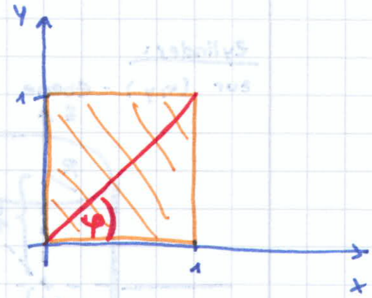
HöMa III - Blatt 0

Aufgabe 0.1

Beschreibe folgende Mengen in Polarkoordinaten!

a) Das Quadrat mit Eckpunkten $(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)$



Fallunterscheidung:

① $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$

② $\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$

Fall ①: Begrenzung $x = 1$

P.K.
$\Rightarrow r \cdot \cos(\varphi) = 1 \Leftrightarrow r = \frac{1}{\cos(\varphi)}$

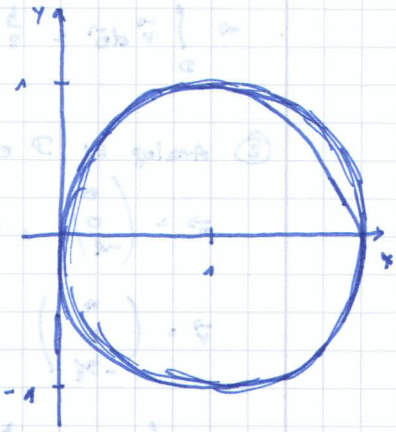
$\Rightarrow \boxed{0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}, \quad 0 \leq r \leq \frac{1}{\cos(\varphi)}}$

Fall ②: Begrenzung $y = 1$

P.K.
$\Rightarrow r \cdot \sin(\varphi) = 1 \Leftrightarrow r = \frac{1}{\sin(\varphi)}$

$\Rightarrow \boxed{\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq r \leq \frac{1}{\sin(\varphi)}}$

b) Den Kreis mit Mittelpunkt $(1,0)$ und Radius $r = 1$



Param. in kart. Koord.

$(x-1)^2 + y^2 \leq 1$

Einsetzen der Polarkoordinaten: $x = r\cos(\varphi), \; y = r\sin(\varphi)$

$\Rightarrow (r\cos(\varphi) - 1)^2 + r^2\sin^2(\varphi) \leq 1$

$\Leftrightarrow r^2(\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)) - r^2\sin^2(\varphi) \leq 1$

$\Leftrightarrow r(r - 2\cos(\varphi)) \leq 0$

Geometrisch: $r \geq 0$

$\Rightarrow r - 2\cos(\varphi) \leq 0$

$\Leftrightarrow -2\cos(\varphi) \leq -r$

$\Leftrightarrow 2\cos(\varphi) \geq r \geq 0$

$\Leftrightarrow \cos(\varphi) \geq 0$

$\Rightarrow -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$

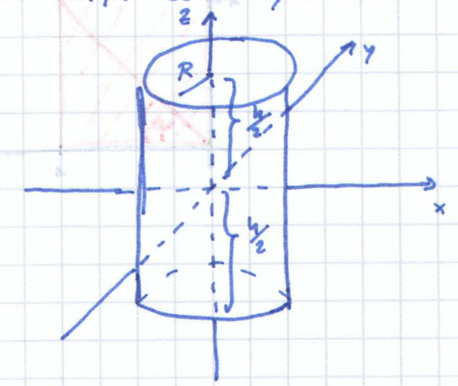
$\Rightarrow \boxed{-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq r \leq 2\cos(\varphi)}$

Aufgabe 0.2

$v: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \; v(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{x}{1+x^2+y^2} \\ \frac{y}{1+x^2+y^2} \\ z \end{pmatrix}$

Zylinder:

zur (x,y)-Ebene symmetrisch. Höhe h, Radius R, z-Achse als Rotationsachse



Die Zylinderoberfläche besteht aus drei Teilen:

1. Deckel D
2. Boden B
3. Mantel M

(1) Auf D ist ein nach außen zeigender NV gegeben durch: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Auf D gilt $z = \frac{h}{2}$

$\Rightarrow \vec{v}_z(x,y,z) = \vec{v}(x,y,\frac{h}{2}) = \begin{pmatrix} * \\ * \\ \frac{h}{2} \end{pmatrix}$ (* : Prinzipiell ist der genaue Wert egal)

$\Rightarrow \vec{v} * \vec{n} = \frac{h}{2}$

$\Rightarrow \int_D \vec{v}\, d\vec{o} = \frac{h}{2} \, vol_2(D) = \frac{h}{2}\pi R^2$

(2) Analog zu D erhalten wir

$\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $z = -\frac{h}{2}$ auf B

$\vec{v} = \begin{pmatrix} * \\ * \\ -h/2 \end{pmatrix}$, $\vec{n} * \vec{v} = \frac{h}{2}$

$\Rightarrow \int_B \vec{v}\, d\vec{o} = \frac{h}{2}\pi R^2$

(3) Für die Berechnung des Flusses durch M wählen wir Zylinderkoordinaten

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \phi(r,\varphi,z) = \begin{pmatrix} R\cos(\varphi) \\ R\sin(\varphi) \\ z \end{pmatrix}$

$\vec{n} := \vec{\phi}_\varphi \times \vec{\phi}_z = \begin{pmatrix} -R\sin(\varphi) \\ R\cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R\cos(\varphi) \\ R\sin(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}$

Wegen $\cos(0) = 1 > 0$, $\sin(0) = 0$, ist $\vec{n}$ für den Fall $\varphi = 0$ gleich $\begin{pmatrix} R \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Dementsprechend zeigt $\vec{n}$ nach außen

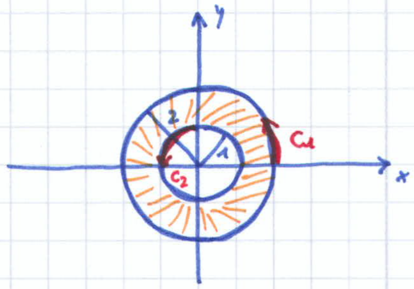
$\Rightarrow \int_M \vec{v}\, d\vec{o} = \int_0^{2\pi}\int_{-h/2}^{h/2} \begin{pmatrix} \frac{R\cos(\varphi)}{1+R^2} \\ \frac{R\sin(\varphi)}{1+R^2} \\ z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R\cos(\varphi) \\ R\sin(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} dz\, d\varphi = \int_0^{2\pi}\int_{-h/2}^{h/2} \frac{R^2\cos^2(\varphi)}{1+R^2} + \frac{R^2\sin^2(\varphi)}{1+R^2}\, dz\, d\varphi$

$= \frac{R^2}{1+R^2}\int_0^{2\pi}\int_{-h/2}^{h/2} 1\, dz\, d\varphi = 2\pi h \frac{R^2}{1+R^2}$

$\Rightarrow$ Gesamtfluss:

$$\underbrace{h\pi R^2}_{\text{„B+D"}} + \underbrace{2\pi h \frac{R^2}{1+R^2}}_{\text{„M"}} = \pi h R^2 \left(1 + \frac{2}{1+R^2}\right)$$

Aufgabe 0.3



$R := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x^2+y^2 \le 4\}$

$\vec{v}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\vec{v}(x,y) = (x^3+y,\ y^3-x)^T$

∂R sei der Rand von R. Ges.: $\int_{\partial R} \vec{v}(\vec{x})\, d\vec{x}$

Der Rand von R besteht aus $\vec{c}_1$ und $\vec{c}_2$.

$$\vec{c}_1 : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2,\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto 2 \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$

$$\vec{c}_2 : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2,\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{c}_1{}' = \begin{pmatrix} -2\sin(t) \\ 2\cos(t) \end{pmatrix},\quad \vec{c}_2{}' = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}$$

(I) Direkte Rechnung:

$$\int_{\partial R} \vec{v}(\vec{x})\, d\vec{x} = \int_{c_1} \vec{v}(\vec{x})\, d\vec{x} - \int_{c_2} \vec{v}(\vec{x})\, d\vec{x} = \int_0^{2\pi} \underbrace{\begin{pmatrix} 8\cos^3(t) + 2\sin(t) \\ 8\sin^3(t) - 2\cos(t) \end{pmatrix}}_{\vec{v}(\vec{c}_1(t))} \underbrace{\begin{pmatrix} -2\sin(t) \\ 2\cos(t) \end{pmatrix}}_{\vec{c}_1{}'(t)} - \underbrace{\begin{pmatrix} \cos^3(t) + \sin(t) \\ \sin^3(t) - \cos(t) \end{pmatrix}}_{\vec{v}(\vec{c}_2(t))} \underbrace{\begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}}_{\vec{c}_2{}'(t)} dt$$

$$= \ldots = \int_0^{2\pi} -3 - 15\cos^3(t)\sin(t) + 15\sin^3(t)\cos(t)\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} -3\, dt - \int_0^{2\pi} 15\cos^3(t)\sin(t)\, dt + \int_0^{2\pi} 15\sin^3(t)\cos(t)\, dt = -3\Big|_0^{2\pi} - \frac{15}{4}\cos^4(t)\Big|_0^{2\pi} + \frac{15}{4}\sin^4(t)\Big|_0^{2\pi}$$

$$= -6\pi - 0 + 0 = -6\pi$$

(II) Integralsätze:

Satz von Green.

Schreibe $P(x,y) = x^3 + y$, $Q(x,y) = y^3 - x$

$\Rightarrow P_y(x,y) = 1$, $Q_x(x,y) = -1$

$$\Rightarrow \int_{\partial R} \vec{v}(\vec{x})\, d\vec{x} = \int_{\partial R} \left(P(x,y)\, dx + Q(x,y)\, dy \right) \overset{\text{Satz von Green}}{=} \int_R (Q_x - P_y)\, dx\, dy$$

$$= -2 \int_1^2 \int_0^{2\pi} r\, d\varphi\, dr = -4\pi \left(\frac{2^2}{2} - \frac{1^2}{2} \right) = -4\pi \cdot \frac{3}{2} = -6\pi$$