# HM 3 - Übungsblatt 3

## Aufgabe 11

(I) $f_1(x+iy) = e^{|x|}(\cos|y| + i\sin|y|)$

Frage: Wo ist $f$ holomorph?

Fallunterscheidung der Beträge:

CRD: $f(z) = u + iv$
$\Rightarrow u_x = v_y, \; u_y = -v_x$

**1. Fall:** $x>0, y>0$

$\Rightarrow f_1(x,y) = e^x(\cos(y) + i\sin(y)) = \underbrace{e^x\cos(y)}_{u(x,y)} + i\underbrace{e^x\sin(y)}_{v(x,y)}$

$\Rightarrow u_x = e^x\cos(y)$
$u_y = -e^x\sin(y)$
$v_x = e^x\sin(y)$
$v_y = e^x\cos(y)$

$\Rightarrow u_x = v_y \Leftrightarrow e^x\cos(y) = e^x\cos(y)$ ✓
$\Rightarrow u_y = -v_x \Leftrightarrow -e^x\sin(y) = -e^x\sin(y)$ ✓

$\Rightarrow f_1$ holomorph auf $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) > 0, \mathrm{Im}(z) > 0\}$

**2. Fall:** $x>0, y<0$

$\Rightarrow f_1(x+iy) = e^x(\cos(y) + i(-\sin(y))) = \underbrace{e^x\cos(y)}_{u} + i\underbrace{(-e^x\sin(y))}_{v}$

$\Rightarrow u_x = e^x\cos(y)$
$u_y = -e^x\sin(y)$
$v_x = -e^x\sin(y)$
$v_y = -e^x\cos(y)$

$\Rightarrow u_x = v_y$
$\Leftrightarrow e^x\cos(y) = -e^x\cos(y)$
$\Rightarrow y = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ ↯

Da dies keine offene (und wegzusammenhängende) Menge ist, ist $f_1$ auf $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) > 0, \mathrm{Im}(z) < 0\}$ nicht holomorph

**3. Fall:** $x<0, y>0$

$\Rightarrow f_1(x+iy) = e^{-x}(\cos(y) + i\sin(y)) = \underbrace{e^{-x}\cos(y)}_{u} + i\underbrace{e^{-x}\sin(y)}_{v}$

$\Rightarrow u_x = -e^{-x}\cos(y)$
$u_y = -e^{-x}\sin(y)$
$v_x = -e^{-x}\sin(y)$
$v_y = e^{-x}\cos(y)$

$\Rightarrow u_x = v_y$
$\Leftrightarrow -e^{-x}\cos(y) = e^{-x}\cos(y)$
$\Rightarrow y = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow$ keine offene Menge $\Rightarrow$ $f_1$ nicht holomorph in $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) < 0, \mathrm{Im}(z) > 0\}$

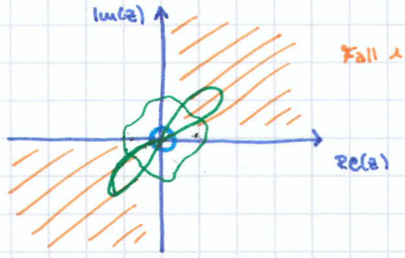
**4. Fall:** $x<0, y<0$

$f_1(x+iy) = e^{-x}(\cos(y) + i(-\sin(y))) = \underbrace{e^{-x}\cos(y)}_{u} + i\underbrace{(-e^{-x}\sin(y))}_{v}$

$\Rightarrow u_x = -e^{-x}\cos(y)$
$u_y = -e^{-x}\sin(y)$
$v_x = e^{-x}\sin(y)$
$v_y = -e^{-x}\cos(y)$

$\Rightarrow u_x = v_y \Leftrightarrow -e^{-x}\cos(y) = -e^{-x}\cos(y)$ ✓
$\Rightarrow u_y = -v_x \Leftrightarrow -e^{-x}\sin(y) = -e^{-x}\sin(y)$ ✓
$\Rightarrow f_1$ holomorph auf $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) < 0, \mathrm{Im}(z) < 0\}$

In $x=0$ oder $y=0$ sind $u$ bzw. $v$ nicht reell differenzierbar, also $f_1$ nicht holomorph auf den Koordinatenachsen




$f: D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z_0 \in D$
Gebiet
$f$ holomorph in $z_0$,
falls es ein Gebiet $E \subset D$ gibt mit $z_0 \in E$ und $f \in H(E)$


$f_1$ komplex diff'bar im Ursprung, aber dort nicht holomorph

(II) $f_2(z) = Re(z)$

Setze $z = x+iy \Rightarrow Re(z) = x$

$\Rightarrow f_2(x+iy) = \underbrace{x}_{u} + i \cdot \underbrace{0}_{v}$

CRD $\Rightarrow u_x = 1$, $u_y = 0$ ↯ $\Rightarrow f_2$ nirgends holomorph in $\mathbb{C}$
$v_x = 0 = v_y$

(III) $f_3(z) = \bar{z}$

Setze $z = x+iy \Rightarrow \bar{z} = x - iy$

$\Rightarrow f_3(x+iy) = \underbrace{x}_{u} + i\underbrace{(-y)}_{v}$

CRD $\Rightarrow u_x = 1$, $u_y = 0$ $\Rightarrow u_x = v_y \Leftrightarrow 1 = -1$ } ↯ $\Rightarrow f_3$ nirgends holomorph in $\mathbb{C}$
$v_x = 0$, $v_y = -1$ $\quad u_y = -v_x \Leftrightarrow 0 = 0$

(IV) $f_4(z) = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{1}{z}$

$z \mapsto z$ ist holomorph auf ganz $\mathbb{C}$
$\Rightarrow z \mapsto \frac{1}{z}$ ist als Verkettung holomorpher Funktionen holomorph auf $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$

(V) $f_5(x+iy) = \underbrace{x^3 - 3xy^2}_{u} + i\underbrace{(3x^2y - y^3)}_{v}$

$u_x = 3x^2 - 3y^2$, $u_y = -6xy$ $\Rightarrow u_x = v_y$ ✓ $\Rightarrow f \in H(\mathbb{C})$ $f$ ist eine ganze Funktion
$v_x = 6xy$, $v_y = 3x^2 - 3y^2$ $\quad u_y = -v_x$ ✓

(VI) $f_6(x+iy) = \underbrace{\cos(x)\sin(y)}_{u} + i\underbrace{(-\sin(x)\cos(y))}_{v}$

$u_x = -\sin(y)\sin(y)$, $u_y = \cos(x)\cos(y)$ $\Rightarrow u_x = v_y \Leftrightarrow 2\sin(x)\sin(y) = 0$
$v_x = \cos(x)\cos(y)$, $v_y = -\sin(x)\sin(y)$ $\Leftrightarrow \sin(x) = 0 \vee \sin(y) = 0$
$\Leftrightarrow x = k\pi \vee y = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
Diese Menge ist nicht offen, also ist $f_6$ nirgends holomorph in $\mathbb{C}$

## Aufgabe 12

(I) Gesucht: alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\cos(z) = 1$ (*)

Lösung: Wir wissen: $\sin(z)$ hat nur die reellen Nullstellen bei $z = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

Es gibt $\sin^2(z) + \cos^2(z) = 1$

$\Rightarrow$ (*) kann nur eintreten für $z = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

Es ist $\cos((2k+1)\pi) = -1$, also als Lösungsmenge $\mathbb{L} = \{ z = 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \}$

(II) $u(x,y) = x^3 - 3xy^2 - 2y$

u harmonisch: $\Delta u = \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x}(3x^2 - 3y^2) + \frac{\partial}{\partial y}(-6xy - 2)$

$= 6x - 6x = 0 \quad \Rightarrow$ u harmonisch

Harmonisch konjugierte Funktion v:

Damit f holomorph sein kann, müssen die CRD erfüllt sein.

$\Rightarrow u_x = 3x^2 - 3y^2$
$\quad u_y = -6xy - 2$

$\Rightarrow v_x = 6xy + 2$
$\quad v_y = 3x^2 - 3y^2$

Fasse diese Ableitungen als Vektorfeld im $\mathbb{R}^2$ auf und bestimme ein Potential.

① $v = \int v_x \, dx = 3x^2y + 2x + c(y)$ $\qquad Q = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$

② $v_y = 3x^2 + c_y(y) \overset{!}{=} 3x^2 - 3y^2$

$\Rightarrow c_y(y) = -3y^2$

③ $c(y) = \int c_y(y) \, dy = -y^3 + c$

④ $v(x,y) = 3x^2y + 2x - y^3$

$\Rightarrow f(x+iy) = (x^3 - 3xy^2 - 2y) + i(3x^2y + 2x - y^3)$

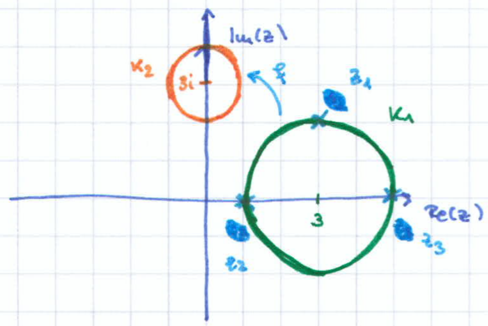
$\Rightarrow f(z) = \ldots$

## Aufgabe 13

$$f(z) = \frac{(2-3i)z - 8 + 21i}{-z + 7}$$

$K_1 = \{ z \in \mathbb{C} : |z - 3| \leq 2 \}$

$K_2 = \{ z \in \mathbb{C} : |z - 3i| \leq 1 \}$



zz: $f(K_1) = K_2$

Beweis: $f$ ist Möbiustransformation mit $a = 2-3i$, $b = -8+21i$, $c = -1$, $d = 7$

Es genügt zu zeigen: Die Bilder dreier Punkte auf $\partial K_1$ liegen auf $\partial K_2$ und der Mittelpunkt von $K_1$ muss in $K_2$ abgebildet werden.

Wähle $z_2 = 1$, $z_3 = 5$, $z_1 = 3+2i$

So liegen $z_1, z_2, z_3$ so, dass die Menge $K_1$ links liegt.

$f(z_1) = f(3+2i) = \frac{-4+18i}{5}$

$\Rightarrow \left| f(z_1) - 3i \right| = \left| -\frac{4}{5} + \frac{18}{5} i \right| = 1$

$\Rightarrow f(z_1) - 3i \in \partial K_2$

$f(z_2) = f(1) = \frac{-6+18i}{6} = -1 + 3i$

$\Rightarrow |f(z_2) - 3i| = 1 \Rightarrow f(z_2) - 3i \in \partial K_2$

$f(z_3) = f(5) = \frac{2+6i}{2} = 1 + 3i$

$\Rightarrow |f(z_3) - 3i| = 1 \Rightarrow f(z_3) - 3i \in \partial K_2$

$f(3) = \frac{-2+12i}{4} = -\frac{1}{2} + 3i$

$\Rightarrow |f(3) - 3i| = \frac{1}{2} \leq 1 \Rightarrow f(3) \in K_2$ und Mittelpunkt

HöMa Globalübung – Blatt 3

**Aufgabe 14** Wann ist $\exp(z)$ reell?

(I)

$e^z = e^{a+bi} = e^a(\cos(b) + i\sin(b))$ ist reell $\Leftrightarrow$ $\sin(b) = 0 \Leftrightarrow b = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$e^z$ reell $\Leftrightarrow z = a + ik\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

(II) $(2i)^{2i}$ | $z^w = \exp(w \log(z))$

$\Rightarrow \log(2i) = \ln(2) + i\frac{\pi}{2} + 2k\pi i$ | $\log(z) = \ln|z| + i\arg(z) + 2k\pi i$ $\boxed{k \in \mathbb{Z}}$

$(2i)^{2i} = \exp(2i \cdot \log(2i)) = \exp\left(2i\left(\ln(2) + i\frac{\pi}{2} + 2k\pi i\right)\right) = \exp(2i\ln(2) - \pi - 4k\pi)$

$= e^{-(4k+1)\pi}\left(\cos(2\ln(2)) + i\sin(2\ln(2))\right)$

---

$(\log(i))^{\log(i)}$ | $\log(i) = 0 + i\frac{\pi}{2} + 2k\pi i$

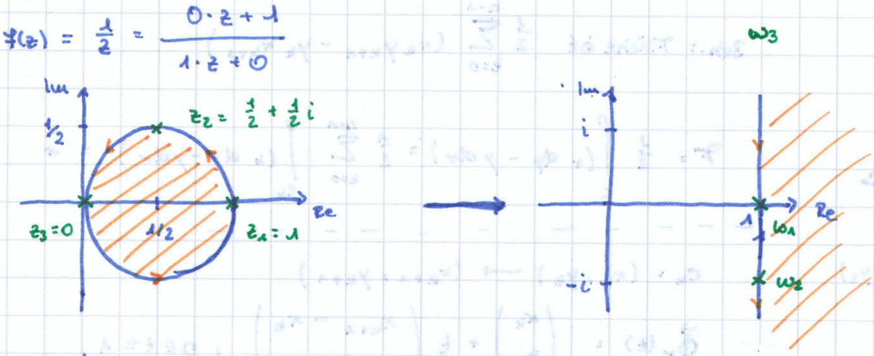
$= \exp(\log(i) \cdot \log(\log(i)))$ | $\log(\log(i)) = \ln\left|\left(\frac{1}{2} + 2k\right)\pi\right| + i\frac{\pi}{2} + 2m\pi i$, $m \in \mathbb{Z}$

$= \exp\left(\left(i\frac{\pi}{2} + 2n\pi i\right)\left(\ln\left|\left(\frac{1}{2} + 2k\right)\pi\right| + \left(2m + \frac{1}{2}\right)\pi i\right)\right)$

$= \exp\left(-\left(2n + \frac{1}{2}\right)\left(2m + \frac{1}{2}\right)\pi^2 + i\left(\left(2n + \frac{1}{2}\right)\ln\left|\left(\frac{1}{2} + 2k\right)\pi\right|\right)\right)$, $k, m, n \in \mathbb{Z}$

**Aufgabe 15**

(I) $f(z) = \frac{1}{z} = \frac{0 \cdot z + 1}{1 \cdot z + 0}$

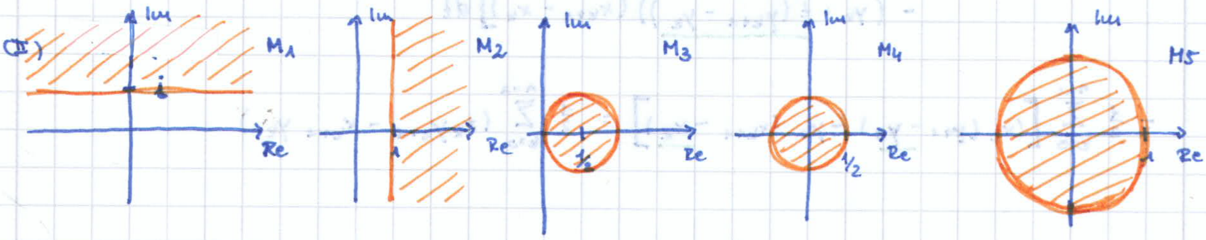



$w_1 = \frac{1}{z_1} = 1$

$w_2 = \frac{1}{\frac{1}{2}(1+i)} = \frac{2}{1+i} = \frac{2(1-i)}{2} = 1 - i$

$w_3 = \frac{1}{z_3} = \infty$

(II)




$f_1: M_1 \longrightarrow M_2$ $\qquad f_2: M_2 \longrightarrow M_3$ $\qquad f_3: M_3 \longrightarrow M_4$

$f_1(z) = -iz = \frac{-iz + 0}{0z + 1}$ $\qquad f_2(z) = \frac{1}{z}$ $\qquad f_3(z) = z - \frac{1}{2}$

$f_4: M_4 \longrightarrow M_5$ $\qquad f_5: M_1 \longrightarrow M_5$

$f_4(z) = 2z$ $\qquad f_5(z) = f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1 = 2\left(\frac{1}{-iz} - \frac{1}{2}\right) = \frac{2i}{z} - 1 = \frac{2i - z}{z} = \frac{-z + 2i}{\ldots}$

$$f(z) := \frac{(1+2i)z+4}{z+1-2i} = \omega \qquad \text{Gesucht } f\circ f \text{ und } f^{-1}$$

$$\Leftrightarrow \quad \omega\cdot z + (1+2i)\omega = (1+2i)z + 4$$

$$\Leftrightarrow \quad z(\omega - (1-2i)) = 4 - (1-2i)\omega$$

$$\Leftrightarrow \quad z = \frac{-(1-2i)\omega + 4}{\omega - (1+2i)} =: f^{-1}(\omega)$$

zu $f\circ f$:

$$(f\circ f)(z) := \frac{(1+2i)\frac{(1+2i)z+4}{z+(1-2i)} + 4}{\frac{(1+2i)z+4}{z+(1-2i)} + 1-2i} = \frac{(1+2i)((1+2i)z+4) + 4(z+(1-2i))}{(1+2i)z+4 + (1-2i)(z+(1-2i))}$$

$$= \frac{(-3+4i)z + 4 + 8i + 4z + 4 - 8i}{(1+2i)z + 4 + (1-2i)z - 3 - 4i} = \frac{(1+4i)z + 8}{2z + 1 - 4i}$$

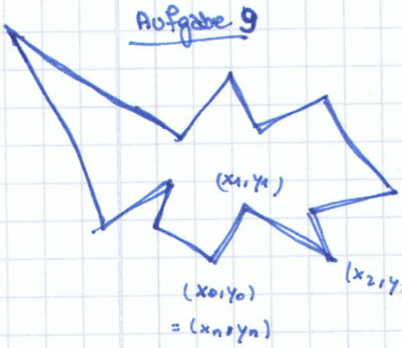
mit Matrix:

$$M_f = \begin{pmatrix} 1+2i & 4 \\ 1 & 1-2i \end{pmatrix} \qquad M_{f^{-1}} = \begin{pmatrix} 1-2i & -4 \\ -1 & 1+2i \end{pmatrix}$$

$$M_{f^2} = \begin{pmatrix} 1+4i & 8 \\ 2 & 1-4i \end{pmatrix}$$

## Blatt 2

### Aufgabe 9




Beh.: Fläche ist $\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}(x_k y_{k+1} - y_k x_{k+1})$

$$F = \frac{1}{2}\int_C (x\,dy - y\,dx) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{C_k}(x\,dy - y\,dx) = *$$

$$C_k : (x_k, y_k) \longrightarrow (x_{k+1}, y_{k+1})$$

$$\vec{\Phi}_k(t) = \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} + t\underbrace{\begin{pmatrix} x_{k+1} - x_k \\ y_{k+1} - y_k \end{pmatrix}}_{\vec{\Phi}_k'(t)}, \quad 0 \le t \le 1$$

$$* = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^1 \Big[(x_k + t(x_{k+1} - x_k))(y_{k+1} - y_k) - (y_k + t(y_{k+1} - y_k))(x_{k+1} - x_k)\Big]\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\Big[x_k(y_{k+1} - y_k) - y_k(x_{k+1} - x_k)\Big] = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}(x_k y_{k+1} - x_{k+1} y_k)$$