Cours de Probabilités en Master 1 Data Science et Intelligence Artificielle(**DSIA)**

IBRAHIMA SY

*Institut Supérieur Informatique(**ISI**)*

Table des matières

Introduction

Les probabilités sont l'étude du hasard et de l'incertain. Elle permettent de donner un cadre formel et rigoureux aux nombreux phénomènes physique aléatoires.

L'étude des probabilités a connu son essor au **XX**ème siècle lorsque leur application à d'autre domaines des sciences ont été découvert : en physique (mécanique quantique, physique statistique), en biologie (météorologie, génétique des populations), en économie (théorie des jeux, mathématiques financières, assurances), en sociologie (démographie, sondage)... Elle constitue actuellement un champs d'étude très actif.

Chapitre Un

Introduction aux probabilités

1.1 L'Univers

Définition 1.1.1. *(**Expérience Aléatoire**) On appelle expérience aléatoire une expérience renouvelable et qui, renouvelée dans des conditions identiques, ne donne pas forcément le même résultat.*

Définition 1.1.2. *(**Univers**). L'ensemble des issues possibles d'une expérience aléatoire donnée se nomme l'univers (ou ensembles des issues). On le note Ω Un élément de est donc une issue, et on la représente par ω*

Vocabulaire 1.1.1. *La théorie des probabilités peut être vue comme une manipulation d'ensembles, vu qu'un événement (ou même l'univers) n'est qu'un ensemble. La tableau ci-dessous donne les équivalences entre le vocabulaire utilisé en théorie des probabilités et en théorie des ensembles. Soit Ω un univers lié à une expérience aléatoire et soit A et B deux événements de Ω , on a :*

Notation probabiliste	**Notion ensembliste**
Résultat possible	$\omega \in \Omega$
A est un événement	$A \in \Omega$
$A \Rightarrow B$	$A \subset B$
A et B	$A \cap B$
A ou B	$A \cup B$
A n'est pas réalisé	A^c
A est un événement irréalisable	$A = \emptyset$
A est un événement certain	$A = \Omega$
A et B sont incompatibles	$A \cap B = \emptyset$

1.2 Axiomatique de Kolmogorov

Définition 1.2.1. *(Tribu ou σ-algèbre). Une famille $\mathcal{A}$ de parties de l'univers est une tribu, si elle satisfait les trois propriétés suivantes :*

- $\Omega \in \mathcal{A}$
- $A \in \mathcal{A}$ *alors* $A^c \in \mathcal{A}$
- *Soit* $(A_i)_{i\in I}$*, une famille dénombrable d'éléments de* $\mathcal{A}$, $\cup_{i\in I} A_i \in \mathcal{A}$

Propriété 1.2.1. *Soit $\mathcal{A}$ une tribu d'un univers Ω Les propriétés suivantes sont des conséquences directes de la définition :*

- $\emptyset \in \mathcal{A}$
- *Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{A}$ alors $\cap_{n=1}^{+\infty} A_n \in \mathcal{A}$*
- *Si $(A_i)_{0\leq i\leq N}$ est une suite finie de N éléments de $\mathcal{A}$ alors $\cup_{i=0}^{N} A_i$*
- *Si $(A_i)_{0\leq i\leq N}$ est une suite finie de N éléments de $\mathcal{A}$ alors $\cap_{i=0}^{N} A_i$*

Notation 1.2.1. *On note $\mathcal{P}(\Omega)$, l'ensemble des sous-parties d'un univers Ω*

Exemple 1.2.1. *Voici des exemples de tribus*

- *$\{\Omega, \emptyset\}$ est une tribu de Ω , nommée tribu triviale*
- *Soit $A \in \mathcal{A}$, alors $\{A, A^c, \Omega, \emptyset\}$ est un tribu de Ω appelé tribu engendrée par A*
- *$\mathcal{P}(\Omega)$ est une tribu de Ω, nommée tribu discrète de Ω.(C'est la plus grande tribu de Ω) .*

Définition 1.2.2. *(**Espace probabilisable**). On appelle espace probabilisable, le couple $(\Omega, \mathcal{A})$, où $\mathcal{A}$ est une tribu de Ω*

Définition 1.2.3. *Une probabilité (ou **mesure de probabilité**) sur $(\Omega, \mathcal{A})$, est une application :*

$$\mathbb{P}: \quad \mathcal{A} \quad \longmapsto \quad [0;1]$$

vérifiant les trois axiomes de Kolmogorov suivant :

- ***Axiome 1 :** Pour tout évènement A de $\mathcal{A}$, $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$*
- ***Axiome 2 :** $\mathbb{P}(\Omega) = 1$*
- ***Axiome 3 :** Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événement de $\mathcal{A}$ deux à deux incompatibles*

$$\mathbb{P}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_n \mathbb{P}(A_n)$$

Remarque 1.2.1. *Soit A et B sont deux événements d'un univers Ω, telque $A \cap B = \emptyset$ alors :*

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$$

Remarque 1.2.2. *La propriété $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$ existe aussi pour plus de deux éléments. Par exemple pour 3 éléments A, B et C on a :*

$$\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C)$$

1.3 Loi de probabilité uniforme discrète

Afin de formaliser la notion de probabilité, cette sous-partie traite l'exemple de la probabilité uniforme discrète.

Vocabulaire 1.3.1. *(**ensemble discret**). Un ensemble est dit discret , s'il peut être mis en bijection avec une sous-partie de* $\mathbb{N}$*. Discret est synonyme de **dénombrable***

Exemple 1.3.1.

- *L'ensemble* $\{1, 2, 3\}$ *est discret. En effet,* $\{1, 2, 3\}$ *peut être mis en bijection avec la sous partie de* $\mathbb{N}, \{1, 2, 3\}$ *ou* $\{13, 17, 451\}$
- *L'ensemble* $\mathbb{N}$ *est discret. En effet,* $\mathbb{N}$ *peut être mis en bijection avec* $\mathbb{N}$ *qui est une sous partie de lui même.*
- *L'ensemble* $\mathbb{R}$ *n'est pas discret car il ne peut pas être mis en bijection avec une sous partie de* $\mathbb{N}$*.*

Définition 1.3.1. *(**Loi de probabilité uniforme discrète**). Soit un univers discret fini. La loi de probabilité uniforme discrète, est une probabilité qui associe à chaque élément! de l'univers la même valeur.*

Exercice 1.3.1. *Soit l'expérience aléatoire suivante qui consiste a lancé un dé équilibré*

1. *Donner espace probabilisable associé á cette expérience aléatoire*
2. *Donner la loi de probabilité associe á cette expérience aléatoire*

Exercice 1.3.2. *Considérons l'expérience suivante d'un jeu de pile ou face avec une pièce non pipée. Notons 0, l'événement «obtenir un pile» et 1 l'événement «obtenir un face».*

1. *Donner espace probabilisable associé á cette expérience aléatoire*
2. *Donner la loi de probabilité uniforme discret associé á cette expérience aléatoire*

Exemple 1.3.2. *(**Cas général**). Soit* Ω *un univers discret fini d'une expérience. Soit* $\mathbb{P}$ *la loi de probabilité uniforme discrète. Si le cardinal de* Ω*,* $Card(\Omega)$*, (c'est à dire le nombre d'éléments de* Ω*) vaut* n *alors on a :*

$$\forall \omega \in \Omega, \mathbb{P}(\omega) = \frac{1}{Card(\Omega)} = \frac{1}{n}$$

Proposition 1.3.1. *Tout événement* A *étant une sous partie de l'univers* Ω*, on en déduit que si* $\mathbb{P}$ *est la probabilité uniforme discrète on a :*

$$\forall A \subset \Omega, \mathbb{P}(A) = \frac{Card(A}{Card(\Omega)} = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

Exercice 1.3.3. *On considère l'expérience aléatoire qui consiste á lancer deux dés non pipe .*

1. *Déterminer l'espace probabilisable associe a cette expérience aléatoire*
2. *Calculer le cardinal de* Ω
3. *En utilisant la probabilité uniforme discrète, calculer l'événement A : «Obtenir un 7»*
4. *En utilisant la probabilité uniforme discrète, calculons l'événement A : «Obtenir un 8» :*

Exercice 1.3.4. *On tire successivement et sans remise de deux boules dans une urne en contenant trois. Les trois boules contenues dans l'urne sont de différentes couleurs, il y en a une bleue, une rouge et une verte.L'ordre dans lequel les boules sont tirés est noté.*

1. *Déterminer l'espace probabilisable associe á cette expérience aléatoire*
2. *Calculer le cardinal de* Ω
3. *En utilisant la probabilité uniforme discrète, calculons l'événement RV : «Obtenir une boule rouge et une boule verte» :*
4. *En utilisant la probabilité uniforme discrète, calculons l'événement BV : «Obtenir une boule bleue et une boule verte» :*

Indépendance et probabilité conditionnelle

La notion d'indépendance est intuitive. Pour la visualiser prenons l'exemple le plus récurrent : le lancé d'un dé. On lance deux dés et on nomme **A** : " *Avoir un* 6 *avec le premier dé*" et **B** : "*Avoir un* 6 *avec le deuxième dé*". Alors il est évident que le résultat du deuxième dé est indépendant de celui du premier. On dit alors que les deux évènements **A** et **B** sont indépendants. Dans la même logique comment définir la probabilité conditionnelle ? C'est en réalité une notion qui encore une fois nous vient naturellement lorsqu'on se pose par exemple la question : "*Quelle est la probabilité qu'il pleuve sachant qu'il y a des nuages*". On peut alors analyser cette question en détachant deux évènements. Le premier serait **A** : "*Il pleut*" et le deuxième **B** : "*Il y a des nuages*", et on souhaiterait alors trouver la probabilité de **A** sachant **B**. Nous allons formaliser dans ce chapitre ces idées en ne traitant que le cas des évènements aléatoires. Nous traiterons plus tard le cas des variables aléatoires.

2.1 Indépendance

Définition 2.1.1. ***(Événement indépendants)****. Soit* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé et soit* A *et* B *deux événements définis sur cet espace. On dit que* A *et* B *sont indépendants si et seulement si :*

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$

Exercice 2.1.1. ***(lance de deux dés)*** *Prenons une expérience aléatoire qui consiste a lancé deux dés non pipés.Notons* ***A*** *l'évènement "obtenir un 5 avec le premier dé" et* ***B*** *l'évènement "obtenir un 3 avec le deuxième dé".*

Question : *Montrons que les évènements* A *et* B *sont indépendants*

Définition 2.1.2. ***(Indépendance dans leur ensemble)****. Soit* $(\Omega, \mathcal{A}\mathbb{|})$ *un espace probabilisé et soit* $(A_i)_{i\in I}$ *une suite d'événements aleatoires definies sur cet espace . On dit que les* A_i *sont independants dans leur ensemble si et seulement si pour tout* $J \subset I$ *on a :*

$$\mathbb{P}(\bigcap_{j\in J} A_j = \prod_{j\in J} \mathbb{P}(A_j)$$

Exercice 2.1.2. *Soit* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé et soit* A *et* B *deux évènements indépendants.*

– *Montrer que :*

1. A *et* B^c *sont indépendants*
2. A^c *et* B *sont indépendants*
3. A^c *et* B^c *sont indépendants*

2.2 Probabilité conditionnelle

2.2.1 Généralités

Définition 2.2.1. *(**Probabilité conditionnelle**) Soit* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé et soit* A *et* B *deux évènements appartenant à cet espace. L'évènement* A *sachant* B*, noté* $A|B$*, et sa probabilité est définie par :*

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

Remarque 2.2.1. *Tout d'abord cette définition n'a un sens que si* $\mathbb{P}(B) > 0$*. Si on a* $\mathbb{P}(B) = 0$ *alors il est évident que :* $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$*, mais nous reviendrons plus loin dessus.*

Remarque 2.2.2. *(Fondamentale). Il est très important de remarquer que d'écrire* $\mathbb{P}(A|B)$ *n'est qu'une notation. La probabilité conditionnelle doit être vu comme une probabilité prenant en argument l'événement* A*. Ainsi l'argument ne dépend pas de* B*. En particulier on peut alors énoncé la proposition suivante :*

Proposition 2.2.1. *Soit* A *et* B *deux événements.*

$$\mathbb{P}(A^c|B) = 1 - \mathbb{P}(A|B)$$

Remarque 2.2.3. *On peut remarquer qu'on a également :* $\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}$*, á condition toujours d'avoir* $\mathbb{P}(A) > 0$*. Ce qui nous amène a écrire :* $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A)$

On obtient alors une nouvelle définition d ?une probabilité conditionnelle :

Proposition 2.2.2. *(deuxième définition) Soit* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé et soit* A *et* B *deux évènements appartenant à cet espace. Alors :*

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}$$

On peut directement voir un cas particulier important si A *et* B *sont indépendants. Cela va nous permettre de donner une nouvelle définition de l'indépendance d'évènement.*

Exercice 2.2.1. *Soit* $(\Omega, A, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé et* A *et* B *deux évènements définis sur cet espace. Monter que* A *et* B *sont indépendants si et seulement si* $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$

Remarque 2.2.4. *Ce théorème est fondamental et bien plus intuitif que la première définition de l'indépendance que nous avons vue. En effet si la probabilité de* A *sachant* B *est égale à la probabilité de* A *cela signifie que le fait de conditionner par* B *n'a aucune incidence. Donc que* A *et* B *sont bel et bien indépendants.*

On a donc aussi pu prouver la remarque 2.2.1.

Exercice 2.2.2. *Soit* A *et* B *deux évènements tels que :* $\mathbb{P}(A) > 0$ *et* $\mathbb{P}(B) > 0$ *et tels que* A *et* B *soient incompatibles.*

Montrer que ces deux évènements ne sont pas indépendants.

2.2.2 Généralisation aux familles d'évènements

Dans notre première partie, sur les probabilités conditionnelles, nous n'avons traité que le cas où nous n'avions que deux évènements. Or très souvent il nous sera demandé d'étudier plus de deux évènements. Nous allons donc essayer de généraliser les définitions à des suites d'évènements. Dans toute cette partie on considèrera $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(A_i)_{1\leq i\leq n}$ une famille d'évènements appartenant à cet espace.

Théorème 2.2.1. *(Probabilité conditionnelle en cascade). Si* $\mathbb{P}(\bigcap_{1\leq i\leq n} A_i) > 0$ *alors :*

$$\mathbb{P}(\bigcap_{1\leq i\leq n} A_i) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2|A_1)\mathbb{P}(A_3|A_1 \cap A_2)\dots\mathbb{P}(A_n|A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1})$$

Théorème 2.2.2. *(Formule des probabilités totales).*

Soit $(A_i)_{1\leq i\leq n}$ *une famille d'évènements dénombrable incompatibles deux à deux, telle que* $\forall i \in \{1, \dots, n\}, \mathbb{P}(A_i) > 0$ *et :*

$$\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = 1$$

Alors pour tout évènement $A \in \mathcal{A}$ *on a :*

$$\mathbb{P}(A) = \sum \mathbb{P}(A|A_i)\mathbb{P}(A_i)$$

Exercice 2.2.3. *En utilisant l'hypothèse que les évènements* A_i *forment une partition de l'univers,*

Monter la formule des probabilités totales

Remarque 2.2.5. *Un cas très souvent utilisé est le cas* $n = 2$. *Si on prend un évènement* B *tel que :* $B \cup B^c = \Omega$ *, on a bien entendu* $B \cup B^c = \emptyset$*, par définition du complémentaire. Donc pour tout évènement* A *:*

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B) + \mathbb{P}(A|B^c)$$

Enfin nous pouvons finir ce chapitre en combinant la formule des probabilités totales à la définition d'une probabilité conditionnelle.

Théorème 2.2.3. *(Théorème de Bayes). Soit* $(A_i)_{i \in I}$ *une famille d'évènements dénombrable incompatibles deux à deux, telle que* $\forall i \in I, \mathbb{P}(A_i) > 0 et$

$$\mathbb{P}(\bigcup_{i \in I} A_i) = 1$$

On a : $\forall A \in \mathcal{A}$ *telque* $\mathbb{P}(A) > 0$*, alors* $\forall i \in I$

$$\mathbb{P}(A_i|A) = \frac{\mathbb{P}(A|A_i)\mathbb{P}(A_i)}{\sum_{j \in I} \mathbb{P}(A|A_j)\mathbb{P}(A_j)}$$

Chapitre Trois

Variables aléatoires réelles discrètes

3.1 Variables aléatoires

Définition 3.1.1. *(variable aléatoire). Une variable aléatoire est une fonction X, allant d'un univers Ω dans un ensemble E.*

$$\begin{array}{rcccc} X & : & \Omega & \longrightarrow & E \\ & & \omega & \longmapsto & X(\omega) \end{array}$$

Définition 3.1.2. *(variable aléatoire réelle). Une variable aléatoire réelle est une fonction X, allant d'un univers Ω dans un ensemble $E \subset \mathbb{R}$*

Définition 3.1.3. *(**variable aléatoire réelle discrète**). Une variable aléatoire réelle discrète est une fonction X, allant d'un univers Ω dans un ensemble discret $E \subset \mathbb{R}$*

Dans ce chapitre on ne prendra que des variables aléatoires discrètes.

Notation 3.1.1. *Soient A une sous partie de Ω et x un réel.*

L'ensemble $\{\omega | X(\omega) \in A\}$ est un évenement. De meme, $\{\omega | X(\omega) = x\}$ est un événement.

Par consequent, on peut calculer $\mathbb{P}(\{\omega | X(\omega) \in A\})$ et $\mathbb{P}(\{\omega | X(\omega) = x\})$

Afin d'alléger les écritures on notera $\mathbb{P}(X \in A)$ á la place $\mathbb{P}(\{\omega | X(\omega) \in A\})$ et $\mathbb{P}(X = x)$ á la place $\mathbb{P}(\{\omega | X(\omega) = x\})$

Vocabulaire 3.1.1. *un espace probabilisé et X une variable aléatoire à valeurs dans un ensemble E.*

L'ensemble des $\{\mathbb{P}(X = x)\}_{x \in E}$ s'appelle la loi de X.

Proposition 3.1.1. *Soit X une variabe aléatoire réelle discrète à valeur dans E. Alors les éléments de l'ensemble $\{X = x\}_{x \in E}$forment une partition de l'univers. On obtient alors par σ-additivité :*

$$\sum_{x \in E} \mathbb{P}(X = x) = 1$$

Exercice 3.1.1. *On considère une expérience aléatoire qui consiste a lance un dé dont les faces sont numérotés de* 1 *à* 6 *et on note* X *la variable aléatoire affichant le résultat d'un lancé de dé.*

1. *Déterminer l'univers* Ω *de cette expérience aléatoire*
2. *Déterminer l'ensemble valeurs possible de* X *noté* $X(\Omega)$ *appelé support de* X
3. *Déterminer la loi de la variable aléatoire* X*.*

3.2 Propriétés

3.2.1 Loi marginale

Notation 3.2.1. *La probabilité que* X *vaille* x *et que* Y *vaille* y *peut se noter indifféremment :*

$$\mathbb{P}(X = x; Y = y)$$

ou

$$\mathbb{P}(X = x \cap Y = y)$$

Proposition 3.2.1. *(**Loi marginale**).Soit* X *une variable aléatoire à valeurs dans un ensemble* E_X *et* Y *une variable aléatoire à valeurs dans un ensemble* E_Y*. On a pour tout* $k \in E_X$ *:*

$$\mathbb{P}(X = k) = \sum_{i \in E_Y} \mathbb{P}(X = k; Y = i)$$

Exercice 3.2.1. *Soit* Y *une variable aléatoire ne prenant que trois valeurs :* 1*,* 2 *et* 3*. Soit* X *une autre variable aléatoire à valeurs dans* $\mathbb{N}$ *telle que :*

$$\mathbb{P}(X = 17; Y = 1) = 0.1 \quad \mathbb{P}(X = 17; Y = 2) = 0.5 \quad \mathbb{P}(X = 17; Y = 3) = 0.2$$

– *Quelle est la probabilité que* X *vaille* 17 *?*

3.2.2 Loi conditionnelle

Définition 3.2.1. *(**Loi conditionnelle**). Soient* X *et* Y *deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé.*

La probabilité que X *vaille* x *en sachant que* Y *vaut* y *est égale à :*

$$\mathbb{P}(X = x | Y = y) = \frac{\mathbb{P}(X = x \cap Y = y)}{\mathbb{P}(Y = y)}$$

Exercice 3.2.2. *(**Tirage successif**).*

Prenons l'exemple d'un tirage successif de deux boules sans remise dans une urne contenant une boule rouge, une boule verte et une boule bleue.

Soit X *la variable aléatoire rendant le résultat du premier tirage.*

Soit Y *la variable aléatoire rendant le résultat du second tirage.*

Calculer la probabilité d'obtenir la boule bleue au second tirage en sachant qu'on a tiré la rouge au premier ?

3.3 Fonction de répartition

Définition 3.3.1. *(**Fonction de répartition**).*

Soit X une variable aléatoire réelle. On appelle fonction de répartition de X la fonction, F_X, qui à tout réel k associe :

$$F_X = \mathbb{P}(X \leq k)$$

Exercice 3.3.1. *Soit X une variable aléatoire renvoyant la valeur d'un lancé de dé non pipé et soit F_X sa fonction de répartition.*

Calculer les valeurs suivantes $F_X(1)$,$F_X(4)$,$F_X(\sqrt{5})$ et $F_X(-1)$

Proposition 3.3.1. *Soit X, une variable aléatoire réelle. F_X est une fonction de répartition de X si et seulement si :*

1. *F_X est croissante sur $\mathbb{R}$*
2. *F_X est continue á droite en tout point de $\mathbb{R}$*
3. $\lim_{k \to -\infty} F_X(k) = 0$
4. $\lim_{k \to +\infty} F_X(k) = 1$

Exercice 3.3.2. *Soit la fonction F définie telle que : $\forall x \in \mathbb{R}$*

$$F(x) = \begin{cases} F(x) = 1 & si \quad x \geq 3 \\ F(x) = 0 & si \quad x < 3 \end{cases}$$

Montrer que F est une fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle.

3.4 Espérance , variance ,écart-type

3.4.1 Espérance

L'espérance d'une variable aléatoire réelle est un réel approximant la valeur la plus probable que cette variable aléatoire peut prendre. C'est à dire une estimation du résultat moyen qu'on aura au cours d'une expérience aléatoire.

Définition 3.4.1. *(**Espérance**). Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans un ensemble E.*

L'espérance est un nombre, se notant $\mathbb{E}(X)$ et égal à :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k \in E} k \times \mathbb{P}(X = k)$$

Vocabulaire 3.4.1. *Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans un ensemble E. Si la somme* $\sum_{k\in E}|k|\times\mathbb{P}(X=k)$ *est finie on dit* X *est intégrable*

Exercice 3.4.1. *Calculer les espérances des exercices ci-dessus*

Propriété 3.4.1. *Soient* X *et* Y *deux variables aléatoires admettant une espérance*

1. *Pour tout réel* λ *:* $\mathbb{E}(\lambda)=\lambda$
2. ***Linéarité*** *: La variable aléatoire* $X+\lambda Y$ *admet aussi une espérance qui est égale á :*

$$\mathbb{E}(X+\lambda Y)=\mathbb{E}(X)+\lambda\mathbb{E}(Y)$$

3. ***Linéarité*** *: Si* $X\geq 0$ *alors :*
   (a) $\mathbb{E}(X)\geq 0$
   (b) *et si de plus* $\mathbb{E}(X)=0$ *alors la* $\mathbb{P}(X=0)=1$ *(c'est á dire* X *est une constante égale á 0)*

$$\mathbb{E}(X)\geq\mathbb{E}(Y)$$

4. ***Croissance*** *Si* $X\geq Y$*, c'est á dire pour toute valeur de* X *toute valeur de* Y *est inférieur , alors :*

Théorème 3.4.1. *Soit* X *une variable aléatoire à valeurs dans un ensemble* E *et* $f:E\mapsto\mathbb{R}$ *une fonction. Si la somme* $\sum_{k\in E}|f(k)|\times\mathbb{P}(X=k)$ *:*

$$\mathbb{E}(f(X)=\sum_{k\in E}|f(k)|\times\mathbb{P}(X=k)$$

3.4.2 Variance

La variance d'une variable aléatoire réelle est un réel approximant la dispersion des valeurs que cette variable aléatoire peut prendre autour de son espérance. La variance est donc proportionnelle à la distance des valeurs que peut prendre une variable aléatoire que peut prendre par rapport à sa valeur moyenne.

Définition 3.4.2. *(**Variance**). Soit* X *une variable aléatoire discrète à valeurs dans un ensemble* E*.*

Si la somme $\sum_{k\in E}k^2\times\mathbb{P}(X=k)$ *est finie alors,* X *admet une variance.*

La variance est un nombre, se notant $\mathbb{V}(X)$ *et égal à :*

$$\mathbb{V}(X)=\mathbb{E}((X-\mathbb{E}(X))^2$$

Vocabulaire 3.4.2. *Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans un ensemble E.*

Si la somme $\sum_{k \in E} k^2 \times \mathbb{P}(X = k)$ est finie alors on dit que X est de carré intégrable

Propriété 3.4.2. *Soit X une variable aléatoire admettant une variance et donc une espérance.*

1. $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$
2. *la variance est toujours positive*
3. *Soient a et b deux réels,* $\mathbb{V}(aX + b) = a^2\mathbb{V}(X)$
4. *Si* $\mathbb{V}(X) = 0$ *alors X est égale á une constante*

3.4.3 Ecart type

L'écart type d'une variable aléatoire réelle est un réel approximant la dispersion moyenne des valeurs que cette variable aléatoire peut prendre autour de son espérance. L'écart type est donc l'écart moyen à la valeur moyenne que peut prendre une variable aléatoire.

Définition 3.4.3. *(**Ecart type**). Soit X une variable aléatoire possédant une variance. L'écart type de la variable aléatoire X est un réel égal à :*

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}$$

3.5 Indépendance

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans E_X et soit Y une variable aléatoire à valeurs dans E_Y .

Les variables aléatoires X et Y sont dites indépendantes si et seulement si :

$$\forall x \in E_X, \forall y \in E_Y, \quad \mathbb{P}(X = x, Y = y) = \mathbb{P}(X = x) \times \mathbb{P}(Y = y)$$

La notion d'indépendance peut se généraliser à une famille quelconque de variables aléatoires.

Définition 3.5.1. *(**Indépendance de n variables aléatoires.**)*

Soient $X_1, X_2, \ldots, X_n$ une famille de variables aléatoires à valeurs dans $E_1, E_2, \ldots, E_n$. Les variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont dites indépendantes si et seulement si :

$$\forall x_1 \in E_1, \ldots, \forall x_n \in E_n \ , \quad \mathbb{P}(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n) = \mathbb{P}(X_1 = x_1) \times \cdots \times \mathbb{P}(X_n = x_n)$$

Propriété 3.5.1. *Soient X et Y deux variables aléatoires possédant une espérance. Si X et Y sont indépendantes alors :*

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X) \times \mathbb{E}(Y)$$

Propriété 3.5.2. *Soient X et Y deux variables aléatoires possédant une variance. Si X et Y sont indépendantes alors :*

$$\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y)$$

3.6 Lois usuelles discrètes

3.6.1 Loi de Bernoulli

Définition 3.6.1. *(**Loi de Bernoulli**).Soit $p \in]0;1[$*
Une variable aleatoire X suit la loi de Bernoulli de parametre p si :

X ne prend que les valeurs 0 et 1, et

$$\mathbb{P}(X=1) = p \text{ et } \quad \mathbb{P}(X=0) = 1-p$$

Vocabulaire 3.6.1. *L'événement associé à 1 est nommé succès de l'expérience et l'événement associé à 0 échec de l'expérience.*

Notation 3.6.1. *X suit la loi de Bernoulli de paramètre p se note : $X \sim \mathcal{B}(p)$*

Exercice 3.6.1. *Considérons un jeux un jeu de Pile ou Face. Notons 0 l'évènement obtenir Pile et 1 l'évènement obtenir Face.X la variable aléatoire modélisant le résultat de expérience*

1. *Quelle est la loi de X ?*
2. *Donner la loi de cette variable aléatoire*

Exercice 3.6.2. *(Urne contenant deux types de boules). Prenons comme expérience , une variable aléatoire X renvoyant la couleur d'une boule tirée dans une urne contenant 15 boules blanches et 20 boules noires.Notons 0 l'évènement obtenir une boule blanche et 1 obtenir une boule noire.*

1. *Quelle est la loi de X ?*
2. *Donner la loi de X*

Remarque 3.6.1. ***Cas générale*** *Toute expérience n'ayant que deux issues possibles peut être décrite par une variable aléatoire suivant la loi de* ***Bernoulli*** *en notant* 1 *le succès de l'expérience et* 0 *l'échec.*

Propriété 3.6.1. *(**Espérance d'une variable suivant une loi de Bernoulli.**) Si X est une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre p alors son espérance est égale à :*

$$\mathbb{E}(X) = p$$

Propriété 3.6.2. *(**Variance d'une variable suivant une loi de Bernoulli**). Si X est une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre p alors sa variance est égale à :*

$$\mathbb{V}(X) = p(1-p)$$

Exercice 3.6.3. *(**Recherche**)*

1. *Monter que si $X \sim \mathcal{B}(p)$ alors $\mathbb{E}(X) = p$*
2. *Monter que si $X \sim \mathcal{B}(p)$ alors $\mathbb{V}(X) = p(1-p)$*

3.6.2 Loi binomiale

Supposons qu'on renouvelle, indépendamment, n fois, une épreuve de Bernoulli de paramètre p.Une variable aléatoire X, suivant la loi binomiale, renverra le nombre de succès de cette expérience. Ainsi $\mathbb{P}(X = k)$ renverra la probabilité qu'on ait k succès au cours des n itérations.

Définition 3.6.2. *(Loi binomiale). Soient $p \in [0;1]$ et $n \in \mathbb{N}$. Une variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres n et p si pour tout $k \in [0, 1, \ldots, n]$:*

$$\mathbb{P}(X = k) = C_n^p \times p^k \times (1-p)^{n-k}$$

Notation 3.6.2. *X suit la loi binomiale de paramètres n et p se note :$X \sim \mathcal{B}(n, p)$*

Propriété 3.6.3. *(**Espérance d'une variable suivant une loi binomiale**). Si X est une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et p alors son espérance est égale à :*

$$\mathbb{E}(X) = np$$

Propriété 3.6.4. *(**Variance d'une variable suivant une loi binomiale**). Si X est une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et p alors sa variance est égale à :*

$$\mathbb{V}(X) = np(1-p)$$

.

Exercice 3.6.4. *(**Recherche**)*

1. *Monter que si* $X \sim \mathcal{B}(n,p)$ *alors* $\mathbb{E}(X) = np$
2. *Monter que si* $X \sim \mathcal{B}(n,p)$ *alors* $\mathbb{V}(X) = np(1-p)$

3.6.3 Loi géométrique

Supposons qu'on renouvelle, indépendamment, une épreuve de Bernoulli de paramètre p, jusqu'au premier succès. Une variable aléatoire, X, suivant la loi géométrique, renverra le rang du premier succès. Ainsi $\mathbb{P}(X = k)$ renverra la probabilité que le premier succès apparaissent à la k-ème itération de l'expérience.

Définition 3.6.3. *(**Loi géométrique**). Soit* $p \in]0;1]$*. Une variable aléatoire* X *suit la loi géométrique de paramètre* p *si pour tout* $k \in \mathbb{N}^*$ *:*

$$\mathbb{P}(X = k) = p(1-p)^{k-1}$$

Notation 3.6.3. X *suit la loi géométrique de paramètre* p *se note :* $X \sim \mathcal{G}(p)$

Propriété 3.6.5. *(**Espérance d'une variable suivant une loi géométrique**). Si* X *est une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre* p *alors son espérance est égale à :*

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}$$

.

Propriété 3.6.6. *(**Variance d'une variable suivant une loi géométrique**). Si* X *est une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre* p *alors sa variance est égale à :*

$$\mathbb{V}(X) = \frac{1-p}{p^2}$$

.

Exercice 3.6.5. *(**Recherche**)*

1. *Monter que si* $X \sim \mathcal{G}(p)$ *alors* $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}$
2. *Monter que si* $X \sim \mathcal{G}(p)$ *alors* $\mathbb{V}(X) = \frac{1-p}{p^2}$

3.6.4 Loi de Poisson

Soit un évènement se produisant en moyenne λ fois pendant un laps de temps donné. Une variable aléatoire X, suivant la loi de Poisson de paramètre λ, renverra le nombre de fois que l'évènement se produit lors de ce laps de temps. Ainsi $\mathbb{P}(X = k)$ renverra la probabilité que l'évènement se produise k fois lors de ce même laps de temps.

Définition 3.6.4. *(**Loi de Poisson**). Soit $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$. Une variable aléatoire X suit la loi de Poisson de paramètre λ si pour tout $k \in \mathbb{N}$:*

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} \times e^{-\lambda}$$

Notation 3.6.4. *X suit la loi de Poisson de paramètre λ se note : $\mathcal{P}(\lambda)$.*

Propriété 3.6.7. *(**Espérance d'une variable suivant une loi de Poisson**). Si X est une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre λ alors son espérance est égale à :*

$$\mathbb{E}(X) = \lambda$$

Propriété 3.6.8. *(**Variance d'une variable suivant une loi de Poisson**). Si X est une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre λ alors sa variance est égale à :*

$$V(X) = \lambda$$

.

Exercice 3.6.6. *(**Recherche**)*

1. *Monter que si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ alors $\mathbb{E}(X) = \lambda$*
2. *Monter que si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ alors $\mathbb{V}(X) = \lambda$*

3.7 Fonction génératrice

Les fonctions génératrices, sont des outils permettant d'identifier facilement la loi d'une variable aléatoire, ainsi que son espérance et sa variance

Définition 3.7.1. *(**Fonction génératrice**). Soit X une variable aléatoire à valeurs dans un ensemble E. On appelle fonction génératrice de X la fonction G_X définie par :*

$$\begin{array}{cccc} G_X & : & [-1,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & u & \longmapsto & \mathbb{E}(u^X) = \sum_{k \in E} u^k \times \mathbb{P}(X = k) \end{array}$$

3.7.1 Fonction génératrice et indépendance

Propriété 3.7.1. *3.7.1. Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes alors :*

$$G_{X+Y} = G_X \times G_Y$$

Exercice 3.7.1. *Démonter cette propriété ci-dessus*

3.7.2 Caractérisation de loi

Propriété 3.7.2. *Si deux variables aléatoires X et Y ont la même fonction génératrice, alors X et Y suivent la même loi.*

Remarque 3.7.1. *Ainsi, lorsque la loi d ?une variable aléatoire est compliquée à déterminer, on peut calculer la fonction génératrice de cette variable et la comparer avec une fonction génératrice connue. Afin de pouvoir effectuer cette comparaison voici les fonctions génératrices des lois usuelles :*

Exercice 3.7.2.
1. ***Loi de Bernoulli*** *Montrer que si $X \sim \mathcal{B}(p)$ alors $G_X(u) = (1 - p) + pu$*
2. ***Loi binomiale*** *Montrer que si $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ alors $G_X(u) = ((1 - p) + pu)^n$*
3. ***Loi géométrique*** *Montrer que si $X \sim \mathcal{G}(p)$ alors $G_X(u) = \frac{pu}{1-(1-p)u}$*
4. ***Loi de Poisson*** *Montrer que si $X \sim \mathcal{P}(p)$ alors $G_X(u) = e^{\lambda(1-u)}$*

Exercice 3.7.3. *Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant respectivement la loi de Poisson de paramètre λ et la loi de Poisson de paramètre μ.*
- *Quelle est la loi de la variable $X + Y$?*

3.7.3 Calcul d'espérance et de Variance

Propriété 3.7.3. *Soit X une variable aléatoire admettant une espérance.*

$$\mathbb{E}(X) = G'_X(1)$$

Propriété 3.7.4. *Soit X une variable aléatoire admettant une variance.*

$$\mathbb{V}(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - (G'_X(1))^2$$

Exercice 3.7.4. *Retrouver l'espérance te la variance des lois usuelles cité ci-dessus*

Chapitre Quatre

Variables aléatoires réelles à densité

Nous allons voir à présent un autre type de variable aléatoire plus général que les variables aléatoires discrètes. En effet si l'espace d'arrivée n'est pas dénombrable on ne pourra pas utiliser une somme. Ce chapitre présente une autre façon de représenter un loi de probabilité grâce aux intégrales. La structure de ce chapitre et ces énoncés seront analogues grâce aux propriétés communes de l'intégrale et de la somme.

4.1 Tribu borélienne

En toute rigueur pour aborder ce chapitre il faudrait introduire plusieurs notions de théorie de la mesure, introduisons simplement les tribus boréliennes.

On appelle tribu engendrée par une famille de partie $\mathcal{C}$, l'intersection de toutes les tribus contenant $\mathcal{C}$.

On appelle **tribu borélienne** (ou **tribu de Borel**) la tribu engendrée par les ouverts de R^n. On la note $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ ou $Bor(\mathbb{R}^n)$. Il est important de noter (par stabilité par passage au complémentaire d'une tribu) qu'elle est aussi la tribu engendrée par les fermés de $\mathbb{R}^n$. Ces éléments sont les borélien

Une tribu borélienne est engendré par un des types suivants :
- Boules(quelconques)
- $[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$
- $]a_1, b_1[\times \cdots \times]a_n, b_n[$
- $[a_1, b_1[\times \cdots \times [a_n, b_n[$
- $[a_1, +\infty[\times \cdots \times [a_n, +\infty[$
- $]a_1, +\infty[\times \cdots \times]a_n, +\infty[$

Dans ce chapitre on se limitera à l'étude des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}$ (sans le préciser dans la suite). On se placera dans des espaces munis d'une tribu borélienne. Il existe une généralisation, qu'on appelle vecteur aléatoire, que vous pourrez voir dans le chapitre 5.

4.2 Généralités sur les densités de probabilités

Définition 4.2.1. *(densité de probabilité). On appelle densité de probabilité d'une variable aléatoire X une application positive et intégrable* $f_X \ : \ \mathbb{R} \ \longrightarrow \ \mathbb{R}_+$ *, vérifiant :*

$$\int_{\mathbb{R}} f_X(x)dx = 1$$

Exercice 4.2.1. *vérifier que la fonction* $f_X \ : \ x \ \longrightarrow \ \frac{1}{4}e^{-\frac{|x|}{2}}$ *est une densité de probabilité*

Définition 4.2.2. *(Variable aléatoire à densité). Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.* $X \ : \ \Omega \ \mapsto \ \mathbb{R}$ *est une variable aléatoire de densité p si pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ on a :*

$$\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x)dx$$

Exercice 4.2.2. *Soit X une variable aléatoire de fonction de densité* $p \ : \ x \ \longrightarrow \ \frac{1}{4}e^{-\frac{|x|}{2}}$
Calculer les probabilités suivantes :

1. $\mathbb{P}(X \leq 4)$
2. $\mathbb{P}(X \geq 4)$
3. $\mathbb{P}(-2 \leq X \leq 4)$

Remarque 4.2.1.
- *On note $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$*
- *cette définition n'a de sens que si $\{a \leq X \leq b\}$ est un élement de la tribu $\mathcal{A}$ de l'espace probabilisé. Ce sera toujours le cas car nous utiliserons la tribu de Borel $\mathcal{B}(\mathbb{R})$*
- *La positivité d'un probabilité et le fait que $\mathbb{P}(X \in \mathbb{R}) = \mathbb{P}(-\infty < X < +\infty) = 1$ justifie la définition de la densité*
- *Si $a = -\infty$ on obtient la fonction de répartition Nous y reviendrons plus loin*

Propriété 4.2.1. *(probabilité d'un singleton). Soit $a \in \mathbb{R}$ et soit X une variable aléatoire de densité f_X Alors :*

$$\mathbb{P}(X = a) = \mathbb{P}(X \in \{a\}) = 0$$

Exercice 4.2.3. *Montrer cette proposition ci dessus*

Propriété 4.2.2. *Soit X une variable aléatoire de densité f_X, pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ on na :*

$$\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \mathbb{P}(a < X \leq b) = \mathbb{P}(a \leq X < b) = \mathbb{P}(a < X < b)$$

4.3 Fonction de répartition

Définition 4.3.1. *(Fonction de répartition). Soit X une variable aléatoire á densité , alors on définit sa fonction de répartition par :*

$$\forall a \in \mathbb{R}, F_X(a) = \mathbb{P}(X \leq a)$$

Propriété 4.3.1. *. Soit X une variable aléatoire réelle, et soit F_X sa fonction de répartition alors on a :*

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, a < b, F_X(b) - F_X(a) = \mathbb{P}(a < X \leq b)$$

Remarque 4.3.1. *Les propriétés, vues au chapitre 3, de la fonction de répartition sont conservées.*

Propriété 4.3.2. *(Caractérisation de la loi). La fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité détermine sa loi. Autrement dit : Si X et Y sont deux variables aléatoires à densité, alors X et Y suivent la même loi si elles ont la même fonction de répartition. C'est à dire si :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(Y \leq x)$$

Propriété 4.3.3. *(Lien entre densité et fonction de répartition). Soit X une variable aléatoire de densité f_X, alors F_X est continue et dérivable, de dérivée f_X.*

Remarque 4.3.2. *Cette proposition est utile vue sous un autre angle : si on connait la fonction de répartition de X on peut trouver la densité de X !*

4.4 Lois usuelles

Voici les lois les plus souvent rencontrées. Nous rajouterons au fur et à mesure de l'avancement du chapitre leur espérance, fonction caractéristique, etc... On rappelle qu'on se place dans un espace probabilisé muni de la tribu borélienne de $\mathbb{R}$

Notation 4.4.1. *Une variable aléatoire X suivant une loi S se note $X \sim S$*

4.4.1 Loi uniforme

Soit $[a, b] \in \mathbb{R}$, la loi uniforme sur $[a, b]$, noté $\mathcal{U}([a, b])$, et définie par la densité :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_X \longmapsto \frac{1}{b-a}\mathbb{1}_{[a,b]}(x)$$

On note $X \sim \mathcal{U}_{[a,b]}$ si X suit cette loi

Remarque 4.4.1.
- *Tout d'abord, par notation, si X suit la loi uniforme on note : $X \sim \mathcal{U}_{[a,b]}$*
- *On peut remarquer que la densité d'une variable aléatoire suivant la loi uniforme ne dépend que de l'intervalle donné. Ainsi si cette loi donne la même probabilité à deux sous intervalles distincts de $[a, b]$*
- *Nous rappelons à toute fin utile (notamment pour la définition d'une probabilité) que :*

$$\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[a,b]}(x)dx = \int_a^b 1dx = b - a$$

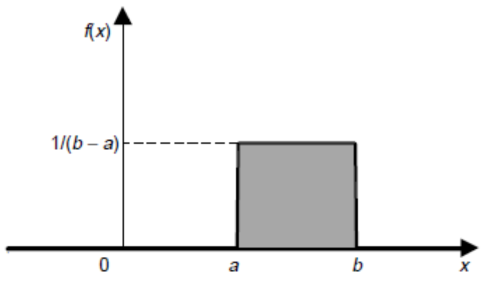


FIGURE 4.1 – densité de la loi uniforme sur $[a, b]$

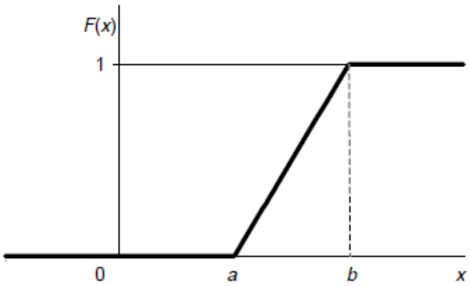


FIGURE 4.2 – Fonction de répartition de la loi uniforme sur $[a, b]$

Propriété & Domaine d'utilisation

- La somme de deux variables aléatoires, indépendantes ou non, suivant une loi uniforme sur [a, b], ne suit pas une loi uniforme sur $[a, b]$.
- L'image, par sa fonction de répartition, de toute variable aléatoire réelle continue, est une variable aléatoire réelle suivant la loi uniforme sur $[0, 1]$. Cette propriété est utilisée, pour simuler ou engendrer, des échantillons de la loi de la variable aléatoire X

4.4.2 Loi exponentielle

Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$,la loi exponentielle de paramètre p, notée $\mathcal{E}(\lambda)$, et définie par la densité :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f_X :\longmapsto \lambda exp(-\lambda x)\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}$$

On note $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ si X suit cette loi.

Remarque 4.4.2. *On pourra rencontrer la définition équivalente de la densité d'une loi exponentielle de paramètre λ :*

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, f_X :\longmapsto \lambda exp(-\lambda x)\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}$$

La probabilité sur un intervalle de $\mathbb{R}_-$ est donc nulle.

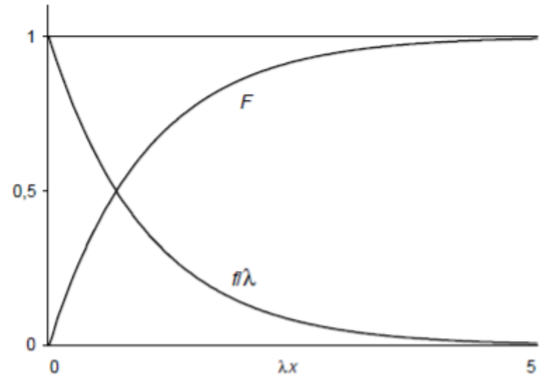


FIGURE 4.3 – Loi exponentielle. Densité et fonction de répartition de la loi exponentielle (l'axe des abscisses est gradué proportionnellement aux valeurs λx).

Propriété 4.4.1.

- *La somme de deux variables aléatoires indépendantes, suivant des lois exponentielles de paramètres respectifs λ_1 et λ_2, est une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda_1 + \lambda_2$.*
- *La loi exponentielle est qualifiée de loi « sans mémoire », elle permet la modélisation du comportement des matériels fonctionnant avec un taux de défaillance constant (ou pouvant être considéré comme constant).*
- *On considère un matériel ayant fonctionné sans défaillance pendant le temps x_1 et on cherche la probabilité qu'il soit encore en état de marche au temps $x + x_1$. La définition de la probabilité conditionnelle donne :*

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \geq x + x_1 / X \geq x) &= \frac{\mathbb{P}(x \geq x + x_1 \cap X \geq x)}{\mathbb{P}(X \geq x_1)} \\ &= \frac{e^{-\lambda(x+x_1)}}{e^{-\lambda x_1}} \\ &= e^{-\lambda x}\end{aligned}$$

Le matériel a « oublié » qu'il avait déjà fonctionné pendant le temps x_1. Pour ce type de matériel, il est inutile de procéder à un remplacement préventif.

Domaine d'utilisation

- La distribution exponentielle est associée aux processus de Poisson. Un tel processus génère des événements dont les temps d'occurrence sont indépendants et distribués suivant une loi exponentielle
- La loi exponentielle est utilisée en fiabilité , le paramètre λ représente le taux de défaillance alors que son inverse $\theta = \frac{1}{\lambda}$ est le temps moyen de bon fonctionnement MTBF (Mean Time Between Failure).

4.4.3 Loi gamma

La loi exponentielle est un cas particulier de la famille des lois gamma. Une variable aléatoire réelle positive X suit une loi gamma $\gamma(t, \lambda)$ ou $\Gamma(t, \lambda)$, de paramètres positifs t et λ, si sa densité de probabilité est donnée par :

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{\lambda e^{-\lambda x}(\lambda x)^{t-1}}{\Gamma(t)} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Γ est la fonction eulérienne définie par l'intégrale pour $t > 0$:

$$\Gamma(t) = \int_0^{+\infty} e^{-y} y^{t-1} dy$$

Le paramètre t est un paramètre de forme tandis que $\frac{1}{\lambda}$ est un paramètre d'échelle. Pour les représentations graphiques, on peut prendre $\lambda = 1$. Selon les valeurs du paramètre t, la densité de la loi gamma a différentes formes

En particulier, si $t = 1$, on retrouve la loi exponentielle.

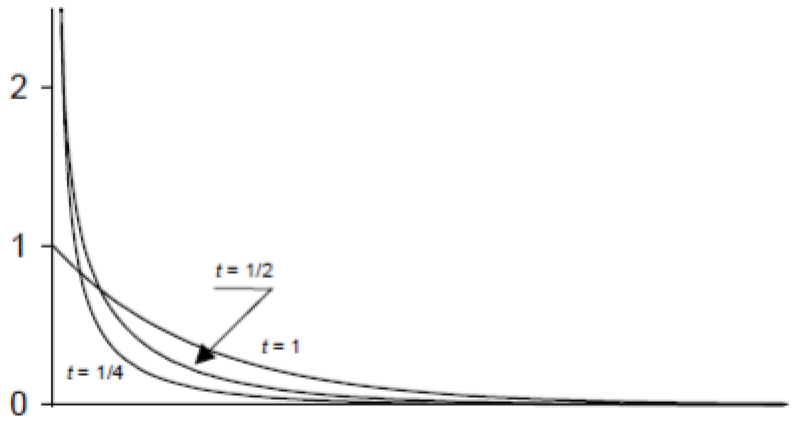


FIGURE 4.4 – Loi gamma ($t \leq 1$)

4.4.4 Loi normale (Laplace-Gauss)

Soit $\mu \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0$, la loi normal de paramètre μ et σ^2, noté $\mathcal{N}$, et définie par la densité :

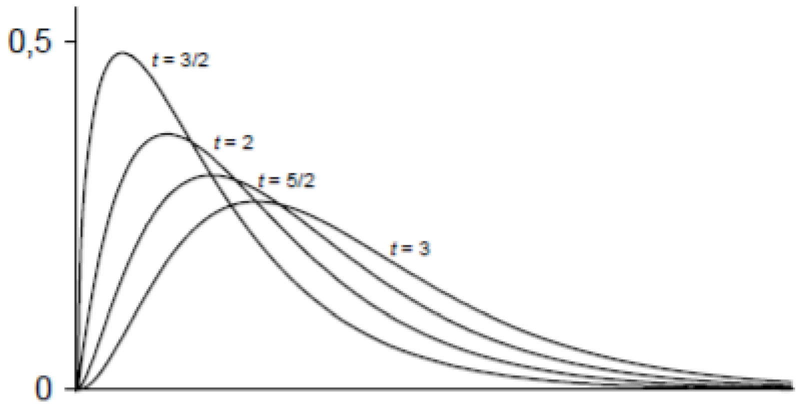


FIGURE 4.5 – Loi gamma ($t > 1$)

$$\forall x \in \mathbb{R}, p : x \longmapsto \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

O note $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ si X suit cette loi

Vocabulaire 4.4.1. *On appelle aussi la loi normale : loi de Laplace-Gauss.*

Vocabulaire 4.4.2. *Une variable aléatoire suivant la loi normale est dite variable gaussienne*

Voici le cas particulier le plus utilisé de la loi normale

Définition 4.4.1. *(Loi normale centrée réduite). La loi normale centrée réduite est une loi normale de paramètre* 0 *et* 1. *On la note :* $\mathcal{N}(0,1)$ *et sa densité est donc définie par :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, p : x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-(x)^2}{2}\right)$$

On l'appelle également loi gaussienne

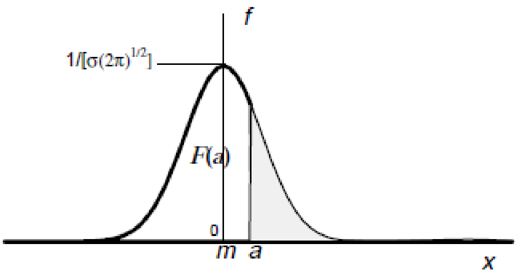


FIGURE 4.6 – densité de la loi normale

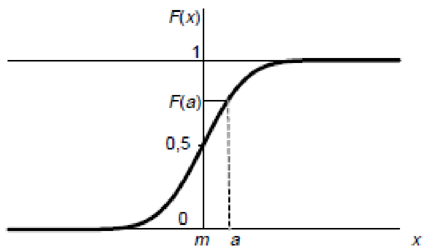


FIGURE 4.7 – Fonction de répartition de la loi normale

Domaine d'utilisation

- La loi normale est une des lois de probabilité la plus utilisée. Elle dépend de deux paramètres, la moyenne m, paramètre de position, et l'écart-type s, paramètre mesurant la dispersion de la variable aléatoire autour de sa moyenne.
- Elle s'applique à de nombreux phénomènes, en physique, en économie (erreurs de mesure). De plus, elle est la forme limite de nombreuses distributions discrètes.
- Elle représente la loi de distribution d'une variable aléatoire X dépendant d'un grand nombre de facteurs agissant sous forme additive, chacun ayant une variance faible par rapport à la variance résultante.
- Elle peut représenter la fin de vie des dispositifs subissant un phénomène de vieillissement, usure, corrosion...

Propriété 4.4.2. *Soit X et Y deux variables aléatoires telque $X \sim \mathcal{N}(m_1, \sigma_1)$ et $Y \sim \mathcal{N}(m_2, \sigma_2)$*
alors $X + Y \sim \mathcal{N}(m_1 + m_2, \sqrt{\sigma_1 + \sigma_2})$

4.5 Loi du chi-deux

Soient $X_1, \ldots, X_k$, k variables aléatoires indépendantes suivant des lois normales de moyennes 0 et d'écart-type 1, alors par définition la variable X, telle que :

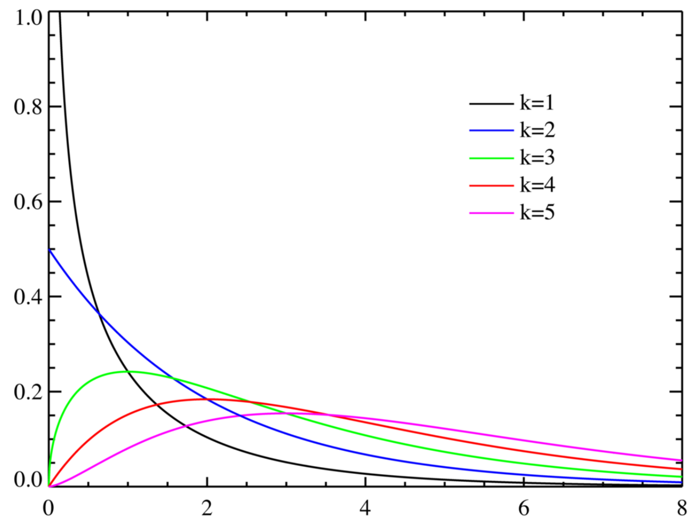
$$X = \sum_{i=1}^{k} X_i^2 = X_1^2 + \cdots + X_k^2$$

suit une loi du χ^2 á k degrés de liberté. On notera $\chi^2(k)$ ou χ_k^2 la loi de X

La densité de probabilité de X notée f_X sera :

$$f_X(x) = \frac{1}{2^{\frac{k}{2}}\Gamma(\frac{k}{2})} x^{\frac{k}{2}-1} e^{\frac{x}{2}} \times \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}$$

ou Γ est la fonction Gamma



4.6 Espérance et variance

4.6.1 Espérance

Définition 4.6.1. *(Espérance). Soit X une variable aléatoire de densité f_X. Si la fonction $x \mapsto |x|f_X$ est intégrable alors X admet une espérance, notée $\mathbb{E}(X)$ et définie par :*

$$\mathbb{E}(X) = \int_{\mathbb{R}} x f_X dx$$

Nous admettons le résultat suivant, plus difficile à démontrer que dans le cas discret

Théorème 4.6.1. *(de transfert). Soit X une variable aléatoire de densité f_X et soit une application $h : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$. si $x \mapsto |h(x)|f_X(x)$ posséde une espérance définie par :*

$$\mathbb{E}(f(X)) = \int_{\mathbb{R}} h(x) f_X(x) dx$$

Propriété 4.6.1. *Soit X et Y deux variables aléatoires admettant une espérance, et soit $\lambda \in \mathbb{R}$,alors :*

- $\mathbb{E}(X + \lambda Y) = \mathbb{E}(X) + \lambda = \lambda$
- *Si Y est intégrable et X dominée par Y,au sens oú $\mathbb{P}(|X| \leq Y) = 1$, alors X est intégrable*
- *Si $\mathbb{P}(X \leq Y) = 1$, alors $\mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(Y)$*

Remarque 4.6.1. *On remarque que ces propriétés de l'espérance sont les mêmes que pour le cas discret. Les démonstrations sont en effet analogues car les propriétés de l'intégrale (pour cette démonstration) sont les mêmes que pour la somme (linéarité, croissance). Néanmoins le fait que l'espérance ne dépend que de la densité induit une subtilité lors de la manipulation de combinaison linéaire de variables aléatoires à densité. Cette subtilité étant levée par ce qu'on appelle le produit de convolution, nous admettrons ce résultat.*

Nous verrons néanmoins, plus tard ,qu'il existe un autre moyen (comme pour la fonction génératrice) de trouver la loi d'une combinaison linéaire de variables aléatoires à densité.

Remarque 4.6.2. *4.5.2. Les calculs d'espérance font appel aux différentes méthodes du calcul intégral (intégration par partie, changement de variable, critères de convergence, . . .).*

Espérance des lois usuelles

Propriété 4.6.2. ***(Espérance de la loi uniforme).****Si $X \sim \mathcal{U}(a, b)$ avec $a < b$ alors :*

$$\mathbb{E}(X) = \frac{a + b}{2}$$

Exercice 4.6.1. *Montrer que si $X \sim \mathcal{U}(a, b)$ alors $\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2}$*

Propriété 4.6.3. ***(Espérance de la loi exponentielle).*** *Si $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ alors :*

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda}$$

Exercice 4.6.2. *Montrer que si $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ alors $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda}$*