David
Lars
Jonah

1	2	3	4
3	~~5~~ 4.5	5	3

$\boxed{15.5 / 20}$

37) $\partial_y u(x,b,t) = 0$

$$u(0,y,t) = u(a,y,t) = u(x,0,t) = 0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - v^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = 0 \qquad (1)$$

$$u(x,y,t) = X(x)\,Y(y)\,T(t)$$

in (1), Division durch u:

$$\frac{\ddot T}{T} = v^2\left(\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y}\right) = \text{const} = -\omega^2 \qquad (2)$$

$$\Rightarrow \ddot T = -\omega^2 T \Rightarrow T(t) = e^{\pm i\omega t}$$

eigentlich: $T(t) = Ae^{+i\omega t} + Be^{-i\omega t}$.

$$\overset{(2)}{\Rightarrow} \frac{X''}{X} = -\left(\frac{Y''}{Y} + \frac{\omega^2}{v^2}\right) = -k_{n_x}^2$$

$$\Rightarrow X(x) = C\sin(k_{n_x}x) + D\cos(..) \quad \text{RB: } k_{n_x} = \frac{n_x\pi}{a}$$

analog: $Y(y) = E\sin(k_{n_y}y) + E\cos(\ldots) \qquad k_{n_y} = \frac{n_y\pi + \frac{\pi}{2}}{b}$ (*)

durch den cos-Term kommt ihr nicht hierdrauf

$$\Rightarrow u(x,y,t) = \sum_{n_x=1}^{\infty}\sum_{n_y=1}^{\infty} b_{n_xn_y}\sin(k_{n_x}x)\sin(k_{n_y}y)\cos(\omega t + \varphi_{n_xn_y})$$

f, oder zumindest folgt das nicht aus euren Annahmen.

b) $u(x,y,0) = 0 \qquad (3)$

$$\partial_t u(x,y,0) = v_0\sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)\frac{y}{b} \qquad (4)$$

aus (3) folgt: $\cos(\omega\cdot 0 + \varphi) \overset{!}{=} 0$

$$\Leftrightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$$

also eher sowas wie $\sin(\omega t)$ ...

$\boxed{\text{da } \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1}$

$$\Rightarrow \partial_t u(x,y,0) = -\omega\sum_{n_x=1}^{\infty}\sum_{n_y=1}^{\infty}\sin(k_{n_x}x)\sin(k_{n_y}y) \overset{!}{=} v_0\sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)\frac{y}{b}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{a}\frac{2}{b}\int_0^a\int_0^b (\text{linke Seite})\sin(k_{m_x}x)\sin(k_{m_y}y)\,dy\,dx$$

$$= \sum_{n_x=1}^{\infty}\sum_{n_y=1}^{\infty} b_{n_xn_y}\underbrace{\frac{2}{a}\int_0^a\sin(k_{n_x}x)\sin(k_{m_x}x)\,dx}_{=\delta_{n_xm_x}}\cdot\underbrace{\frac{2}{b}\int_0^b\sin(k_{n_y}y)\sin(k_{m_y}y)\,dy}_{=\delta_{n_ym_y}}$$

$$= \sum\sum b_{n_xn_y}\delta_{n_xm_x}\delta_{n_ym_y} = b_{m_xm_y}$$

$$b_{m_x m_y} \stackrel{!}{=} \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b \sin(k_{m_x} x) \sin(k_{m_y} y) (\text{rechte Seite})\, dy\, dx$$ $\boxed{\frac{\pi}{a} = k}$

$$= -\frac{4 v_0}{a b^3 \omega} \underbrace{\int_0^a \sin(k_{m_x} x) \sin(k_{1_x} x) dx}_{= \delta_{m_x 1}} \int_0^b y \sin(k_{m_y} y)\, dy$$?

Einsetzen(*):

$$= -\frac{2 v_0}{b^2 \omega} \delta_{m_x 1} \cdot \frac{2 b^2 ((2\pi m_x + \pi) \sin(\pi m_x) + 2 \cos(\pi m_x))}{\pi^2 (4 m_x^2 + 4 m_x + 1)}$$

$$= \frac{4 v_0}{9 b^2 \omega \pi^2}$$ (✓) Folgefehler.

c) $$u(x,y,t) = \sum_{n_x=1}^{\infty} \sum_{n_y=1}^{\infty} \sin(k_{n_x} x) \sin(k_{n_y} y) \cos(\omega t + \varphi)$$

$k_x = \frac{n_x \pi}{a}$ $k_y = \frac{n_y \pi}{2a}$ ✓ da jetzt $u(0,y,t) = u(a,y,t)$
$= u(x,0,t) = u(x,b,t) = 0$

aus (2) folgt mit $\frac{X''}{X} = -k_{n_x}^2$ und $\frac{Y''}{Y} = -k_{n_y}^2$

$$\omega = v \sqrt{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 n_x^2 + \left(\frac{\pi}{2a}\right)^2 n_y^2}$$

$$= \frac{v\pi}{2a} \sqrt{4 n_x^2 + n_y^2}$$ ✓

I) $n_x = 1$; $n_y = 2$ $\Rightarrow \omega = \frac{v\pi}{a} \sqrt{2}$

II) $n_x = 2$; $n_y = 2$
$n_x = 1$; $n_y = 4$ $\Rightarrow \omega = \frac{v\pi}{a} \sqrt{5}$

III) $n_x = 10$; $n_y = 5$
$n_x = 8$; $n_y = 13$
$n_x = 4$; $n_y = 19$ $\Rightarrow \omega = \frac{v\pi}{2a} \sqrt{425}$

ok, das glaube ich euch jetzt einfach mal, ich weiß nicht, wie ich das kontrollieren soll... ^^

3/5

Jonah
David
Lars

Aufgabe 38

a) $\Phi(r=R, \varphi \in (0,\pi), t) = 0$ ✓ (I)

$u(\ldots) = \Phi(\ldots)$

$\Phi(r \in [0,R], \varphi \in \{0,\pi\}, t) = 0$ ✓ (II)

für (I):

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} J_m(kR)\left[A\sin(m\varphi) + B\cos(m\varphi)\right]\left[C\cdot\sin(\omega t) + D\cos(\omega t)\right] = 0$$

da R fest & φ und t variabel: $J_m(kR) = 0$ ✓

wie ist k definiert?

für (II): $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} J_m(kr)\left[\pm B\right]\cdot\left[C\sin\omega t + D\cos(\omega t)\right] = 0$

A beliebig, da $\sin(0) = \sin(\pi m) = 0$ (da $m \in \mathbb{Z}$)

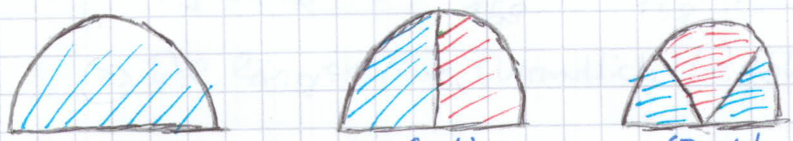
Da r und t variabel $\rightarrow B = 0$ ✓

b) $\Phi(r,\varphi,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} J_m(kr)\cdot A\sin(m\varphi)\cdot\left[C\sin(\omega t) + D\sin(\omega t)\right]$

$\hat{\Phi}(r,\varphi,t) \sum_{m\in\mathbb{Z}} \sum_{n=1}^{\infty} J_m(k_{mn} r) A_{mn} \sin(m\varphi)\left[C_{mn}\sin(\omega_{mn}t) + D_{mn}\cos(\omega_{mn}t)\right]$

J_{-3} ist z.B. nicht definiert.

c)



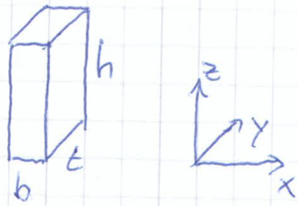
(m,n) (0,1) (1,1) (2,1)

witzig.

Blau wird Orange, wenn Orange Blau wird
Schwarz Weiß = 0

4.5/5

Nr. 39 $\quad \Delta\phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi = 0$



Anmerkung: Nicht ganz nach Aufgabenstellung gelöst, da diese unnötig ist und wir den Separationsansatz schon hatten
o.h.

Jonas
David
Lars

a) Rbd.: $\nabla\phi\Big|_{\vec{r}(t)} = 0$ (am Rand $=0$)

$$\Rightarrow \frac{\partial\phi}{\partial x}\Big|_{x=0} = \frac{\partial\phi}{\partial x}\Big|_{x=b} = \frac{\partial\phi}{\partial y}\Big|_{y=0} = \frac{\partial\phi}{\partial y}\Big|_{y=t} = \frac{\partial\phi}{\partial z}\Big|_{z=0} = \frac{\partial\phi}{\partial z}\Big|_{z=h} = 0$$

b) $\phi(\vec{r},t) = A(\vec{r})\cos(\omega t)$

$$\Rightarrow \Delta A(\vec{r}) + \frac{1}{c^2}A(\vec{r}) = 0$$

c) <u>Ansatz:</u> $A(\vec{r}) = X(x)\,Y(y)\,Z(z)$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{1}{X}\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}}_{\substack{\text{nur von } x\\ \Rightarrow = -k_x^2}} + \underbrace{\frac{1}{Y}\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2}}_{\substack{\text{nur von } y\\ \Rightarrow = -k_y^2}} + \underbrace{\frac{1}{Z}\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2}}_{\substack{\text{nur von } z\\ \Rightarrow = -k_z^2}} + \underbrace{\frac{\omega^2}{c^2}}_{k^2} = 0$$ (nach Division durch $A(\vec{r})$)

$$\Rightarrow k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$$

$$\Rightarrow \frac{d^2X}{dx^2} + k_x^2 X = 0 \Rightarrow X = A_x\cos(k_x x + \varphi_x)$$

Rbd.: $\frac{\partial\phi}{\partial x}\Big|_{x=0,b} = \frac{\partial X}{\partial x}\Big|_{x=0,b} = 0 \Rightarrow -A_x\sin(k_x x + \varphi)\Big|_{x=0,b} = 0$

$$\Rightarrow \varphi = 0,\ \sin(k_x b) = 0 \Rightarrow k_x b = \pi n_x$$
$$\Rightarrow k_x = \frac{\pi n_x}{b}$$

$$\Rightarrow X(x) = A_x\cos\left(\frac{\pi n_x}{b}x\right)$$

Analog: $Y(y) = A_y\cos\left(\frac{\pi n_y}{t}y\right)$, $Z(z) = A_z\cos\left(\frac{\pi n_z}{h}z\right)$

$$\Rightarrow A(\vec{r}) = \prod_{i=1}^{3} A_i\cos\left(\frac{\pi n_i}{\ell_i}x_i\right)$$ mit $A_1 = A_x$, $A_2 = A_y$, $A_3 = A_z$, $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$, $\ell_1 = b$, $\ell_2 = t$, $\ell_3 = h$ usw.

hier nicht → nötig, wurde nur nach Eigenmoden gefragt

$$\Rightarrow \phi(\vec{r},t) = \sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{\infty}\sum_{n_3=0}^{\infty}\cos(\omega_{n_i}t)\prod_{i=1}^{3}A_i\cos\left(\frac{\pi n_i}{\ell_i}x_i\right)$$ $(\omega_{n_i} = \omega_{n_x n_y n_z})$

d) $k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \frac{\omega_{n_i}^2}{c^2} \Rightarrow \omega_{n_i} = c\sqrt{\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\pi n_i}{\ell_i}\right)^2}$

$$t = b = h \Rightarrow \omega_{100} = \omega_{010} = \omega_{001} = c\frac{\pi}{b}$$

5/5

e) Annahme: h ist längste Seite (Höhe)

$$\Rightarrow c\frac{\pi}{h} = 79\cdot 2\pi\ \mathrm{Hz} \Rightarrow h = \frac{c}{158}\,s \approx \frac{343}{158}\,m \approx 2{,}17\,m$$

$\Rightarrow$ Die längste Seite (vermutlich die Höhe) ist ca. 2,2 m lang

Jonas
David
Lars

Nr. 40 $\Delta u(r,\varphi,z,t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(r,\varphi,z,t) = 0$

$$\Delta = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)$$

a) Separationsansatz: $u = R(r)\Phi(\varphi)Z(z)T(t)$ ✓

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{1}{R}\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{Rr}\frac{\partial R}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\underbrace{\frac{1}{\Phi}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}}_{\substack{\text{nur von }\varphi\\ =-\lambda^2 ✓}}}_{\substack{\text{nur von } r \text{ und } \lambda\\ =-k_r^2 ✓,\ \text{da } \lambda=\text{konst.}}} + \underbrace{\frac{1}{Z}\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2}}_{\substack{\text{nur von } z\\ =-k_z^2 ✓}} - \underbrace{\frac{1}{Tc^2}\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}}_{\substack{\text{nur von } t\\ =-k^2 ✓}} = 0$$

(nach Division durch u)

$$\Rightarrow \frac{d^2T}{dt^2} + k^2c^2 T = \frac{d^2T}{dt^2} + \omega^2 T = 0 \Rightarrow T(t) = A_t e^{\pm i\omega t}, \quad \omega = kc \ ✓$$

$$\Rightarrow \frac{d^2Z}{dz^2} + k_z^2 Z = 0 \Rightarrow Z(z) = A_z e^{\pm i k_z z}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} + \lambda^2\Phi = 0 \Rightarrow \Phi(\varphi) = A_\varphi e^{\pm i\lambda\varphi}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2R}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dR}{dr} + \left(k^2 - k_z^2 - \frac{\lambda^2}{r^2}\right)R = 0 \Rightarrow k^2 = k_r^2 + k_z^2 \ ✓, \quad \lambda \in \mathbb{Z} \ ✓$$

b) $x = k_r r \Rightarrow \frac{d}{dr} = k_r \frac{d}{dx}$, $R(r) = R\left(\frac{x}{k_r}\right) = y(x)$ ✓

$$\Rightarrow x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + (x^2 - \lambda^2)y = 0 \ ✓ \quad (\text{nach Multiplikation mit } r^2)$$

$$\Rightarrow R(r) = A_r J_{(\lambda)}(x) = A_r J_{(\lambda)}(k_r r)$$

$$\Rightarrow u(r,\varphi,z,t) = A J_{(\lambda)}(k_r r) e^{\pm i\lambda\varphi} e^{\pm i k_z z} e^{\pm i\omega t}, \quad A = A_r A_\varphi A_z A_t$$

c) $J_{(\lambda)}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\lambda \sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x^2}{4}\right)^n \cdot \frac{1}{n!\,(n+\lambda)!} = 0$

$\Rightarrow$ Abstände der Nullstellen nicht konst.

$\Rightarrow$ Bei nicht konst. Abstand des Autos kann es passieren, dass es durch die von der Besselfunktion verursachten Nullstellen fährt und es so zu Informationsverlusten kommt f

Welle breitet sich aus, pos. der Nullstellen ist Teil der Information.

d) $y = v(x)m(x)$

$$\Rightarrow x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + (x^2-\lambda^2)y$$

$$= x^2\left(v''(x)m(x) + 2v'(x)m'(x) + v(x)m''(x)\right) + x\left(v'(x)m(x) + v(x)m'(x)\right)$$

$$+ (x^2-\lambda^2)v(x)m(x) = 0$$

$$\Rightarrow v''(x) + \underbrace{\left(\frac{2m'(x)}{m(x)} + \frac{1}{x}\right)}_{\text{soll 0 sein}} v'(x) + \left(\frac{m''(x)}{m(x)} + \frac{m'(x)}{m(x)x} + 1 - \frac{\lambda^2}{x^2}\right)v(x) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{2m'(x)}{m(x)} + \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow m'(x) + \frac{1}{2x}m(x) = 0 \Rightarrow m(x) = Ae^{-\frac{1}{2}\ln(x)}$$

da geht hübscher

$$\Rightarrow m'(x) = -\frac{1}{2x}Ae^{-\frac{1}{2}\ln(x)} \quad \Rightarrow m''(x) = \frac{1}{4x^2}Ae^{-\frac{1}{2}\ln(x)}$$

$$\Rightarrow v''(x) + \underbrace{\left(\frac{3}{4x^2} + 1 - \frac{1}{2x^2} - \frac{\lambda^2}{x^2}\right)}_{B(x)} v(x) = 0$$

e) $B(x) \to 1 \Rightarrow 1 + \frac{1}{4x^2} - \frac{1}{2x^2} - \frac{\lambda}{x^2} \to 1 \Rightarrow x \to \infty \Rightarrow r \to \infty$

$\lim_{x\to\infty} J(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to\infty} u(r,\varphi,z,t) = 0$

Da ist nur der Grenzwert, nicht das Verhalten!

Interpretation?

3/5