Nr. 1 $\vec{F}_{Kons} \cdot \dot{\vec{r}} = -\frac{dU(\vec{r}(t))}{dt} = -\vec{\nabla} U \cdot \dot{\vec{r}}$

a) 2. NA: $m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}$

$\Rightarrow \vec{F} \cdot \dot{\vec{r}} = m\ddot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} = -\frac{dU}{dt}$

$\Rightarrow \int m\ddot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}\, dt = -U \Rightarrow \frac{1}{2} m\dot{\vec{r}}^2 + C = -U$ (Kettenregel)

$\Rightarrow T + U = -C = const.$ ✓

b) $\vec{F}_{Kons} = -\vec{\nabla} U(\vec{r}) + \dot{\vec{r}} \times \vec{B}(\vec{r}, t)$

$\Rightarrow \vec{F}_{Kons} \cdot \dot{\vec{r}} = -\vec{\nabla} U(\vec{r}) \cdot \dot{\vec{r}} + \underbrace{(\dot{\vec{r}} \times B(\vec{r}, t)) \cdot \dot{\vec{r}}}_{=0}$

$\Rightarrow \vec{F}_{Kons} \cdot \dot{\vec{r}} = -\vec{\nabla} U(\vec{r}) \cdot \dot{\vec{r}}$ (s.o.) („und nur diese" fehlt)

c) Konservativ: Gravitationskraft, $\vec{E}$-Feld, Coulombkraft

keine Kraft

nicht konservativ: $\vec{B}$-Feld, Lorentzkraft f, siehe b)

3/5

Aufgabe 2

Lars
David
Jonas

(i) $m_1 a_1 = S_1 - Mg$
(ii) $m_2 a_2 = S_2 - mg$
(iii) $m_3 a_3 = m_3 g - S_2$
Woher?

(IV) $S_1 = 2S_2$
(V) $2a_1 = a_3 - a_2$
Woher?

1	2	3	4
3	4	3,5	2

$\boxed{\sum 12{,}5}$

Forme (ii) & (iii) um: $a_2 = \frac{S_2}{m_2} - g$ (VI)

$a_3 = g - \frac{S_2}{m_3}$ (VII)

(VII) − (VI): $a_3 - a_2 = 2g - S_2\left(\frac{1}{m_3} + \frac{1}{m_2}\right) = 2a_1$

$\Leftrightarrow S_2 = 2(g - a_1)\frac{m_2 m_3}{m_1 + m_2}$ (VIII)

(IV) in (i): $m_1 a_1 = 2S_2 - M_1 g$ (IX)

(VIII) in (IX): $m_1 a_1 = 4(g - a_1)\frac{m_3 m_2}{m_3 + m_2} - m_1 g$

$\Leftrightarrow a_1 = -g \frac{m_1(m_2 + m_3) - 4m_2 m_3}{m_1(m_2 + m_3) + 4m_2 m_3}$ ✓

(i) umformen: $S_1 = m_1(a_1 + g)$

mit a_1: $= g \frac{8 m_2 m_3 m_1}{m_1(m_2 + m_3) + 4m_2 m_3}$ ✓

mit (IV): $S_2 = g \frac{4 m_1 m_2 m_3}{m_1(m_2 + m_3) + 4m_2 m_3}$ ✓ (X)

mit (VI): $a_2 = g \cdot \frac{3m_1 m_3 - m_1 m_2 - 4m_2 m_3}{m_1 m_3 + m_1 m_2 + 4m_2 m_3}$ ✓

(X) in (VII): $a_1 = g\frac{m_1 m_3 - 3m_1 m_2 + 4m_2 m_3}{m_1 m_3 + m_1 m_2 + 4m_2 m_3}$ (✓)

4/5

3) $E = T + V = \frac{1}{2} m v^2 + m g h$

Lars
David
Jonah

$v = \dot{r} = \frac{d(l\varphi)}{dt} = l\dot{\varphi}$

$h = l(1-\cos\varphi)$

$\Rightarrow E = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\varphi}^2 + mgl(1-\cos\varphi)$ ✓

$V_{max} = V(\varphi_0) = mgl(1-\cos\varphi_0) = E(\varphi_0) = E$ ✓

Da Energieerhaltung gilt, wird die Energie immer diesen Wert annehmen.

$\Rightarrow mgl(1-\cos\varphi_0) = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\varphi}^2 + mgl(1-\cos\varphi)$

$\Leftrightarrow \frac{2g}{l}(1-\cos\varphi_0 - 1 + \cos\varphi) = \dot{\varphi}^2$

$\Leftrightarrow \frac{d\varphi}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2g}{l}(\cos\varphi - \cos\varphi_0)}$

$\Leftrightarrow dt = \pm \frac{1}{\sqrt{\frac{2g}{l}(\cos\varphi - \cos\varphi_0)}} d\varphi \quad \Big| \int$

$t = \int \frac{1}{\sqrt{\frac{2g}{l}(\cos\varphi - \cos\varphi_0)}} d\varphi$ | da negative Zeiten keinen Sinn ergeben

Integrationsgrenzen!

| $\cos\varphi = 1 - 2\sin^2(\frac{\varphi}{2})$

$t = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{l}{g}} \int \frac{1}{\sqrt{\sin^2(\frac{\varphi_0}{2}) - \sin^2(\frac{\varphi}{2})}} d\varphi$ | kleine φ: $\sin\varphi \approx \varphi$

$\Rightarrow$ für kleine φ_0: $t = \frac{1}{2} \cdot 2 \int \frac{1}{\sqrt{\varphi_0^2 - \varphi^2}} d\varphi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}$

Ausw.: $t_{Per.} = 4\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\varphi_0} \frac{1}{\sqrt{\varphi_0^2 - \varphi^2}} d\varphi$

$= 4\sqrt{\frac{l}{g}} \left[\arctan \frac{\varphi}{\sqrt{\varphi_0^2 - \varphi^2}}\right]_0^{\varphi_0}$

$= 4\sqrt{\frac{l}{g}} \left(\arctan\left(\frac{\varphi_0}{0}\right) - \arctan 0\right)$

:(

$= 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

Für eine Startauslenkung von $\varphi_0 = \pm \pi$ bleibt das ~~Ped~~ Pendel im Idealfall stehen, da nur die Gewichtskraft gerade nach unten wirkt, allerdings durch die Normalkraft vollständig aufgehoben.

→ keine Schwingung ~~zur Mittellage~~

→ keine "Periodendauer"

~~Die~~ Frage war auch nach $\varphi_0 \to \pm\pi$, nicht nach $\varphi_0 = \pm\pi$.

3.5 | 5

Lars
David
Johan

Nr. 4 a) $r_x = R\cos(2\varphi) + R$, $r_y = R\sin(2\varphi)$ $\Big\} \vec{r} = \begin{pmatrix} R\cos(2\varphi)+R \\ R\sin(2\varphi) \end{pmatrix}$

Auf der x-Achse ist der Kreis um R verschoben

Der Kreis wird doppelt so schnell "durchlaufen", da φ nur von $-\frac{\pi}{2}$ bis $\frac{\pi}{2}$ und nicht von 0 bis 2π geht.

$$\Rightarrow |\vec{r}| = \sqrt{R^2\sin^2(2\varphi) + (R\cos(2\varphi)+R)^2} = \sqrt{R^2\sin^2(2\varphi) + R^2\cos^2(2\varphi) + 2R^2\cos(2\varphi) + R^2}$$

$$= \sqrt{R^2(2+2\cos(2\varphi))} = R\sqrt{2(\cos(2\varphi)+1)} = R\sqrt{2(\cos^2\varphi + 1 - \sin^2\varphi)}$$

$$= R\sqrt{4\cos^2\varphi} = 2R\cos\varphi = r(\varphi)$$ ✓

b) $E = T + V = \text{const.}$

$T = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 = \frac{1}{2}m(-2R\dot{\varphi}\sin\varphi)^2 = 2mR^2\dot{\varphi}^2\sin^2\varphi$

$V = mgh = mgr_y = mgR\sin(2\varphi) = 2mgR\sin\varphi\cos\varphi$

Aufgabenstellung!

$\Rightarrow E = 2mR\sin\varphi(g\cos\varphi + R\dot{\varphi}^2\sin\varphi) = \text{const.}$

c) $\vec{F} = m\vec{a} = m\ddot{\vec{r}}$ oder $F = ma = m\ddot{r}$

$\dot{r} = -2R\sin\varphi\,\dot{\varphi} \Rightarrow \ddot{r} = \frac{d\dot{r}}{d\varphi}\dot{\varphi} = (-2R\sin\varphi\,\ddot{\varphi} + (-2R\cos\varphi\,\dot{\varphi}))\dot{\varphi}$

$= -2R\dot{\varphi}(\sin\varphi\,\ddot{\varphi} + \cos\varphi\,\dot{\varphi})$

gesucht: $\vec{F}(r)$.

$\Rightarrow F = -2mR\dot{\varphi}(\sin\varphi\,\ddot{\varphi} + \cos\varphi\,\dot{\varphi}) = -2mR\dot{\varphi}\ddot{\varphi}\sin\varphi - 2mR\dot{\varphi}^2\cos\varphi$

$\Rightarrow$ Die Kraft scheint sich in Tangential- und Normalkraft aufteilen zu lassen

2/5