Numerik Blatt 4

Gruppe 3

David
Lars
Jonah

22 P. / 26 P.

4.1 a)

4/4 $\quad I(f) = \int_{-1}^{1} e^x + 1\,dx = e + 1 - \frac{1}{e} + 1$

$= 4{,}35040238728760$

Summierte Trapezregel:

$$I_h^{(1)}(f) = \frac{h}{2}\left[f(a) + 2\sum_{i=1}^{N-1} f(x_i) + f(b)\right] \qquad x_i = a + ih, \quad h = \frac{b-a}{N}$$

$$R = |I(f) - I_h^{(1)}(f)| = \frac{b-a}{12} h^2 f''(\xi) \doteq 10^{-2}$$

$f(x) = e^x + 1 \qquad f''(x) = e^x \Rightarrow$ in $[-1, 1]$ ist $\xi = 1$

$$R = \frac{b-a}{12} \cdot \frac{1}{N^2} f''(\xi) = \frac{8}{12} \cdot \frac{1}{N^2}(e+1) \sim 10^{-2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{200}{3}(e+1)} \sim N$$

$\Rightarrow N = 14 \Rightarrow h = \frac{1}{7}$

$$I_{1/8}^{(1)}(e^x + 1) = \frac{1}{16}\left[f(-1) + 2\sum_{i=1}^{13}\left(-1 + \frac{i}{7}\right) + f(1)\right]$$

$= 4{,}35439831129437$

1,5/2 b) Fehler der summierten Simpsonregel:

$$|I(f) - I_h^{(2)}(f)| = \frac{b-a}{2880} h^4 \underbrace{f^{(4)}(\xi)}_{e^\xi = e^1}$$

5 Auswertungen: $x = -1, x = 1, x = 0, x = -\frac{1}{2}, x = \frac{1}{2}$

$$= \frac{1}{90} \frac{1}{N^4} e \doteq 10^{-2}$$

$N^4 \sim \frac{10}{9} e \Rightarrow N = 2$

Ok. Wie viele Funktionsauswertungen?

$I_h^{(2)}(f) = I_h^{(2)}(f) = \frac{1}{6}\left\{f(0) + 2\sum_{i=1}^{1} f(x_i) + 4\sum_{i=0}^{1} f\left(x_i + \frac{x_{i+1}}{2}\right) + f(1)\right\}$

c)

1/1 $\quad I(f) - I^{(1)}(f) = \frac{(b-a)^3}{108} f''(\xi) \rightarrow$ Fehler der offenen NC-2-Punkte-Formel

$I(f) - I^{(1)}(f) = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(\xi) \rightarrow$ Fehler der Trapezregel

Anhand des Fehlers der Trapezregel kann man sehen, dass das genäherte Integral größer ist als der exakte Wert. Ok.

Bei der $\overset{\text{offenen}}{\text{N-C-Formel}}$ für 2-Stützstellen ist die Näherung hingegen kleiner als der exakte Wert. Also liegt dieser zwischen den ~~B~~ beiden Näherungen ok.

0,5/1 4.2. a) $\int_0^1 \sqrt{|x-0{,}7|}\,dx = \left[\frac{2}{3}\frac{\sqrt{|x-0{,}7|^5}}{|x-0{,}7|}\right]_0^1$

$\approx 0{,}4999887$ Skizze ? −0,5

4/4 b) $I^{(2)}_{[-1,1]}(f) = \frac{1}{9}\left(5f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + 8f(0) + 5f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)\right)$ ✓

Subst.

$\Rightarrow I^{(2)}_{[a,b]}(g) = \frac{b-a}{18}\left(5g\left(a+\frac{b-a}{2}\left(1-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)\right) + 8g\left(a+\frac{b-a}{2}\right)\right.$

$\left. + 5g\left(a+\frac{b-a}{2}\left(1+\sqrt{\frac{3}{5}}\right)\right)\right)$ ✓

$I^{(2)}_{[0,1]}(\sqrt{|x-0{,}7|}) = 0{,}5318542921$ (a)

2/2 c) $I^{(2)}_{[0,0.7]}(\sqrt{|x-0{,}7|}) = 0{,}3919130952 =: A$ ✓

$I^{(2)}_{[0.7,1]} = 0{,}1099574342 =: B$ ✓

$A+B = 0{,}5018705293$ ✓

$I^{(0)}_{[-1,1]}(f) = 2f(0)$

$I^{(0)}_{[a,b]}(f) = (b-a)\,f\left(a+\frac{b-a}{2}\right)$

$C := I^{(0)}_{[0,0.7]}(\sqrt{|x-0{,}7|}) = 0{,}7\sqrt{\left|-\frac{0{,}7}{2}\right|} = 0{,}4141255848$ ✓

$D := I^{(0)}_{[0.7,1]}(\sqrt{|x-0{,}7|}) = 0{,}3\sqrt{0{,}15} = 0{,}1161895004$ ✓

$C+D = 0{,}5303150852$ ✓

$R^{(2)}_{[0,1]} = 0{,}0318655921$ ✓

$R^{(2)}_{[0,0.7]\cup[0.7,1]} = 1{,}8819293 \times 10^{-3}$ ✓

$R^{(0)}_{[0,0.7]\cup[0.7,1]} = 0{,}0303263852$ ✓

Da auf Teilintervallen diff'bar ist, ist d. Fehler durch die Abschätzung stetig beschränkt

Bem.: So ist zu erklären dass mit 2 Auswertungen ($I^0 + I^0$) genauer als mit drei $I^2(g[0,1])$

Der Fehler von $I^{(2)}$ der nur auf [0,1] berechnet wird ist größer, da weniger Stützstellen verwendet werden als bei der $I^{(2)}$ auf $[0,0.7]\cup[0.7,1]$

~~er~~ Der Fehler von $I^{(0)}$ auf $[0,0.7] \cup [0.7,1]$

ist geringer als der von $I^{(2)}$ auf $[0,1]$, da dort mehr Werte von ~~[illegible]~~ Stützstellen aufsummiert werden.

David
Lars
Jonal

4.3. $4x + 4y = 8$

2,5/3 $3x + 6y = 8$

(✓)

$x = ?$
$y = ?$

Was sind die Ochsen, Schafe, Gold?
− 0,5

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = A$$

$$L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{3}{4} & 1 \end{pmatrix} \checkmark$$

$$R = A_1 = L_1 A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{3}{4} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \checkmark$$

$$L = L_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{3}{4} & 1 \end{pmatrix} \checkmark$$

Vorwärts:

$$L y = b$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{3}{4} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \end{pmatrix} \qquad y = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix} \checkmark$$

Rückwärts: $R x = y$

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad x = \begin{pmatrix} 4/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} \checkmark$$

3/3 b) $$\begin{pmatrix} 18 & 7 & 9 \\ 12 & 4/3 & 10 \\ 6 & 16/3 & 16/3 \end{pmatrix} = A \qquad L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix} \checkmark$$

$$A_1 = L_1 A = \begin{pmatrix} 18 & 7 & 9 \\ 0 & 9 & 4 \\ 0 & 3 & 7/3 \end{pmatrix} \qquad L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix} \checkmark$$

$$L_2 A_1 = \begin{pmatrix} 18 & 7 & 9 \\ 0 & 9 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = R$$

$$L = L_2^{-1} L_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2/3 & 1 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1 \end{pmatrix}$$

… 4.4 a)

$\frac{15}{4}$

$$A = \begin{pmatrix} 9 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ \boxed{12} & 4 & 3 \end{pmatrix} \qquad P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

f

$$A_1 = P_1 A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 9 & -2 & 1 \\ 12 & 4 & 3 \end{pmatrix} \qquad L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -9 & 1 & 0 \\ -12 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = L_1 A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -20 & -8 \\ 0 & -20 & -9 \end{pmatrix} ? \qquad P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = P_2 A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -20 & -9 \\ 0 & -20 & -8 \end{pmatrix} \qquad L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = L_2 A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -20 & -9 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow R = L_2 P_2 L_1 P_1 A \qquad P_2 P_2 = \mathbb{1} ?$$

$$\Rightarrow R = L_2 \underbrace{P_2 L_1 P_2}_{\hat{L}_1} \underbrace{P_2 P_1}_{P} A$$

f

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$L = \hat{L}_1^{-1} L_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 12 & 1 & 0 \\ 9 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Pb = \begin{pmatrix} 21 \\ 22 \\ -2 \end{pmatrix}$$

2/2

David
Laus
Jonah

v.:

$$Ly = Pb$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 9 & 1 & 0 \\ 12 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 \\ 22 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$y_1 = 21$
$y_2 = -230$
$y_3 = 39$

(✓)

Rückwä:

$$Rx = y$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -20 & -9 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 \\ -230 \\ 39 \end{pmatrix}$$

$x_3 = 39$
$x_2 = 121$
$x_1 = -139$

(✓)

0