7.1. $h(x) = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{3}x^2 - x + \frac{1}{6}$

15,5 / 22P.

David
Lars
Jonah
Gruppe 3

a) $I = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

2/4

$\lim_{x \to -\frac{1}{2}} h(x) = \frac{35}{48}$

$\lim_{x \to \frac{1}{2}} h(x) = -\frac{11}{48}$

An den Rändern des Intervalls hat sich das Vorzeichen geändert
$\Rightarrow$ in I gibt es eine Nullstelle ✓ ~~d.h.~~ es gibt mindestens eine Nullstelle

und gibt es genau eine?

b) kontrahierende Selbstabbildung:

4/6

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x-y| \quad 0 \leq L < 1$$

$$L = \sup_{x \in I} |f'(x)|$$

Wie sieht die Fixpunktiteration aus? −2

$$h'(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x - 1 = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{11}{9} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{11}{9} = -\frac{39}{72}$$

(✓)

$$\Rightarrow L = \left|-\frac{39}{72}\right| = \frac{13}{24}$$

(✓) Zeige Selbstabbildung. Wieso haben wir eine Selbstabbildung?

$\Rightarrow$ h ist kontrahierende Selbstabbildung mit Kontraktionsfaktor $\frac{13}{24}$

Banach: h konvergiert für jeden Startwert aus I gegen den Fixpunkt x^* und hat in I nur eine Fixpunkt

c) a priori: $|x_N - x^*| \leq \frac{L^N}{1-L} |x_1 - x_0| \overset{!}{=} 10^{-3}$ ✓ $x_0 = 0$

1,5/2

$$\left(\frac{13}{24}\right)^N \cdot \frac{24}{11} \underbrace{|x_1|}_{\leq \frac{1}{2}} = 10^{-3}$$

$x_1 = f(x_0) = \frac{1}{6}$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{13}{24}\right)^N \geq \frac{11}{12} 10^{-3}$$

(✓)

$$N \gtrless 11{,}41$$

(✓)

$$\rightarrow N = 12$$

7.2. a) $z \in [0.5, 0.62]$ $x + \ln x = 0$

4/4

$g(x) := x + \ln(x)$

$g'(x) = 1 + \frac{1}{x}$ für $x > 0$ ist $g(x)$ streng monoton steigend ✓

$\lim_{x \to 0,5} g(x) = \frac{1}{2} + \ln(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} - \ln 2 \approx -0,193 < 0$ ✓

$\lim_{x \to 0,62} g(x) = 0,62 + \ln(0,62) \approx 0,142 > 0$ ✓

$\Rightarrow$ Nullstelle im Intervall $[0.5, 0.62]$

Da $g(x)$ außerdem str. mon. wachsend ist

kann es keine weiteren NS geben ✓

b) $g_1(x_t) = x_{t+1} = -\ln(x_t)$ $g_2(x_t) = e^{-x_t} = x_{t+1}$ $g_3(x_t) = \frac{1}{2}(x_t + e^{-x_t})$

4/6

$g_1'(x_t) = -\frac{1}{x_t}$

$L_1 = \sup_{x_t [0.5, 0.62]} |-\frac{1}{x_t}| = 2$ ✓ $> 1 \Rightarrow$ keine kontrahierende Selbstabbildung

$\Rightarrow$ nicht geeignet ✓

$g_2' = -e^{-x_t}$ $g_3' = \frac{1}{2}(1 - e^{-x_t})$

$\Rightarrow L_2 \approx 0,607 < 1$ ✓ $L_3 \approx 0,231 < 1$ ✓ $\Rightarrow g_2, g_3$ kontr. Selbstabb.

Kontraktion ✓ Selbstabbildung ?

g_2 löst die Gleichung $x + \ln(x) = 0$ exakt

da $e^{-x_t} + \ln(e^{-x_t}) = 0$

$\Leftrightarrow e^{-x_t} = x_t$ $| \ln$ ok und g_3?

$\Leftrightarrow -x_t = \ln|x_t| \Leftrightarrow x_t + \ln|x_t| = 0$

Wegen der a priori Fehlerabschätzung

$\| x^{(k)} - x^* \| \leq \frac{L^k}{1-L^k} \| x^{(1)} - x^{(0)} \|$ lässt sich sagen,

dass für kleinere L das Verfahren schneller

konvergiert. Damit wird die 3. Methode am schnellsten

Ergebnisse liefern ✓