Nutze: $x_i = d_i e^{i\omega t}$

$$\Rightarrow \quad -d_1\omega^2 + \frac{k}{M}(d_1 - d_2) = 0$$
$$-d_2\omega^2 + \frac{k}{m}(2d_2 - d_1 - d_3) = 0$$
$$-d_3\omega^2 + \frac{k}{M}(d_3 - d_2) = 0$$

das lässt sich schreiben als:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -\omega^2 + \frac{k}{M} & -\frac{k}{M} & 0 \\ -\frac{k}{m} & -\omega^2 + \frac{2k}{m} & -\frac{k}{m} \\ 0 & -\frac{k}{M} & -\omega^2 + \frac{k}{M} \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} = \vec{0}$$ ✓

$$\operatorname{Det} A \overset{!}{=} 0 \iff \left(-\omega^2 + \frac{k}{M}\right)^2 \left(-\omega^2 + \frac{2k}{m}\right) - \frac{2k^2}{M m}\left(-\omega^2 + \frac{k}{M}\right) \overset{!}{=} 0$$

(Sarrus)

Die ersten Lösungen können abgelesen werden:

$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{M}}$, $\omega_2 = 0$ ✓

Betrachte nun: $\left(-\omega^2 + \frac{k}{M}\right)\left(-\omega^2 + \frac{2k}{m}\right) - \frac{2k^2}{Mm} = 0$

$$= \omega^4 - \frac{2k}{m}\omega^2 - \frac{k}{M}\omega^2 + \frac{2k^2}{mM} - \frac{2k^2}{mM} = 0$$

$$= \omega^4 - \omega^2\left[\frac{2k}{m} + \frac{k}{M}\right] = \omega^2\left[\omega^2 - \left[\frac{2k}{m} + \frac{k}{M}\right]\right]$$

$$\Rightarrow \omega_3 = \sqrt{k\left[\frac{2}{m} + \frac{1}{M}\right]}$$ ✓

f

$\omega_2 = 0$, da das C-Atom als Ursprung gewählt wurde

Die Frequenzen sind unabhängig von der Wahl der Koordinaten!

4.5/5