HM III – Übungsblatt 5

Singularitäten

$D \subset \mathbb{C}$, $z_0 \in D$, $f \in H(D \setminus \{z_0\})$

a) z_0 heißt isolierte Singularität

b) z_0 heißt hebbare Sg., falls f auf D holomorph fortsetzbar

$\Leftrightarrow \lim\limits_{z \to z_0} (z - z_0) f(z) = 0$

c) z_0 heißt Pol, falls z_0 keine hebbare Sg. ist und zudem gilt:

$\exists k \in \mathbb{N}: (z-z_0)^k f(z)$ hat eine hebbare Singularität. Ist k minimal, so heißt z_0 Pol k-ter Ordnung.

d) sonst heißt z_0 wesentliche Singularität

Aufgabe 21

(I) $\frac{z}{e^z - 1}$ Singularität nur bei Nullstellen des Nenners:

$e^z - 1 = 0 \Leftrightarrow e^z = 1 \Leftrightarrow \underbrace{e^x}_{\neq 0} (\cos(y) + i\sin(y)) = 1$

Damit diese Gleichheit erfüllt sein kann, muss der Imaginärteil gleich 0 werden.

$\Rightarrow \sin(y) = 0 \Leftrightarrow y = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow e^x \cos(k\pi) \overset{!}{=} 1 \Rightarrow x = 0 \wedge k$ gerade

Also: Singularitäten bei $z = 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$

Für $z = 0$: $\lim\limits_{z \to 0} \frac{z}{e^z - 1} = \lim\limits_{z \to 0} \frac{1}{e^z} = 1 \Rightarrow \ln(z) = 0$, hebbare Sg.

sonst.: Pol 1. Ordnung, denn der Zähler ist vom Nenner verschieden und der Nenner hat jeweils eine einfache Nullstelle.

(II) $\frac{1 - e^z}{1 + e^z}$

Vorbemerkung: Da Zähler und Nenner stets versch. sind, gibt es keine hebbaren Sg.

$e^z + 1 = 0 \Leftrightarrow e^z = -1 \Leftrightarrow e^x(\cos(y) + i\sin(y)) = -1 \Rightarrow x = 0, y = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, k ungerade

$\Rightarrow z = (2k+1)\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$ sind also Pole 1. Ordnung.

(III) $\dfrac{1}{\sin(z) + \cos(z)}$

Ansatz: $\sin(z) + \cos(z) = 0$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) + \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) = 0$

Setze $u := e^{iz}$

$\Rightarrow \frac{1}{2i}(u - \frac{1}{u}) + \frac{1}{2}(u + \frac{1}{u}) = 0 \quad \Big| \cdot 2i$

$\Leftrightarrow u - \frac{1}{u} + iu + \frac{i}{u} = 0$

$\Leftrightarrow (1+i)u + (i-1)\frac{1}{u} = 0 \quad \Big| \cdot u$

$\Leftrightarrow (1+i)u^2 = 1 - i$

$\Leftrightarrow u^2 = \frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)^2}{2} = -i$

Rücksubstitution: $u = e^{iz}$

$\Rightarrow e^{2iz} = -i \Leftrightarrow e^{-2y}(\cos(2x) + i\sin(2x)) = -i$

Da beide Seiten Betrag 1 haben, folgt $y = 0$.

Vergleich der Realteile:

$\cos(2x) = 0 \Rightarrow 2x = (n + \frac{1}{2})\pi, \ n \in \mathbb{Z}$

Vergleich der Imaginärteile:

$\sin(2x) < 0 \Rightarrow n$ ungerade

$\Rightarrow y = 0, \ x = (n + \frac{3}{4})\pi, \ n \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow z = (n + \frac{3}{4})\pi$ sind Pole 1. Ordnung, da einfache Nullstelle.

(IV) $\dfrac{1}{\sin(\frac{1}{z})}$

Es sind $z = \frac{1}{k\pi}$ Pole 1. Ordnung für alle $k \in \mathbb{Z}$.

Bei $z = 0$ liegt eine wesentliche Singularität vor.

Laurentreihen

$D \subset \mathbb{C}$, z_0 isolierte Sg. einer Fkt. f.

a) $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$

b) Hauptteil: $\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z - z_0)^{-n}$

Nebenteil: $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ (Potenzreihe)

c) Die Laurentreihe konv., wenn Haupt- und Nebenteil konv.

d) Eine Laurentreihe konvergiert auf einem Kreisring

$K_{r,R} = \{ z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R \}$

$\frac{1}{r} \mathrel{\widehat{=}}$ Konvergenzradius des Hauptteils

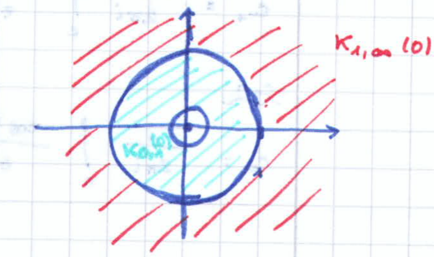
$R \mathrel{\widehat{=}}$ Konvergenzradius des Nebenteils

Aufgabe 22

$$f(z) = \frac{z^2 - 3z + 1}{z(z-1)^2} \quad , \; z_0 = 0$$

PBZ von f: $f(z) = \frac{1}{z} - \frac{1}{(z-1)^2}$

(I) $K_{0,1}(0)$: Beachte: $|z| < 1$



$$f(z) = \frac{1}{z} - \left(\frac{1}{1-z} \right)'$$

$$= \frac{1}{z} - \left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n \right)'$$

$$= \frac{1}{z} - \sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1} = \frac{1}{z} - \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) z^n$$

Also: $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$ mit

$c_{-1} = 1 \quad , \; c_n = -(n+1)$ für $n \geq 0$

$c_m = 0$ für alle anderen $m \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow f(z) = \frac{1}{z} - 2z - 3z^2 - 4z^3 - \dots$

(II) $K_{1,\infty}(0)$:

Es ist $$\frac{1}{1-z} = -\frac{1}{z} \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} = -\frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(1-z)^2} = -\frac{d}{dz} \frac{1}{1-z} = -\frac{d}{dz} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{-(n+1)}{z^{n+2}} = \sum_{n=-\infty}^{-2} (n+1) z^n$$

Somit: $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n \; , \; c_{-1} = 1$

$c_n = n+1$ für $n \leq -2$, $c_n = 0$ für alle anderen $n \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow f(z) = \frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} - \frac{2}{z^3} - \frac{3}{z^4} - \dots$

Aufgabe 23

$$f(z) = \frac{\cos(z)}{z}, \quad z_0 = 0$$

gesucht: $c_{-3}, c_{-2}, c_{-1}, c_0$

Ansatz: $$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z-0)^{n+1}} \, dz = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\cos(z)}{z^{n+2}} \, dz$$

c_{-3}, c_{-2}:

z_0 ist Pol 1. Ordnung $\Rightarrow c_{-3}, c_{-2} = 0$

c_{-1}:

$$c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\cos(z)}{z} \, dz \overset{g(z) = \cos(z)}{=} \frac{1}{2\pi i} \cdot 2\pi i \cdot g(0) = 1$$

c_0:

$$c_0 = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\cos(z)}{z^2} \, dz = \frac{1}{2\pi i} \, 2\pi i \, (\cos(z))' \Big|_{z=0} = 0$$

Globalübung – Blatt 5

$\frac{1}{z-\omega}$ um z_0 entwickeln

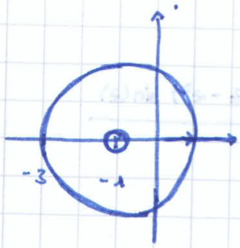
$$\frac{1}{z-\omega} = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^k}{(\omega-z_0)^{k+1}} \qquad |z-z_0| < |\omega - z_0| \qquad \text{innere Entwicklung}$$

$$\frac{1}{z-\omega} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\omega-z_0)^k}{(z-z_0)^{k+1}} = \sum_{k=-\infty}^{-1} \frac{(z-z_0)^k}{(\omega-z_0)^{k+1}} \qquad |z_0 - z| > |\omega - z_0|$$

Aufgabe 24

$$f(z) = \frac{1}{(z+1)(z+3)} = \frac{1/2}{z+1} - \frac{1/2}{z+3}$$

(I) $0 < |z+1| < 2$



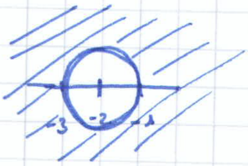
$\frac{\frac{1}{2}}{z+1}$ konvergiert für $z \neq -1$

$z_0 = -1$

$\omega = -3$

$$f(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z+1} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z+1)^k}{(-2)^{k+1}} \right) = \frac{1}{2} \sum_{k=-1}^{\infty} \frac{1}{(-2)^{k+1}} (z+1)^k \qquad f: 0 < |z+1| < 2$$

(II) um -2 mit $1 < |z+2|$



$z_0 = -2$

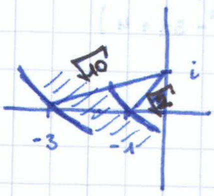
$\omega = -1$ oder $\omega = -3$

$\omega - z_0 = 1 \;\vee\; \omega - z_0 = -1$

$$f(z) = \frac{1}{2}\left[\sum_{k=-\infty}^{-1} (z+2)^k - \sum_{-\infty}^{-1} \frac{1}{(-1)^{k+1}} (z+2)^k \right] = \sum_{k=-\infty}^{-1} a_k (z+2)^k \text{ mit } a_k = \frac{1}{2}\left(1 + (-1)^k\right) = \begin{cases} 1, & k \text{ gerade} \\ 0, & k \text{ ungerade} \end{cases}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{-1} (z+2)^{2k}$$

(III) $\sqrt{2} < |z-i| < \sqrt{10}$

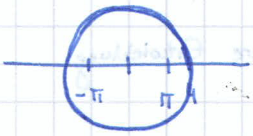


$\frac{1}{z+1}$: $z_0 = i$, $\omega = -1$, äußere Entwicklung

$\frac{1}{z+3}$: $z_0 = i$, $\omega = -3$, innere Entwicklung

$$f(z) = \frac{1}{2}\left[\sum_{k=-\infty}^{-1} \frac{(z-i)^k}{(-1-i)^{k+1}} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z-i)^k}{(-3-i)^{k+1}} \right] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z-i)^k, \quad a_k = \begin{cases} \frac{1}{2} \frac{1}{(-1-i)^{k+1}}, & k \leq -1 \\ \frac{1}{2} \frac{1}{(-3-i)^{k+1}}, & k \geq 0 \end{cases}$$

Aufgabe 25



$-\pi$: Pol 1. Ordnung

0 : Pol 2. Ordnung

π : hebbar

$$\lim_{z\to\pi} \frac{z-\pi}{z\sin(z)} = \lim_{z\to\pi} \frac{1}{z} \lim_{z\to\pi} \frac{z-\pi}{\sin(z)} \overset{\text{„}\frac{0}{0}\text{"}}{=} \frac{1}{\pi} \lim_{z\to\pi} \frac{1}{\cos(z)} = \frac{-1}{\pi},$$

also existiert der Limes, also hebbar bei $z=\pi$

$$\int_{|z|=4} \frac{\pi - z}{z\sin(z)}\, dz$$

Zähler durch Ableitung des Nenners

$$\mathrm{Res}(f(z), -\pi) = \left.\frac{\pi - z}{\sin(z) + z\cos(z)}\right|_{z=-\pi} = \frac{2\pi}{0 + \pi(-1)} = 2$$

$$\mathrm{Res}(f(z), 0) = \lim_{z\to 0} \frac{d}{dz}\left[\frac{z^2(\pi - z)}{z\sin(z)}\right] = \lim_{z\to 0}\left(\frac{\pi z - z^2}{\sin(z)}\right)'$$

$$= \lim_{z\to 0} \frac{(\pi - 2z)\sin(z) - (\pi z - z^2)\cos(z)}{\sin^2(z)}$$

$$\overset{\text{„}\frac{0}{0}\text{"}}{=} \lim_{z\to 0} \frac{-2\sin(z) + \cancel{(\pi - 2z)\cos(z)} - \cancel{(\pi - 2z)\cos(z)} + (\pi z - z^2)\sin(z)}{2\sin(z)\cos(z)}$$

$$= \lim_{z\to 0} \frac{-2 + \pi z - z^2}{2\cos(z)} = -1$$

$$\Rightarrow \int_{|z|=4} \frac{\pi - z}{z\sin(z)}\, dz = 2\pi i\,(2 - 1 + 0) = 2\pi i$$

---

f hat in z_0 Pol n-ter Ordnung

$$\mathrm{Res}(f, z_0) = \lim_{z\to z_0} \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left[(z-z_0)^n f(z)\right]$$

$$I_n = \int_{|z|=2} \underbrace{\frac{z^3 + 2z^2 - 3z + 4}{(z-1)^n}}_{f_n}\, dz \quad \text{Pol } n\text{-ter Ordnung}$$

$n = 0$: $I_0 = 0$

$$n > 0: \quad I_n = 2\pi i \cdot \mathrm{Res}(f_n, 1) = 2\pi i \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z\to 1} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} (z^3 + 2z^2 - 3z + 4)$$

$(z^3 + 2z^2 - 3z + 4)' = 3z^2 + 4z - 3$ $\qquad I_1 = 2\pi i \cdot 4 = 8\pi i$

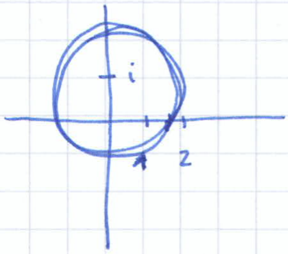
$(z^3 + 2z^2 - 3z + 4)'' = 6z + 4$ $\qquad I_2 = 2\pi i \cdot 4 = 8\pi i$

$(z^3 + 2z^2 - 3z + 4)''' = 6$ $\qquad I_3 = 2\pi i \frac{1}{2} 10 = 10\pi i$

$I_4 = 2\pi i \frac{1}{6} 6 = 2\pi i$

$I_n = 0$, $n \geq 5$

$$\int\limits_{|z-i|=2} \frac{2e^z \sin(z)}{z(z-1)^2(z-2)}\, dz = 2\pi i \left(Res(f(z),0) + Res(f(z),1) \right)$$



$|i-1| = \sqrt{2}$

$|i-2| = \sqrt{5} > 2$

$Res(f(z),0) = 0$, da Nenner und Zähler einfache NS haben

$$Res(f(z),1) = \lim_{z\to 1} \frac{d}{dz} \frac{2e^z \sin(z)}{z(z-2)}$$

$$= \lim_{z\to 1} 2 \frac{e^z(\sin(z)+\cos(z))\, z(z-2) - e^z \sin(z)(2z-2)}{z^2(z-2)^2}$$

$$= 2\, e^{(\sin(1)+\cos(1))(-1) - \sin(1)\cdot 0}$$

$$= -2\, e^{\sin(1)+\cos(1)}$$

$$\int = -4\pi i\, e^{\sin(1)+\cos(1)}$$