $l_1 = l_2 = l$

$x_1 = l \sin\varphi_1$ $\quad x_2 = l\sin\varphi_1 + l\sin\varphi_2$

$y_1 = l\cos\varphi_1$ $\quad y_2 = l\cos\varphi_1 + l\cos\varphi_2$

$$L = T - V$$

$$= \frac{ml^2}{2}\left(2\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2 + 2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\overbrace{(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2)}^{=\cos(\varphi_1-\varphi_2)}\right)$$

$$+ mgl(2\cos\varphi_1 + \cos\varphi_2 - 3)$$ kann durch kanonische Eich-Trafo vernachlässigt werden

c) I: $\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_1} = p_1 = ml^2(2\dot{\varphi}_1 + \cos(\varphi_1-\varphi_2)\dot{\varphi}_2)$

II: $\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_2} = p_2 = ml^2(\dot{\varphi}_2 + \cos(\varphi_1-\varphi_2)\dot{\varphi}_1)$

I_a: aus I: $\dot{\varphi}_1 = \frac{p_1}{2ml^2} - \frac{\dot{\varphi}_2}{2}\cos(\varphi_1-\varphi_2)$

II_a: aus II: $\dot{\varphi}_2 = \frac{p_2}{ml^2} - \dot{\varphi}_1\cos(\varphi_1-\varphi_2)$

aus I_a in II_a und II_a in I_a:

$$\dot{\varphi}_1 = \frac{-p_2\cos(\varphi_1-\varphi_2) + p_1}{ml^2\underbrace{(2-\cos^2(\varphi_1-\varphi_2))}_{=1+\sin^2(\varphi_1-\varphi_2)}}$$

$$\dot{\varphi}_2 = \frac{2p_2 - p_1\cos(\varphi_1-\varphi_2)}{ml^2(2-\cos^2(\varphi_1-\varphi_2))}$$

$$H = \frac{p_1^2 - p_1 p_2 \cos(\varphi_1-\varphi_2) + 2p_1^2 - p_1 p_2 \cos(\varphi_1-\varphi_2)}{ml^2(2-\cos^2(\varphi_1-\varphi_2))}$$

$$- \frac{ml^2}{2}\left(\frac{2(p_1^2 - 2p_1p_2\cos(\varphi_1-\varphi_2) + p_1^2\cos^2(\varphi_1-\varphi_2)}{m^2L^4(2-\cos^2(\varphi_1-\varphi_2))^2}\right.$$

$$+ \frac{4p_2^2 - 4p_1p_2\cos(\varphi_1-\varphi_2) + p_1^2\cos^2(\varphi_1-\varphi_2)}{m^2L^4(2-\cos^2(\varphi_1-\varphi_2))^2}$$

$$+ \frac{2(2p_1p_2 - p_1^2\cos(\varphi_1-\varphi_2) - 2p_2^2\cos(\varphi_1-\varphi_2) + p_1p_2\cos^2(\varphi_1-\varphi_2)\cos(\varphi_1-\varphi_2)}{m^2L^4(2-\cos^2(\varphi_1-\varphi_2))^2}$$

$$+ mgl(2\cos\varphi_1 + \cos\varphi_2)$$

$$= \frac{p_1^2 + 2p_2^2 - 2p_1p_2\cos(\varphi_1-\varphi_2)}{2ml^2(2-\cos^2(\varphi_1-\varphi_2))} - mgl(2\cos\varphi_1 + \cos\varphi_2) \quad (\checkmark)$$

$\dot\varphi_1, \dot\varphi_2$ s. Vorderseite

$$\dot p_1 = -\frac{p_1p_2\sin(\varphi_1-\varphi_2)}{ml^2(2-\cos^2(\varphi_1-\varphi_2))} \checkmark + \underbrace{\frac{\sin(\varphi_1-\varphi_2)\cos(\varphi_1-\varphi_2)}{ml^2(2-\cos^2(\varphi_1-\varphi_2))^2}}_{K}$$

$$\frac{(p_1^2 - 2p_1p_2\cos(\varphi_1-\varphi_2) + 2p_2^2}{K} - 2mgl\sin\varphi_1 \quad (\checkmark)$$

das ist noch der selbe Bruch

$$\dot p_2 = -\frac{\sin(\varphi_1-\varphi_2)\cos(\varphi_1-\varphi_2)(p_1^2 - p_1p_2\cos(\varphi_1-\varphi_2) + 2p_2^2)}{ml^2(2-\cos^2(\varphi_1-\varphi_2))^2}$$

$$+ \frac{p_1p_2\sin(\varphi_1-\varphi_2)}{ml^2(2-\cos^2(\varphi_1-\varphi_2))} - mgl\sin\varphi_2$$

3,5/5

Kleinwinkelnäherung:

$$\dot\varphi_1 = \frac{p_1-p_2}{ml^2} \checkmark, \quad \dot\varphi_2 = \frac{2p_2-p_1}{ml^2} \checkmark$$

$$\dot p_1 = \frac{(\varphi_1-\varphi_2)(\overset{=0}{p_1^2} - 3\overset{=0}{p_1p_2} - 2\overset{=0}{p_2^2})}{ml^2} - 2mgl\varphi_1 \approx -2mgl\varphi_1 \quad (\checkmark)$$

$$\dot p_2 = \frac{(\varphi_1-\varphi_2)(2\overset{=0}{p_1p_2} - \overset{=0}{p_1^2} + 2\overset{=0}{p_2^2})}{ml^2} - mgl\varphi_2 \approx -mgl\varphi_2 \quad (\checkmark)$$

Lösung fehlt.

Nr. 27 a)

$H = \sum_i p_i \dot{r}_i - L$

$L = T - V = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + \frac{V_0}{e^{a^2r^2}}$

$= \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2} + \frac{V_0}{e^{a^2r^2}}$ ✓

Definiert das mal, bevor ihr es benutzt...

$\Rightarrow p_r = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}$, $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi} = p_\varphi = \text{const} = L$

da $\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \Leftrightarrow \varphi$ ist zyklisch ✓

$\Rightarrow H = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{V_0}{e^{a^2r^2}} = T + V$ ✓

b) Da $p_\varphi = \text{const} = L \Rightarrow H = \frac{p_r^2}{2m} + V_{eff}(r)$ mit

$V_{eff}(r) = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{V_0}{e^{a^2r^2}}$ ✓

$L > L_{max} \Rightarrow$ keine Extrema von $V_{eff}(r) \Rightarrow$ keine gebundene Bewegung möglich ✓

$\Leftrightarrow$

$V_{eff}(r)$ für $L > L_{max}$ ✓

Frage: Welches ist das größte L, damit noch Extrema existieren?

$\Leftrightarrow$ keine Extrema für $L > L_{max}$

$V_{eff}' = \frac{dV_{eff}}{dr} = \frac{-L^2}{mr^3} + \frac{2a^2rV_0}{e^{a^2r^2}} \stackrel{!}{=} 0$ für Extrema ✓

$\Rightarrow L^2 = \frac{2a^2r^4V_0m}{e^{a^2r^2}}$ ✓ $\rightarrow$ abhängig von r

$\Rightarrow$ ~~Bei~~ Wann wird $L(r)$ maximal?
(Wann wird $L^2(r)$ maximal?) ✓

$\rightarrow$ Das ist dann das größte L, für das V_{eff} noch ein Extremum annimmt ✓

$\Rightarrow$ Für alle $L > L_{max}$ kann dann kein Extremum mehr existieren. ✓

$$\Rightarrow \frac{dL^2}{dr} = \frac{8a^2r^3V_0 m}{e^{a^2r^2}} - \frac{2a^2r\cdot 2a^2r^4 V_0 m}{e^{a^2r^2}} = \frac{4ma^2r^3V_0}{e^{a^2r^2}}\left(2-a\right.$$

$$\Rightarrow r=0 \lor 2-a^2r^2=0 \Leftrightarrow L=0 \lor r^2=\frac{2}{a^2}$$

$L=0 \Rightarrow$ minimales L, für das ein Extremum existiert (uninteressant)

$r^2=\frac{2}{a^2} \Rightarrow$ für dieses r ~~existiert~~ wird L maximal, sodass noch ein Extremum existiert

$$\Rightarrow L_{max}^2 = \frac{2a^2\cdot\frac{4}{a^4}V_0 m}{e^{a^2\cdot\frac{2}{a^2}}} = \frac{8V_0 m}{a^2e^2} \Rightarrow L_{max} = \frac{2\sqrt{2V_0 m}}{ae}$$

äquivalente Argumentation

Es muss überprüft werden, ob V_{eff} bei L_{max} ein Sattelpunkt ist, da dann nur für $L < L_{max}$ und nicht für $L \leq L_{max}$ eine gebundene Bewegung möglich ist.

$$\Rightarrow V_{eff}'' = \frac{d^2V_{eff}}{dr^2} = \frac{3L^2}{mr^4} + \left(\frac{2a^2V_0}{e^{a^2r^2}} - \frac{4a^4r^2V_0}{e^{a^2r^2}}\right)$$

$$= \frac{2a^2V_0}{e^{a^2r^2}}\left(1-2a^2r^2\right) + \frac{3L^2}{mr^4}$$

mit $L=L_{max}$ und $r^2=\frac{2}{a^2}$

$$\Rightarrow V_{eff}''\left(r^2=\frac{2}{a^2}\right) = \frac{2\cdot V_0\cdot a^2}{e^{a^2\cdot\frac{2}{a^2}}}\left(1-2a^2\cdot\frac{2}{a^2}\right) + \frac{24V_0ma^2}{4e^2m}$$

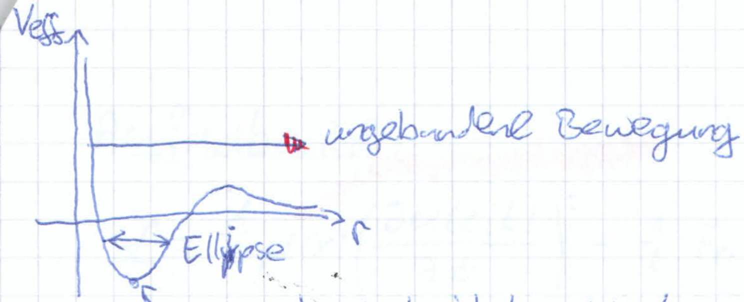
$$= \frac{-6V_0a^2}{e^2} + \frac{6V_0a^2}{e^2} = 0 \Rightarrow \text{mögl. Sattelpunkt}$$

$$\Rightarrow \text{3. Ableitung überprüfen} \Rightarrow V_{eff}''' = \frac{d^3V_{eff}}{dr^3} = \frac{4a^4rV_0}{e^{a^2r^2}}\left(2a^2r^2-3\right)$$

$$\Rightarrow V_{eff}'''\left(r^2=\frac{2}{a^2}\right) = \frac{4\sqrt{2}a^3V_0}{e^2} \neq 0 \Rightarrow \text{Sattelpunkt}$$

$\Rightarrow$ Keine gebundene Bewegung für $L \geq L_{max}$ möglich

$\Rightarrow$ Interessanter Fall $L < L_{max}$

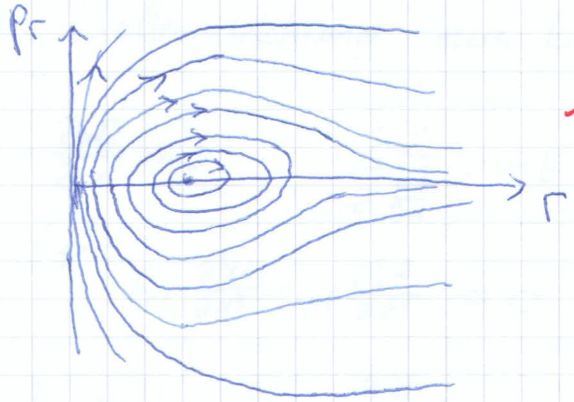


$r = \text{const.} \Leftrightarrow$ Kreisbahn $\Leftrightarrow L$ ~~minimal~~ maximal. , warum?

d) $$\frac{\partial H}{\partial r} = -\dot{p}_r = -\frac{L^2}{mr^3} + \frac{2a^2 V_0}{e^{a^2r^2}} \Rightarrow \dot{p}_r = \frac{L^2}{mr^3} - \frac{2a^2V_0}{e^{a^2r^2}}$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_r} = \dot{r} = \frac{p_r}{m}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \dot{r} \\ \dot{p}_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_r/m \\ L^2/mr^3 - \frac{2a^2V_0}{e^{a^2r^2}} \end{pmatrix}$$



4.5 / 5

Aufgabe 28

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\mu(x)\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right)^2 - \frac{1}{2}F_0\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right)^2$$ ✓

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\mu(x)\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2}F_0\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right)^2$$ ✓

a) Zeitliche Änderung der Energiedichte:

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\mu(x)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + F_0\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$$ ✓

Wellengleichung aus Lagrangedichte: $u(x,t) = u$; $\mu(x) = \mu$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} = 0 \quad ✓ \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial \phi}{\partial x}} = -E\frac{\partial \phi}{\partial x} \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial u}{\partial t}} = \mu\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t}$$

? ? müsste ein u sein …

$$\Rightarrow \quad F_0\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \mu\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \iff F_0\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \mu\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$ ✓

Einsetzen in $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}$:

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t}F_0\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F_0\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial x}$$ ✓

$$\iff \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} - F_0\left[\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right]\frac{\partial u}{\partial x}\right] = 0$$ ✓

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} + \underbrace{\left(-F_0\left[\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right]\frac{\partial u}{\partial x}\right]\right)}_{\frac{\partial j}{\partial x}} = 0$$ ✓

$$\Rightarrow j(x) = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x}\right)F_0$$ ✓

b) $$F_0\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \mu\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 = F_0\frac{\partial^2 u}{\partial(x-c_1t)^2}\frac{\partial(x-c_1t)^2}{\partial x^2} - \mu\frac{\partial^2 u}{\partial(x-c_1t)^2}\frac{\partial(x-c_1t)^2}{\partial t^2}$$

$$= u''\left[F_0 - \mu c_1^2\right] = 0 \iff c_1 = \pm\sqrt{\frac{F_0}{\mu}}$$ ✓