Gruppe 4
Physik IV

David
Jonah
Lars

1) $R = 0{,}5 \times 10^{-10}\,m$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e}{R^3}\vec{r}$$ innerhalb der Kugel und außerhalb

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{R^3}\vec{r}$$ zeigt in negative $\vec{e}_r$-Richtung
→ rücktreibend

$$\vec{F} = m\ddot{\vec{r}} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{R^3}\vec{r}$$

$$\Leftrightarrow \ddot{\vec{r}} + \underbrace{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 m}\frac{e^2}{R^3}}_{\omega^2}\vec{r} = 0$$

$$\omega = \pm\sqrt{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 m}\frac{e^2}{R^3}} \approx 4{,}5 \cdot 10^{16}\,\frac{rad}{s}$$ ✓

Einheit von Bogenmaß ist 1, rad ist im Deutschen eher unüblich

2) $n\lambda = g\sin\theta$ $n=1$: Hauptmaximum

$$\Rightarrow g = \frac{\lambda}{\sin\theta} \qquad \lambda = \frac{h}{p_e} \qquad p_e = m_e v_e$$

$$E_{kin} = \frac{m_e v_e^2}{2} = \frac{p_e^2}{2m_e}$$

$$g = \frac{h}{\sqrt{2m_e E_{kin}}\,\sin\theta} \qquad \Leftrightarrow p = \sqrt{2m_e E_{kin}}$$

$$\approx 2{,}15 \times 10^{-10}\,m$$ ✓

A1	4/4
A2	4/4
A3	4/4
A4	4/4
A5	3/4
Σ	19/20

Nr. 3

Planck-Gesetz: $f(\nu,T) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3}\frac{1}{e^{\frac{h\nu}{k_BT}}-1}$

1. $h\nu \ll k_BT$ (Rayleigh-Jeans-Gesetz)

Taylorentwicklung von e^x-1 bis zur ersten Ordnung mit $x=\frac{h\nu}{k_BT}$

$\Rightarrow T(x,0)=x$

$\Rightarrow f(\nu,T)=\frac{8\pi h\nu^3}{c^3 x} = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}k_BT$ ✓

2. $h\nu \gg k_BT$ (Wiensches-Gesetz)

$e^x \gg 1 \Rightarrow e^x-1 \approx e^x \quad (x=\frac{h\nu}{k_BT})$

$\Rightarrow f(\nu,T) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3}e^{-x} = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3}e^{-\frac{h\nu}{k_BT}}$ ✓

Nr. 4

1. $\frac{\partial f(\nu,T)}{\partial\nu} = \frac{24\pi h\nu^2c^3(e^{\frac{h\nu}{k_BT}}-1) - \frac{8c^3h^2\pi\nu^3}{k_BT}e^{\frac{h\nu}{k_BT}}}{c^6(e^{\frac{h\nu}{k_BT}}-1)^2} \stackrel{!}{=} 0$

$\Rightarrow 8\pi h\nu^2(3k_BT(e^{\frac{h\nu}{k_BT}}-1) - h\nu e^{\frac{h\nu}{k_BT}}) = 0$

$\Rightarrow \nu=0 \lor 3k_BT(e^{\frac{h\nu}{k_BT}}-1)-h\nu e^{\frac{h\nu}{k_BT}}) = 0 \Rightarrow \nu = (3+\beta)\frac{k_B}{h}T = \alpha T$

mit $h\nu \gg k_BT$: $8\pi h\nu^2(3k_BT-h\nu)=0 \Rightarrow \nu=0 \lor \nu=\frac{3k_BT}{h} \sim T$ numerisch lösbar

2./3. $P=\int_0^\infty f(\nu,T)\,d\nu = \int_0^\infty \frac{8\pi h\nu^3}{c^3(e^{\frac{h\nu}{k_BT}}-1)}d\nu$ Substituiere $x=\alpha\nu$
$\Rightarrow \nu=\frac{x}{\alpha},\ d\nu=\frac{dx}{\alpha}$
mit $\alpha=\frac{h}{k_BT}$

$\Rightarrow P = \int_0^\infty \frac{8\pi h x^3}{\alpha^4c^3(e^x-1)}dx = \frac{8\pi h}{\alpha^4c^3}\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x-1}dx$

mit $\int_0^\infty \frac{x^n}{e^x-1}dx = n!\,\zeta(n+1)$ folgt: $P=\frac{8\pi^5h}{15\alpha^4c^3} = \frac{8\pi^5k_B^4T^4}{15c^3h^3} = \sigma T^4$

$n=3 \Rightarrow n!\,\zeta(n+1) = 6\frac{\pi^4}{90} = \frac{\pi^4}{15}$

$\Rightarrow \sigma = \frac{8\pi^5k_B^4T^4}{15c^3h^3}$ ✓

Aufgabe 5

Vor dem Stoß: $E_L: p_e = \left(\frac{mc^2}{c}, 0, 0, 0\right)$

$P_h: p_{h_0} = \left(E/c, E/c, 0, 0\right)$

Nach dem Stoß: $E_L: p_e = \left(\frac{E-E'+mc^2}{c}, \frac{E-E'\cos(\varphi)}{c}, \frac{-E'\sin\varphi}{c}, 0\right)$

$P_h: p_{ph} = \left(\frac{E'}{c}, \frac{E'}{c}\cos(\varphi), \frac{E'}{c}\sin(\varphi), 0\right)$

$$p_\mu p^\mu = \frac{E_G^2}{c^2} - \vec{p}^{\,2} = m^2c^2$$

Setze Therme für E nach dem Stoß ein. (und danach für $\vec{p}$)

$$\frac{1}{c^2}E_G^2 = \frac{1}{c^2}\cdot\left(E-E'+m_ec^2\right)^2$$

$$= \frac{1}{c^2}\left[(E-E')^2 + 2(E-E')mc^2 + m^2c^4\right]$$

$$p_x^2 = \frac{1}{c^2}\left[E^2 - 2EE'\cos(\varphi) + E'^2\cos^2\varphi\right]$$

$$p_y^2 = \frac{1}{c^2}E'\sin^2\varphi$$

hebt sich raus

$$E_G^2 - c^2\vec{p}^{\,2} = m^2c^4$$

$$(E-E')^2 + 2(E-E')mc^2 - E^2 + 2EE'\cos(\varphi) - E'^2 = 0$$

$$2mc^2(E-E') + 2EE'(\cos(\varphi)-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{E'} - \frac{1}{E} = \frac{1}{mc^2}(1-\cos(\varphi))$$

mit $E = hf = \frac{hc}{\lambda}$: $\lambda' - \lambda = \frac{h}{mc}(1-\cos(\varphi))$ ✓