

11.1

a) Wahr

$$b) I^{(n)}(f) = \sum_{k=0}^n f(x_k) \int_a^b L_k^{(n)}(x) dx$$

mit $n+1$ Stützstellen ist exakt für alle Polynome mit dem Grad $\leq n$
falsch

Gaußpunkt

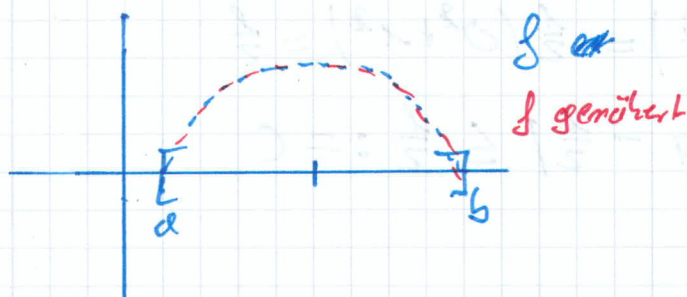
~~Knoten~~

Trapezregel: $I^{(1)}(f) = \frac{b-a}{2} (f(a) + f(b))$ Intervallgrenzen

Simpsonregel: $I^{(2)}(f) = \frac{b-a}{6} (f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b))$

Polynome von Grad 3 werden exakt integriert.

Wahl der Stützstelle ist wichtig, Gaußpunkt gut, andere eher mal.



c) falsch: $\|J\| < 1$ muss gelten

$\|H\| < 1$ " für Gauß Seidel

Spr(A) gibt keine Aussage über Konvergenz

Das Jacobi-Verfahren konvergiert z. B. für jede Diagonalmatrix in einem Schritt

Für solche Matrizen kann Spr(A) beliebig groß sein, es gilt jedoch mit

$$A = D + \underbrace{L+R}_A = D, \text{ da } A \text{ Diagonalmatrix}$$

$$J = -D^{-1}(L+R) = 0$$

d) Wahr

e) falsch, z. B. bei doppelter NST "nur" lineare oder keine Konvergenz

11.2

x_i	-2	0	1
y_i	-10	2	5

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

$$L_0(x) = \frac{x-0}{-2-0} \cdot \frac{x-1}{-2-1} = \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{6}x$$

$$L_1(x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 1$$

$$L_2(x) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x$$

Das Interpolationspolynom

$$\varphi(x) = -10 L_0(x) + 2 L_1(x) + 5 L_2(x) = -x^2 + 4x + 2$$

$$(\varphi(-1)^2 + 4 + 2 = 5)$$

$$\varphi(1) = 1/3 = 5$$

$$\varphi(2) = -4 + 4 \cdot 2 + 2 = 6$$

11.3

$$I^{(1)} = \frac{b-a}{2} [f(a) + f(b)]$$

$$= \frac{1}{2} (0^2 + 1^2) = \frac{1}{2} (0^2 + 1^2) = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow |I - I^{(1)}| = \left| \frac{1}{24} - \frac{1}{2} \right| \leq \frac{1}{2} := C$$

11.4

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 4 & 6 & -2 \\ 0 & -4 & 4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

LR:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & & \\ 2 & 1 & \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} b) \det(A) &= \det(LR) = \det(L) \cdot \det(R) = r_{11} \cdot r_{22} \cdot r_{33} \\ &= 2 \cdot 4 \cdot (-2) = -16 \end{aligned}$$

c) Löse $Ax = b$

$$\text{Vorwärts: } Ly = b \Rightarrow y = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Rückwärts: } Rx = y \Rightarrow x = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

11.5

a) Betrachte x klein genug! (z.B. $x = -10^3$)

$f(x) > 0$ und $f < 0$ für x

groß genug (z.B. $x = 10^5$)

Zwischenwertsatz: existiert mind. eine NST

Die NST ist eindeutig, da

$$f'(x) = -1 + \frac{1}{2} \sin(x) < 0$$

(also f streng monoton fallend)

$$b) f(x) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{f(x) + x}_{g(x)} = x$$

$$\text{mit } g(x) = 10 - \frac{1}{2} \cos(x)$$

$g(x) = x \leftarrow$ Fixpunktproblem

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = 10 - x - \frac{1}{2} \cos(x)$$

Bemerkung: • Selbstabbildung? ✓

• Kontraktion

$$\|g(x) - g(y)\| \leq \frac{1}{2} \|x - y\| \Leftrightarrow \frac{\|g(x) - g(y)\|}{\|x - y\|} = \|g'(x)\| < 1$$

$$\|g'(x)\| = \left| \frac{1}{2} \sin(x) \right| \leq \frac{1}{2} < 1 \text{ Kontraktion / Bemerkung erfüllt}$$

\Rightarrow Fixpunkt konvergiert $\forall x$

11.6

$$a) A = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}}_L + \underbrace{\begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}}_{=D} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_R$$

$$J = D^{-1} (L + R)$$

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

b) Ist Jacobi bzgl. A konvergent?

• $\|J\| < 1$, - Ja, da A strikt diagonal dominant

11.7

$$d^{(0)} = -\nabla f(x^0) = -2Ax^0 = -\begin{pmatrix} 16 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_0 = \frac{(d^{(0)})^T d^{(0)}}{(d^{(0)})^T A d^{(0)}} = \frac{5}{36}$$

$$x^1 = x^0 + \alpha_0 d^0 = -\begin{pmatrix} \frac{16}{9} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

11.8

Geg.: $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

i) pos. definit?

A_1 : ja, da $\Delta > 0$

A_2 : nein, da $\Delta < 0$

ii) Berechne Cholesky-Zerlegung

→ Voraussetzung: symmetrisch + pos. definit

$$A = \tilde{L} \tilde{L}^T$$

$$= L D^{1/2} D^{1/2} L^T$$

LR-Zerlegung

$$\tilde{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ +1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

diag(A_1)

$$l_{kk} = \sqrt{a_{kk} - \sum_{j=1}^{k-1} l_{kj}^2}$$

$$l_{ik} = \frac{1}{l_{kk}} \left(a_{ik} - \sum_{j=1}^{k-1} l_{ij} l_{kj} \right)$$