$$\Rightarrow \frac{dL^2}{dr} = \frac{8a^2r^3V_0m}{e^{a^2r^2}} - \frac{2a^2r\cdot 2a^2r^4V_0m}{e^{a^2r^2}} = \frac{4ma^2r^3V_0}{e^{a^2r^2}}\left(2-a\right.$$

$$\Rightarrow r=0 \vee 2-a^2r^2=0 \quad \Leftrightarrow L=0 \vee r^2=\frac{2}{a^2}$$

$L=0$: $\downarrow$ minimales L, für das ein Extremum existiert (uninteressant)

$\Rightarrow$ für dieses r ~~existiert~~ wird L maximal, sodass noch ein Extremum existiert

$$\Rightarrow L_{max}^2 = \frac{2a^2\cdot\frac{4}{a^4}V_0m}{e^{a^2\cdot\frac{2}{a^2}}} = \frac{8V_0m}{a^2e^2} \Rightarrow L_{max} = \frac{2\sqrt{2V_0m}}{ae}$$

äquivalente Argumentation.

Es muss überprüft werden, ob V_{eff} bei L_{max} ein Sattelpunkt ist, da dann nur für $L<L_{max}$ und nicht für $L\leq L_{max}$ eine gebundene Bewegung möglich ist.

$$\Rightarrow V_{eff}'' = \frac{d^2V_{eff}}{dr^2} = \frac{3L^2}{mr^4} + \left(\frac{2a^2V_0}{e^{a^2r^2}} - \frac{4a^4r^2V_0}{e^{a^2r^2}}\right)$$

$$= \frac{2a^2V_0}{e^{a^2r^2}}\left(1-2a^2r^2\right) + \frac{3L^2}{mr^4}$$

mit $L=L_{max}$ und $r^2=\frac{2}{a^2}$

$$\Rightarrow V_{eff}''\left(r^2=\frac{2}{a^2}\right) = \frac{2\cdot V_0\cdot a^2}{e^{a^2\cdot\frac{2}{a^2}}}\left(1-2a^2\cdot\frac{2}{a^2}\right) + \frac{24V_0ma^2}{4e^2m}$$

$$= \frac{-6V_0a^2}{e^2} + \frac{6V_0a^2}{e^2} = 0 \Rightarrow \text{mögl. Sattelpunkt}$$

$$\Rightarrow \text{3. Ableitung überprüfen} \Rightarrow V_{eff}''' = \frac{d^3V_{eff}}{dr^3} = \frac{4a^4rV_0}{e^{a^2r^2}}\left(2a^2r^2-3\right)$$

$$\Rightarrow V_{eff}'''\left(r^2=\frac{2}{a^2}\right) = \frac{4\sqrt{2}a^3V_0}{e^2} \neq 0 \Rightarrow \text{Sattelpunkt}$$

$\Rightarrow$ Keine gebundene Bewegung für $L \geq L_{max}$ möglich

$\Rightarrow$ Interessanter Fall $L<L_{max}$