David
Jonah
Lars
Gruppe 3

16P. / 16P.

9.1) $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

2/2

$P x_{n+1} = N x_n + b \qquad A = P - N$

$A = D + L + R \qquad$ Jacobi: $x_{n+1} = B x_n + D^{-1} b$

$B = -D^{-1}(L+R) \qquad \Leftrightarrow x_{n+1} = -D^{-1}((L+R)x_n + b)$

$\Leftrightarrow D x_{n+1} = -((L+R)x_n - b)$

ok.

$D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad \Leftrightarrow \underbrace{D}_{P} x_{n+1} = \underbrace{-(L+R)}_{N} x_n + b$

$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow P = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} ✓ \quad N = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} ✓$

$P - N = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} = A$

Gauß-Seidel:

$B = -(D+L)^{-1} R \Rightarrow \quad x_{n+1} = -(D+L)^{-1} R x_n + (D+L)^{-1} b$

$\underbrace{(D+L)}_{P} x_{n+1} = \underbrace{-R}_{N} x_n + b$

$P = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} ✓ \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ✓$

b) Jacobi: $B = -D^{-1}(L+R) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{2}{5} & 0 & -\frac{2}{5} \\ -\frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & 0 \end{pmatrix}$ ✓

2/2

$\Rightarrow p(\lambda) = -\lambda^3 - \frac{1}{25} + \lambda \cdot \frac{9}{25} \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow \lambda_1 = -0{,}65 \quad \lambda_3 = 0{,}53$ ✓
$\lambda_2 \approx 0{,}12$ ✓

$spr(B) = \max\{|\lambda_i|\} = 0{,}65 < 1$ der Spektralmatrix ist < 1 ✓

$\stackrel{\text{Banach}}{\Rightarrow}$ konvergiert gegen einen Fixpunkt ✓
für jedes $x_0 \in \mathbb{R}^3$

Gauß-Seidel:

$B = -(D+L)^{-1} R = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ 0 & \frac{1}{50} & \frac{4}{25} \end{pmatrix} \qquad \lambda_1 = 0, \quad \lambda_{2/3} = \frac{1}{50}\left(9 \pm \sqrt{13}\right)$ (✓)

$p(\lambda) = -\lambda^3 + \frac{9}{25}x^2 - \frac{x}{25} \stackrel{!}{=} 0$

$spr(B) = \max\{|\lambda_i|\} = \frac{1}{5}$

Der Spektralradius von B ist $0{,}2 < 1$

$\Rightarrow$ konvergiert ebenfalls für jedes $x_0 \in \mathbb{R}^3$

c.) 4/4

Jacobi:

$x_1 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 2/5 \\ 2/5 \end{pmatrix}$ ✓ $x_2 = B\begin{pmatrix} 1/2 \\ 2/5 \\ 2/5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 \\ 2/5 \\ 2/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/10 \\ 1/25 \\ 7/50 \end{pmatrix}$ ✓

Gauß-Seidel

$x_1 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/5 \\ 11/50 \end{pmatrix}$ $x_2 = \begin{pmatrix} 2/5 \\ 19/125 \\ 162/625 \end{pmatrix}$ ✓

9.2. a.) 2/2

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$B = -(D+L)^{-1}R$

$= \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1/4 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow p(\lambda) = -\lambda^3 - \frac{1}{8}\lambda \stackrel{!}{=} 0$ $\lambda_1 = 0$ ~~$\lambda_{2/3} = \pm \frac{1}{2\sqrt{2}}$~~ $\lambda_{2/3} = \frac{\pm i}{2\sqrt{2}}$

$\Rightarrow spr(B) = 1/2\sqrt{2} < 1$ konvergiert ok.

b) 6/6 Jacobi: $B = -D^{-1}(L+R) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ -1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ✓ $p(\lambda) = -\lambda^3 - \frac{1}{8} = 0$

$\lambda = \frac{1}{2}$ ✓

$\Rightarrow spr(B) = \frac{1}{2} \leq g$

$g^N = 10^{-6}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}^N = 10^{-6}$ ok.

$\Leftrightarrow N \approx 19{,}93 \Rightarrow$ Nach $N = 20$ Schritten ist der Fehler kleiner als 10^{-6}. ✓