1	2	3	4
3.5	5	5	3

16,5/20

Jonah David Loos

Aufgabe 9

a) $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ r\cot\alpha \end{pmatrix}$, also $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = r\cot\alpha$ ← nur das ist Zwangbedingung (✓)

b) $L = T - V$ ✓ $\quad T = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2$ ✓ $\quad V = mgr\cot\alpha$ ✓

$$\dot{\vec{r}} = \begin{pmatrix} \dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi \\ \dot{r}\sin\varphi + r\dot{\varphi}\cos\varphi \\ \dot{r}\cot\alpha \end{pmatrix} \checkmark$$

$$\dot{\vec{r}}^2 = \dot{r}^2\cos^2\varphi - 2\dot{r}r\dot{\varphi}\cos\varphi\sin\varphi + r^2\dot{\varphi}\sin^2\varphi + \dot{r}^2\sin^2\varphi + 2\dot{r}r\dot{\varphi}\cos\varphi\sin\varphi + r^2\dot{\varphi}\cos^2\varphi + \dot{r}^2\cot\alpha^2$$

$$= (1+\cot\alpha)\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 \checkmark$$

$$\Rightarrow L = \frac{1}{2} m \left[(1+\cot\alpha)\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 \right] - mgr\cot\alpha \checkmark$$

1. DGL: $\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\left[m r^2 \dot{\varphi}^2 \right] = mr(2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}) = 0 \checkmark$$

2. DGL: $\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} = 0$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\left[m(1+\cot\alpha)\dot{r} \right] - \left[m r\dot{\varphi}^{2} - mg\cot\alpha \right]$$

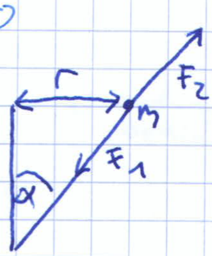
$$= m(1+\cot\alpha)\ddot{r} - m r\dot{\varphi}^2 + mg\cot\alpha = 0 \quad (\checkmark)$$

c) $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ (sonst kein Kegel)

$$\ddot r(1+\cot\alpha) - r\dot\varphi^2 + g\cot\alpha = 0 \quad \wedge \quad r^2\ddot\varphi + 2r\dot r\ddot\varphi = 0$$

$|\dot\varphi|$ muss kleiner sein als λ_0^2, damit $\dot r < 0$

(Für $\dot r < 0$ nähert sich die Punktmasse dem Mittelpunkt)



$$F_1 = \overbrace{mg}^{F_g}\cos\alpha \quad , \quad F_2 = \overbrace{m\dot\varphi^2 r}^{F_{zp}}\sin\alpha$$

$$\Rightarrow F_1 > F_2 \Rightarrow mg\cos\alpha > m\dot\varphi r\sin\alpha \Rightarrow g\cos\alpha > \dot\varphi^2 r\sin\alpha$$

$$\Rightarrow g\cot\alpha > \dot\varphi^2 r \Rightarrow \dot\varphi^2 < \frac{g\cot\alpha}{r} \Rightarrow |\dot\varphi| < \sqrt{\frac{g\cot r}{r}} = \lambda_0$$

Für $|\dot\varphi| < \sqrt{\frac{g\cot\alpha}{r}}$ nähert sich die Masse der Kegelspitze

Nähert schon, kann sie aber nie erreichen → Drehimpuls ist erhalten

3,5/5

David
Loos

$x = r\sin\varphi$
$y = r\cos\varphi$
$z = \underbrace{\frac{h}{2\pi}}_{\lambda}\varphi$

$\Rightarrow \vec{r} = \begin{pmatrix} r\sin\varphi \\ r\cos\varphi \\ \lambda\varphi \end{pmatrix} \Rightarrow \dot{\vec{r}} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi\dot{\varphi} \\ -r\sin\varphi\dot{\varphi} \\ \lambda\dot{\varphi} \end{pmatrix}$

$\Rightarrow |\dot{\vec{r}}| = \sqrt{r^2\dot{\varphi}^2 + \lambda^2\dot{\varphi}^2}$

$\Rightarrow L = T - V = \frac{1}{2}m|\dot{\vec{r}}|^2 - mgz = \frac{1}{2}m(r^2\dot{\varphi}^2 + \lambda^2\dot{\varphi}^2) - mg\lambda\varphi$

$= \frac{1}{2}m\dot{\varphi}^2(r^2+\lambda^2) - mg\lambda\varphi$

b) $\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi} + \lambda^2\dot{\varphi} = m\dot{\varphi}(r^2+\lambda^2) \Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} = m\ddot{\varphi}(r^2+\lambda^2)$

$\frac{\partial L}{\partial\varphi} = -mg\lambda$

c) $\Rightarrow m\ddot{\varphi}(r^2+\lambda^2) + mg\lambda = 0 \Rightarrow \ddot{\varphi} = \underbrace{\frac{-g\lambda}{r^2+\lambda^2}}_{k} \Rightarrow \varphi = -\frac{1}{2}kt^2 + c_1 t + c_2$

$\Rightarrow z = -\frac{1}{2}k't^2 + c_1't + c_2'$ $\Rightarrow$ wie freier Fall, aber mit anderer Konstante

$k' = \frac{\lambda^2 g}{r^2+\lambda^2} = \frac{g}{\underbrace{1+\frac{r^2}{\lambda^2}}_{>1}} \Rightarrow k' < g$

werden durch Anfangsbedingungen bestimmt.

$\Rightarrow$ der Freie Fall wird verlangsamt (abhängig von r und h)

5/5

David Cos

1a) $T = \frac{1}{2}\left(m_1(\dot{x}_1^2 + \underbrace{\dot{y}_1^2}_{=0}) + m_2(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2)\right)$

$= \frac{1}{2}\left(m_1 \dot{x}_1^2 + m_2(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2)\right)$ ✓

$V = g(m_1 \underbrace{y_1}_{=0} + m_2 y_2)$ ✓

$= g m_2 y_2$

$L = T - V = \frac{1}{2}\left(m_1 \dot{x}^2 + m_2(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2)\right) - m_2 y_2 g$ ✓

$| x_1 = x$

b) $y_1 = 0$

$x_2 = x + l\sin\varphi$

$y_2 = -l\cos\varphi$

$q_1 = x \;,\; q_2 = \varphi$?

Jonas
David
Lars

Aufgabe 12

Der einfachheit halber rechnen wir im cgs-System mit $c = 1$ ok :)

a)

x: $L = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + e\phi - e\,\dot{x}\cdot A_x$ (x-Komponente)

$\mathcal{L}$ ist ein Skalar ↯

f, da $\frac{\partial\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}}{\partial\dot{x}} \neq \dot{x}\cdot 2$

entsprechend viele Folgefehler :C

$$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} - e A_x \text{ ff} \Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\ddot{x} - e\dot{A}_x \text{ ff}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = e\frac{\partial \phi}{\partial x} - e\left(\dot{x}\frac{\partial A_x}{\partial x} + \dot{y}\frac{\partial A_y}{\partial x} + \dot{z}\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)$$

Woher kommt das jetzt? ...

$$\Rightarrow m\ddot{x} - e\dot{A}_x - e\frac{\partial\phi}{\partial x} + e\left(\dot{x}\frac{\partial A_x}{\partial x} + \dot{y}\frac{\partial A_y}{\partial x} + \dot{z}\frac{\partial A_z}{\partial x}\right) \text{"="} 0$$

$$E_x = -\frac{\partial\phi}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial t} \quad (✓)$$

$$\left[\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\\ \dot{z}\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\end{pmatrix}\right]_x = (\dot{\vec{r}} \times \vec{B})_x = \dot{y}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) - \dot{z}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) \quad (✓)$$

$$\Rightarrow m\ddot{x} \text{"="} e(\vec{E} + \dot{\vec{r}} \times \vec{B})_x - e\dot{A}_x + e\frac{\partial A_x}{\partial t} + e\Big(\dot{x}\frac{\partial A_x}{\partial x} + \dot{y}\frac{\partial A_y}{\partial x} + \dot{z}\frac{\partial A_z}{\partial x} - \dot{y}\frac{\partial A_y}{\partial x} - \dot{z}\frac{\partial A_z}{\partial x} + \dot{y}\frac{\partial A_x}{\partial y} + \dot{z}\frac{\partial A_x}{\partial z}\Big) = 0 \quad \text{ff}$$

$$\Rightarrow m\ddot{x} \text{"="} e(\vec{E}_x + \dot{\vec{r}} \times \vec{B}) + e\underbrace{\left(-\dot{A}_x + \frac{\partial A_x}{\partial t} + \dot{x}\frac{\partial A_x}{\partial x} + \dot{y}\frac{\partial A_y}{\partial y} + \dot{z}\frac{\partial A_z}{\partial z}\right)}_{=0}$$

?

Das ist nur ein Term

$$\Rightarrow m\ddot{x} \text{"="} e(\vec{E} + \dot{\vec{r}} \times \vec{B})_x$$

$$\Rightarrow m\ddot{x} \text{"="} e(\vec{E} + \dot{\vec{r}} \times \vec{B}) \Rightarrow m\ddot{x} = -e(\vec{E} + \dot{\vec{r}} \times \vec{B})$$

$= \text{Lorentzkraft}$

njoa, das sollte da rauskommen.

4b) $m\ddot{\vec{r}} + e(\vec{E} + \dot{\vec{r}} \times \vec{B}) = 0$, $\vec{r}(0) = 0$, $\dot{\vec{r}}(0) = v_0 \vec{e_z}$

$\vec{E} = E_0 \vec{e_z}$, $\vec{B} = B_0 \vec{e_z}$

$$\Rightarrow \begin{aligned} m\ddot{x} + e\dot{y}B_0 &= 0 \\ m\ddot{y} - e\dot{x}B_0 &= 0 \\ m\ddot{z} + eE_0 &= 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \ddot{z} = -\frac{eE_0}{m} \Rightarrow z = -\frac{eE_0}{2m}t^2 \underbrace{+c_1 t + c_2}_{=0 \text{ wegen Anfangsbedingungen}}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} \ddot{x} + \frac{eB_0}{m}\dot{y} &= 0 \\ \ddot{y} - \frac{eB_0}{m}\dot{x} &= 0 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} \ddot{x} + \omega\dot{y} &= 0 \\ \ddot{y} - \omega\dot{x} &= 0 \end{aligned} \qquad \text{mit } v = \dot{x} \text{ und } u = \dot{y}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} \dot{v} + \omega u &= 0 \\ \dot{u} - \omega v &= 0 \end{aligned}\right\} \left.\begin{aligned} \dot{v} &= -\omega u \\ \dot{u} &= \omega v \end{aligned}\right\} \begin{aligned} u &= -\frac{\ddot{v}}{\omega} \\ v &= \frac{\ddot{u}}{\omega} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} \ddot{v} + \omega^2 v &= 0 \\ \ddot{u} + \omega^2 u &= 0 \end{aligned}\right\} \left.\begin{aligned} v &= Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t} \\ u &= Ce^{i\omega t} + De^{-i\omega t} \end{aligned}\right\} \begin{aligned} x &= A'e^{i\omega t} + B'e^{-i\omega t} + k_1 \\ y &= C'e^{i\omega t} + D'e^{-i\omega t} + k_2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} x(0) &= A' + B' + k_1 = 0 , \quad \dot{x}(0) = i\omega A' - i\omega B' = v_0 \\ y(0) &= C' + D' + k_2 = 0 , \quad \dot{y}(0) = i\omega C' - i\omega D' = 0 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} A' &= \frac{v_0}{i\omega} + B' , \quad B' = \frac{-\frac{v_0}{i\omega} - k_1}{2} \\ C' &= D' , \quad C' = \frac{-k_2}{2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x = -\frac{k_1}{2}(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) + \frac{v_0}{2i\omega}(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}) + k_1 = -k_1\cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega}\sin(\omega t) + k_1$$

$$y = -\frac{k_2}{2}(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) + k_2 = -k_2\cos(\omega t) + k_2$$

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} -k_1\cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t + k_1 \\ -k_2\cos(\omega t) + k_2 \\ -\frac{eE_0}{2m}t^2 \end{pmatrix}$$

Anfangswerte: $k_1 = 0$, $k_2 = 1/\omega$

z-Koordinate wie Freier Fall mit $\frac{eE_0}{m}$ statt g

x- und y-Koordinate „schwingen". Schöner: Es ergibt sich als Trajektorie eine Spirale, etc.

3/5

gute Idee :)