28.6.18

Aufgabe 44

$V = \frac{m}{2}\alpha^2 y^2 \qquad A = \begin{pmatrix} -yB \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

a)

$\mathrm{rot} A = B\vec{e}_z = \vec{B}$

nicht eindeutig! $\vec{A}' = \vec{A} + \nabla\chi$ sind äquivalent

b)

$H = \frac{1}{2m}\left(\vec{p} - \frac{q\hat{\vec{A}}}{\cancel{c}}\right)^2 + q\phi \quad , \phi = V$

$= \frac{1}{2m}\left[(\hat{p}_x + qBy)^2 + p_y^2\right] + \frac{m}{2}\alpha^2 y^2$

Ansatz: $\psi(x,y) = \chi(y) e^{ik_x x}$

SGL: $\frac{1}{2m}\left[(\hat{p}_x + qBy)^2 + p_y\right]\psi + \frac{m}{2}\alpha^2 y^2 \psi = E\psi$

$\Rightarrow \frac{1}{2m}\left[(\hat{p}_x + qBy)^2 + \hat{p}_y^2\right]\chi e^{ik_x x} + \frac{m}{2}\alpha^2 y^2 \chi e^{ik_x x} = E\chi e^{ik_x x}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2m}\left[\hat{p}_x^2 + q^2B^2y^2 + 2p_x qBy + p_y^2\right]\chi e^{ik_x x} +$

$\frac{m}{2}\alpha^2 y^2 \chi e^{ik_x x} = \chi e^{ik_x x}$

Lasse Operatoren auf $e^{ik_x x}$ wirken:

$\frac{1}{2m}\left[k_x^2\hbar^2 + 2qByk_x\hbar + q^2B^2y^2 + p_y^2\right] \cancel{e^{ik_x x}}$

$+ \frac{m}{2}\alpha^2 y^2 \chi \cancel{e^{ik_x x}} = \chi \cancel{e^{ik_x x}} E$

$\Leftrightarrow \left[\frac{\hbar^2 k_x^2}{2m} + \frac{qByk_x\hbar}{m} + \hat{p}_y^2 + \left(\frac{q^2B^2}{2m} + \frac{m}{2}\alpha^2\right)y^2\right]\chi = E\chi$

c)

z.Z DGL ist harm. Osz.

$\omega^2 = \frac{q^2B^2}{m^2} + \alpha^2 \qquad \Delta\omega = \frac{q^2B^2}{m^2}$

Frequenz

Frequenz ohne Verschiebung

Umformen: $\left[\frac{\hat{p}_y^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\left(y + \frac{qB\hbar k_x}{\omega^2 m^2}\right)^2 + \frac{\hbar^2 k_x}{2m}\right.$

$|\Delta y| = \frac{qB\hbar k_x}{\omega^2 m^2} \qquad \left. - \boxed{\frac{q^2B^2\hbar^2k_x^2}{2\omega^2 m^3}}\right]\chi = E\chi$

c)

Lösungen sind nun bekannt!

$$\Psi(x,y) = \left(\frac{m\omega}{2m}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega}{m}}\, y\right) \exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar} y^2\right) e^{ik_x x}$$

$$|\Psi(x,y)|^2 = \left(\frac{m\omega}{2m}\right)^{1/2} \frac{1}{2^n n!} H_n^2\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\, y\right) \exp\left(-\frac{m\omega}{\hbar} y^2\right)$$

d) $\frac{\alpha}{B} = 0 \rightarrow$ Landau Niveaus

$\Rightarrow$ V vernachlässigbar

$\rightarrow \omega = \frac{qB}{m}$ Zyklotronfrequenz

$\left[\omega^2 = \frac{q^2 B^2}{m^2} + \alpha^2\right]$

E-Verschiebung verschwindet

$\Rightarrow E = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{\hbar q B}{m}(n+1)$ Landau Niveaus

$\frac{B}{\alpha} = 0 \Rightarrow$ B-Feld verschwindet, nur harm. Oszillator bleibt