HöMa III - Übungsblatt 10

Aufgabe 46

$x^2y'' + xy' + \lambda y = 0 \;,\; y(1) = 0 \;,\; y(e^{2\pi}) = 0 \;;\; x \in [1, e^{2\pi}]$

22.21

$y'' + xp(x)y' + q(x)y = 0$

$\rightsquigarrow$ Indexgleichung: $\rho(\rho-1) + p(0)\rho + q(0) = 0$

Wenn ρ_1, ρ_2 Lösungen der Indexgleichung sind, so ist ein F.S. gegeben durch:

- $\Phi_1(x) = x^{\rho_1} \;,\; \Phi_2(x) = x^{\rho_2} \;;\; \rho_1 \neq \rho_2$
- $\Phi_1(x) = x^{\rho_1} \;,\; \Phi_2(x) = x^{\rho_1}\ln(x) \;;\; \rho_1 = \rho_2$

- - - - - - - - - - - - -

$L[y] = y'' + p_1 y' + p_2 y$

$L[y] = f \;//\; f \equiv 0$

REWP:

$L[y] = \lambda y$

Hier: $p(x) = 1 \;,\; p(0) = 1 \;,\; p(e^{2\pi}) = 1 \;,\; q(x) = \lambda$

Indexgleichung
$\Rightarrow \rho(\rho-1) + \rho + \lambda = 0$

$\Leftrightarrow \rho_{1/2} = \pm\sqrt{\lambda}$

1. Fall: $\lambda < 0$

$\Rightarrow \Phi_1(x) = x^{\rho_1} \;,\; \Phi_2(x) = x^{-\rho_1}$ und $\{\Phi_1, \Phi_2\}$ F.S. der DGL

$$D = \begin{vmatrix} R_a\Phi_1 & R_a\Phi_2 \\ R_b\Phi_1 & R_b\Phi_2 \end{vmatrix}$$

heißt: „Setze den jeweiligen Randwert in Φ ein"
$; a = 1 \;; b = e^{2\pi}$

$$= \begin{vmatrix} \Phi_1(1) & \Phi_2(1) \\ \Phi_1(e^{2\pi}) & \Phi_2(e^{2\pi}) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{2\pi\rho_1} & e^{-2\pi\rho_1} \end{vmatrix} = e^{-2\pi\rho_1} - e^{2\pi\rho_1} \neq 0$$

2. Fall: $\lambda = 0$

$\Rightarrow \Phi_1(x) = 1 \;,\; \Phi_2(x) = \ln(x)$ mit $\{\Phi_1, \Phi_2\}$ F.S. der DGL

$$D = \begin{vmatrix} R_a\Phi_1 & R_a\Phi_2 \\ R_b\Phi_1 & R_b\Phi_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2\pi \end{vmatrix} = 2\pi \neq 0$$

3. Fall: $\lambda > 0$

$\Rightarrow \rho = \pm i \sqrt{|\lambda|}$

? ?

$\Rightarrow$ komplexe Lösungen: $x^{\rho} = e^{i\rho \ln(x)}$; $x^{-\rho} = e^{-i\rho \ln(x)}$

$\rightsquigarrow \phi_1(x) = \sin(\rho \ln(x))$

$\phi_2(x) = \cos(\rho \ln(x))$

mit $\{\phi_1, \phi_2\}$ F.S. der DGL

$$D = \begin{vmatrix} R_a \phi_1 & R_a \phi_2 \\ R_b \phi_1 & R_b \phi_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \sin(2\pi\rho) & \cos(2\pi\rho) \end{vmatrix} = -\sin(2\pi\rho)$$

$\Rightarrow D = 0$ für $\rho = \frac{k}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow \lambda = -\frac{k^2}{4} \Rightarrow \boxed{\phi_k := \sin\left(\frac{k}{2} \ln(x)\right)} \rightarrow$ Eigenfunktion

Aufgabe 47

$\mu \in \mathbb{R}$: $y'' = \mu y$; $y(0) = y(\pi)$, $y'(0) = y'(\pi)$

Fall 1: $\mu < 0$

setze $s := \sqrt{-\mu}$

$\Rightarrow$ F.S. gegeben durch $\{\cos(sx), \sin(sx)\}$

$\Rightarrow$ Allgemeine Lösung:

$y(x) = A\cos(sx) + B\sin(sx) \qquad A, B \in \mathbb{R}$

$y'(x) = -sA\sin(sx) + sB\cos(sx)$

Gleichungssystem für A und B:

$y(0) = y(\pi) \iff A = A\cos(s\pi) + B\sin(s\pi)$

$\iff A(\cos(s\pi) - 1) + B\sin(s\pi) = 0$

$y'(0) = y'(\pi) \iff sB = -sA\sin(s\pi) + sB\cos(s\pi)$

$\iff -A\sin(s\pi) + B(\cos(s\pi) - 1) = 0$

Es gibt nicht triviale Lösungen, falls

$$D := \begin{vmatrix} \cos(s\pi) - 1 & \sin(s\pi) \\ -\sin(s\pi) & \cos(s\pi) - 1 \end{vmatrix} \overset{!}{=} 0$$

$\iff (\cos(s\pi) - 1)^2 + \sin^2(s\pi) = 0$

$\iff \cos^2(s\pi) - 2\cos(s\pi) + 1 + \sin^2(s\pi) = 0$

$\Leftrightarrow \cos(s\pi) = 1$

$\Leftrightarrow s\pi = 2k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow s = 2k$

Da $s = \sqrt{-\mu}$ und $\mu < 0$ gilt, kommt nur $k \in \mathbb{N}$ in Frage

$\Rightarrow$ $\left.\begin{array}{l} \cos(s\pi) = \cos(k\pi) = 1 \\ \sin(s\pi) = \sin(k\pi) = 0 \end{array}\right\}$ weil k gerade

$\Rightarrow$ Das LGS hat Rang 0

$\Rightarrow$ Jede Funktion $y(x) = A\cos(2kx) + B\sin(2kx)$, $A, B \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$

Fall 2: $\mu = 0$

Allgemeine Lösung: $y(x) = A + Bx \qquad A, B \in \mathbb{R}$
$y'(x) = B$

$y(0) = y(\pi) \Leftrightarrow A = A + B\pi \Leftrightarrow B = 0$
$y'(0) = y'(\pi) \Leftrightarrow B = 0 = B$ ist immer erfüllt

$\Rightarrow A \in \mathbb{R}$ beliebig

$\Rightarrow y(x) = A$ löst das Problem

Fall 3: $\mu > 0$

setze $s := \sqrt{\mu}$

$\Rightarrow$ F.S. ist gegeben durch $\{e^{sx}, e^{-sx}\}$

$\Rightarrow$ Allgemeine Lösung: $y(x) = Ae^{sx} + Be^{-sx}$
$y'(x) = sAe^{sx} - sBe^{-sx}$

Gleichungssystem für A und B:

$y(0) = y(\pi) \Leftrightarrow A + B = Ae^{s\pi} + Be^{-s\pi}$
$\Leftrightarrow A(e^{s\pi} - 1) + B(e^{-\pi s} - 1) = 0$

$y'(0) = y'(\pi) \Leftrightarrow sA - sB = sAe^{s\pi} - sBe^{-s\pi}$
$\Leftrightarrow As(e^{s\pi} - 1) - sB(e^{-s\pi} - 1) = 0$
$\Leftrightarrow A(e^{s\pi} - 1) - B(e^{-s\pi} - 1) = 0$

Es gibt nicht-triviale Lösungen, falls

$$D = \begin{vmatrix} e^{s\pi} - 1 & e^{-\pi s} - 1 \\ e^{s\pi} - 1 & -(e^{-s\pi} - 1) \end{vmatrix} \overset{!}{=} 0$$

$\Leftrightarrow -\left((e^{s\pi} - 1)(e^{-s\pi} - 1) + (e^{s\pi} - 1)(e^{-s\pi} - 1)\right) = \overbrace{-2}^{\neq 0}\overbrace{(e^{s\pi} - 1)}^{\neq 0}\overbrace{(e^{-s\pi} - 1)}^{\neq 0} = 0$ ↯

$\Rightarrow$ Es gibt nur die triviale Lsg. zu diesen Randwerten

Aufgabe 48

$\mu \in \mathbb{R}$, $y'' + 2y' + y = -\mu^2 y$, $y(0) = 0$, $y(\pi) - y'(\pi) = 0$

Da μ nur als Quadrat vorkommt, reicht es aus $\mu \geq 0$ anzunehmen.

Charakteristisches Polynom: $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = -\mu^2$

$\Rightarrow$ Für $\mu = 0$: $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$

Für $\mu > 0$: $\lambda_{1/2} = -1 \pm \mu i$

1. Fall: $\mu = 0$

F.S.: $\{ e^{-x}, x e^{-x} \}$

Es ist $\frac{d}{dx} x e^{-x} = e^{-x}(1-x)$ mit $y(\pi) - y'(\pi) = \pi e^{-\pi} - e^{-\pi}(1-\pi) = e^{-\pi}(2\pi - 1)$

$$\Rightarrow D_{\mu=0} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ * & e^{-\pi}(2\pi - 1) \end{vmatrix} \neq 0$$

$\rightarrow$ $\mu = 0$ ist kein Eigenwert und es gibt nur die triviale Lsg.

2. Fall: $\mu > 0$

Ein F.S. ist $\{ \varphi_1, \varphi_2 \}$ mit

$\varphi_1(x) = e^{-x} \sin(\mu x)$, $\varphi_2(x) = e^{-x} \cos(\mu x)$

Mit $\varphi_1'(x) = e^{-x}(\mu \cos(\mu x) - \sin(\mu x))$,

$\varphi_1(x) - \varphi_1'(x) = e^{-x}(2\sin(\mu x) - \mu \cos(\mu x))$ folgt

$$D_{\mu>0} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ e^{-\pi}(2\sin(\mu\pi) - \mu\cos(\mu\pi)) & * \end{vmatrix} = -e^{-\pi}(2\sin(\mu\pi) - \mu\cos(\mu\pi))$$

Nach dem Zwischenwertsatz existieren Lösungen dieser Gleichung in $[0, \pi]$.

Bezeichne μ_n, $n \in \mathbb{N}$, die n-te positive Schnittstelle der Graphen von $y = x$ und $y = 2\tan(\pi x)$.

In $\varphi(x) = c_1 \varphi_1(x) + c_2 \varphi_2(x)$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ ist $c_2 = 0$ und c_1 ist frei wählbar.

$\rightarrow$ EW.: $\mu = \mu_n$, $n \in \mathbb{N}$

Eigenfunktionen

$$\varphi_n(x) = e^{-x} \sin(\mu_n x) , \quad n \in \mathbb{N}$$

$$- e^{-\pi} \left(2 \sin(\mu\pi) - \mu \cos(\mu\pi) \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 2 \sin(\mu\pi) - \mu \cos(\mu\pi) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 2 \sin(\mu\pi) = \mu \cos(\mu\pi)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{2\sin(\mu\pi)}{\cos(\mu\pi)} = \mu$$

$$\rightsquigarrow \quad 2 \tan(\mu\pi) = \mu$$

$$D_{\mu>0}(\mu_n) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & * \end{vmatrix} = \quad \rightsquigarrow \quad \begin{array}{c} \begin{array}{cc} c_1 & c_2 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 0 & * & 0 \end{array} \right) \end{array} \quad \begin{array}{l} \rightsquigarrow c_2 = 0 \\ \rightsquigarrow 0 \cdot c_1 = 0 \Rightarrow c_1 \in \mathbb{R} \text{ beliebig} \end{array}$$

Globalübung - Blatt 10

Aufgabe 49

$$y'' + c_1(x)\, y' + c_2(x)\, y = -\lambda y \qquad y(a) = y(b) = 0$$

$$z(x) = \exp\left(\tfrac{1}{2}\int c_1(x)\, dx\right) y(x)$$

$$(p(x)\, z'(x))' + q(x)\, z(x) = -\lambda z \quad , \; z(a) = z(b) = 0$$

① $z(a) = z(b) = 0$ ✓

Ab jetzt: $c_1 := c_1(x)$, $c_2 := c_2(x)$

$$y = \exp\left(-\tfrac{1}{2}\int c_1\, dx\right) z$$

$$y' = \exp\left(-\tfrac{1}{2}\int c_1\, dx\right)\left[-\tfrac{1}{2} c_1 z + z'\right]$$

$$y'' = \exp\left(-\tfrac{1}{2}\int c_1\, dx\right)\left[\tfrac{1}{4} c_1^2 z - \tfrac{1}{2} c_1 z' - \tfrac{1}{2} c_1' z - \tfrac{1}{2} c_1 z' + z''\right]$$

Alles einsetzen und mit $\exp\left(\tfrac{1}{2}\int c_1\, dx\right)$ multiplizieren:

$$z'' - c_1 z' + \left(\tfrac{1}{4} c_1^2 - \tfrac{1}{2} c_1'\right) z - \tfrac{1}{2} c_1^2 z + c_1 z' + c_2 z = -\lambda z$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{z''} + \underbrace{\left(-\tfrac{1}{4} c_1^2 - \tfrac{1}{2} c_1' + c_2\right)}_{q(x)} z = -\lambda z$$

● $(1 \cdot z')'$

$\Rightarrow p(x) = 1$

$L(z) := (pz')' + qz$ Man hätte gerne: $\langle L(z), w \rangle = \langle z, L(w) \rangle$, $z(a) = z(b) = 0$, $w(a) = w(b) = 0$

$$\langle L(z), w \rangle = \int_a^b \left[(pz')' + qz\right] \cdot w\, dt = \int_a^b (pz')' w + \int_a^b qzw\, dt$$

$$= \underbrace{(pz') \cdot w \Big|_b^a}_{=0} - \int_a^b \underbrace{pz'w'}_{pw' \cdot z'} dt + \int_a^b qzw\, dt = \underbrace{-p\, w' z \Big|_a^b}_{=0} + \int_a^b \left((pw')' z + qwz\right) dt$$

$$= \int_a^b \left((pw')' + qw\right) z\, dt = \langle L(w), z \rangle$$

Aufgabe 50

$$g(x,t) = \begin{cases} x(1-t) , & 0 \le x \le t \le 1 \\ t(1-x) , & 0 \le t \le x \le 1 \end{cases} \qquad f \in C([0,1])$$

$u(x) = -\int_0^1 g(x,t)\, f(t)\, dt$ löst $-u'' = f$, $u(0) = u(1) = 0$

$$u(x) = \int_0^x t(1-x)\, f(t)\, dt + \int_x^1 x(1-t)\, f(t)\, dt = (1-x)\int_0^x t\, f(t)\, dt + x\int_x^1 (1-t)\, f(t)\, dt$$

$$u(0) = (1-0) \cdot 0 + 0 \cdot \int \ldots = 0$$

$$u(1) = (1-1) \cdot \int \ldots + 1 \cdot 0 = 0$$

$$u'(x) = -\int_0^x t\, f(t)\, dt + (1-x)x\, f(x) + \int_x^1 (1-t) f(t)\, dt - x(1-x) f(x)$$

$$u''(x) = -x f(x) - (1-x) f(x) = -f(x) \quad \square$$

$u'' = -f$

F.S.: $\varphi_1(x) = 1$, $\varphi_2(x) = x$, $W(x) = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \\ \varphi_3 & \varphi_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$

$$\varphi_p = -\varphi_1(x) \int \frac{\varphi_2(x) f(x)}{W(x)}\, dx + \varphi_2(x) \int \frac{\varphi_1(x) f(x)}{W(x)}\, dx$$

Hier: $\varphi_1(x) = 1$, $W(x) = 1$, $\varphi_2(x) = x$ $\qquad f \longmapsto -f$

$$\varphi_p = -\int_0^x \frac{t\,(-f(t))}{1}\, dt + x \int_0^x \frac{1\cdot(-f(t))}{1}\, dt = \int_0^x (t-x) f(t)\, dt$$

$$= \int_0^1 k(x,t) f(t)\, dt \quad \text{mit} \quad k(x,t) = \begin{cases} t-x, & 0 \le t \le x \le 1 \\ 0, & 0 \le x \le t \le 1 \end{cases}$$

Allg. Lösung:

$$\varphi(x) = \varphi_p(x) + c_1 \varphi_1(x) + c_2 \varphi_2(x) \qquad c_1 = \int_0^1 d_1(t) f(t)\, dt \qquad d_1, d_2 \text{ neue unbekannte noch zu findende Funktionen}$$

$$= \int_0^1 k(x,t) f(t)\, dt + c_1 \varphi_1 + c_2 \varphi_2 \qquad c_2 = \int_0^1 d_2(t) f(t)\, dt$$

$$= \int_0^1 \left[k(x,t) + d_1(t)\cdot 1 + d_2(t)\cdot x \right] f(t)\, dt$$

$\varphi(0) \overset{!}{=} 0 \iff \int_0^1 \left[k(0,t) + d_1(t)\cdot 1 + d_2(t)\cdot 0 \right] f(t)\, dt = 0$ für alle f

also $[\ ] = 0 \iff 0 + d_1(t) + d_2(t)\cdot 0 = 0 \Rightarrow d_1(t) = 0$

$\varphi(1) \overset{!}{=} 0 \qquad t - 1 + d_2(t)\cdot 1 \Rightarrow d_2(t) = 1-t$

$$g(x,t) = k(x,t) + (1-t)\cdot x = \begin{cases} t - x + x - xt, & 0 \le t \le x \le 1 \\ x(1-t), & 0 \le x \le t \le 1 \end{cases} = \begin{cases} t(1-x), & 0 \le t \le x \le 1 \\ x(1-t), & 0 \le x \le t \le 1 \end{cases}$$