Jonah
David
Yoscha
Lars

1) $1 = e^{\beta\Omega} \sum_{N=0}^{\infty} e^{\beta\mu N} Q_N \qquad Q_N = \int \frac{dp^{3N} dq^{3N}}{h^{3N} N!} e^{-\beta H}$

$-\beta\Omega = \ln\Big(\underbrace{\sum_{N=0}^{\infty} e^{\beta\mu N} Q_N}\Big)$

$\Omega = -\frac{1}{\beta} \ln(Z_{gk}) = -pV = F - \mu N$

$-\frac{\partial\Omega}{\partial\mu}\Big|_{T,V} = \langle N\rangle = \frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial\mu}(\ln(Z_{gk})) = \frac{1}{\beta Z_{gk}} \frac{\partial Z_{gk}}{\partial\mu}$

$= \frac{1}{\beta Z_{gk}} \sum_{N=0}^{\infty} Q_N \frac{\partial}{\partial\mu}(e^{\beta\mu N}) = \frac{1}{Z_{gk}} \sum_{N=1}^{\infty} N Q_N e^{\beta\mu N}$

Analog: $\langle N^2\rangle = \frac{1}{Z_{gk}} \sum_{N=1}^{\infty} N^2 Q_N e^{\beta\mu N} = \frac{1}{Z_{gk}} \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2}{\partial\mu^2} Z_{gk}$

$(\Delta N)^2 = \langle N^2\rangle - \langle N\rangle^2 = \frac{1}{Z_{gk}}\frac{1}{\beta^2}\frac{\partial^2 Z_{gk}}{\partial\mu^2} - \frac{1}{Z_{gk}^2}\frac{1}{\beta^2}\left(\frac{\partial Z_{gk}}{\partial\mu}\right)^2$

$= \frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial\mu}\left(\frac{1}{Z_{gk}}\frac{1}{\beta}\frac{\partial Z}{\partial\mu}\right) = \frac{1}{\beta^2}\frac{\partial^2}{\partial\mu^2}\big(\ln(Z_{gk})\big) = \frac{1}{\beta}\frac{\partial\langle N\rangle}{\partial\mu}$

$= \frac{1}{\beta}\frac{\partial N}{\partial p}\Big|_{T,V}\frac{\partial p}{\partial\mu}\Big|_{T,V} = \frac{1}{\beta}\frac{N}{V}\frac{\partial N}{\partial p}\Big|_{T,V}$

$d\Omega = dF - Nd\mu - \mu dN$
$= -SdT - pdV - Nd\mu$

tot. Dif $\Rightarrow \frac{\partial p}{\partial\mu} = \frac{N}{V}$

$= \frac{1}{\beta}\frac{N}{V}\frac{1}{\frac{\partial p}{\partial N}\Big|_{T,V}} = \frac{1}{\beta}\frac{N}{V}\frac{1}{-\frac{\partial p}{\partial V}\Big|_{T,N}\frac{V}{N}} = -\frac{1}{\beta}\frac{N^2}{V^2}\frac{\partial V}{\partial p}\Big|_{T,N}$

?

$= \frac{1}{\beta}\frac{N^2}{V}\kappa_T$

$\Rightarrow \frac{\Delta N}{\langle N\rangle} = \sqrt{\frac{\kappa_T}{\beta V}}$ ✓

4/4

A1	A2	A3	A4	Ges
4	/	4	3,5	11,5

Blatt 10

3) $H = \sum_{n=1}^{N} c|\vec{p}_n|$ (Schreibe $\sum_{n=1}^{N}$ als $\sum_n$)

4

im Volumen V mit $c>0$

a) $$Z_{gk} = \sum_{N=0}^{\infty} \int \frac{dp\,dq}{h^{3N} N!} e^{-\beta(H-\mu N)}$$
$$= \sum_{N=0}^{\infty} \frac{V^N e^{\beta\mu N}}{h^{3N} N!} \int dp\, e^{-\beta H}$$

$$\int dp\, e^{-\beta H} = \int dp\, e^{-\beta \sum_n c|\vec{p}_n|} = \prod_{n=1}^{N} \int d^3p_n\, e^{-\beta c|\vec{p}_n|}$$
$$= \left(\int d^3p\, e^{-\beta c|\vec{p}|}\right)^N$$ mit $x = \beta c|\vec{p}|$, $dx = \beta c\, d|\vec{p}|$ und $d^3p \to 4\pi\, d|\vec{p}|\, |\vec{p}|^2$
$$= \left(\int x^2 e^{-x} dx\, \frac{4\pi}{\beta^3 c^3}\right)^N = \left(\frac{4\pi}{\beta^3 c^3}(2!)\right)^N$$
$$= \left(\frac{8\pi}{\beta^3 c^3}\right)^N \quad (*)$$

gut! :)

$$\Rightarrow Z_{gk} = \sum_{N=0}^{\infty} e^{\beta\mu N} \frac{V^N}{h^{3N} N!} \left(\frac{8\pi}{\beta^3 c^3}\right)^N = \sum_{N=0}^{\infty} \left(\frac{e^{\beta\mu}\, 8\pi V}{h^3 \beta^3 c^3}\right)^N \frac{1}{N!}$$
$$= \exp\left(\frac{e^{\beta\mu}\, 8\pi V}{h^3 \beta^3 c^3}\right)$$

b) $$\underbrace{-k_B T \ln Z_{gk}}_{= -k_B T \frac{e^{\beta\mu} 8\pi V}{h^3 \beta^3 c^3}} = \Omega = -pV \quad (1)$$

mit
$$N = -\left.\frac{\partial \Omega}{\partial \mu}\right|_{T,V} = k_B T \frac{8\pi V}{h^3 \beta^3 c^3} \frac{\partial e^{\beta\mu}}{\partial \mu} = \frac{8\pi V}{h^3 \beta^3 c^3} e^{\beta\mu}$$
$$\Leftrightarrow e^{\beta\mu} = N \frac{h^3 \beta^3 c^3}{8\pi V} \quad (**)$$

in (1)
$$pV = k_B T \frac{8\pi V}{h^3 \beta^3 c^3} N \frac{h^3 \beta^3 c^3}{8\pi V} = N k_B T$$
$$\Rightarrow f(p,V,T) = 0 = pV - N k_B T$$

sehr schön!

c) $\langle H\rangle = \frac{1}{Z_{gk}} \sum_{N=0}^{\infty} \int \frac{dp\,dq}{h^{3N} N!} H e^{-\beta(H-\mu N)}$

$$= \frac{1}{Z_{gk}} \sum_{N=0}^{\infty} \frac{V^N e^{\beta\mu N}}{h^{3N} N!} \int dp\, H e^{-\beta H}$$

$$\int dp\, H e^{-\beta H} = \int dp \sum_n c|\vec{p}_n| e^{-\beta \sum_m c|\vec{p}_m|}$$

$$= \sum_n \int dp\, c|\vec{p}_n| \prod_{m=1}^{N} e^{-\beta c|\vec{p}_m|}$$

$$= \sum_n \int dp\, c|\vec{p}_n| e^{-\beta c|\vec{p}_n|} \prod_{m\neq n}^{N} e^{-\beta c|\vec{p}_m|}$$

$$= \sum_n \int d^3p_n\, c|\vec{p}_n| e^{-\beta c|\vec{p}_n|} \underbrace{\prod_{m\neq n}^{N} \int d^3p_m\, e^{-\beta|\vec{p}_m|c}}_{\overset{(*)}{=} \left(\frac{8\pi}{\beta^3 c^3}\right)^{N-1}}$$

$$\int d^3p_n\, c|\vec{p}_n| e^{-\beta c|\vec{p}_n|} = 4\pi \int_0^\infty d|\vec{p}_n|\, c|\vec{p}_n|^3 e^{-\beta c|\vec{p}_n|}$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{mit } x = +\beta c|\vec{p}_n| \\ dx = \beta c\, d|\vec{p}_n| \end{array}\right)$$

$$= 4\pi \frac{c}{\beta^4 c^4} \underbrace{\int_0^\infty dx\, x^3 e^{-x}}_{3! = 6} = 24\pi \frac{1}{\beta^4 c^3}$$

$$\Rightarrow \int dp\, H e^{-\beta H} = \frac{3}{\beta} N \left(\frac{8\pi}{\beta^3 c^3}\right)^N$$

$$\Rightarrow \langle H\rangle = \frac{1}{Z_{gk}} \sum_{N=0}^{\infty} N \frac{V^N e^{\beta\mu N}}{h^{3N}} \frac{3}{\beta} \left(\frac{8\pi}{\beta^3 c^3}\right)^N \frac{1}{N!}$$

Indexshift

$$= \frac{V e^{\beta\mu} 8\pi}{h^3 \beta^3 c^3} \frac{3}{Z_{gk}\beta} \sum_{N=0}^{\infty} \left(\frac{V e^{\beta\mu} 8\pi}{h^3 \beta^3 c^3}\right)^N \frac{1}{N!} = \frac{3}{\beta} \frac{Z_{gk}}{Z_{gk}} \frac{V e^{\beta\mu} 8\pi}{h^3 \beta^3 c^3}$$

$$\overset{(**)}{=} N \frac{3}{\beta} = 3N k_B T$$

funktioniert :) , aber einfacher wenn ihr eure bereits berechnete Zustandssumme benutzt

4) (3.5) $X=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$ $M=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$

$XM=\begin{pmatrix}c&d\\a&b\end{pmatrix}$ $MX=\begin{pmatrix}b&a\\d&c\end{pmatrix}$ $MXMX=\begin{pmatrix}b^2+ad & ba+ac\\db+cd & da+c^2\end{pmatrix}$

$XMXM=\begin{pmatrix}c^2+da & cd+db\\ac+ba & bd+b^2\end{pmatrix}$ $MXXM=\begin{pmatrix}bc+a^2 & ab+bd\\ca+dc & cb+d^2\end{pmatrix}$

$Tr(XM)=c+b=Tr(MX)$ ✓

$Tr(XMXM)=c^2+2ad+b^2=Tr(MXMX)$ ✓

$Tr(MXXM)=a^2+2bc+d^2$ ✓

Während XM und MX einzeln vertauschbar sind, wenn es darum geht die Spur zu erhalten, müssen sobald zwei dieser Matrizen aneinander multipliziert werden beide dieselbe sein um die Spur zu erhalten.
Da $XX=\mathbb{1}$ lässt sich die letzte Matrix auch schreiben als MM, während bei den anderen beiden M zunächst durch X gedreht wurde. Generell darf in einer Spur zyklisch vertauscht werden, ohne das Ergebnis zu verändern ✓

b) hermitesch: $M^+=\begin{pmatrix}a^*&c^*\\b^*&d^*\end{pmatrix}\stackrel{!}{=}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=M$

$\Rightarrow a, d$ reel, $b=c^*$ imaginär oder $=0$? imaginär oder reelle aber $b=c^*$ geht auch

$Tr(M)\stackrel{!}{=}1 \Rightarrow a+d=1$

pos semidefinit: EW: $\begin{pmatrix}a-\lambda & b\\c & d-\lambda\end{pmatrix}$: $(a-\lambda)(d-\lambda)-bc=0$ für $b,c\in\mathbb{R}$

$\lambda^2-(a+d)\lambda-bc\stackrel{+ad}{}=0$

$M=\begin{pmatrix}a&0\\0&d\end{pmatrix}$

$\lambda_{1/2}=\frac{\overset{=1}{a+d}}{2}\pm\sqrt{\frac{(a+d)^2}{4}+bc\stackrel{-ad}{}}\stackrel{!}{\geq}0$

$\lambda_2=\frac{a+d}{2}-\sqrt{\frac{(a+d)^2}{4}+bc}\stackrel{?}{\geq}0$

$\Rightarrow bc=0 \Rightarrow b=c=0$ ff.

$\Rightarrow \lambda_1=a+d\geq 0$
$\Leftrightarrow 1\geq 0$ ✓

wieso?

c) $\lambda_1=1$, $\lambda_2=0\rightarrow$ Eigenvektoren bestimmen aus $(M-\lambda_i E)\vec{x}=\vec{0}$ (✓)

Projektor bestimmen als $\vec{v}_i^T\vec{v}_i$ $\rightarrow$ $\rho=\sum_i \vec{v}_i^T\vec{v}_i\,\lambda_i=\sum_i |v_i\rangle\langle v_i|\lambda$ ✓

d) Reine Zustände $\rho^2=\rho$ und $Sp\,\rho^2=Sp\,\rho$

$\Rightarrow \begin{pmatrix}a^2&0\\0&d^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&0\\0&d\end{pmatrix}$ und $a^2+d^2=1$

ff.

$\Rightarrow a=1, d=0$ ✓ $a=0, d=1$ $\rightarrow$ $M_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$ ✓ $M_2=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$

5

$\Rightarrow$ Rang 1 Außerdem: Da nur einer der Eigenwerte von 0 verschieden ist ist $M = |v_1\rangle\langle v_1|$ Nur 1 möglicher Zustand

$\rightarrow$ Rang 1

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & 1-a \end{pmatrix}$$

alle reell
$b = c^* = c$

$$\begin{array}{r|cc|cc} & a & b & 1 & 0 \\ & b & 1-a & 0 & 1 \\ \hline & a & b & 1 & 0 \\ b\cdot I - a\,II & 0 & b^2+a^2-a & b & -a \end{array}$$

Damit Rang 1 $b^2 + a^2 - a = 0$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ca+dc & cb+d^2 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a^2+b^2 & b \\ b & b^2+(1-a)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & 1-a \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 - a = 0$$

gut