7.1

b) $h(x) = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{3}x^2 - x + \frac{1}{6}$

Fixpunktproblem ?

1. Möglichkeit : Newton

$x_{k+1} = x_k + \frac{h(x_n)}{h'(x_n)}$

2. Möglichkeit

$0 = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{3}x^2 - x + \frac{1}{6} \Rightarrow x_{n+1} = \frac{1}{6}x_n^3 + \frac{1}{3}x_n^2 + \frac{1}{6}$

Die Folge x_{n+1} konvergiert nach Banach gegen einen Fixpunkt x^*, falls

① $f(D) \subset D$

② f ist Kontraktion

zu ①: $f|x| < \frac{1}{2}$ ist

$|g(x)| \leq \frac{1}{6}(\frac{1}{2})^3 + \frac{1}{3}(\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{6} = \frac{13}{48} < \frac{1}{2}$

$g(x) \in I = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ selbstabbildung

zu ②: z.Z. $|g(x) - g(y)| \leq q|x-y|$

$\Rightarrow \underbrace{\frac{|g(x) - g(y)|}{|x-y|}}_{\max |g'(\xi)|,\ \xi \in G} \leq q \quad (\overset{!}{<} 1)$

(Sonst gilt Banach nicht!)

$f'(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x \cdot \frac{2}{3}$

$\Rightarrow |f'(x)| < \frac{1}{2}(\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{3} = \frac{11}{24} =: q < 1$

d.h. Konvergenz durch Fixpunktiteration durch Banach gesichert

c) $|x_n - x^*| \leq \frac{q^n}{1-q}|x_1 - x_0|$

Mit: $x_0 = 0$; $x_1 = f(x_0) = \frac{1}{6}$, $q = \frac{11}{24}$

$|x_n - x^*| \leq \frac{(\frac{11}{24})^n}{1 - \frac{11}{24}} |\frac{1}{6}| = \frac{4}{3}(\frac{11}{24})^n \overset{!}{\leq} 10^{-3}$

$\Rightarrow n \geq \ln(4000/13) / \ln(24/11) \approx 7{,}34 \Rightarrow 8$ Iterationen

7.2

b) $x + \ln x = 0$

① $x_{t+1} = -\ln(x) := g_1 \Leftrightarrow x + \ln(x) = 0$

Äquivalent ✓

Zeigen mit Banach, ob Gleichung als Fixpunktproblem geeignet.

- Selbstabbildung

$g(0{,}5) = -\ln(0{,}5) \approx 0{,}69 \notin I$

$g(0{,}62) = -\ln(0{,}62) = 0{,}478 \notin I$

$\Rightarrow$ Nicht als Fixpunktiteration anwenden

② $x_{t+1} = e^{-x_t} =: g_2(x)$

$\Leftrightarrow x + \ln(x) = 0$

$\Leftrightarrow -x = \ln(x)$

$\Leftrightarrow e^{-x} = x$

$g_2(0{,}5) < 0{,}62 \;;\; g_2(0{,}62) > 0{,}5$

$\Rightarrow$ Selbstabbildung

Kontraktion:

$|g_2'(x)| = |e^{-x}| \leq e^{-0.5} = \overbrace{0.607}^{:= q} < 1$

$\Rightarrow$ Banach anwendbar

③ $x_{t+1} = \frac{1}{2}(x_t + e^{-x_t}) =: g_3$

$x + \ln(x) = 0 \Leftrightarrow e^{-x} = x \Leftrightarrow x + e^{-x} = 2x \Rightarrow x = \frac{1}{2}(x + e^{-x})$

- Selbstabbildung:

$g_3'(x) = \frac{1}{2}(1 - e^{-x}) > 0$

$g'' = \frac{1}{2} e^{-x} > 0$