David
Lars
Jonah

| 1 | 2 | 3 | 4 |
| --- | --- | --- | --- |
| 5/5 | 5/5 | 3 | 5/5 |

$\frac{18}{20}$

4.1) $\gamma \dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = f(t)$ (1)

a) $x_s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' g(t-t') f(t')$

$$\dot{g}(t-t')\gamma + \omega_0^2 g(t-t') = \delta(t-t') \quad (2)$$

$x_s(t)$ in (1):

$$\gamma \frac{d}{dt}\left(\int_{-\infty}^{\infty} dt' g(t-t') f(t')\right) + \omega_0^2 \int_{-\infty}^{\infty} dt' g(t-t') f(t') = f(t)$$

$$\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} dt' \, \dot{g}(t-t')\gamma f(t') + \omega_0^2 g(t-t') f(t') = f(t)$$

mit (2) $\Leftrightarrow$ $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t') f(t') = f(t)$

$$f(t) = f(t) \quad \square$$

✓

b) $g(t-t') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \, \tilde{g}(\omega) e^{i\omega(t-t')}$ (3)

$$\dot{g}(t-t') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \, i\omega \tilde{g}(\omega) e^{i\omega(t-t')}$$

$$\delta(t-t') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \, e^{i\omega(t-t')}$$

in (2):
$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \, e^{i\omega(t-t')} \tilde{g}(\omega) (i\omega\gamma + \omega_0^2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \, e^{i\omega(t-t')}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \, e^{i\omega(t-t')} \tilde{g}(\omega)}_{\overset{(3)}{=} g(t-t')} = \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \, \frac{e^{i\omega(t-t')}}{i\omega\gamma + \omega_0^2}}_{\text{Hinweis: } = 2\pi\Theta(t-t') e^{-\frac{\omega_0^2}{\gamma}(t-t')}}$$

$$\Rightarrow g(t-t') = \Theta(t-t') e^{-\frac{\omega_0^2}{\gamma}(t-t')}$$

✓

c) $x_s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' \, g(t-t') \, a \left(1 - \exp\left(-\frac{t'-t_0}{\tau}\right)\right) \Theta(t'-t_0)$ ✓

$$= a \int_{-\infty}^{\infty} \Theta(t-t') \, e^{-\frac{\omega_0^2}{\gamma}(t-t')} \left(1 - e^{-\frac{t'-t_0}{\tau}}\right) \Theta(t'-t_0)$$

$$= a \int_{t_0}^{t} dt' \left(-e^{-\frac{(t'-t_0)}{\tau}} + 1\right) e^{-\frac{\omega_0^2}{\gamma}(t-t')}$$ ✓

$$= a \int_{t_0}^{t} dt' \; e^{-\frac{\omega_0^2}{\gamma}(t-t')} - e^{-\frac{\omega_0^2}{\gamma}(t-t') - \frac{1}{\tau}(t'-t_0)}$$ ✓

$$= a\left( \frac{\gamma\left(1 - e^{-\frac{\omega_0^2}{\gamma}(t-t_0)}\right)}{-\omega^2} - \int_{t_0}^{t} dt' \; e^{+t'\left(\frac{\omega_0^2}{\gamma} - \frac{1}{\tau}\right) - \frac{\omega_0^2}{\gamma}t + \frac{1}{\tau}t_0} \right)$$

$$= a\left( \frac{\gamma\left(1 - e^{-\frac{\omega_0^2}{\gamma}(t-t_0)}\right)}{\omega_0^2} - \frac{1}{\frac{\omega_0^2}{\gamma} - \frac{1}{\tau}} \left( e^{\frac{t_0 - t}{\tau}} - e^{\frac{\omega_0^2}{\gamma}(t_0 - t)} \right) \right)$$ ✓

5/5

# Aufgabe 42

a) $\sin\theta = \frac{c}{v} = \frac{\sqrt{g \cdot h}}{v}$ ✓

b) i) $\omega(k) = \sqrt{gk}$

$\phi = kr - \sqrt{g \cdot k}\, t$

$\frac{d\phi}{dk} \overset{!}{=} 0 = r - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{k}}\, t$ ($\frac{d\phi}{dk} = 0$ da nur Maxima zu sehen sind)

$\Leftrightarrow k = \frac{gt^2}{4r^2}$

$\phi = \frac{gt^2}{4r} - \sqrt{g \cdot \frac{gt^2}{4r^2}}\, t$

$= -\frac{gt^2}{4r}$ ✓

ii) ~~$d\phi$~~

Kosinussatz: $r^2 = r'^2 + v^2t^2 - 2 r'vt \cos\theta$

$r = \left[r'^2 + v^2t^2 - 2r'vt \cos\theta\right]^{1/2}$

Einsetzen in $\phi$ und $\frac{d\phi}{dt}$:

$$\frac{d\phi}{dt} \overset{!}{=} 0 = -\frac{g}{4}\, \frac{2t\sqrt{r'^2+v^2t^2-2vtr'\cos\theta} - t^2\frac{v^2t - vr'\cos\theta}{\left[r'^2+v^2t^2-2vtr'\cos\theta\right]^{1/2}}}{r'^2+v^2t^2-2vtr'\cos\theta}$$

$t = 0 \vee (\ldots\ldots\ldots) = 0$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{r'^2+v^2t^2-2vtr'\cos\theta} = t\,\frac{v^2t^2 - vr'\cos\theta}{\sqrt{r'^2+v^2t^2-2vtr'\cos\theta}}$

$$\Leftrightarrow 2\left[r'^2+v^2t^2-2vtr'\cos\theta\right]=t\left[v^2t-vr'\cos\theta\right]$$

$$\Leftrightarrow v^2t^2-3vtr'\cos\theta+2r'^2=0$$

$$t^2-3t\cdot\underbrace{\frac{r'}{v}}_{\hat{=}\,a}+2\underbrace{\left(\frac{r'}{v}\right)^2}_{\hat{=}\,a^2}=0$$

$$t_{1/2}=\frac{3}{2}a\cos\theta\pm\sqrt{\underbrace{\frac{9}{4}a^2\cos^2\theta-2a^2}_{\overset{!}{\geq}0}}$$

$$\frac{9}{4}a^2\cos^2\theta=2a^2$$

$$\Leftrightarrow \arccos\left(\pm\sqrt{\frac{8}{9}}\right)=\theta\approx\pm 19{,}471^\circ\ \left[\vee\ 180^\circ-\underbrace{19{,}471^\circ}_{a}\right]$$

$\rightarrow$ max. Winkel: $19{,}471^\circ$ ✓

$\cancel{\theta\in}$ $\theta\in[0;19{,}471]$ ✓

5/5

4 41

a| Bewegter Detektor, ruhende Quelle

$f' = f\left(1+\frac{v_D}{v}\right) \Leftrightarrow \frac{f'}{f} = 1+\frac{v_D}{v}$

$\Leftrightarrow v_D = v\left(\frac{f'}{f}-1\right) = 340\,\mathrm{m/s}\left(\sqrt[12]{2}-1\right) = 20{,}22\,\frac{m}{s}$

$= 72{,}78\,\frac{km}{h}$

b| Ruhender Detektor, bewegte Quelle

$f' = f\,\frac{1}{1-\frac{v_s}{v}} \Leftrightarrow v_s = v\left(1-\frac{f}{f'}\right)$

$\Rightarrow v_s = 340\left(1-\frac{1}{\sqrt[12]{2}}\right) = 19{,}08\,\frac{m}{s} = 68{,}7\,\frac{km}{h}$

c| zu a| $v_D = v\left(\frac{f'}{f}-1\right) = 340\,\frac{m}{s}(2-1) = 340\,\frac{m}{s} = 1226\,\frac{km}{h}$

b| $v_s = v\left(1-\frac{f}{f'}\right) = 340\,\frac{m}{s}\left(1-\frac{1}{2}\right) = 170\,\frac{m}{s} = 613\,\frac{km}{h}$

d) Die Geschwindigkeiten aus a) und b) sind leicht mit einem Auto zu erreichen.
~~Auch~~ die Geschwindigkeit, die der Weihnachtsmann zur Tonerhöhung um eine Oktave benötigt ist ~~machbar~~ schon schwierig, aber für den Schlitten machbar. Lediglich der Elf könnte Probleme bekommen 1226 $\frac{km}{h}$ zu erreichen, aber auch das sollte mit einem Düsenjet oder einem Ersatzrentier möglich sein.

ganz genau

5/5

BRUNNEN