Numerik 16.7.18

10.2

a) Kann man das Newton-Verfahren als Fixpunktiteration betrachten?

- Jahr, denn für

$$\underbrace{\phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}}_{\text{def von Newton}}$$

für ein geg. f mit gesuchter NST kann man auch das Fixpunktproblem betrachten

b)

nicht singulär $\Leftrightarrow$ ~~nicht~~ invertierbar

Quadratische Matrix A

Frage: existiert eine LR-Zerlegung in der Form $A=LR$

(Skript:) $PA = LR$

Antwort: Nein

Beispiel: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 6 & 4 \end{pmatrix} = A$

$L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{a_{21}}{a_{11}} & 1 & 0 \\ -\frac{a_{31}}{a_{11}} & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{a_{32}}{a_{22}} & 1 \end{pmatrix}$ $\lightning$

Es gibt keine LR-Zerlegung

c)

$(x_0, f_0), \dots, (x_n, f_n)$, (x_{n+1}, f_{n+1})

Lösung: ~~Wähle~~ Newton-Darstellung mittels dividierten Differenzen, da Wähle: bei Hinzunahme eines weiteren Datenpaares die Die Basispolynome sich nicht verändern.

d) $\int_a^b p(x)dx \leftarrow$ soll numerisch approximiert werden ; $a, b \in \mathbb{R}$

Frage: "Die summierte Trapezregel ist stets exakt wenn ein Polynom von Grad ≤ 2 ist ="

(Skript): $I^{(m)}(f) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i f(\lambda_i)$ ist exakt für $f \in P_{m+1}$

Gauß-Quadratur

Ordnung $2n+2 \Rightarrow l_i^2 \in P_{2n}$ wird exakt integriert

$l_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{\lambda_i - \lambda_j}$ $\quad$ "$x_i = \lambda_i$" Stützstelle

Lösung

① Satz des Carleseung

② Nachrechnen

$f(x) = x^2$ | $\int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$

$I(f) = \frac{a-b}{2}\left[f(0) - f(1)\right] = \frac{1}{2}$

10.3

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 7 \\ 2 & 5 & 9 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}}_{R}$$

① Löse $Ly = b$ $\qquad b = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 11 \end{pmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \\ 11 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} y_1 &= 6 \\ y_2 &= 9 - y_1 = 3 \\ y_3 &= 11 - y_2 - y_1 = 2 \end{aligned}$$

② Löse $Rx = y$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} 2x_3 &= 2 \Rightarrow x_3 = 1 \\ 2x_2 + 3x_3 &= 3 \Rightarrow x_2 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 6 \Rightarrow x_1 = 1 \end{aligned}$$

$\Rightarrow x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$; 10.4 a) $f' = 3x^2 - 1 \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}$

b) Newton-Verfahren

$x_{n+1} = x_n - \frac{f'(x)}{f''(x)} = x_n - \frac{3x_n^2 - 1}{6x_n}$ zur Berechnung d. Extremum

c) $x_0 = 1$

$x_1 = 1 - \frac{3-1}{6} = \frac{2}{3}$

$x_2 = \frac{7}{12}$

10.5

i	0	1	2	3
x_i	-2	0	1	3
y_i	2	1	2	1

Berechne Interpolation mit Newton-Basis

d_i berechnen sich aus

$$y[x_i, x_{i+1}] = \frac{y[x_{i+1}] - y[x_i]}{x_{i+1} - x_i}$$

$$y[x_i, \dots, x_{i+k}] = \frac{y[x_{i+1}, \dots, x_{i+k}] - y[x_{i}, \dots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i}$$

$x_0 = 2$
$x_1 = 0$
$x_2 = 1$
$x_3 = 3$

$y[x_0] = \boxed{2} = d_0$

$y[x_1] = 1 \to y[x_0, x_1] = \frac{1-2}{0+2} = \boxed{\frac{1}{2}} = d_1$

$y[x_2] = 2 \to y[x_1, x_2] = \frac{2-1}{1-0} = 1 \to y[x_0, x_1, x_2] = \boxed{\frac{1}{2}} = d_2$

$y[x_3] = 1 \to y[x_2, x_3] = \frac{1-2}{3-1} = -\frac{1}{2}$

$\to y[x_1, x_2, x_3] = -\frac{1}{2} \to y[x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}}{3-(-2)} = \boxed{\frac{-1}{5}} = d_3$

Skript: $p(x) = \sum_{i=0}^{3} d_i N_i(x)$

Newton-Polynome $N_i(x) = \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j)$

$P_0(x) = 2$

$P_1(x) = 2 - \frac{1}{2}(x+2)$

$P_2(x) = 2 - \frac{1}{2}(x+2) + \frac{1}{2}(x+2)x$

$P_3(x) = 2 - \frac{1}{2}(x+2) + \frac{1}{2}(x+2)x - \frac{1}{5}(x+2)x(x-1)$

3.5.18 : 10:15 10. Stock Mathegebäude