Blatt 6

David
Lars

1) sc: $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \cdot a$, $\vec{a}_2 \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \cdot a$, $\vec{a}_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} a$ ✓

$V_{el} = (\vec{a}_1 \times \vec{a}_2) \cdot \vec{a}_3 = a^3$ ✓ $\quad V_{rez}$: $\vec{b}_i = \vec{a}_i \cdot \frac{2\pi}{a^2}$

$V_{rez} = (\vec{b}_1 \times \vec{b}_2) \cdot \vec{b}_3 = \frac{8\pi^3}{a^3}$

$\theta = \arccos\left(\frac{\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2}{|\vec{a}_1| \cdot |\vec{a}_2|}\right)$ ✓ $\quad \theta_{sc} = 90°$ ✓

fcc: $\vec{a}_1 = \frac{a}{2}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$, $\vec{a}_2 = \frac{a}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, $\vec{a}_3 = \frac{a}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ $\quad \vec{b}_1 = \frac{2\pi}{a}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\vec{b}_2 = \frac{2\pi}{a}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$, $\vec{b}_3 = \frac{2\pi}{a}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$

$V_{el} = \frac{a^3}{8} \cdot \left(\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \frac{a^3}{4}$ ✓ $\quad V_{rez} = \frac{8\pi^3}{a^3} \cdot \left(\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} = \frac{32\pi^3}{a^3}$ ✓

$\theta_{fcc} = \frac{\pi}{3} = 60°$ ✓ ✓ ✓

bcc: $\vec{a}_1 = \frac{a}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\vec{a}_2 = \frac{a}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$, $\vec{a}_3 = \frac{a}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ ✓ $\quad \vec{b}_1 = \frac{2\pi}{a}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$, $\vec{b}_2 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\frac{2\pi}{a}$, $\vec{b}_3 = \frac{2\pi}{a}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ ✓

$V_{el} = \frac{a^3}{8}\left(\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} = \frac{a^3}{2}$ $\quad V_{rez} = \frac{8\pi^3}{a^3}\left(\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \frac{16\pi^2}{3}$ ✓

$\theta_{bcc} \approx 109{,}47°$ ✓ ✓

Sieht gut aus.
Aber das schöne Papier
=> 5.5P.
↳ 5P. f. Aufgabe
+1P. f. rez. Vekt.
+0.5 f. rez. Vol.
−1. P f. Papier...

FKP 2

$$\cos\varphi = \frac{\vec a\,\vec b}{|\vec a|\,|\vec b|} =: \vec a_n\,\vec b_n \text{ ; mit } \vec a_n, \vec b_n \text{ normiert}$$

$$\Rightarrow \varphi = \cos^{-1}(\vec a_n\,\vec b_n)$$

Diamantstruktur: 2 fcc Gitter auf der Diagonalen um $\frac{1}{4}$ gegeneinander verschoben ✓

$\Rightarrow$ fcc-Gitter mit Basis $(\vec 0, \frac{a}{4}(\vec x, \vec y, \vec z))$

$$\Rightarrow \vec a = \frac{a}{2}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} - \frac{a}{4}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \frac{a}{4}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix} \Rightarrow \vec a_n = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$\vec b = \frac{a}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} - \frac{a}{4}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \frac{a}{4}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} \Rightarrow \vec b_n = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \varphi = \cos^{-1}\left(\frac{1}{3}(-1+1-1)\right) = \cos^{-1}\left(-\frac{1}{3}\right) ✓ \square$$

$\Rightarrow$ 2P

3) Hexagonal dichteste Struktur:

Einfaches hexagonales Bravaisgitter + Basis $(\vec 0, \frac{\vec d_1}{3}, \frac{\vec d_2}{3}, \frac{\vec d_3}{3})$

$\vec d_1 = a\vec x$, $\quad \vec d_2 = \frac{a}{2}\vec x + \frac{\sqrt{3}}{2}a\vec y$, $\quad \vec d_3 = c\vec z$

Idealer Wert für $\frac{c}{a}$: Ideal, wenn Abstand zw. allen Gitterpunkten gleich ist. ✓

$$\Rightarrow \left|\frac{\vec d_1}{3} + \frac{\vec d_2}{3} + \frac{\vec d_3}{2}\right| = a \Rightarrow \left\|\begin{pmatrix}\frac{a}{3}+\frac{a}{6}\\ \frac{\sqrt{3}a}{6}\\ \frac{c}{2}\end{pmatrix}\right\| = a\left\|\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2\sqrt{3}}\\ \frac{c}{2a}\end{pmatrix}\right\| = a\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{12}+\frac{c^2}{4a^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4}+\frac{1}{12}+\frac{c^2}{4a^2} = 1 \Rightarrow \frac{c^2}{a^2} = 4-\frac{1}{3}-1 = \frac{8}{3} \Rightarrow \frac{c}{a} = \sqrt{\frac{8}{3}} ✓$$

Geht auch geometrisch über die Höhe des Tetraeders

$$h = a\sqrt{\frac{2}{3}} \Rightarrow c = 2h = a\sqrt{\frac{8}{3}} \Rightarrow \frac{c}{a} = \sqrt{\frac{8}{3}} ✓$$

$\Rightarrow$ 3P

$\Rightarrow$ 10.5P. auf alles