David
Jonah
Lars

Nr. 42 $[\hat{A},\hat{H}] = [\hat{B},\hat{H}] = 0 \neq [\hat{A},\hat{B}]$ ✓ ✓ , $\hat{H}|n\rangle = E_n|n\rangle$

$\Rightarrow \hat{H}\hat{A}|n\rangle = \hat{A}\hat{H}|n\rangle = \hat{A}E_n|n\rangle = E_n\hat{A}|n\rangle$ ✓

analog: $\hat{H}\hat{B}|n\rangle = E_n\hat{B}|n\rangle$

$\Rightarrow \hat{A}|n\rangle, \hat{B}|n\rangle$ sind EZ (Eigenzustände) zu $\hat{H}$ mit EW (Eigenwert) E_n (ebenso $\hat{A}^2|n\rangle, \hat{B}^2|n\rangle, \hat{A}^3|n\rangle, \hat{B}^3|n\rangle \dots$)

Wiederspruchsbeweis: Sei E_n nicht entartet $\Rightarrow \hat{A}|n\rangle, \hat{B}|n\rangle \sim |n\rangle$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} \hat{A}|n\rangle &= a|n\rangle, \\ \hat{B}|n\rangle &= b|n\rangle \end{aligned}\right\} \text{ $|n\rangle$ ist EZ zu $\hat{A}$ und $\hat{B}$ für bel. $|n\rangle$}$$

$$\Rightarrow \hat{A}\hat{B}|n\rangle = \hat{A}b|n\rangle = b\hat{A}|n\rangle = ba|n\rangle = ab|n\rangle = a\hat{B}|n\rangle = \hat{B}a|n\rangle = \hat{B}\hat{A}|n\rangle$$

$\Rightarrow \hat{A}\hat{B} = \hat{B}\hat{A} \Rightarrow [\hat{A},\hat{B}] = 0$ ↯ ✓

$\Rightarrow$ Es muss mind. ein E_n mind. 2-fach entartet sein, sodass $\hat{B}|n\rangle \neq b|n\rangle$ oder $\hat{A}|n\rangle \neq a|n\rangle$ ◻ ✓

5/5

$\Rightarrow$ entarteter Unterraum (Bei n-fach-entartetem E_n bis zu n-fach entarteter Unterraum)

Wenn $\hat{A}$ und $\hat{B}$ erhalten sind und nicht gleichzeitig scharf gemessen werden können ($[\hat{A},\hat{B}] \neq 0$) erhält man entartete Eigenwerte (mind. einer mind. 2-fach entartet) und Unterräume.

	Blatt 11
A42	5
A43	5
A44	4,5 +0.5
A45	5
Σ	~~19,5/20~~

20/20

V. [signature]

43) $\hat{H} = \frac{\hat{\vec{p}}^2}{2m} + V(r) - \frac{e}{2m}\vec{B}\hat{\vec{L}}$

$$i\hbar \frac{d}{dt}\langle \hat{\vec{L}} \rangle = \langle [\hat{\vec{L}}, \hat{H}] \rangle \quad ✓$$

$$= \langle \hat{\vec{L}}\hat{H} - \hat{H}\hat{\vec{L}} \rangle$$

$$= \left\langle \frac{\hat{\vec{L}}\hat{\vec{p}}^2}{2m} + \hat{\vec{L}} V(r) - \hat{\vec{L}}\frac{e}{2m}\vec{B}\cdot\hat{\vec{L}} - \left(\frac{\hat{\vec{p}}^2\hat{\vec{L}}}{2m} + V(r)\hat{\vec{L}} - \frac{e}{2m}\vec{B}\hat{\vec{L}}^2\right)\right\rangle$$

$$= \langle [\hat{\vec{L}}, \vec{e}_z\hat{\vec{L}}] \frac{eB}{2m} \rangle$$

$$= \langle \frac{eB}{2m}[\hat{\vec{L}}, \hat{L}_z] \rangle = \langle i\hbar \frac{eB}{2m}\begin{pmatrix} -\hat{L}_2 \\ \hat{L}_1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\langle \hat{L}_x \rangle = -\frac{eB}{2m}\langle \hat{L}_y \rangle \quad ✓ \qquad \frac{d}{dt}\langle L_z \rangle = 0$$

$$\frac{d}{dt}\langle \hat{L}_y \rangle = \frac{eB}{2m}\langle \hat{L}_x \rangle \quad ✓$$

Ansatz: $\langle L_x \rangle^{(t)} = \cos(\omega t) \cdot A$ — $\langle \hat{\vec{L}} \rangle$ folgt in der x-y-Ebene einer Kreisbahn und ist in z-Richtung konstant $\Rightarrow$ Präzession

$\langle L_y \rangle^{(t)} = \sin(\omega t) \cdot A$ — $\omega = \frac{eB}{2m}$

Das sind keine allgemeinen Ansätze

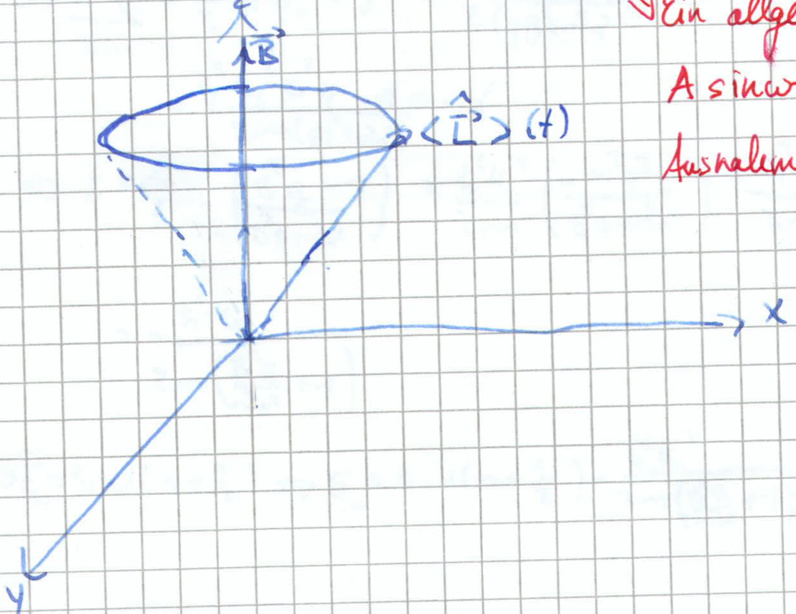
$\langle L_z \rangle^{(t)} = D$

$$\langle \hat{\vec{L}} \rangle (t=0) = \begin{pmatrix} L_{x,0} \\ 0 \\ L_{z,0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ 0 \\ D \end{pmatrix} \Rightarrow \langle \hat{\vec{L}} \rangle (t) = \begin{pmatrix} L_{x,0}\cos\omega t \\ L_{x,0}\sin\omega t \\ L_{z,0} \end{pmatrix} ✓$$

Ein allgemeiner Ansatz wäre

$A\sin\omega t + B\cos\omega t$

Ausnahmsweise ok.



5

Nr. 44 a) $\vec B = \mathrm{rot}\,\vec A = \begin{pmatrix}0\\0\\B\end{pmatrix}$ $(\vec A = -\hat y B \vec e_x)$ ✓

⇒ B-Feld in z-Richtung der Stärke B

$$H = \frac{1}{2m}[\hat{\vec p} - q\vec A(\vec r)]^2 + qV(\vec r) = \frac{1}{2m}[(\hat p_x + q\hat y B)^2 + \hat p_y^2] + qV(\vec r)$$

$$= \frac{1}{2m}[(\hat p_x + q\hat y B)^2 + \hat p_y^2 + q m^2\alpha^2\hat y^2] = \frac{1}{2m}\left[\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x} + qyB\right)^2 - \hbar^2\frac{\partial^2}{\partial y^2} + q m^2\alpha^2 y^2\right]$$ ✓

Ja, es gäbe weitere Möglichkeiten (z.B. $\vec A = \hat x B\vec e_y$ oder symmetrisch) allgemeiner: Eichfreiheit. Siehe Physik II

b) $H\psi = E\psi$, $\psi = \chi(y)e^{ik_x x}$

$$\Rightarrow \frac{1}{2m}[\hat p_y^2 + (\hbar k_x + qyB)^2 + qm^2\alpha^2y^2]\chi(y) = E\chi(y)$$

$$\Rightarrow \left[\frac{1}{2m}\hat p_y^2 + y^2\left(\frac{q^2B^2}{2m} + \frac{\cancel{q}m\alpha^2}{2}\right) + y\left(\frac{\hbar k_x qB}{m}\right) + \frac{\hbar^2k_x^2}{2m}\right]\chi(y) = E\chi(y)$$ ✓ ✓ ✓ ✓ ✓

c) $\overset{!}{=}$

$$\overset{!}{\to} \left[\frac{1}{2m}\hat p_y^2 + \left(\frac m2 \omega^2\tilde y^2\right)\right]\chi(y) = \tilde E\chi(y) \quad \text{(harm. Oszillator)}$$

$$\Rightarrow \left[\frac{1}{2m}\hat p_y^2 + \frac m2\omega^2(y+y_0)^2 - \gamma\right]\chi(y) = E\chi(y) \quad (\tilde E = E+\gamma,\ \tilde y = y+y_0)$$

$$\Rightarrow y^2\left(\frac{q^2B^2}{2m} + \frac{qm\alpha^2}{2}\right) + y\left(\frac{\hbar k_x qB}{m}\right) + \frac{\hbar^2k_x^2}{2m} \overset{!}{=} y^2\frac m2\omega^2 + m\omega^2 y y_0 + \frac m2 \omega^2 y_0^2 - \gamma$$

Koeffizienten-Vergleich

y^2: $\Rightarrow \frac{q^2B^2}{2m} + \frac{qm\alpha^2}{2} \overset{!}{=} \frac m2\omega^2 \Rightarrow \omega^2 = \frac{q^2B^2}{m^2} + q\alpha^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{q^2B^2}{m^2}+q\alpha^2}$

y^1: $\Rightarrow \frac{\hbar k_x qB}{m} \overset{!}{=} m\omega^2 y_0 = y_0\left(\frac{q^2B^2+m^2q\alpha^2}{m}\right)$

$\Rightarrow y_0 = \frac{\hbar k_x qB}{q^2B^2+m^2q\alpha^2} = \frac{\hbar k_x B}{qB^2+m^2\alpha^2}$ leider verrechnet.

y^0: $\Rightarrow \frac{\hbar^2k_x^2}{2m} \overset{!}{=} \frac m2\omega^2y_0^2 - \gamma = \frac{m\hbar^2k_x^2B^2}{2(qB^2+m^2\alpha^2)^2}\left(\frac{q^2B^2}{m^2}+q\alpha^2\right) = \frac{m\hbar^2k_x^2B^2q}{2(qB^2+m^2\alpha^2)^2m^2}(qB^2+\alpha^2m^2)$ γ

$$= \frac{\hbar^2k_x^2B^2q}{2m(qB^2+m^2\alpha^2)} - \gamma$$

$$\Rightarrow \gamma = \frac{\hbar^2k_x^2}{2m}\left(\frac{B^2q}{B^2q+m^2\alpha^2} - 1\right) = \frac{\hbar^2k_x^2}{2m}\left(\frac{-m^2\alpha^2}{B^2q+m^2\alpha^2}\right) = -\frac{\hbar^2k_x^2}{2m}\left(\frac{1}{\frac{B^2q}{m^2\alpha^2}+1}\right)$$

$$= -\frac{\hbar^2k_x^2}{2m\left(\frac{B^2q}{m^2\alpha^2}+1\right)}$$

$$\Rightarrow \tilde E_n = \hbar\omega\left(n+\tfrac12\right) \Rightarrow E_n = \hbar\omega\left(n+\tfrac12\right) - \frac{\hbar^2k_x^2}{2m\left(\frac{B^2q}{m^2\alpha^2}+1\right)}$$

$\boxed{B=0:\ \hat{=}\ \hbar\omega\left(n+\tfrac12\right) - \frac{\hbar^2k_x^2}{2m},\quad \omega = \sqrt q\,\alpha}$

Lösungen des harm. Oszillators: $\chi_n(\tilde{y}) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\,\tilde{y}\right) e^{-\frac{1}{2}\frac{m\omega}{\hbar}\tilde{y}^2}$ ✓

mit $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2}\right)$ ✓

$\Rightarrow \Psi(x,y) = \chi_n(\tilde{y}) e^{ik_x x} \quad |\Psi(x,y)|^2 = |\chi_n(\tilde{y})|^2 = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2^n n!} H_n^2\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\,\tilde{y}\right) e^{-\frac{m\omega}{\hbar}\tilde{y}^2}$

d) $\frac{\alpha}{B} = 0 \Rightarrow \omega = \frac{qB}{m}$, $\gamma = \underbrace{-\frac{\hbar^2 k_x^2}{2m} \cdot \frac{m\alpha^2}{B^2 q}}_{= -\frac{\hbar^2 k_x^2 \alpha^2 m}{2B^2 q} = 0}$, $y_0 = \frac{\hbar k_x B}{qB^2} = \frac{\hbar k_x}{qB}$

$\Rightarrow E_n = \frac{\hbar qB}{m}(n + \frac{1}{2}) \cancel{- \frac{\hbar^2 k_x^2 \alpha^2 m}{2B^2 q}}$

Landau: $E = \hbar\omega_c(n + \frac{1}{2}) \cancel{\left(+\frac{\hbar^2 k_z^2}{2m}\right)}$, $\omega_c = \frac{qB}{m}$

$= \frac{\hbar qB}{m}(n + \frac{1}{2})$ ~~(nur x, y ⇒ $k_z = 0$)~~ $\Bigg] =$

$\frac{B}{\alpha} = 0 \Rightarrow \omega = \alpha\sqrt{q}$, $\gamma = -\frac{\hbar^2 k_x^2}{2m}$, $y_0 = 0$

würde wegfallen falls man $U(r) := \frac{V(r)}{q}$ definiert ✓

$\Rightarrow$ harm. Oszillator mit $\omega = \alpha$ und $E_n = \hbar\alpha(n + \frac{1}{2}) - \frac{\hbar^2 k_x^2}{2m}$

4,5|5

45) $\hat{S}_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ $\hat{S}_y = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}$

a) $[\hat{S}_x, \hat{S}_y] = \frac{\hbar^2}{4}\left(\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right)$

$= \frac{\hbar^2}{4}\left(\begin{pmatrix}i & 0\\ 0 & -i\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-i & 0\\ 0 & i\end{pmatrix}\right) = \frac{i\hbar^2}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} \stackrel{!}{=} i\hbar\, \hat{S}_z$

$\Rightarrow \hat{S}_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ ✓

b) $[\hat{S}_y, \hat{S}_z] = \frac{\hbar^2}{4}\left(\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}\right)$

$= \frac{\hbar^2}{4}\left(\begin{pmatrix}0 & i\\ i & 0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0 & -i\\ -i & 0\end{pmatrix}\right) = i\frac{\hbar^2}{2}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} = i\hbar\, \hat{S}_x$ □ ✓

c) $\hat{S}^2 = \hat{S}_x^2 + \hat{S}_y^2 + \hat{S}_z^2 = \frac{\hbar^2}{4}\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right) = \frac{3\hbar^2}{4}\mathbb{1}$ ✓

d) $\hat{S}_x$: EW: $\det\begin{pmatrix}-\lambda & \frac{\hbar}{2}\\ \frac{\hbar}{2} & -\lambda\end{pmatrix} = \lambda^2 - \frac{\hbar^2}{4} \stackrel{!}{=} 0$ $\lambda_{1/2} = \pm\frac{\hbar}{2}$ ✓

λ_1: $\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix} \Rightarrow x = y \Rightarrow EV = \begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix} = \vec{v}_1$
$\Rightarrow$ norm: $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$ ✓

λ_2: $\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix} \Rightarrow x = -y \Rightarrow EV = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix} = \vec{v}_2$ ✓

$\hat{S}_y$: $p(\lambda) = \lambda^2 - \frac{\hbar^2}{4} \Rightarrow \lambda_{1/2} = \pm\frac{\hbar}{2}$ ✓

λ_1: $\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}-1 & -i\\ i & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$ $x = \frac{y}{i} \Rightarrow \vec{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$

λ_2: $\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}1 & -i\\ i & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$ $x = iy \Rightarrow \vec{v}_2 = \begin{pmatrix}i\\ 1\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$ ✓

$\hat{S}_z$: $p(\lambda) = \left(\frac{\hbar}{2} - \lambda\right)\left(\frac{\hbar}{2} + \lambda\right) = \lambda^2 - \frac{\hbar^2}{4}$

$\Rightarrow \lambda_{1/2} = \pm\frac{\hbar}{2}$ λ_1: $\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$ ✓

λ_2: $\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v}_2 = \begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$ ✓