HM III - Übungsblatt 2

Aufgabe 6

$g(x,y) = xy$, $h(x,y) = x^2$, $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1-x\}$

Bestätigen Sie die Green'sche Integralformel für diesen Fall.

Green'sche Integralformel:

$$\iint_G (h\,\Delta g - g\,\Delta h)\,dx\,dy = \int_{\partial G} \left(h \cdot \frac{\partial g}{\partial \vec n} - g \cdot \frac{\partial h}{\partial \vec n}\right) ds$$

linke Seite:

$\Delta g = 0$, $\Delta h = 2$

$$\Rightarrow \iint_G (h\,\Delta g - g\,\Delta h)\,dx\,dy = \int_0^1 \int_0^{1-x} -2xy\,dy\,dx = \int_0^1 -xy^2 \Big|_0^{1-x} dx = \int_0^1 -x(1-x)^2\,dx$$

$$= -\int_0^1 (x^3 - 2x^2 + x)\,d = \ldots = -\frac{1}{12}$$

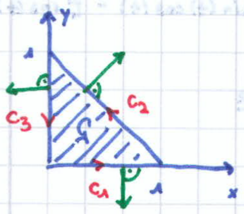
rechte Seite:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec n} ds = \mathrm{grad}(f) \cdot d\vec n$$

$$\Rightarrow h\,\mathrm{grad}(g) = x^2 \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 y \\ x^3 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow g\,\mathrm{grad}(h) = xy \cdot \begin{pmatrix} 2x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x^2 y \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \omega := h\,\mathrm{grad}(g) - g\,\mathrm{grad}(h) = \begin{pmatrix} -x^2 y \\ x^3 \end{pmatrix}$$

Skizze von G:



$c_1 : [0,1] \to \mathbb{R}^2$, $\vec\Phi_1(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}$

$c_2 : [0,1] \to \mathbb{R}^2$, $\vec\Phi_2(t) = \begin{pmatrix} 1-t \\ t \end{pmatrix}$

$c_3 : [0,1] \to \mathbb{R}^2$, $\vec\Phi_3(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1-t \end{pmatrix}$

Tangentialvektoren:

$\vec\Phi_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $d\vec n = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} dt$

$\vec\Phi_2' = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $d\vec n = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} dt$

$\vec\Phi_3' = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $d\vec n = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} dt$

$$\int_{c_1} \vec\omega\,d\vec n = \int_0^1 \begin{pmatrix} 0 \\ t^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} dt = -\int_0^1 t^3\,dt = -\frac{1}{4}$$

$$\int_{c_2} \begin{pmatrix} -(1-t)^2 t \\ (1-t)^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} dt = \int_0^1 (-2t^3 + 5t^2 - 4t + 1)\,dt = \frac{1}{6}$$

$$\int_{c_3} \vec\omega\,d\vec n = 0, \text{ da } \vec\omega = 0 \text{ auf } c_3 \qquad \Rightarrow \int_C \vec\omega\,d\vec n = -\frac{1}{12}$$

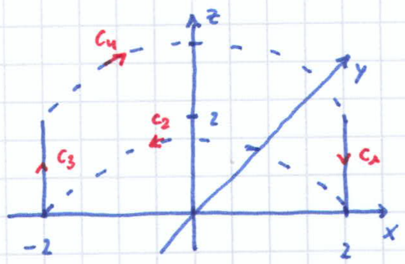
Aufgabe 7

$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 = 4 \;,\; 0 \le z \le 2 \;,\; y \ge 0\}$

Normalvektor habe eine nicht-negative y-Komponente.

$C := \partial M \qquad \vec{\omega} = \begin{pmatrix} x^2 z \\ -2yz - \frac{z^2}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$

Skizze von M:



Direkte Rechnung:

$\vec{\omega}(x,y,z) = 0 \Rightarrow \int_{c_2} \vec{\omega}\, d\vec{x} = 0$

Auf c_1 und c_3 ist $\vec{\phi}'(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ * \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \vec{\omega}(\vec{\phi}(t)) = \begin{pmatrix} 0 \\ * \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \int_{c_1} \vec{\omega}\, d\vec{x} = \int_{c_3} \vec{\omega}\, d\vec{x} = 0$

Parametrisierung von $-c_4$:

$\phi : [0,\pi] \to \mathbb{R}^3$

$\vec{\phi}(t) = \begin{pmatrix} 2\cos(t) \\ 2\sin(t) \\ 2 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{\phi}'(t) = \begin{pmatrix} -2\sin(t) \\ 2\cos(t) \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow -\int_{c_4} \vec{\omega}\, d\vec{x} = -\int_0^\pi \begin{pmatrix} 8\cos^2(t) \\ -8\sin(t) - 2 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2\sin(t) \\ 2\cos(t) \\ 0 \end{pmatrix} = -16 \int_0^\pi \left(-\cos^2(t)\sin(t) - \sin(t)\cos(t) - \frac{1}{4}\cos(t) \right) dt$

$= 16 \left[-\frac{1}{3}\cos^3(t) + \frac{1}{2}\sin^2(t) + \frac{1}{4}\cos(t) \right]_0^\pi = 16 \left(-\left(-\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3} \right) = \frac{32}{3}$

Integralsatz: Satz von Stokes

$\int_{\vec{\phi}(\partial S)} \vec{v}\, d\vec{x} = \int_M \operatorname{rot}(\vec{v})\, \vec{n}\, ds$

Es ist $\operatorname{rot}(\vec{\omega}) = \vec{\nabla} \times \vec{\omega} = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x^2 z \\ -2yz - \frac{z^2}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y + z \\ x^2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Parametrisierung von M:

$\phi : [0,\pi] \times [0,2] \to \mathbb{R}^3$

$\vec{\phi}(t,z) = \begin{pmatrix} 2\cos(t) \\ 2\sin(t) \\ z \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{\phi}_t \times \vec{\phi}_z = \begin{pmatrix} -2\sin(t) \\ 2\cos(t) \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cos(t) \\ 2\sin(t) \\ 0 \end{pmatrix}$ Richtung OK

$$\Rightarrow \int_M \mathrm{rot}(\vec{w})\,\vec{n}\,ds = \int_0^{\pi}\int_0^{2} \begin{pmatrix} 4\sin^2(t)+z \\ 4\cos^2(t) \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\cos(t) \\ 2\sin(t) \\ 0 \end{pmatrix} dz\,dt = \int_0^{\pi}\int_0^{2} \left(8\sin(t)\cos(t) + 2z\cos(t) + 8\sin(t)\cos^2(t)\right) dz\,dt$$

$$= \int_0^{\pi} \left(16\sin(t)\cos(t) + 4\cos(t) + 16\sin(t)\cos^2(t)\right) dt = \left[16\cdot\frac{1}{2}\sin^2(t) + 4\sin(t) - 16\cdot\frac{1}{3}\cos^3(t)\right]_0^{\pi}$$

$$= \ldots = \frac{32}{3}$$

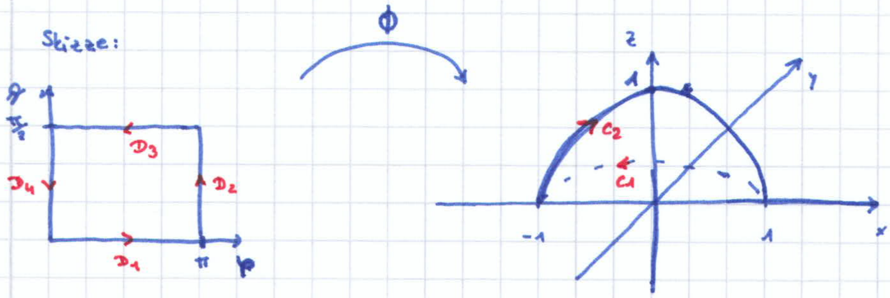
Aufgabe 8

O sei das Viertel der Oberfläche der Kugel mit Radius 1 um den Ursprung, festgelegt durch $y \geq 0$, $z \geq 0$.
z-Komponente des Normalvektors nicht negativ.

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x^2 \\ x \\ y+z \end{pmatrix}$$

Ges.: $\int_O \mathrm{rot}(\vec{v})\,d\vec{o}$ (I) mit Integralsatz
(II) direkt

Skizze:



(I) · ∂O besteht aus den zwei Halbkreisbögen c_1, c_2
· Da O in $(0,0,1)^T$ gerade den NV $(0,0,1)^T$ besitzt, ist c_1 wie ein Kreis in der x-y-Ebene zu durchlaufen.

Satz von Stokes: · $\mathrm{rot}(\vec{v}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Parametrisierung von O:

→ Kugelkoordinaten mit festem Radius 1.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{\Phi}(\varphi, \vartheta) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi)\cos(\vartheta) \\ \sin(\varphi)\cos(\vartheta) \\ \sin(\vartheta) \end{pmatrix}, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi, \quad 0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}$$

Es ist $\vec{\Phi}_\varphi \times \vec{\Phi}_\vartheta = \begin{pmatrix} \cos(\varphi)\cos^2(\vartheta) \\ \sin(\varphi)\cos^2(\vartheta) \\ \sin(\vartheta)\cos(\vartheta) \end{pmatrix}$ Richtung OK

Daraus folgt:

$$I := \int_O \mathrm{rot}(\vec{v})\,d\vec{o} = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\pi} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\varphi)\cos^2(\vartheta) \\ \sin(\varphi)\cos^2(\vartheta) \\ \sin(\vartheta)\cos(\vartheta) \end{pmatrix} d\varphi\,d\vartheta = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\pi} \left(\cos(\varphi)\cos^2(\vartheta) + \sin(\vartheta)\cos(\vartheta)\right) d\varphi\,d\vartheta$$

Vorüberlegungen:

$$\int_0^{\pi} \cos(\varphi)\,d\varphi = 0 \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\vartheta)\cos(\vartheta)\,d\vartheta = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos^2(\vartheta) \underbrace{\int_0^{\pi} \cos(\varphi)\, d\varphi}_{=0} + \int_0^{\pi} \sin(\vartheta)\cos(\vartheta)\, d\varphi \right) d\vartheta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \pi \sin(\vartheta)\cos(\vartheta)\, d\vartheta = \frac{\pi}{2}$$

Globalübung - Blatt 2

KOMPLEX

REELL

Bestimmen Sie alle $z \in \mathbb{C}$ mit

(I) $\exp(z) = 0$ $\qquad z = x + iy$

(II) $\exp(z) = 1$

(III) $\sin(z) = 0$

(IV) $\sin(z) = 1$

(V) $\sin(z) = 2$

(I) $\exp(z) = \exp(x+iy) = \underbrace{e^x}_{\neq 0} \underbrace{(\cos(y) + i\sin(y))}_{\neq 0}$ $\qquad$ gibt's nicht!

(II) $e^x\cos(y) + i\, e^x \sin(y) = 1 + 0i$

$\Leftrightarrow$ a) $e^x \cos(y) = 1$

b) $e^x \sin(y) = 0 \Leftrightarrow y = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

a) $e^x > 0$, also muss $\cos(y) = 1$ sein $\Rightarrow$ Also bleibt $\boxed{y = 2k\pi}$, $k \in \mathbb{Z}$

$e^x \cdot 1 = 1 \quad \Rightarrow \boxed{x = 0}$

$\Rightarrow z = 2k\pi i \quad , k \in \mathbb{Z}$

(III) $\sin(z) = 0 \qquad \sin(z) = \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right)$

$\Leftrightarrow e^{iz} - e^{-iz} = 0 = e^{iz} - \frac{1}{e^{iz}}$

$\Leftrightarrow e^{iz} = \frac{1}{e^{iz}}$

$\Leftrightarrow e^{2iz} = 1 \quad | \ w = 2iz$

$\overset{(II)}{\Leftrightarrow} w = 2k\pi i$

$\Leftrightarrow 2iz = 2k\pi i$

$\Leftrightarrow z = k\pi \quad , k \in \mathbb{Z}$ $\qquad$ Also hat der Sinus nur reelle Nullstellen

(IV) $\sin(z) = 1$

$\Rightarrow \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right) = 1 \quad | \ u = e^{iz} \quad , \frac{1}{u} = e^{-iz}$

$\Leftrightarrow u - \frac{1}{u} = 2i$

$\Leftrightarrow u^2 - 2ui - 1 = 0$

$\Leftrightarrow (u-i)^2 = 0$

$\Leftrightarrow u = i$

$\Leftrightarrow e^{iz} = i$

$\Leftrightarrow e^{-y}\left(\cos(x) + i\sin(x)\right) = i$

$\Leftrightarrow e^{-y}\cos(x) = 0 \ \wedge \ e^{-y}\sin(x) = 1$

$\Rightarrow \boxed{x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi}$

$\sin(x) = \pm 1$, nur $+1$ möglich

$\Rightarrow e^{-y} = 1 \Leftrightarrow \boxed{y = 0}$ $\qquad \Rightarrow z = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Also hat der Sinus nur auf $\mathbb{R}$ den Wert 1

(V) $\sin(z) = 2$

$\Leftrightarrow u^2 - 4ui - 1 = 0$

$\Leftrightarrow (u-2i)^2 + 4 - 1 = 0$

$\Leftrightarrow (u-2i) = -3$

$\Leftrightarrow u - 2i = \pm\sqrt{3}\, i$

$\Leftrightarrow u = (2 \pm \sqrt{3})\, i$

$\Leftrightarrow e^{-y}(\cos(x) + i\sin(x)) = (2\pm\sqrt{3})\, i$

$\Rightarrow \cos(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad , k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow e^{-y}\sin(x) = 2 \pm \sqrt{3} \Rightarrow k$ gerade , $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow \sin(x) = 1$

$\Rightarrow e^{-y} = 2\pm\sqrt{3}$

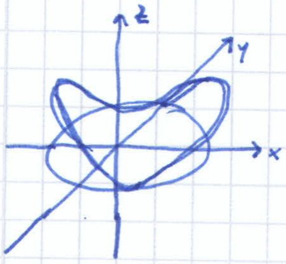
$\Leftrightarrow y = -\ln(2\pm\sqrt{3})$

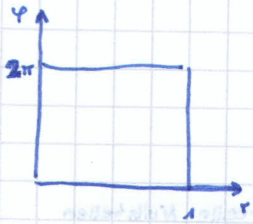
Also $\sin(z) = 2 \Leftrightarrow z = \frac{\pi}{2} - \ln(2\pm\sqrt{3})\, i + 2k\pi \quad , k \in \mathbb{Z}$

Aufgabe 10

$M = \{(x,y,z)^T = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \\ r^2\cos^2(\varphi) \end{pmatrix} \mid 0 \le r \le 1,\ 0 \le \varphi \le 2\pi\}$

$\vec{v} = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 1 \end{pmatrix}$





∂M Randkurve

$\int_{\partial M} \vec{v}\, d\vec{o} = \int_M \mathrm{rot}(\vec{v})\, d\vec{o}$

(II) (I)

(I) $\vec{\phi}(r,\varphi) = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \\ r^2\cos^2(\varphi) \end{pmatrix}$ $\quad \vec{\phi}_r \times \vec{\phi}_\varphi = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ 2r\cos^2(\varphi) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -r\sin(\varphi) \\ r\cos(\varphi) \\ -2r^2\cos(\varphi)\sin(\varphi) \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -2r^2\cos(\varphi) \\ 0 \\ r \end{pmatrix}$

$$\mathrm{rot}(\vec{v}) = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\int_M \mathrm{rot}(\vec{v})\, d\vec{o} = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} * \\ * \\ r \end{pmatrix} d\varphi\, dr = \int_0^1 \int_0^{2\pi} 2r\, d\varphi\, dr = 2\pi$$

II

$$\vec{\phi}(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ \cos^2(\varphi) \end{pmatrix}, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad \vec{\phi}'(\varphi) = \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \\ -2\cos(\varphi)\sin(\varphi) \end{pmatrix}$$

$$\int_{\partial M} \vec{v}\, d\vec{s} = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \\ -2\cos(\varphi)\sin(\varphi) \end{pmatrix} d\varphi = \int_0^{2\pi} \underbrace{-2\cos(\varphi)\sin(\varphi)}_{=0} + 1\, d\varphi = 2\pi$$