Gruppe 3

Lars Kolk
David Rolf
Jonah Blank

Blatt 3 Numerik

10 P. / 14 P.

11.5

3.1. $I(f) = \int_0^1 e^x + 1 \, dx = e$

4 ~~2.5~~ / 4

a) 2 Knoten: $\frac{b-a}{2}\left(f(a) + f(b)\right) = I^{(1)}(f)$ ✓

Knoten ① ②

$I^{(1)}_{[0,1]}(e^x+1) = \frac{1}{2}\left(2 + e + 1\right) = \frac{1}{2}(3+e)$

$\frac{|I(f) - I^{(1)}(f)|}{|I(f)|} = \left|\frac{\frac{1}{2}e - \frac{3}{2}}{e}\right| = \left|\frac{e-3}{2e}\right| \approx 0{,}83$

0,0519

3. Knoten $\frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right)$ ✓ (Simpson

$I^{(2)}_{[0,1]}(e^x+1) = \frac{1}{6}\left(2 + 4(\sqrt{e}+1) + e + 1\right)$ ✓

$= \frac{1}{6}\left(7 + 4\sqrt{e} + e\right)$ ✓

rel. Fehler: $\left|\frac{e - \frac{7+4\sqrt{e}+e}{6}}{e}\right| \approx 2{,}1$ [illegible] $\times 1$[illegible]

b) 1 Knoten: $I^{(0)}_{[0,1]}(e^x+1) = 1 + \sqrt{e}$ ✓

3/4

rel Fehler: $\left|\frac{e - 1 - \sqrt{e}}{e}\right| \approx 0{,}025$ ✓

3 Knoten: $I^{(2)}_{[1,0]}(e^x+1) = \frac{1}{3}\left(3 + \sqrt[4]{e} - \sqrt{e} + \sqrt[4]{e^3}\right)$ f

2· 2·

$= 1 + \frac{1}{3}\left(2\cdot\sqrt[4]{e} + \sqrt[4]{e^2} + 2\cdot\sqrt[4]{e^3}\right)$

rel: $\left|\frac{e - 1 - \frac{1}{3}\left(\sqrt[4]{e} + \sqrt[4]{e^2} + \sqrt[4]{e^3}\right)}{e}\right| \approx 0{,}013$

2/2

c) Simpson $I^{(2)}(f)$ geschlossen

$\xi = 1$ da e^x maximal bei 1 in $[0,1]$

Absch: $\frac{(b-a)^5}{2880} f^{(4)}(\xi)$ ✓

$\Rightarrow \frac{1}{2880} e \approx 0{,}00094 > 3{,}79 \times 10^{-4}$

Die Abschätzung liefert nur einen maximalen Wert im Intervall $[0,1]$ ist aber

3.2 $I^{(n)}_{[-1,1]}(f) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i f(x_i)$ $x \in \cancel{[-1,1]}$ $[-1,1]$

0.5/2

x_i: Knoten

und welche Knoten?

Transformation?

$$I^{(n)}_{[a,b]}(f) = \underbrace{\frac{b-a}{2} \sum_{i=0}^{n} \alpha_i}_{\text{Gewichte}} \underset{\text{als}}{f(x_i)}$$

Die Gewichte ändern sich um den Faktor $\frac{b-a}{2}$ ok.

3.3 $I^{num}(f) = \frac{4}{5} f\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{6}{5} f\left(\frac{1}{3}\right) \to \int_{-1}^{1} f \, dx$

2/2

Transformationssatz

$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$

$; \varphi[-1,1] \to [a,b]$

Transformation von $[-1,1] \to [a,b]$:

$\varphi(t) = \frac{a+b}{2} + t\,\frac{b-a}{2}$

$-1 \leq t \leq 1$

a) $f(x) = ax+b$: $\int_{-1}^{1} ax+b \, dx = 2b$ ✓

$$I^{num}(ax+b) = \frac{4}{5}\left(-\frac{1}{2}a+b\right) + \frac{6}{5}\left(\frac{1}{3}a+b\right)$$

$$= \frac{4+6}{5} b = 2b$$ ✓ q.e.d.

b) $f(x) = ax^2+bx+c$

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \frac{2a}{3} + 2c$$ ✓

$$I^{num}(f) = \frac{4}{5}\left(\frac{a}{4} - \frac{b}{2} + c\right) + \frac{6}{5}\left(\frac{a}{9} + \frac{b}{3} + c\right)$$

$$= \frac{4}{15}a + 2c$$ ⚡ Für quadratische Funktion ✓

gilt die Quadraturformel nicht.

ok.

~~Bem.: Aufgrund der Linearität des Integrals & der obigen Quadraturformel genügt es die Exaktheit für $f = \{x^i\}$ Monome nachzuweisen~~