Lars
Jonah
David
Yascha

1a) $H = \gamma \frac{\hbar}{2} B \begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$ $\quad \rho_1(0) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ $\quad \rho_2(0) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}$

$\rho_1(0) = \frac{e^{-\beta \hat H}}{Sp(e^{-\beta\hat H})}$ $\qquad e^{-\beta\hat H} = e^{\frac{\beta\hbar B}{2}\gamma\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}} = e^{C\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}}$

da $\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$ diagonalisiert ist: $e^{C\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}} = \begin{pmatrix}e^{C}&0\\0&e^{-C}\end{pmatrix}$

$\Rightarrow Sp\left(\begin{pmatrix}e^{-C}&0\\0&e^{C}\end{pmatrix}\right) = e^{C} + e^{-C}$

$= \frac{e^{-C\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}}}{e^{C}+e^{-C}}$ $\qquad C \sim \beta = \frac{1}{k_B T}$

$= \frac{1}{2} \lim\limits_{T\to\infty} e^{C\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}}$ $\qquad \lim\limits_{T\to\infty} C = 0 \quad \to \lim\limits_{T\to\infty} e^{-C} = 1$

$= \frac{1}{2}\lim\limits_{T\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(C)^n}{n!}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}^n$

$= \frac{1}{2}\lim\limits_{T\to\infty}\Bigg(\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(C)^{2n}}{(2n)!}\underbrace{\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}^{2n}}_{=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}}}_{\to \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(C)^{2n+1}}{(2n+1)!}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}^{2n+1}}_{\to 0}\Bigg)$

nur der Term für $n=0$ bleibt.

$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} = \rho_1(0)$ ✓

A1	A2	A3	A4	Ges
4	3,5	3	2,5	13

1,3

b) Reine Zustände! $\rho^2 = \rho$

$\rho_1^2 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} \neq \rho_1 \to$ nicht rein ✓

(Im Magnetfeld richtet sich der Spin aus → 1 Möglichkeit → entweder $|\uparrow\rangle$ ODER $|\downarrow\rangle$)
+Larmorpräzession

$\rho_2^2 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}2&-2\\-2&2\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix} = \rho_2$ ✓

c) $\rho_1(t) = e^{-i\hat H t/\hbar}\,\hat\rho_1(0)\,e^{i\hat H t/\hbar}$ $\qquad e^{i\hat H t/\hbar} = e^{i\gamma\frac{B}{2}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}t} = e^{ia\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}} = \begin{pmatrix}e^{ia}&0\\0&e^{-ia}\end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix}e^{-ia}&0\\0&e^{ia}\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{ia}&0\\0&e^{-ia}\end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix}e^{-ia}&0\\0&e^{ia}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{ia}&0\\0&e^{-ia}\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{2}$

$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} = \rho_1(0)$ ✓

$\rho_2(t) = \begin{pmatrix}e^{-ia}&0\\0&e^{ia}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{ia}&0\\0&e^{-ia}\end{pmatrix}\frac{1}{2} = \begin{pmatrix}e^{-ia}&0\\0&e^{ia}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{ia}&-e^{-ia}\\-e^{ia}&e^{-ia}\end{pmatrix}\frac{1}{2} = \begin{pmatrix}1&-e^{-2ia}\\-e^{2ia}&1\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{2}$ ✓

d) ρ_1: $\langle H\rangle = Sp(\rho_1 H) = \frac{1}{2}Sp(\mathbb{1}H) = \frac{1}{2}Sp\,H = 0$ ✓

$\langle\vec S\rangle = \frac{\hbar}{4}Sp\left(\begin{pmatrix}\sigma_x\\\sigma_y\\\sigma_z\end{pmatrix}\right) = \vec 0$

$\langle\vec S^2\rangle = \frac{1}{2}\cdot\frac{\hbar^2}{4}Sp\left(\mathbb{1}(\sigma_x^2+\sigma_y^2+\sigma_z^2)\right) = \frac{3\hbar^2}{8}Sp(\mathbb{1}) = \frac{3\hbar^2}{4}$ ✓

ρ_2: $\langle H \rangle = \frac{1}{2} Sp\left(\begin{pmatrix} 1 & -e^{-2ia} \\ -e^{2ia} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right) \cdot (-\hbar a)$

$= -\frac{\hbar a}{2} Sp\left(\begin{pmatrix} 1 & e^{-2ia} \\ -e^{2ia} & -1 \end{pmatrix}\right) = 0$ ✓

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{\hbar}{4}\begin{pmatrix} Sp\left(\begin{pmatrix} 1 & -e^{-2ia} \\ -e^{2ia} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) \\ Sp\left(\begin{pmatrix} 1 & -e^{-2ia} \\ -e^{2ia} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\right) \\ Sp\left(\begin{pmatrix} 1 & -e^{-2ia} \\ -e^{2ia} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right) \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{4}\begin{pmatrix} Sp\left(\begin{pmatrix} -e^{-2ia} & 1 \\ 1 & -e^{2ia} \end{pmatrix}\right) \\ Sp\left(\begin{pmatrix} e^{-2ia} & -i \\ i & ie^{2ia} \end{pmatrix}\right) \\ Sp\left(\begin{pmatrix} 1 & e^{-2ia} \\ +e^{2ia} & -1 \end{pmatrix}\right) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} -\cos(2a) \\ +\sin(2a) \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} -\cos(\gamma B t) \\ +\sin(\gamma B t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\langle \vec{S}^2 \rangle = \frac{3\hbar^2}{8} Sp\left(\begin{pmatrix} 1 & -e^{-2ia} \\ -e^{2ia} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \frac{3\hbar^2}{4}$ ✓

Spektraldarstellung

$\rho_1: S = -k_B\, Sp(\rho_1 \ln \rho_1) = -k_B \sum_{i=1}^{2} \lambda_i \ln \lambda_i$

$\lambda_{1/2} = \frac{1}{2} \Rightarrow S = -k_B(\ln(1) - \ln(2)) = k_B \ln 2$ ✓

ρ_2: $\lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = 1$

$\Rightarrow S = -k_B(\ln 1) = 0$ ✓

4/4

4a) $\xi \sim \lambda = \frac{h}{\sqrt{2mE}}$ hier: $E = k_B T \Rightarrow$ thermische Energie

ξ groß $\rightarrow \lambda > \sigma \leftarrow$ Teilchenabstand

$\Rightarrow$ Interferenzeffekte $\rightarrow$ Resonanzen bei diskreten Übergängen

und bei $\lambda < \sigma$?

b) ^4He: $T = 4{,}2\,K \quad \rho = \frac{0{,}126\,g}{cm^3} = 126 \times 10^3 \frac{g}{m^3}$

$M = 4\,g/mol \quad n = \frac{\rho}{M} = 31{,}5 \frac{mol}{m^3} \times 10^3$

$\xi = 1{,}34 \cdot 10^{-8}$ 1,36

^{40}Ar: $T = 87{,}4\,K \quad \rho = \frac{1{,}4\,g}{cm^3} = 1{,}4 \times 10^6\, g/m^3$

$M = 40\, g/mol \quad n = 35 \frac{mol}{m^3} \times 10^3 \cdot N_A$ Ges: $n \times N \leftarrow$ Teilchenzahl ✓

$\xi = 8{,}62 \cdot 10^{-10}$ f 0,082

$\rightarrow$ größere Zahl $\Rightarrow$ „Quantenmechanischer" (✓)

2,5/4

A2) 3.5

- N unterscheidbare Teilchen
- 3D harm. Oszillator

$$H(q_1, \dots, q_{3N}, p_1, \dots, p_{3N}) = \sum_{i=1}^{3N} \left(\frac{p_i^2}{2m} + m\omega^2 \frac{q_i^2}{2} \right)$$

a)

$$Q_N = \int \frac{d^{3N}p \, d^{3N}q}{h^{3N} \cancel{N!}} \exp(-\beta H(p,q))$$

$$= \frac{1}{h^{3N} \cancel{N!}} \int_{-\infty}^{\infty} d^{3N}p \, e^{-\beta \sum_{i=1}^{3N} \frac{p_i^2}{2m}} \int_{-\infty}^{\infty} d^{3N}q \, e^{-\beta \sum_{i=1}^{3N} m\omega^2 \frac{q_i^2}{2}}$$

$$= \frac{1}{h^{3N} \cancel{N!}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} dp \, e^{-\beta \frac{p^2}{2m}} \int_{-\infty}^{\infty} dq \, e^{-\beta m\omega^2 \frac{q^2}{2}} \right)^{3N}$$

Eigenschaften der kan. Gesamtheit?

$$= \frac{1}{h^{3N} \cancel{N!}} \left(\sqrt{2m\pi k_B T} \sqrt{\frac{2\pi k_B T}{m\omega^2}} \right)^{3N}$$

$$= \left(\frac{k_B T}{\hbar\omega} \right)^{3N}$$

schön!

b)

$$C_V = \frac{\partial U}{\partial T} \qquad U = \langle H \rangle = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln(Q_N)$$

$$= -\frac{\partial}{\partial \beta} \left(-3N \ln(\hbar\omega\beta) \right)$$

$$= 3N \frac{1}{\hbar\omega\beta} \cdot \hbar\omega = 3N k_B T$$

$C_V = 3N k_B$:)

A3) 3

a)

$$\hat{a}\,|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle$$

$$\hat{a}^+|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle \qquad \hat{n} = \hat{a}^+\hat{a} \Rightarrow \hat{n}\,|n\rangle = n\,|n\rangle$$

b)

Ein harm. Osz.:

$$Q = \sum_{n=0}^{\infty} \langle n | e^{-\beta H} | n \rangle \qquad \cancel{H = \sum^{3N}} \; H = E_n = \hbar\omega(n + \tfrac{1}{2})$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \langle n | e^{-\beta\hbar\omega(n+\frac{1}{2})} | n \rangle = e^{-\beta\hbar\omega/2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(e^{-\beta\hbar\omega} \right)^n$$

$$= \frac{e^{-\beta\hbar\omega/2}}{1 - e^{-\beta\hbar\omega}} = \frac{1}{2\sinh\left(\frac{\hbar\omega}{2k_B T}\right)}$$

N harm. Oszillatoren

$$Q_N = \sum_{n=0}^{\infty} \langle n | e^{-BH} | n \rangle \qquad H = \sum_{i=1}^{3N} \hbar\omega (a_i^+ a_i + \tfrac{1}{2})$$

wenn ihr mehrere Oszillatoren habt, sind eure Zustände nicht mehr nur durch eine Quantenzahl n gegeben sondern durch eine QZ für jeden Zustand $|n_1, n_2, \ldots, n_{3N}\rangle$

$$= 3N\hbar\omega \cdot \tfrac{1}{2} + \sum_{i=1}^{3N} n_i \hbar\omega$$

$$\Rightarrow Q_N = \left(e^{-\frac{1}{2}\hbar\omega}\right)^{3N} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \langle n | e^{-B\sum_{i=1}^{3N} n_i \hbar\omega} | n \rangle$$

$$= \left(e^{-\frac{1}{2}\hbar\omega}\right)^{3N} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \langle n | e^{-B\hbar\omega \cdot \sum_{i=1}^{3N} n_i} | n \rangle$$

$$\cancel{= \left(e^{-\frac{1}{2}\hbar\omega}\right)^{3N} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \langle n | \prod_{i=1}^{3N} e^{-B\hbar\omega n_i} | n \rangle}$$

$$= e^{-\frac{3}{2}\hbar\omega N} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \langle n | \left(e^{-B\hbar\omega 3N}\right)^n | n \rangle$$

$$= \frac{1}{2\sinh\left(\frac{\hbar\omega 3N}{2 k_B T}\right)} = \frac{1}{2\sinh(\hbar\omega 3NB/2)}$$ ff

$$Q_N = \left(\frac{1}{2\sinh(\hbar\omega/(2k_BT))}\right)^{3N}$$

c) $$u = -\frac{\partial}{\partial B} \ln(Q_N) = -3N\hbar\omega/2 \coth(\hbar\omega 3NB/2)$$ ff

$$= \frac{3}{2}\hbar\omega N \left(\frac{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{k_BT}\right)+1}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{k_BT}\right)-1}\right)$$

$$c_V = \frac{\partial u}{\partial T} = -3N\hbar\omega/2 \cdot \frac{\partial \coth(\hbar\omega 3NB/2)}{\partial T} \qquad \left(B = \frac{1}{k_BT}\right)$$

$$= -\frac{3N}{2}\hbar\omega \cdot \frac{\hbar\omega \frac{3}{2}N \cdot \frac{1}{k_B}}{T^2 \sinh(\hbar\omega \frac{3}{2}N \frac{1}{k_BT})}$$ ff

$$= \frac{3\hbar^2\omega^2 N \exp\left(\frac{\hbar\omega}{k_BT}\right)}{k_BT^2\left(\exp\left(\frac{\hbar\omega}{k_BT}\right)-1\right)^2}$$

d)

für $T \to 0$: $c_V \to 0$ (✓)

für $T \to \infty$: $\frac{1}{T^2\sinh(\alpha/T)} \to \left(\frac{1}{\alpha}\right)$?

$$\Rightarrow c_V = \frac{3}{4} N \frac{\hbar^2\omega^2}{k_B} \cdot \left(\frac{1}{\frac{3N\hbar\omega}{2k_B}}\right)$$

$$= \frac{k_B}{3N}$$ ff

$c_V \to 3Nk_B$

Die spez. Wärme sollte mit N größer werd und nicht klein