Progammation Linéaire

Sy, Ibrahima

Institut Supérieur Informatique (**ISI**)
Licence 2 GL, IAGE

November 23, 2021

Overview

Un problème de production

Un fabricant produit 2 types de yaourts à la fraise A et B ‘a partir de Fraise, de Lait et de Sucre. Chaque yaourt doit respecter les proportions suivantes de matières premières.

	A	B
Fraise	2 kg	1 kg
Lait	1 kg	2 kg
Sucre	0 kg	1 kg

On dispose de 800 Kg de Fraises, 700 Kg de Lait et 300 Kg de sucre.
La vente de 1 Kg de yaourts A et B rapporte respectivement 4 et 5e. Le fabricant cherche ‘a maximiser son profit.

Modélisation

Question : Sur quelles quantités peut-on travailler ?

Identifier les variables

1. Seules valeurs non constante: les quantités de yaourts A et B produites
2. On parle de variables
3. On les notera X_A et X_B(par exemple)

La vente de 1 pot de yaourst A et B rapport respectivement 4 euros et 5 euros. Le nombre de pots produits est représenté par les variables. Ainsi: $Z = 4.X_A + 5.X_B$ c'est la fonction que nous allons chercher á maximiser

Modélisation

Question : Que cherche t-on a optimiser?

Identifier les variables

1. Le profit, souvent noter Z
2. Calculé á partir de X_A et X_B
3. On parle de fonction objectif

La vente de 1 pot de yaourt A et B rapport respectivement 4 euros et 5 euros. Le nombre de pots produits est représenté par les variables. Ainsi: $Z = 4.X_A + 5.X_B$ c'est la fonction que nous allons chercher á maximiser

Modélisation

Question : Quelles sont les contraintes du problème ?

Optimiser une fonction objectif est une chose, a priori, simple. Cependant, il ne faut pas négliger les contraintes induites par les quantités limites de ressources á notre disposition.

Identifier les contraintes (exemple avec les fraises)

1. Première contrainte : 800Kg de fraises disponibles
2. La quantité utilisée dépend de la production : $2X_A + X_B$
3. D'où la contrainte: $2X_A + X_B \leq 800$

Modélisation

Question : Quelles sont les contraintes du problème ?

En suivant le même raisonnement, on obtient les trois contraintes suivantes :

1. $2X_A + X_B \leq 800$(fraises)
2. $X_A + 2X_B \leq 700$(lait)
3. $X_B \leq 300$ (sucre)

De plus, le nombre de pots de yaourts A et B est forcément positif D'où les deux contraintes supplémentaires

1. $X_A \geq 0$
2. $X_B \geq 0$

Le programme final

Ainsi, avec les différentes informations, on obtient le programme Linéaire suivant

Programme Linéaire final

$$Max\ z = 4x_A + 5x_B$$

$$s.c \begin{cases} 2x_A + x_B & \leq 800 \\ x_A + 2x_B & \leq 700 \\ x_B \leq 300 \\ x_A, x_B \geq 0 \end{cases}$$

Ce type de modèle le peut évoluer très facilement :

1. Si on rajoute un produit alors il suffit de rajouter une variable
2. Si on ajoute une ressource critique il suffit de rajouter une contrainte

modélisation par un programme linéaire

Un programme Linéaire ire possède trois composantes

1. Les variables
2. Une fonction économique(aussi appelée fonction objectif)
3. Un ensemble de contraintes

Les variables

Les variables

Les variables correspond au quantités variables(des produits fabriqués, par exemple).Il s'agit des éléments sur lesquels nous allons avoir un impact en ayant la possibilité de modifier leurs valeurs

Les contraintes

Les variables

L' optimisation de la fonction objectif se fait en tenant compte des différentes contraintes liées aux variables. Chaque contrainte peut être t représentée par une équation ou une inéquation. Chaque contrainte doit être linéaire

Forme d' un programme linéaire

On peut écrire ainsi un programme linéaire avec n variables $X_1, \ldots, X_n$ et m contraintes

$$\text{Min} \quad \text{Max} \quad \sum_{i=1}^{n} C_i X_i$$

sous les contraintes

$$\sum_{i=1}^{n} A_{ij} X_i \leq B_j, (j = 1, \ldots m)$$

$$X_i \in \mathbb{R}, (i = 1, \ldots m)$$

1. **Linéarité** : Objectif et contraintes sont des fonctions linéaires des variables de décision(les coefficients C_i et A_{ij} des variables sont constantes
2. **Continuité** : Les variables peuvent prendre n' importe quelle valeur réelle respectant les contraintes linéaires

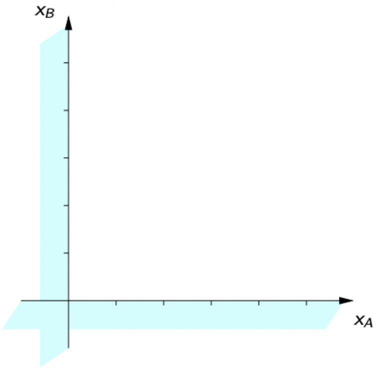
Résolution graphique

- On dispose d'un outil (la PL) pour modéliser des problèmes
- Comment résoudre les problèmes s à l'aide de la PL ?
    - Plusieurs algorithmes existent, dont le simplexe (prochain cours)
    - Pour des problèmes avec deux variables, on peut résoudre graphiquement (aide à comprendre la structure du problème)

Représentation graphique

$$Max\ z = 4x_A + 5x_B$$

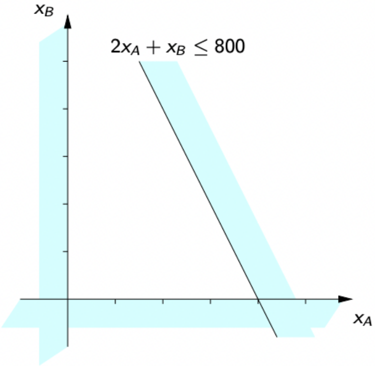
$$s.c \begin{cases} 2x_A + x_B & \leq 800 \\ x_A + 2x_B & \leq 700 \\ x_B \leq 300 \\ x_A, x_B \geq 0 \end{cases}$$



Représentation graphique

$$Max\; z = 4x_A + 5x_B$$

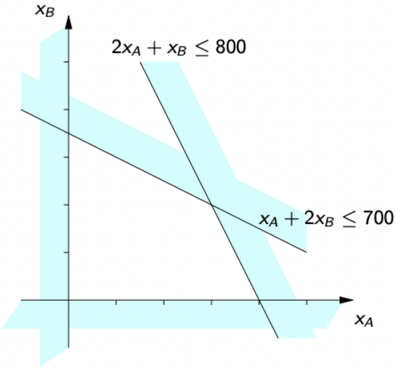
$$s.c \begin{cases} 2x_A + x_B & \leq 800 \\ x_A + 2x_B & \leq 700 \\ x_B \leq 300 \\ x_A, x_B \geq 0 \end{cases}$$



Représentation graphique

$$Max\ z = 4x_A + 5x_B$$

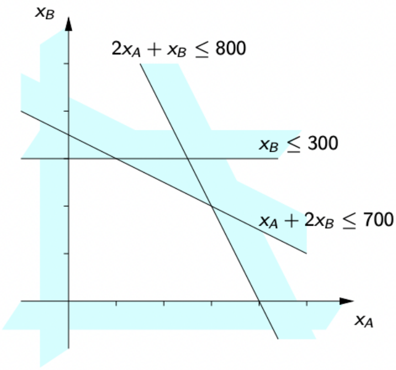
$$s.c \begin{cases} 2x_A + x_B & \leq 800 \\ x_A + 2x_B & \leq 700 \\ x_B \leq 300 \\ x_A, x_B \geq 0 \end{cases}$$



Représentation graphique

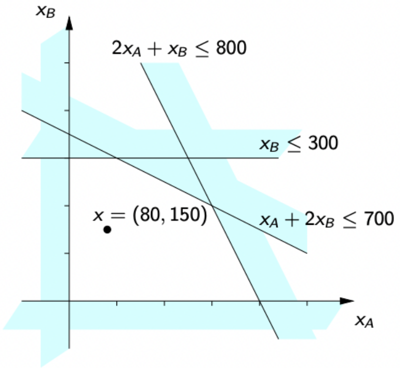
$$Max\ z = 4x_A + 5x_B$$

$$s.c \begin{cases} 2x_A + x_B & \leq 800 \\ x_A + 2x_B & \leq 700 \\ x_B \leq 300 \\ x_A, x_B \geq 0 \end{cases}$$



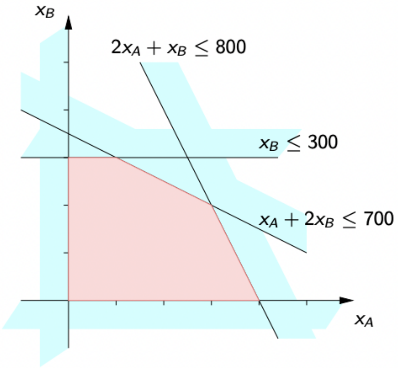
Représentation graphique

- **Solution**: affectation de valeurs aux variables
- **Solution réalisable** : solution réalisable si les valeurs satisfont l'ensemble des contraintes
- **Région réalisable** : ensemble des solutions réalisables.



Représentation graphique

- **Solution**: affectation de valeurs aux variables
- **Solution réalisable** : solution réalisable si les valeurs satisfont l'ensemble des contraintes
- **Région réalisable** : ensemble des solutions réalisables.



forme matricielle

$$(PL)\begin{cases} \max z & = c^T X \\ s.à A.X & = b \\ X & \geq 0 \end{cases}$$