20

Jonas,
David
Leers

$f(z) = 42 z^5 \frac{kg}{m^8}$

Der Einfachheithalber wird aber ohne Einheiten gerechnet, hmm... ok.

Schwerpunkt:

$$\vec{r_S} = \frac{1}{M} \int \vec{r} \, f \, dV$$

$$M = \int f \, dV = 42 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 z^5 \, dz \, dy \, dx = \frac{42}{6} \int_0^1 \int_0^1 y^0 \, dy \, dx = \frac{42}{42} = 1 \checkmark$$

$$\Rightarrow \vec{r_S} = 42 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} z^5 \, dz \, dy \, dx = 42 \int_0^1 \int_0^1 \begin{pmatrix} x \, y^6 / 6 \\ y^6 / 6 \\ y^7 / 7 \end{pmatrix} dy \, dx$$

$$= 42 \int_0^1 \begin{pmatrix} x/42 \\ 1/48 \\ 1/56 \end{pmatrix} dx = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 7/8 \\ 3/4 \end{pmatrix} \checkmark$$

Idee: Trägheitstensor bez. des Schwerpunktes mittels des Satzes von Steiner berechnen: $\checkmark$ gute Idee

$$\tilde{I}_0 = \tilde{I}_S + M \, \tilde{r_S} \Rightarrow \tilde{I}_S = \tilde{I}_0 - M \, \tilde{r_S}$$

$$\text{mit } \tilde{r_S} = \begin{pmatrix} r_{S2}^2 + r_{S3}^2 & -r_{S1} r_{S2} & -r_{S1} r_{S3} \\ -r_{S2} r_{S1} & r_{S1}^2 + r_{S3}^2 & -r_{S2} r_{S3} \\ -r_{S3} r_{S1} & -r_{S3} r_{S2} & r_{S1}^2 + r_{S2}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 85/64 & -7/16 & -3/8 \\ -7/16 & 13/16 & -21/32 \\ -3/8 & -21/32 & 65/64 \end{pmatrix}$$

$$I_{0xx} = \int f(y^2 + z^2) \, dV = \frac{49}{36} \checkmark \Rightarrow I_{11} = \frac{19}{576} \checkmark$$

$$I_{022} = \int f(x^2 + z^2) \, dV = \frac{11}{12} \checkmark \Rightarrow I_{22} = \frac{5}{48} \checkmark$$

$$I_{033} = \int f(x^2 + y^2) \, dV = \frac{10}{9} \checkmark \Rightarrow I_{33} = \frac{55}{576} \checkmark$$

$$I_{012} = I_{021} = -\int f \, xy \, dV = -\frac{7}{16} \checkmark \Rightarrow I_{12} = I_{21} = 0 \checkmark$$

$$I_{013} = I_{031} = -\int f \, xz \, dV = -\frac{3}{8} \checkmark \Rightarrow I_{13} = I_{31} = 0 \checkmark$$

$$I_{023} = I_{032} = -\int f \, yz \, dV = -\frac{7}{8} \checkmark \Rightarrow I_{23} = I_{32} = -\frac{1}{96} \checkmark$$

Rechnung (Integrationsgrenzen analog wie oben

(z von 0 bis y; y und x von 0 bis 1

untere Grenze fällt immer weg, obere Grenze bei x und y ist $1^{(k)} = 1$ usw.

$$\Rightarrow \tilde{I} = \begin{pmatrix} \frac{19}{576} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{48} & -\frac{1}{96} \\ 0 & -\frac{1}{96} & \frac{55}{576} \end{pmatrix} \checkmark$$