Lars
David

1a) $^{214}Rn \to {}^{210}Po + \alpha$, $^{210}Po \to {}^{206}Pb + \alpha$, ^{206}Pb stabil

$\Rightarrow \alpha$ - Zerfälle ✓ 1P

b) I $\frac{dN_{Rn}}{dt} = -\lambda_{Rn} N_{Rn}$ ✓

II $\frac{dN_{Po}}{dt} = \lambda_{Rn} N_{Rn} - \lambda_{Po} N_{Po}$ ✓

III $\frac{dN_{Pb}}{dt} = \lambda_{Po} N_{Po}$ ✓ 1P

c) I: $\frac{dN_{Rn}}{dt} = -\lambda_{Rn} N_{Rn} \Rightarrow N_{Rn}(t) = N_0 e^{-\lambda_{Rn} t}$ ✓

II: $\frac{dN_{Po}}{dt} + \lambda_{Po} N_{Po} = \lambda_{Rn} N_{Rn} = \lambda_{Rn} e^{-\lambda_{Rn} t} \cdot N_0$

homog.: $\frac{dN_{Po}}{dt} = -\lambda_{Po} N_{Po} \Rightarrow N_{Po,h}(t) = C e^{-\lambda_{Po} t}$ (✓)

Ansatz:
$C = C(t) \Rightarrow \frac{dN_{Po}(t)}{dt} = \frac{dC(t)}{dt} e^{-\lambda_{Po} t} - C(t) e^{-\lambda}$

$\xrightarrow{\text{in II}} \frac{dC(t)}{dt} e^{-\lambda_{Po} t} = \lambda_{Rn} N_0 e^{-\lambda_{Rn} t}$

$\Leftrightarrow \frac{dC(t)}{dt} = \lambda_{Rn} N_0 e^{(\lambda_{Po} - \lambda_{Rn})t} \Rightarrow C(t) = \frac{\lambda_{Rn}}{\lambda_{Po} - \lambda_{Rn}} N_0 e^{(\lambda_{Po} - \lambda_{Rn})t} + D$

$\Rightarrow N_{Po}(t) = \frac{\lambda_{Rn}}{\lambda_{Po} - \lambda_{Rn}} N_0 e^{-\lambda_{Rn} t} + D e^{-\lambda_{Po} t}$ ✓

$N_{Po}(0) \stackrel{!}{=} 0 = \frac{\lambda_{Rn}}{\lambda_{Po} - \lambda_{Rn}} N_0 + D \Leftrightarrow D = -\frac{\lambda_{Rn}}{\lambda_{Po} - \lambda_{Rn}} N_0$

$\Rightarrow N_{Po}(t) = \frac{\lambda_{Rn}}{\lambda_{Po} - \lambda_{Rn}} N_0 \left(e^{-\lambda_{Rn} t} - e^{-\lambda_{Po} t}\right)$ ✓

III: $\frac{dN_{Pb}}{dt} = \frac{\lambda_{Po} \lambda_{Rn}}{\lambda_{Po} - \lambda_{Rn}} N_0 \left(e^{-\lambda_{Rn} t} - e^{-\lambda_{Po} t}\right)$ ✓

$\Rightarrow N_{Pb}(t) = \frac{\lambda_{Po} \lambda_{Rn}}{\lambda_{Po} - \lambda_{Rn}} N_0 \left(\frac{1}{\lambda_{Po}} e^{-\lambda_{Po} t} - \frac{1}{\lambda_{Rn}} e^{-\lambda_{Rn} t}\right) + D$

3P

$N_{Pb}(0) \stackrel{!}{=} 0 = \frac{N_0}{\lambda_{Po} - \lambda_{Rn}} (\lambda_{Po} - \lambda_{Rn}) + D \Leftrightarrow D = N_0$

~~Seite~~ 2

$\Rightarrow N_{Pb}(t) = N_0 \left(1 - \frac{1}{\lambda_{Po} - \lambda_{Rn}} \left(\lambda_{Po} e^{-\lambda_{Rn} t} - \lambda_{Rn} e^{-\lambda_{Po} t}\right)\right)$ ✓

d) 1g $^{226}Ra \Rightarrow N_{Ra}(t=0) = 2{,}6647 \times 10^{21}$ (✓)

$A_0 = 3{,}7 \times 10^{10}$ Bq

$97a = 97 \cdot 364{,}25 \cdot 86400\ s = 3{,}0527 \times 10^9 s$ (✓)

$T_{1/2\,Ra} = 1602\,a = 5{,}0417 \times 10^{10} s$

$\Leftrightarrow \lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} = 1{,}3748 \times 10^{-11} s^{-1}$

$A(t) = \lambda N(t) = A_0 e^{-\lambda t}$ ✓

$= \lambda \frac{m(t)}{m_{Ra}}$

$\Leftrightarrow m(t) = \frac{A_0}{\lambda} m_{Ra} e^{-\lambda t} = N_0 m_{Ra} e^{-\lambda t}$ 1P

$m_{Heute} = 0{,}9589\ g$ f

Was ist mit dem Pb.
Das wiegt auch was!

e) Da wahrscheinlich ^{226}Ra verwendet wurde, wird die Strahlung α-Strahlung gewesen sein. und? (✓) β-Strahlg ?
Aufgrund der hohen Halbwertszeit von 1602 Jahren und weil auch die in der Zerfallsreihe folgenden Kerne α-Strahler sind, werden sowohl die Arbeiter, als auch die Träger α-Strahlung ausges. gewesen sein.

0,5 P

6/8

d)

1g Ra $\quad A = 1\,Ci = 3{,}7 \cdot 10^{10}$ Bq

$^{226}Ra \rightarrow {}^{206}Pb\ ;\ \frac{N_{Ra}}{N_{Ra}+N_{Pb}} = e^{-\frac{t}{\tau}} = e^{-\ln(2)\frac{t}{T_{1/2}}}\ ;\ t = 97a,\ T_{1/2} = 1600a$

$\Rightarrow m = 0{,}96 \cdot 1g + 0{,}04 \frac{206u}{226u} 1g$

2a) β^-: vorher: $M_1 = M_M + \frac{B_Z}{c^2}$ ✓

hinterher: $M_2 = M_T + \frac{B_{Z+1}}{c^2}$ ✓

M_M, M_T: reine Massen des Kerns + e^-

$n \to p \Rightarrow Z \to Z+1$
$\Rightarrow B$ erhöht sich

$M_1 \geq M_2 \Leftrightarrow M_M + \frac{B_Z}{c^2} \geq M_T + \frac{B_{Z+1}}{c^2}$

$\Leftrightarrow M_M \geq M_T + \frac{B_{Z+1} - B_Z}{c^2}$

Laut Aufgabenstellung aber Masse eines Isotops
↳ e^- berücksichtigen

β^+: vorher: $M_1 = M_M + \frac{B_Z}{c^2}$

$p \to n + e^+ + \nu_e \to Z \to Z-1$

hinterher: $M_2 = M_T + m_{e^+} + \underbrace{m_{\nu_e}}_{\approx 0} + \frac{B_{Z-1}}{c^2} + m_{e^-}$

Ladungsausgl. (✓)

$m_{e^-} = m_{e^+} = m_e$

$= M_T + 2m_e + \frac{B_{Z-1}}{c^2}$

$M_1 \geq M_2 \quad M_M + \frac{B_Z}{c^2} \geq M_T + 2m_e + \frac{B_{Z-1}}{c^2}$

$\Leftrightarrow M_M \geq M_T + 2m_e + \frac{B_{Z-1} - B_Z}{c^2}$

ϵ: vorher $M_1 = M_M + \frac{B_Z}{c^2}$

$p + e^- \to n + \nu_e$

nachher: $M_2 = M_T + \frac{B_{Z-1}}{c^2} + \frac{B_K}{c^2}$

Das Elektron ist also wird die B_K frei

$M_1 \geq M_2: M_M + \frac{B_Z}{c^2} \geq M_T + \frac{B_{Z-1}}{c^2} + \frac{B_K}{c^2}$

$\Leftrightarrow M_M \geq M_T + \frac{B_{Z-1} - B_Z}{c^2} + \frac{B_K}{c^2}$ (✓) 1,5 P

b) $n \to p + e^- + \nu_e$ ✓ 1P

c) $E = m_n - m_p - m_e - \underbrace{m_\nu}_{\approx 0} = 0{,}783\ \text{MeV}$ ✓ 1P

d) Zwei-Körper-Zerfall $|\vec{p}_p| = p_p = |\vec{p}_e| = p_e \Rightarrow m_p v_p = m_e v_e$ ✓

$\Leftrightarrow v_p = \frac{m_e}{m_p} v_e$

$E = \frac{1}{2}\left(m_e v_e^2 + m_p v_p^2\right)$

$= \frac{1}{2}\left(m_e v_e^2 + \frac{m_e^2}{m_p} v_e^2\right)$

$\Leftrightarrow \frac{2E}{m_e\left(1 + \frac{m_e}{m_p}\right)} = v_e^2 \Leftrightarrow v_e = \sqrt{\frac{2E}{m_e\left(1 + \frac{m_e}{m_p}\right)}} \Rightarrow v_p = \sqrt{\frac{2E m_e}{m_p(m_p + m_e)}}$

$p_e = p_p = \sqrt{\frac{2E m_e m_p}{m_p + m_e}}$ (f)

Da v_e relativistisch ist: $E^2 = p^2c^2 - m_e^2c^4$

$\Leftrightarrow \gamma^2 v_e^2 = \frac{E^2}{m_e c^2} - c^2 \Leftrightarrow v_e^2 = \left(1 - \frac{v_e^2}{c^2}\right)\left(\frac{1}{m_e c^2}\left(\frac{E^2}{m_e^2} \right.\right.$

$\Leftrightarrow v_e^2 = \frac{\overbrace{\frac{1}{m^2c^2}\left(E^2 - m^2c^4\right)}^{D}}{1 + \frac{1}{m^2c^4}\left(E^2 - m^2c^4\right)}$? $\Leftrightarrow v_e = \sqrt{\frac{D}{1 + D/c^2}}$

$$v_p = \sqrt{\frac{2 E m_e}{m_p(m_p+m_e)}} \approx 9{,}531 \times 10^{-4} c$$

f

$$\Rightarrow E_e = E - \frac{m_p v_p^2}{2}$$

$$p_e = p_p = 0{,}884 \,\frac{MeV}{c}$$

$$= 0{,}7826 \, MeV$$

$$\Rightarrow v_e \approx 0{,}4086c$$

f

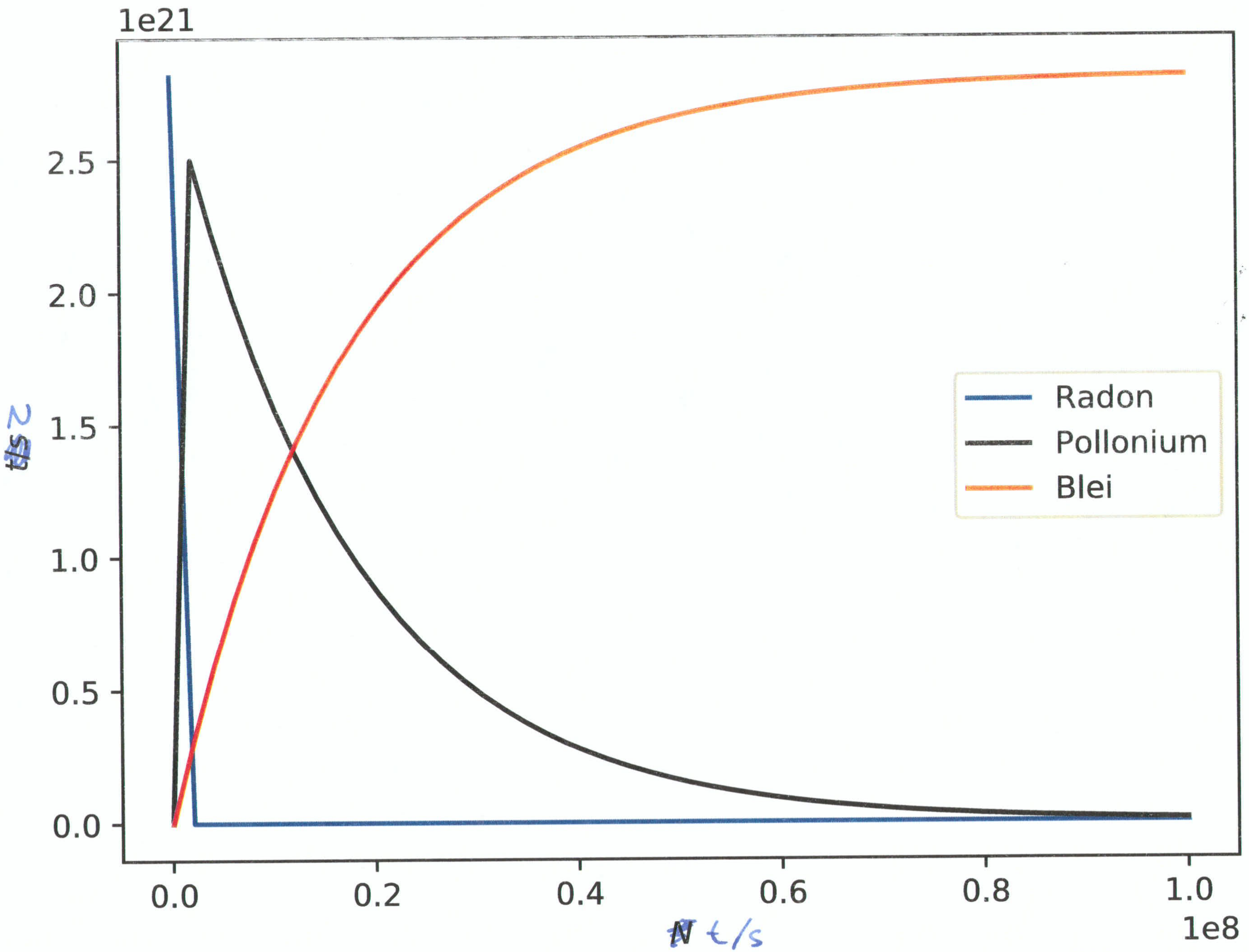
Bei einem Zwei-Körper-Zerfall fliegen die Zerfallsprodukte im 180° Winkel auseinander, aber es würden andere Winkel gemessen.

Welches Bezugssystem?

1P

4,5 P

Σ 10,5


1e21
2.5
2.0
1.5
1.0
0.5
0.0
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
1e8
t/s
N
Radon
Pollonium
Blei