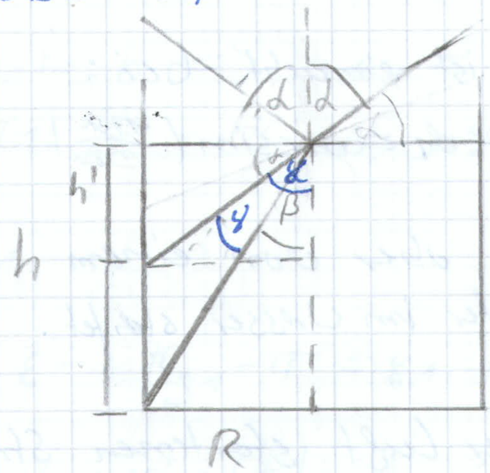
Lars Kolk
Jonas Blank
David Rolf

18 / 20

Aufgabe 49)



$\tan\beta = \frac{R}{h} \approx \sin\beta \approx \beta \iff R = \beta h$ (I)

$\tan\alpha = \frac{R}{h'} \approx \sin\alpha \approx \alpha$ $R = \alpha h'$ (II)

$\frac{\alpha}{\beta} \approx \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{n_2}{n_1}$ (III) $\iff h' = \frac{\beta}{\alpha} h$

mit (III): $h' \approx \frac{n_1}{n_2} h$ ✓

≈ 7.5 cm.

II)

~~Ber.~~ Knickung: Winkel: $\alpha - \beta$

$\arctan\left(\frac{R}{h'}\right) - \arctan\left(\frac{R}{h}\right) = \gamma$

$= 21{,}31^0 \approx \gamma$ f

b)

Form des Glases von oben

das erklärt noch nicht, warum er nicht kleiner erscheint.

Da die Lichtstrahlen sich unterschiedlich lange im Wasser befinden und im unterschiedlichen Winkel auf die Grenzfläche treffen, erscheint der Stift vergrößert & versetzt (✓)

c)

Totale Reflektion ist erreicht bei:

$\sin \alpha_1 = \frac{n_1}{n_2} \iff \alpha_1 = \arcsin\left(\frac{n_1}{n_2}\right)$

Dabei geht man aber von einem Lichtstrahl aus, der im Wasser startet.

Für einen in der Luft startenen Strahl gilt:

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)} \iff \sin \alpha = \frac{n_2}{n_1} \sin \beta$$

$$\arcsin\left(\frac{n_2}{n_1} \sin \beta\right) = \alpha$$

$$\beta = 90^\circ - \arcsin\left(\frac{1}{1.33}\right)$$

$$\Rightarrow \alpha = \arcsin\left(1.33 \cdot \sin\left(90^\circ - \arcsin\left(\frac{1}{1.33}\right)\right)\right)$$

$$\approx 61.267^\circ$$ ✓ und darüber (bis $\alpha = 90^\circ$).

5/6

Aufgabe 50

$R\sin(\alpha_1) = b \Rightarrow \alpha_1 = \arcsin(\frac{b}{R})$

$\sin(\alpha_1)\frac{n_1}{n_2} = \sin\beta_1 \Rightarrow \beta_1 = \arcsin(\frac{b}{R}\frac{n_1}{n_2})$

$\beta_3 = \alpha_1$

$\alpha_1 + 2\varepsilon - 2\beta_3 - \pi = \delta_1$

$\Rightarrow \delta_1 = 2\arcsin(\frac{b}{R}) + \pi - 4\arcsin(\frac{n_1}{n_2}\frac{b}{R})$

$\delta_2 = 6\arcsin(\frac{b}{R}\frac{n_1}{n_2}) - 2\arcsin(\frac{b}{R})$ ✓

b) setze $\frac{b}{R} = x$

$$\frac{d\delta_1}{dx} = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} \quad \frac{4\frac{n_1}{n_2}}{\sqrt{1+(\frac{n_1}{n_2})^2 \cdot x^2}}$$

$$\frac{d\delta_2}{dx} = \frac{-2}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{6\frac{n_1}{n_2}}{\sqrt{1-(\frac{n_1}{n_2}x)^2}}$$

$$\frac{a^2}{1-x^2} - \frac{b^2\frac{n_1}{n_2}}{1-(\frac{n_1}{n_2}x)^2} = 0 \Leftrightarrow a^2(1-\frac{n_1}{n_2}x)^2 - b(1-\frac{n_1}{n_2})^2(1-x^2)$$

$$\Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{b^2}{b^2-a^2} - \frac{a^2(\frac{n_2}{n_1})^2}{b^2-a^2}} \qquad \frac{n_2}{n_1} = 1{,}33$$

δ_1: $a = 2$, $b = -4$

$\delta_{1,1}$: $13\cancel{8}7{,}5^0$ ✓ $\delta_{1,2}$: $\cancel{222}\,222{,}5^0$

δ_2: $a = -2$ $b = 6$

$x \approx \pm 0{,}95$; $\delta_{2,1} = 125{,}9^0$, $\delta_{2,2} = 129{,}9^0$ ✓

$180^0 - \delta_{1,1} = 47{,}5^0$, $180^0 - \delta_{kin} = 50{,}1$

Man findet $\tilde{\delta}_1 = 42{,}5^\circ$, $\tilde{\delta}_2 = 50{,}1^\circ$ ✓

Zwischen $\tilde{\delta}_1$ und $\tilde{\delta}_2$ kein Licht reflektiert und somit erscheint der Bereich dunkel.

Im Bereich $< \delta_1$ ist es hell, da Licht nur 1mal reflektiert wird.

c) Kurze Wellenlängen werden stärker gebrochen. Daher wird blaues Licht stärker gebrochen als rotes, sodass das blaue Licht „oben" ist. Allerdings besteht Regen nicht aus einem sondern aus sehr vielen Tropfen. :D

Für jede Farbe ist ein anderer Tropfen in der richtigen Höhe, um die Farbe mit maximaler Intensität ins Auge zu schicken. Ups. ^^

Tropfen, die rotes Auge zum Betrachter schicken, sind weiter oben am Himmel, als die, die blaues Licht senden. ✓

Sehr viele Regentropfen → Regenbogen

Beim sekundären Regenbogen verhält es sich genau andersrum (2. Reflektion) ✓

d) Das Licht ist s-polarisiert.

Dies folgt aus den Fresnel-Formeln

Tatsächlich. Besser (Einfacher) ist der Vergleich mit dem Brewster-Winkel.

6/7

Ihr seid tatsächlich die einzigen, die die Aufgabe abgegeben haben!

David
Lars
Jonah

a) $s(t) = s(x(t), z(t))$, $n = n(x,z)$

$\Rightarrow ds = \sqrt{dx^2 + dz^2} \Rightarrow \frac{ds}{dt} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{z}^2}$ ✓ ✓

Fermat: $\delta s = \delta \int_{t(P_1)}^{t(P_2)} \overbrace{n(x(t),z(t))\sqrt{\dot{x}^2+\dot{z}^2}}^{f(x,t,\dot{x},\dot{z})} \, dt = 0$

← feste Endpunkte

$\Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \wedge \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial \dot{z}} - \frac{\partial f}{\partial z} = 0$

Für x: $\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(n(x,z)\frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{z}^2}}\right) - \frac{\partial n(x,z)}{\partial x}\sqrt{\dot{x}^2+\dot{z}^2} = 0$ ✓

$\Rightarrow \left(\frac{\partial n}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial n}{\partial z}\dot{z}\right)\frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{z}^2}} + n\frac{d}{dt}\frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{z}^2}} - \frac{\partial n}{\partial x}\sqrt{\dot{x}^2+\dot{z}^2} = 0 \quad \Big| : \sqrt{\dot{x}^2+\dot{z}^2}$ ✓

$\Rightarrow \left(\frac{\partial n}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial n}{\partial z}\dot{z}\right)\frac{\dot{x}}{\dot{x}^2+\dot{z}^2} + \frac{n}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{z}^2}}\frac{d}{dt}\frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{z}^2}} = \frac{\partial n}{\partial x}$ (1) ✓

$\hookrightarrow \frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{z}^2}} = \frac{1}{\frac{ds}{dt}} = \frac{dt}{ds}$ ↖ gefährlich. ⇔ meistens falsch

Wo wir hinwollen: $\frac{d}{ds}\left(n\frac{d\vec{r}}{ds}\right) = \nabla n$

Für x: $\Rightarrow \frac{d}{ds}\left(n\frac{dx}{ds}\right) = \frac{\partial n}{\partial x} \Rightarrow \frac{dn}{ds}\frac{dx}{ds} + n\frac{d^2x}{ds^2} = \frac{\partial n}{\partial x}$

$\Rightarrow \left(\frac{\partial n}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial n}{\partial z}\frac{dz}{ds}\right)\frac{dx}{dt}\frac{dt}{ds} + n\frac{d}{ds}\left(\frac{dx}{ds}\right) = \frac{\partial n}{\partial x}$

$\Rightarrow \left(\frac{\partial n}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial n}{\partial z}\dot{z}\right)\dot{x}\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 + n\frac{dt}{ds}\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\frac{dt}{ds}\right) = \frac{\partial n}{\partial x}$

=

(1) $\Rightarrow \left(\frac{\partial n}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial n}{\partial z}\dot{z}\right)\dot{x}\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 + n\frac{dt}{ds}\frac{d}{dt}\left(\dot{x}\frac{dt}{ds}\right) = \frac{\partial n}{\partial x}$

analog für z ✓ $\Rightarrow \frac{d}{ds}\left(n\frac{d\vec{r}}{ds}\right) = \nabla n$

mjoa, wenn ich das richtig durchblicke, kann man das so durch aus herleiten.

b) $\frac{d}{ds}\left(n\frac{d\vec{r}}{ds}\right) = \vec{\nabla} n$

x-Komponente: $\frac{d}{ds}\left(n\frac{dx}{ds}\right) = \frac{\partial n}{\partial x}$

muss = 0 sein Aufgabenst. in dieser Version fehlerhaft ✓ /unvollständig.

$\left.\begin{aligned} ds &= \sqrt{(dx)^2+(dz)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{dx}{dz}\right)^2+1}\,dz \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x'^2+1}}\frac{d}{dz}\left(n\cdot\frac{1}{\sqrt{x'^2+1}}x'\right) = 0 \quad \Big| \cdot\sqrt{x'^2+1} \Big| \int dz$ ✓

$x'\frac{n}{\sqrt{x'^2+1}} = a \Leftrightarrow x' = \frac{a}{n}\sqrt{x'^2+1}$ □ ✓

c) $n(z) = n_0 - \mu z$, $x(0)=0$, $x'(0)=1$

$$x'(z) := \frac{a}{n}\sqrt{1+x'(z)^2} = \frac{a}{n_0-\mu z}\sqrt{1+x'(z)^2}$$

$$x'(0)=1 \Rightarrow 1 = \frac{a}{n_0}\sqrt{1+1} \Leftrightarrow a = \frac{n_0}{\sqrt{2}}$$

✓

$$\Rightarrow x'(z) = \frac{n_0}{\sqrt{2}(n_0-\mu z)}\sqrt{1+x'(z)^2} \quad \Big| \; (\;)^2$$

$$x'^2 = \frac{n_0^2}{2(n_0-\mu z)^2}(1+x'^2)$$

$$\Leftrightarrow x'^2\left(1-\frac{n_0^2}{2(n_0-\mu z)^2}\right) = \frac{n_0^2}{2(n_0-\mu z)^2}$$

$$x'^2 = \frac{n_0^2}{2(n_0-\mu z)^2\left(1-\frac{n_0^2}{2(n_0-\mu z)^2}\right)} \quad \Big| \sqrt{\;}$$

$$(*) \quad x' = \pm n_0\sqrt{\frac{1}{2(n_0-\mu z)^2 - n_0^2}}$$

x' "divergiert", wenn $\sqrt{\ldots}$ komplex wird

aber ja, so war's anscheinend gemeint.

$$\Rightarrow \frac{1}{2(n_0-\mu z)^2 - n_0^2} < 0$$

$$\Leftrightarrow n_0^2 - 4\mu z n_0 + 2\mu^2 z^2 < 0$$

$$z^2 - \frac{2n_0}{\mu} + \frac{n_0^2}{2\mu^2} < 0$$

$$\Rightarrow \frac{n_0(1-\frac{1}{\sqrt{2}})}{\mu} < z < \frac{n_0(1+\frac{1}{\sqrt{2}})}{\mu}$$

✓

Da bin ich mir selbst nicht ganz sicher... Sorry.

Die Aufgabenstellung meint wahrscheinlich $z_0 = \frac{n_0}{\mu}$ der abzulesen ist, wenn $(*)$ umgeformt ist zu

$$x' = \frac{n_0}{n_0-\mu z}\sqrt{\frac{1}{1-\frac{n_0^2}{(n_0-\mu z)^2}}}$$

dann geht x' gegen unendlich und ist komplex. Im angegeben Bereich allerdings ist x' nur kompl.

d) Für $z > z_0 = \frac{n_0}{\mu}$ wird der Brechungsindex negativ $\to$ Metamaterial

$$\int x' \, dz = \frac{-n_0}{\sqrt{2}\mu}\int\sqrt{\frac{1}{u^2-1}}\,du$$

$$= \pm\frac{n_0}{\sqrt{2}\mu}\operatorname{arccosh}\left(\frac{\sqrt{2}}{n_0}(n_0-\mu z)\right)$$

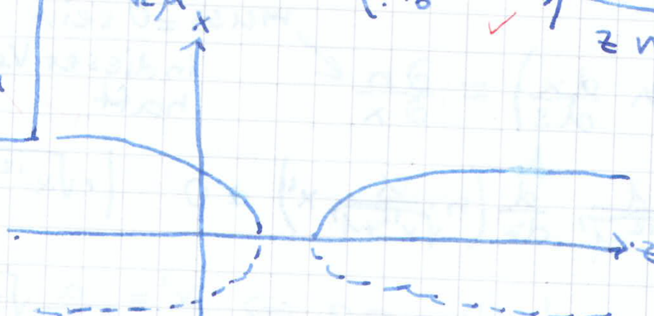
✓

$$u = \frac{\sqrt{2}}{n_0}(n_0-\mu z)$$

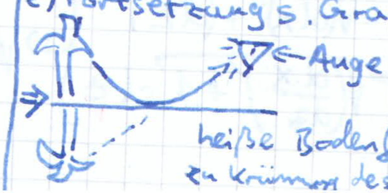
$$\frac{du}{dz} = -\frac{\sqrt{2}}{n_0}\mu_0$$

$$\Leftrightarrow dz = -\frac{n_0}{\sqrt{2}\mu_0}du$$

z muss außerhalb des in c berechneten Intervalls liegen



e) Fortsetzung s. Graph



heiße Bodenfläche führt zu Krümmung des Lichtstrahls ✓