KET Nr. 1

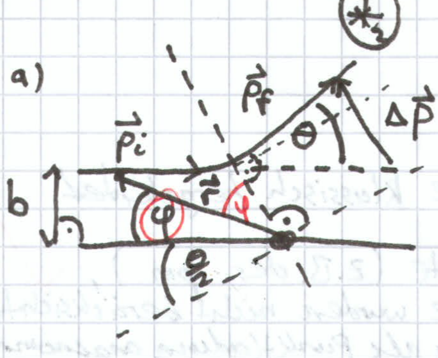
Σ 15/16

7,5/8

David Rolf
Lois . Kolk

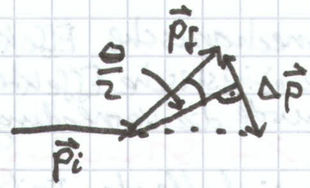
Falsch eingeworfen
↳ −100 P

a)



$$\Delta\vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_i$$

$$|\vec{p}_f| = |\vec{p}_i| = p$$



1,5/2 $\Rightarrow \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\Delta p}{2p} \Leftrightarrow \Delta p = 2p\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$ ✓

(*1) φ sollte eig. bis zur Symmetrie-Achse gehen, deswegen gibt es eine konstante Verschiebung um $\frac{\theta}{2}$.

(*2) Der Winkel θ sollte doppelt so groß sein wie $\frac{\theta}{2}$, das ist nur schlecht gezeichnet. (Aus Symmetriegründen)

(*3) $\varphi_f(\theta_f) = \pi - \theta \quad (t \to \infty)$

$\varphi_i(\theta_i) = 0 \quad (t \to -\infty)$

b) Nur $\vec{F}$ in Richtung der Symmetrie-Achse

$$\Rightarrow F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{zZe^2}{r^2}\cdot\sin\left(\varphi + \frac{\theta}{2}\right) \quad (*1)$$

$$\Rightarrow \Delta p = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} zZe^2 \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin\left(\varphi + \frac{\theta}{2}\right)}{r^2}\,dt$$

mit einem φ ok

1/1

c) $\sin\varphi = \frac{b}{r} \Leftrightarrow b = r\sin\varphi$

i) $\vec{L} = \vec{r}\times\vec{p} \Rightarrow L = r \cdot p \cdot \sin\varphi \Rightarrow L = pb$ ✓

ii) $\vec{L} = \vec{r}\times\vec{p} = \vec{r}\times(m\cdot\dot{\vec{r}}) = m\vec{r}\times\dot{\vec{r}} = m\vec{r}\times(\dot{r}\vec{e_r} + r\dot{\varphi}\vec{e_\varphi})$

$\Leftrightarrow L = mr^2\dot{\varphi}$

$\Rightarrow mr^2\dot{\varphi} = pb \Leftrightarrow r^2 = \frac{pb}{m\dot{\varphi}} = \frac{vb}{\dot{\varphi}}$ ✓ 2/2 (*3)

d) $$\Delta p = \frac{zZe^2}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin\left(\varphi + \frac{\theta}{2}\right)}{pb}\cdot m\frac{d\varphi}{dt}\,dt = \frac{zZe^2 m}{4\pi\varepsilon_0 pb}\int_{\varphi_i(\theta_i)}^{\varphi_f(\theta_f)} \sin\left(\varphi + \frac{\theta}{2}\right)d\varphi$$

$$= \frac{zZe^2 m}{4\pi\varepsilon_0 pb}\left[-\cos(\varphi)\right]_0^{\pi-\theta} = \frac{zZe^2 m}{4\pi\varepsilon_0 pb}\left[\underbrace{-\cos\left(-\frac{\theta}{2}+\pi\right)}_{=+\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)} + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]$$

$+\frac{\theta}{2}$

$$= \frac{2zZe^2 m}{4\pi\varepsilon_0 pb}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$$ ✓

gleichsetzen: $2p\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{2zZe^2 m}{4\pi\varepsilon_0 pb}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$

$$\Leftrightarrow b = \frac{zZe^2\cdot 2m}{8\pi\varepsilon_0 p^2}\cot\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{zZe^2}{8\pi\varepsilon_0 E}\cot\left(\frac{\theta}{2}\right)$$ ✓ $\left(\text{mit } E = \frac{p^2}{2m}\right)$ 2/2

e) $$\left|\frac{db}{d\theta}\right| = \frac{zZe^2}{8\pi\varepsilon_0 E}\cdot\left|-\frac{1}{2}\,\frac{\sin^2\frac{\theta}{2} + \cos^2\frac{\theta}{2}}{\sin^2\frac{\theta}{2}}\right| = \underbrace{\frac{zZe^2}{16\pi\varepsilon_0 E}}_{\lambda}\cdot\frac{1}{\sin^2\frac{\theta}{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\lambda}{\sin^2\frac{\theta}{2}}\cdot\frac{2\lambda}{\underbrace{\sin\theta}_{=2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}}\cdot\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}} = \frac{\lambda^2}{\sin^4\frac{\theta}{2}}$$

1/1

Nr. 2 $\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{d\sigma}{d\Omega}\Big|_{Ruth} \cdot \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)$

a) Die Rutherfordsche Formel wurde klassisch hergeleitet

↳ quantenmechanische Effekte (z.B. der Spin), sowie relativistische Effekte wurden nicht berücksichtigt. Zudem wurde die Kernladung als Punktladung angenommen.

+ [illegible]

1.5

b) Der Spin des einfallenden Teilchen wird durch die Spin-Bahn-Kopplung mit berücksichtigt (z.B. Elektron: Spin $\frac{1}{2}$)
(Die Spin-Bahn-Kopplung kommt durch das mit dem Spin verbundenen magnetischen Moment).

1

[illegible] !

c) Durch die Einführung des Formfaktors

$$F(\vec{q}) = \int d\vec{r} \exp\left(\frac{i}{\hbar}\vec{q}\cdot\vec{r}\right) \rho(\vec{r})$$

wird die Ladungsverteilung $\rho(\vec{r})$ mit berücksichtigt.
↳ Die Annahme einer Punktladung wird fallengelassen:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right) = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Mott} \cdot |F(\vec{q})|^2$$

1

d) $\rho(\vec{r}) = \rho(|\vec{r}|) = \rho(r) \Rightarrow$ Kugelsymetrische Ladungsverteilung

$$\Rightarrow F(\vec{q}) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty} r^2 dr \sin\theta d\theta d\varphi\, \rho(r) \exp\left(\frac{i}{\hbar}\vec{q}\cdot\vec{r}\right)$$

$$= 4\pi \int_0^{\infty} dr\, r^2 \rho(r) \frac{\sin(qr/\hbar)}{qr} \cdot \hbar = F(q) \quad (q = |\vec{q}|)$$

Gut!

2

e) $\rho(r) = \rho_0 \Theta(r_0 A^{\frac{1}{3}} - r)$ → Ladungsdichte entspricht Kugel mit homogener Ladungsverteilung

$$\Rightarrow F(q) = \frac{4\pi\hbar}{q} \int_0^{r_0 A^{\frac{1}{3}}} \rho_0\, r \sin\left(\frac{qr}{\hbar}\right) dr$$

$$= \frac{4\pi\hbar\rho_0}{q}\left(-r\cos(qr/\hbar)\frac{\hbar}{q}\Big|_0^{r_0A^{\frac{1}{3}}} + \frac{\hbar}{q}\int_0^{r_0A^{\frac{1}{3}}} \cos(qr/\hbar)\,dr\right)$$

$$= \frac{4\pi\hbar^2\rho_0}{q^2}\left(-r_0A^{\frac{1}{3}}\cos(qr_0A^{\frac{1}{3}}/\hbar) + \sin(qr_0A^{\frac{1}{3}}/\hbar)\frac{\hbar}{q}\right)$$

$$= \frac{4\pi\hbar^2\rho_0}{q^3}\left(\hbar\sin(qr_0A^{\frac{1}{3}}/\hbar) - r_0A^{\frac{1}{3}} q\cos(qr_0A^{\frac{1}{3}}/\hbar)\right)$$

⇒ Der Formfaktor ist eine "Oszillierende Gaußkurve".

2

~~[illegible]~~ ?

7.5 / 8