David
Jonah
Lars
Yascha

1a) $M_{Na} \approx \frac{23\,g}{mol}$ $\quad \rho_{Na} = 9{,}7\times10^{5}\,g/m^3$ $\quad$ g: Entartungsgrad

$g_{e^-} = 2$

$\frac{N}{V} = n = \rho\frac{N_A}{M} = \frac{k_F^3}{3\pi^2}\frac{g_e}{2} \Leftrightarrow k_F = \sqrt[3]{3\pi^2\rho\frac{N_A}{M}}$

$\Rightarrow E_F = \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m_e} = \frac{\hbar^2}{2m_e}\left(3\pi^2\rho\frac{N_A}{M}\right)^{2/3} \approx 5{,}05\times10^{-19}\,J = 3{,}15\,eV$

$T_F = \frac{E_F}{k_B} \approx 36561{,}73\,K$

$p = \lim_{T\to0} -\frac{\Omega_F}{V} = \lim_{T\to0}\frac{1}{\beta V}\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{d\varepsilon\, \mathcal{N}(\varepsilon)}_{4\pi k^2 dk} \ln\left(1+e^{-\beta(E-\mu)}\right)\cdot g_e$

$= \lim_{T\to0}\frac{\overset{g_e}{2}}{\beta(2\pi^3)}\int d^3k\, \underbrace{\ln\left(1+\underbrace{e^{-\beta(E-\mu)}}_{\gg 1}\right)}_{\approx -\beta(E-E_F)}$

$\approx -\frac{1}{\pi^2}\int_{k<k_F} dk\, k^2(k^2-k_F^2)\frac{\hbar^2}{2m_e}$

$= -\frac{\hbar^2}{2\pi^2 m_e}\int_0^{k_F} dk\,(k^4 - k^2k_F^2)$

$= \frac{\hbar^2}{2\pi^2 m_e}\cdot\frac{2}{15}k_F^5 = \frac{\hbar^2}{15\pi^2 m_e}k_F^5 = \frac{\hbar^2}{15\pi^2 m_e}\left(3\pi^2\underbrace{\rho\frac{N_A}{M}}_{N/V}\right)^{5/3} \approx 51{,}28\,GPa$

$\lim_{T\to0}\mu = \varepsilon_F = \frac{\hbar^2k_F^2}{2m}$

$\Rightarrow \lim_{T\to0} E-\mu = \frac{\hbar^2}{2m}(k^2-k_F^2)$

$\lim_{T\to0}\beta = \infty \Rightarrow e^{-\beta(E-\mu)} = \begin{cases}0, & k>k_F\\ \infty, & k<k_F\end{cases}$

$p_0 = \underbrace{\frac{\hbar^2}{15\pi^2 m_e}\cdot(3\pi^2)^{5/3}}_{C}\cdot\left(\frac{N}{V}\right)^{\frac{5}{3}} = C\left(\frac{V}{N}\right)^{-5/3}$

$\kappa_{T=0} = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial p_0}{\partial V}\Big|_{T=0}\right)^{-1} = \left(\frac{5}{3}p_0\right)^{-1} = \frac{3}{5}\frac{1}{p_0} \approx 1{,}17\times10^{-10}\,Pa^{-1}$

$= 1{,}17\times10^{-5}\,bar^{-1}$

$\frac{1{,}17}{1{,}83}\,\frac{10^{-5}}{10^{-5}}\,\frac{bar}{bar} \approx 63{,}93\% \Rightarrow$ Abweichung $36{,}07\%$ ✓

b) $\frac{V}{N} = \frac{4\pi}{3}r_0^3 \Leftrightarrow \frac{N}{V} = \frac{3}{4\pi r_0^3} = \frac{g_N k_F^3}{6\pi^2} \Rightarrow k_F = \sqrt[3]{\frac{9}{8}\pi}\cdot\frac{1}{r_0}$ $\quad g_N = 4$

$\Rightarrow E_F = \frac{\hbar^2}{2Mr_0^2}\cdot\left(\frac{9}{8}\pi\right)^{2/3} \approx 33{,}70\,MeV$ ✓ $\Rightarrow T_F = 3{,}91\times10^{11}\,K$ ✓

$p_{0,N} = \frac{2\hbar^2}{15\pi^2 m_N}k_F^5 = \frac{2\hbar^2}{15\pi^2 m_N}\left(\frac{9\pi}{8}\right)^{5/3} r_0^{-5} \approx 3{,}32\times10^{15}\,Pa$?

$\kappa_{T=0} = \frac{3}{5p_{0,N}} \approx 1{,}81\times10^{-11}\,bar^{-1}$

c) $\frac{N}{V} = \rho\frac{N_A}{M} = \frac{k_F^3}{6\pi^2}\cdot g$ ($= 2$, Spin) $\Leftrightarrow k_F = \sqrt[3]{3\pi^2\rho\frac{N_A}{M}}$ $\quad \rho = 8{,}14\times10^{4}\,\frac{g}{m^3}$

$M = 3{,}01\,g/mol$

$\Rightarrow E_F = \frac{\hbar^2 N_A}{2M}\left(3\pi^2\rho\frac{N_A}{M}\right)^{2/3} = 4{,}27\times10^{-4}\,eV$ ✓ $\quad m = \frac{M}{N_A}$

$T_F = 4{,}95\,K$ ✓

A1	A2	A3	Ges
3,5	[illegible]5	5	10

$$p_0 = \frac{\hbar^2}{15\pi^2 m_{He}} \cdot \left(3\pi^2 \varrho \frac{N_A}{M}\right)^{5/3} \approx 445651,58 \; Pa$$

$$\approx 4,46 \; bar$$ ✓

$$\kappa_T = \frac{3}{5p_0} \approx 0,13 \; bar^{-1}$$ ✓

3,5/4

2) a) Ein-Teilchen-Energie relativistisch

15

$$E_1 = \sqrt{m^2c^4 + c^2\hbar^2 k^2}$$

Gesamtenergie:

$$E_0 = 2 \sum_{\vec{k}}^{|k|\le k_F} \sqrt{m_e^2c^4 + c^2\hbar^2 k^2} \xrightarrow{\text{TD Limes}} 2\frac{V}{(2\pi)^3}\int_0^{k_F} 4\pi k^2 dk \sqrt{m_e^2c^4 + c^2\hbar^2 k^2}$$

Spin

$$x = \frac{\hbar k}{mc}$$

$$= 2\frac{V}{(2\pi)^3} 4\pi m_e c^2 \int_0^{x_F} \frac{m_e c}{\hbar} dx \sqrt{1+x^2}\left(\frac{m_e c}{\hbar}\right)^2 x^2$$

$$= \frac{V}{\pi^2}\frac{m_e^4 c^5}{\hbar^3} f(x_F)$$

mit $f(x_F) = \int_0^{x_F}\sqrt{1+x^2}\, x^2 dx$

schön!

b) $E_0 \hat{=} U$

$$\Rightarrow p_0 = -\left.\frac{\partial E_0}{\partial V}\right|_S = -\frac{m_e^4 c^5}{\pi^2 \hbar^3} f(x_F)$$

x_F beinhaltet k_F und damit auch $V_{Fez} = \frac{(2\pi)^3}{V}$, ist also auch abhängig von V!

→ euch fehlt ein Produktregelterm

c) $E_V = \int p_0 dV = -\frac{m_e^4 c^5}{\pi^2\hbar^3} f(x_F) V$

$V = \frac{4}{3}\pi R^3$ (ungefähr eine Kugel) jo

$$E_V + E_G = -\frac{m_e^4 c^5}{\pi^2 \hbar^3}\frac{4}{3}\pi R^3 f(x_F) - \alpha\gamma M^2 \frac{1}{R}$$

soll minimiert werden:

$$\Rightarrow 0 \stackrel{!}{=} -\frac{m_e^4 c^5 4}{\pi\hbar^3} f(x_F) R^2 + \alpha\gamma M^2\frac{1}{R^2}$$

$$\Leftrightarrow R^4 = \frac{\alpha\gamma M^2 \pi\hbar^3}{m_e^4 c^5 \cdot 4 f(x_F)}$$

$$\Leftrightarrow |R| = \frac{1}{m_e c}\sqrt[4]{\frac{\alpha\gamma M^2\pi\hbar^3}{c\, 4 f(x_F)}}$$

prinzipiell alles richtig, nur, dass der Term oben fehlt :-)

mit angegebenen Näherungen $f(x_F) \approx \frac{1}{4}x_F^4\left(1+\frac{1}{x_F^2}\right)$ (1)

und $\cancel{\sqrt{x_F^2+1}} = x_F\sqrt{1+\frac{1}{x_F^2}} \approx x_F\left(1+\frac{1}{2x_F^2}\right)$ (2)

$$R \stackrel{(1)}{=} \frac{1}{m_e c}\sqrt[4]{\frac{\alpha\gamma M^2\pi\hbar^3}{c\,\cancel{4}\frac{1}{\cancel{4}}x_F^4\left(1+\frac{1}{x_F^2}\right)}} \stackrel{(2)}{=} \frac{1}{m_e c}\frac{1}{x_F\sqrt{1+\frac{1}{2x_F^2}}}\sqrt[4]{\frac{\alpha\gamma M^2\pi\hbar^3}{c}}$$

$$\stackrel{(2)}{=} \frac{1}{m_e c}\frac{1}{x_F\left(1+\frac{1}{4x_F^2}\right)}\sqrt[4]{\frac{\alpha\gamma M^2\pi\hbar^3}{c}}$$

(ff.)

$$\Rightarrow R = \frac{1}{m_e c} \frac{1}{\frac{\hbar k_f}{m_e c} + \frac{m_e c}{4\hbar k_f}} \sqrt[4]{\frac{\alpha \gamma \pi \hbar^3}{c}} \sqrt{M}$$

d) Bei den angenommen Näherungen ~~existiert~~ kann ein Weißer Zwerg immer existieren und sein Radius ist proportional zur Wurzel seiner Masse ($R \sim \sqrt{M}$) eigentlich nicht (ff.)

5

3a) 3D: $\frac{(2m)^{3/2}}{2\pi^2\hbar^3} V\sqrt{E}$; 2D: $\frac{mL^2}{\pi\hbar^2}\,\Theta(E)$; 1D: $\frac{\sqrt{2m}\,L}{\pi\hbar\,\sqrt{E}}$ ✓ $V=L^3$

b) $T=0 \Rightarrow \mu=\varepsilon_F \Rightarrow n=\overset{\text{Sommerfeld}}{\int_0^{E_F}} g(E)\,dE = G(E_F)-G(0)$ ← in allen Dim. $=0$

Umkehrfunktion

$\Rightarrow E_F = G^{-1}(n)$

1D: $E_F = \left(\frac{2\pi\hbar}{2\sqrt{2m}L}\,n\right)^2 = \frac{\pi^2\hbar^2}{8mL^2}n^2$ 2D: $E_F = \frac{\pi\hbar^2 n}{mL^2}$

3D: $E_F = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{3n\pi^2}{V}\right)^{2/3}$ (✓)

Aufpassen: $n=\frac{N}{V}$ ist nicht dasselben n wie eures (ihr benutzt N)

c)

$$n=\int_0^{E_F} g(E)\,dE + g(E_F)(\mu-E_F)+(k_BT)^2\frac{\pi^2}{6}g'(E_F)$$

3D: $$n=\underbrace{\frac{V(2m)^{3/2}}{2\pi^2\hbar^3}}_{C}\left(\int_0^{E_F}\sqrt{E}\,dE+\sqrt{E_F}(\mu-E_F)+(k_BT)^2\frac{\pi^2}{12}\cdot\frac{1}{\sqrt{E_F}}\right)$$

$$\frac{n}{C}=\frac{1}{3}E_F^{3/2}+\mu\sqrt{E_F}+(k_BT)^2\frac{\pi^2}{12\sqrt{E_F}}$$

$$\frac{n}{C\sqrt{E_F}}=\mu-\frac{1}{3}E_F+(k_BT)^2\frac{\pi}{12E_F}$$

$= E_F$?

$$\mu=\frac{1}{3}E_F+\frac{n}{C\sqrt{E_F}}-(k_BT)^2\frac{\pi}{12E_F} \sim -T^2 \Rightarrow \mu \text{ sinkt mit höherer Temp.}$$ ✓

2D: $$n=\underbrace{\frac{mL^2}{\pi\hbar^2}}_{C'}\left(\underbrace{\int_0^{E_F}\Theta(E)\,dE}_{E_F\Theta(E_F)}+\Theta(E_F)(\mu-E_F)+(k_BT)^2\frac{\pi^2}{6}\delta(E_F)\right)$$

$$\frac{n}{C'}=\mu\,\Theta(E_F)+\frac{\pi^2}{6}(k_BT)^2\delta(E_F)$$

$$\mu=-\frac{\pi^2}{6}(k_BT)^2\overbrace{\frac{\delta(E_F)}{\Theta(E_F)}}^{=0}+\frac{n}{C'\underbrace{\Theta(E_F)}_{=1}}=\frac{n}{C'\Theta(E_F)}=\frac{n}{C'}=\text{const}$$ ✓

1D:

$$n=\underbrace{\frac{\sqrt{2m}\,L}{\pi\hbar}}_{C''}\left(\int_0^{E_F}\frac{1}{\sqrt{E}}\,dE+\frac{1}{\sqrt{E_F}}(\mu-E_F)-\frac{\pi^2}{12}(k_BT)^2E_F^{-3/2}\right)$$

$$\frac{n}{C''}=\sqrt{E_F}+\frac{\mu}{\sqrt{E_F}}-\frac{\pi^2}{12}(k_BT)^2E_F^{-3/2}$$

$$\mu=\frac{n}{C''}\sqrt{E_F}-E_F+\frac{\pi}{12}\frac{(k_BT)^2}{E_F}\sim T^2 \Rightarrow \text{steigt für höher Temp.}$$ ✓

Im Grenzfall sollte ja wieder $\mu(0)=E_F$