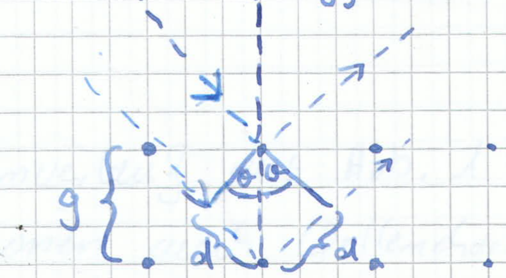
5) $g = 0{,}688\ nm$

David
Lars
Jonah

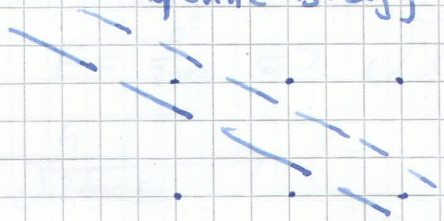
	Blatt 2
A6	3 / 3
A7	3 / 4
A8	5 / 5
A9	8 / 8
Σ	19 / 20

Hervorragend!

a) mit Bragg



b) ohne Bragg



$n\lambda = 2d = 2g\sin\vartheta$ ✓

$\Leftrightarrow \frac{n\lambda}{2g} = \sin\vartheta$

$\lambda = \frac{h}{p} \quad p = mv = \sqrt{2mE_{kin}}$

$\Leftrightarrow \frac{h\,n}{2g\sqrt{2mE_{kin}}} = \sin\vartheta$

Der Sinus kann maximal 1 werden. Ist also der Bruch größer als 1 findet keine Bragg Reflexion statt

$\Rightarrow \frac{h\,n}{2g\sqrt{2mE_{kin}}} \overset{!}{>} 1$

$\Leftrightarrow h\,n > 2\sqrt{2}\, g\sqrt{mE_{kin}}$

$\Leftrightarrow \frac{h^2n^2}{8g^2m} > E_{kin}$

$n = 1$, da dies das erste Maximum ist

$E_{kin} < 6{,}92 \times 10^{-23}\ [J]$

$< 4{,}32 \times 10^{-4}\ [eV]$ ✓

In Reaktoren wird Graphit benutzt um die freigesetzten Neutronen abzubremsen. ✓
Da deren Energien meist wesentlich höher sind als der berechnete Wert, werden sie reflektiert und verlieren Energie durch Stöße anstatt aus dem Reaktor herauszudringen. ✓

Aufgabe 7)

a) Der Kurvenverlauf aus Abb. 1 kommt zustande, da Elektronen auch Wellencharakter haben.

Hier müssten jetzt Begriffe wie „Interferenz" „Superposition" fallen.
$-0.5P$

b) $\lambda = \frac{h}{p}$ $\quad E = \frac{p^2}{2m} \Leftrightarrow \sqrt{2mE} = p$

$\Rightarrow \lambda = \frac{h}{\sqrt{2mE}}$ ✓

c) $\sin(\alpha) = \frac{n\lambda}{d}$ $\quad n = 2$

$\alpha = \arcsin\left(\frac{n\lambda}{d}\right)$ $\quad d = 10^{-6}\,m$

$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2meU}} \approx 1{,}23 \cdot 10^{-10}$

$\approx 0{,}014^\circ$ f. $-0.5\,P$

3/4

Aufgabe 8)

a) $|\psi_1|^2 = N^2 e^{-2\lambda|x|}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi_1|^2 \, dx = 2N^2 \int_0^{\infty} e^{-2\lambda x} = \frac{N^2}{\lambda} \overset{!}{=} 1 \iff N = \sqrt{\lambda}$$

b) $|\psi_2|^2 = \begin{cases} N^2 \sin^2\left(\frac{\pi x}{d}\right) & 0 \leq x \leq d \\ 0 \text{ sonst} & \text{sonst} \end{cases}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 \, dx = N^2 \int_0^{d} \sin^2\left(\frac{\pi x}{d}\right) dx = N^2 \cdot \frac{d}{2} \overset{!}{=} 1 \iff N = \sqrt{\frac{2}{d}}$$

c) $$\iiint |\psi_3|^2 \, dV \overset{!}{=} 1 \Rightarrow N^2 \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} \underset{r^2 \sin\theta}{\underset{\uparrow}{e^{-\frac{2}{r_0}|\vec{r}|}}} \, dr \, d\varphi \, d\theta$$

$$\vec{r} = r \begin{pmatrix} \sin\theta \cos\varphi \\ \sin\theta \sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix} \qquad |\vec{r}| = r \cdot \sqrt{\sin^2\theta \cos^2\varphi + \sin^2\theta \sin^2\varphi + \cos^2\theta}$$

$$= r \cdot \sqrt{\underbrace{\sin^2\theta \cdot [\underbrace{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi}_{1}] + \cos^2\theta}_{1}}$$

$$= r$$

$$= N^2 \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} \underset{\cdot r^2 \sin\theta}{\underset{\Uparrow}{e^{-\frac{2}{r_0} r}}} \, dr \, d\varphi \, d\theta = 2N^2 \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} r^2 e^{-\frac{2}{r_0} r} \, dr \, d\varphi$$

$$= 4\pi N^2 \int_0^{\infty} r^2 e^{-\frac{2}{r_0} r} \, dr$$

NR: $$\int_0^{\infty} r^2 e^{-\frac{2}{r_0} r} \, dr = \underbrace{-r^2 \frac{r_0}{2} e^{-\frac{2}{r_0} r} \Big|_0^{\infty}}_{=0} + \int_0^{\infty} 2r \frac{r_0}{2} e^{-\frac{2}{r_0} r} \, dr$$

$$r_0 \int_0^{\infty} r e^{-\frac{2}{r_0} r} \, dr = \underbrace{-r \frac{r_0}{2} e^{-\frac{2}{r_0} r} \Big|_0^{\infty}}_{=0} \cdot r_0 + \frac{r_0^2}{2} \int_0^{\infty} e^{-\frac{2}{r_0} r} \, dr$$

$$= \frac{r_0^3}{4}$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty r^2 e^{-\frac{2}{r_0} r} \, dr \cdot 4\pi N^2 = \pi N^2 r_0^3 \overset{!}{=} 1$$

$$\Leftrightarrow N = \sqrt{\frac{1}{r_0^3 \pi}}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{r_0^3 \pi}} \checkmark$$

5/5

Nr. 9 a) $|\psi(x,t)|^2 = \psi\cdot\psi^* = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{\pi}\,\alpha}}_{C^2} \exp\left(\frac{-x_0^2}{4\alpha^2}\left(2+\underbrace{e^{-2i\omega t}+e^{2i\omega t}}_{2\cos(2\omega t)}\right) - \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{x_0 x}{\alpha^2}\left(\underbrace{e^{-i\omega t}+e^{i\omega t}}_{\cos(\omega t)}\right)\right)$

$= C^2\exp\left(-\frac{1}{\alpha^2}\left(\frac{x_0^2}{2}(1+\cos(2\omega t)) + x^2 \mp 2x_0 x\cos(\omega t)\right)\right)$

$= C^2\exp\left(-\frac{1}{\alpha^2}\left(x_0^2\cos^2(\omega t) + x^2 - 2x_0 x\cos(\omega t)\right)\right)$

$= C^2\exp\left(-\frac{(x-x_0\cos(\omega t))^2}{\alpha^2}\right)$ ✓

$\Rightarrow$ exponentielle Abnahme in x, periodisch in t mit $T = \frac{2\pi}{\omega}$

b) $\hat{H}\psi = \hat{E}\psi$

$\Rightarrow -\frac{\hbar}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + V(x)\psi = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} \quad \Rightarrow V(x) = \frac{1}{\psi}\left(i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right)$

mit $\psi = Ce^{\beta}$:

$\frac{\partial\psi}{\partial t} = \left(-\frac{i\omega}{2} + \frac{2x_0^2 i\omega}{4\alpha^2}e^{-2i\omega t} - \frac{ix_0 x\omega}{\alpha^2}e^{-i\omega t}\right)\psi$

$= \frac{i\omega}{2}\left(-1 + \frac{1}{\alpha^2}\left(x_0^2 e^{-2i\omega t} - 2x_0 x e^{-i\omega t}\right)\right)\psi$

$\frac{\partial\psi}{\partial x} = \underbrace{\frac{1}{\alpha^2}\left(x_0 e^{-i\omega t} - x\right)}_{\gamma}\psi \quad \Rightarrow \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = \frac{\partial\gamma}{\partial x}\psi + \gamma\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{\partial\gamma}{\partial x} + \gamma^2\psi$ ✓

$= -\frac{\psi}{\alpha^2} + \frac{\psi}{\alpha^4}\left(-x + x_0 e^{-i\omega t}\right)^2$

$\Rightarrow V(x) = \frac{\hbar}{2}\left(-\omega\left(-1 + \frac{1}{\alpha^2}\left(x_0^2 e^{-2i\omega t} - 2x_0 x e^{-i\omega t}\right)\right) + \underbrace{\frac{\hbar}{m}}_{=\alpha^2\omega}\left(-\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha^4}\left(-x + x_0 e^{-i\omega t}\right)^2\right)\right)$

$= \frac{\hbar\omega}{2}\left(1 - 1 + \frac{1}{\alpha^2}\left(-x_0^2 e^{-2i\omega t} + 2x_0 x e^{-i\omega t} + x^2 - 2x_0 x e^{-i\omega t} + x_0^2 e^{-2i\omega t}\right)\right)$

✓

$= \frac{\hbar\omega x^2}{2\alpha^2}$ ~~folgt $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$~~ $= \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$

c) $\langle\hat{x}\rangle = \int_{-\infty}^{\infty}\psi^* x\,\psi\,dx = C^2\int_{-\infty}^{\infty} x\,e^{-\frac{(x-x_0\cos(\omega t))^2}{\alpha^2}}\,dx$ $\quad u = x - x_0\cos(\omega t) \Rightarrow x = u + x_0\cos(\omega t) \Rightarrow dx = du$

$= \underbrace{C^2\int_{-\infty}^{\infty} u\,e^{-\frac{u^2}{\alpha^2}}\,du}_{= -\frac{\alpha^2}{2}e^{-\frac{u^2}{\alpha^2}}\Big|_{-\infty}^{\infty} = 0} + C^2 x_0\cos(\omega t)\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{\alpha^2}}\,du}_{=\sqrt{\pi}\,\alpha} = x_0\cos(\omega t)$ ✓

$\langle\hat{x}^2\rangle = C^2\int_{-\infty}^{\infty}\left(u^2 + 2x_0\cos(\omega t)u + x_0^2\cos^2(\omega t)\right)du = C^2\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} u^2 e^{-\frac{u^2}{\alpha^2}}\,du}_{} + x_0^2\cos^2(\omega t)$

$= \frac{\alpha^2}{2} + x_0^2\cos^2(\omega t)$ ✓

$= \int_{-\infty}^{\infty} u\cdot u\,e^{-\frac{u^2}{\alpha^2}}\,du = \underbrace{\left[-u\frac{\alpha^2}{2}e^{-\frac{u^2}{\alpha^2}}\right]_{-\infty}^{\infty}}_{=0} + \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\alpha^2}{2}e^{-\frac{u^2}{\alpha^2}}\,du}_{=\frac{\alpha^2}{2}\sqrt{\pi}\,\alpha}$

$\sqrt{\langle\hat{x}^2\rangle - \langle\hat{x}\rangle^2} = \sqrt{\frac{\alpha^2}{2}} = \frac{\alpha}{\sqrt{2}}$ ✓

sehr schön