David
Lars
Jonah
3
Numerik

19P. / 19P.

8.2) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$

a) notw. Bed.:

$\vec{F}(\vec{x}) = \vec{\nabla} f(x,y) = \vec{0}$

1/1

$\Leftrightarrow 3\begin{pmatrix} x^2 - y \\ y^2 - x \end{pmatrix} = \vec{0} = \vec{F}(\vec{x})$ ✓

$\Leftrightarrow \begin{matrix} x^2 - y = 0 \\ y^2 - x = 0 \end{matrix}$ ok.

$F'(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 2x & -1 \\ -1 & 2y \end{pmatrix} \cdot 3$ ✓

$(F'(\vec{x}))^{-1} = \begin{pmatrix} 2y & 1 \\ 1 & 2x \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4xy-1}$ ✓

b) $F'(\vec{x}^{(k)})\, \vec{s}^{(k)} = -F(\vec{x}^{(k)}) \qquad \vec{x}^{(k+1)} = \vec{x}^{(k)} + \vec{s}^{(k)}$

3/3

$\Rightarrow \vec{x}^{(k+1)} = \vec{x}^{(k)} - (F'(\vec{x}^{(k)}))^{-1} F(\vec{x}^{(k)})$ ok.

hier: $\vec{x}^{(k+1)} = \vec{x}^{(k)} - \frac{1}{4xy-1}\begin{pmatrix} 2x^2y - x - y^2 \\ 2xy^2 - x^2 - y \end{pmatrix}$ ✓

c) $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix}$ ✓

6/6

$\vec{x}_2 = \frac{4}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{9}{55}\begin{pmatrix} \frac{44}{27} \\ \frac{44}{27} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16/15 \\ 16/15 \end{pmatrix}$ ✓

8.1) $\Phi(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{6}\cos x + \frac{1}{3} y \\ \frac{1}{8} xy^2 + \frac{1}{8}\sin x \end{pmatrix} \qquad (x,y) \in [0,1]^2$

$\Phi'(x,y) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{6}\sin x & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{8}(y^2 + \cos x) & \frac{1}{4}xy \end{pmatrix}$ ✓

Zeilensummennorm:

$\sup\limits_{[0,1]} \|\Phi'(x,y)\|_\infty$: 1. Zeile $-\frac{1}{6}\sin x + \frac{1}{3} \leq \frac{1}{3}$

2. Zeile $\frac{1}{4}\left(xy + \frac{1}{2}(y^2 + \cos x)\right) \leq \frac{1}{8}(3 + \cos 1) \approx 0.4425 > \frac{1}{3}$ ✓

$\Rightarrow L = 0{,}4425$

Spaltensummennorm:

$\sup\limits_{[0,1]} \|\Phi'(x,y)\|_1$: 1. Spalte $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}(y^2 + \cos x) - \frac{1}{3}\sin x\right) \leq \frac{1}{4}$

2. Spalte $\frac{1}{3} + \frac{1}{4}xy \leq \frac{7}{12} > \frac{1}{4}$

$\Rightarrow L = \frac{7}{12}$ ✓

Für beide Normen ist $L < 1$

$\Rightarrow$ kontrahierende Selbstabbildung

$\overset{\text{„Banach"}}{\Rightarrow}$ Es gibt genau einen Fixwert im Intervall $[0,1]^2$ ✓

b) $x_0 = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix}$ $x_1 = \begin{pmatrix} 0,31293042698172 88 \\ 0,07555319237255254 \end{pmatrix}$

$x_2 = \begin{pmatrix} 0,183756985787359 8 \\ 0,0387042953287801 \end{pmatrix}$

$x_3 = \begin{pmatrix} 0,1767621216708083 2 \\ 0,02287498251269767 \end{pmatrix}$

$x_4 = \begin{pmatrix} 0,1716946959 23\overset{89}{\cancel{72}}87 \\ 0,0219919459701418 \end{pmatrix}$

$x_5 = \begin{pmatrix} 0,17154675517552653 \\ 0,02136692640107297 \end{pmatrix}$ ok.

$x_6 = \begin{pmatrix} 0,17134262619333 9097 \\ 0,02134811541558170 \end{pmatrix}$

c) Zeilensumme $\Rightarrow$ Maximumsnorm $\|\cdot\|_\infty$

Spaltensum.norm $\rightarrow$ 1-Norm $\|\cdot\|_1$

A posteriori: $\|x^{(k)} - x^*\| \leq \frac{L}{1-L} \|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|$

Zeil.: $\|x^6 - x^*\| \leq 1,6205 \times 10^{-3}$ ok

Spal: $\|x^6 - x^*\| \leq 3,1212 \times 10^{-3}$