11.1

a) wahr

b) $I^{(n)}(f) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) \int_a^b L_k^{(n)}(x)\, dx$

mit n+1 Stützstellen ist exakt für alle Polynome n+1-ten Grades

falsch

Gaußpunkt

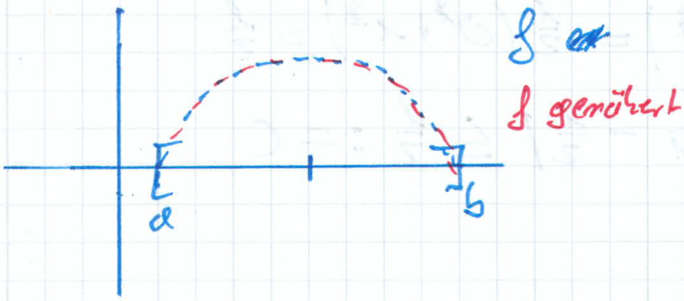
~~Knoten~~ Intervallgrenzen

Trapezregel : $I^{(1)}(f) = \frac{b-a}{2} \left(f(a) + f(b) \right)$

Simpsonregel : $I^{(2)}(f) = \frac{b-a}{6} \left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right)$

Polynome von Grad 3 werden exakt integriert.

Wahl der Stützstelle ist wichtig, Gaußpunkt gut, andere eher mies.



c) falsch : $\|J\| < 1$ muss gelten

$\|H\| < 1$ " für Gauß Seidel

Spr(A) gibt keine Aussage über Konvergenz

Das Jacobi-Verfahren konvergiert z. B. für jede Diagonalmatrix in einem Schritt

Für solche Matrizen kann Spr(A) beliebig groß sein, es gilt jedoch mit

$A = \underbrace{D + L + R}_{A} = D$, $= 0$, da A Diagonalmatrix

$J = -D^{-1}(L+R) = 0$

d) Wahr

e) Falsch, z. B. bei doppelter NST „nur" lineare oder keine Konvergenz

11.2

x_i	-2	0	1
y_i	-10	2	5

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}$$

$$L_1(x) = \frac{x-0}{-2-0} \cdot \frac{x-1}{-2-1} = \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{6}x$$

$$L_2(x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 1$$

$$L_3(x) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x$$

Das Interpolationspolynom

$$\varphi(x) = -10\,L_1(x) + 2\,L_2(x) + 5\,L_3(x) = -x^2+4x+2$$

$$(-1^2+4+2 = 5)$$

$$(\varphi(1) = 1/3 = 5 \qquad \varphi(2) = -4+4\cdot 2+2 = 6$$

11.3

$$I^{(1)} = \frac{b-a}{2}\left[f(a)+f(b)\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left(0^2+1^2\right) = \frac{1}{2}\left(0^2+1^2\right) = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow |I-I^{(1)}| = \left|\frac{1}{2+1} - \frac{1}{2}\right| \leq \frac{1}{2} := C$$

11.4

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 4 & 6 & -2 \\ 0 & -4 & 4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

LR:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & & \\ 2 & 1 & \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

b) $\det(A) = \det(LR) = \det(R) = r_{11} \cdot r_{22} \cdot r_{33}$
$= 2 \cdot 4 \cdot (-2) = -16$

c) Löse $Ax = b$

Vorwärts: $Ly = b \Rightarrow y = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

Rückwärts: $Rx = y \Rightarrow x = \left(\begin{smallmatrix} 8 \\ 9 \end{smallmatrix}\right)$

11.5

a) Betrachte x klein genug (z.B. $x = -10^5$)

$f(x) > 0$ und $f < 0$ für x groß genug (z.B. $x = 10^5$)

Zwischenwertsatz: existiert mind. eine NST

Die NST ist eindeutig, da

$f'(x) = -1 + \frac{1}{2}\sin(x) < 0$

(also f streng monoton fallend)

b) $f(x) = 0 \iff \underbrace{(f(x) + x)}_{g(x)} = x$

mit $g(x) = 10 - \frac{1}{2}\cos(x)$

$g(x) = x$ ← Fixpunktproblem

$f: \boxed{\mathbb{R}} \to \boxed{\mathbb{R}}$ $\quad \boxed{f(x)} = \boxed{10 - x - \frac{1}{2}\cos(x)}$

Banach: · Selbstabbildung? ✓

· Kontraktion

$\|g(x) - g(y)\| \leq q\,\|x - y\| \iff \frac{\|g(x) - g(y)\|}{\|x - y\|} = \|g'(x)\| < q$

$|g'(x)| = |\frac{1}{2}\sin(x)| \leq \frac{1}{2} < 1$ Kontraktion / Banach erfüllt

$\Rightarrow$ Fixpunkt konvergiert $\forall x$

11.6

a) $A = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & & 0 \\ 1 & 0 & \\ \frac{3}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{L} + \underbrace{\begin{bmatrix} -4 & & 0 \\ & 2 & \\ 0 & & -2 \end{bmatrix}}_{=D} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{R}$

$J := D^{-1}(L + R)$ $\qquad D^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & & 0 \\ & \frac{1}{2} & \\ 0 & & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

$J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & 0 & 0 \end{bmatrix}$

b) Ist Jacobi bzgl. A konvergent?

• $\|J\| < 1$, • Ja, da A strikt diagonaldominant

11.7

$$d^{(0)} = -\nabla f(x^0) = -2Ax^0 = -\begin{pmatrix} 16 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_0 = \frac{(d^{(0)})^T d^{(0)}}{(d^{(0)})^T A d^{(0)}} = \frac{5}{36}$$

$$x^1 = x^0 + \alpha_0 d^0 = -\begin{pmatrix} \frac{11}{9} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

11.8

geg.: $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

i) pos. definit?

A_1: ja, da $1 > 0$

A_2: nein, da $-4 < 0$

ii) Berechne Cholesky-Zerlegung

→ Voraussetzung: symmetrisch + pos. definit

$$A = \tilde{L}\tilde{L}^T$$
$$= L D^{1/2} D^{1/2} L^T$$

LR-Zerlegung

diag(A_1)

$$\tilde{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$l_{kk} = \sqrt{a_{kk} - \sum_{j=1}^{k-1} l_{kj}^2}$$

$$l_{ik} = \frac{1}{l_{kk}} \left(a_{ik} - \sum_{j=1}^{k-1} l_{ij} l_{kj} \right)$$