Cours de Statistiques inférentielles en Master 1 Data Science et Intelligence Artificielle(**DSIA)**

IBRAHIMA SY

*Institut Supérieur Informatique(**ISI**)*

Table des matières

Introduction **2**

1 L'ECHANTILLONNAGE STATISTIQUE **3**
1.1 Rôle de l'échantillonnage . . . 3
1.2 Vocabulaire . . . 3
1.3 Méthode d'Echantillonnage . . . 3
1.4 Définition et Caractéristiques d'un Echantillon . . . 3
1.5 Distribution Echantillonnage . . . 3
1.5.1 La distribution normale comme distribution d'échantillonnage . . . 3
1.5.2 La distribution du χ^2 (Khi-Deux) . . . 3
1.5.3 La distribution du t (Student) . . . 3
1.5.4 La distribution du F (Fisher) . . . 5

2 Estimation ponctuelle **7**
2.1 Généralités . . . 7
2.1.1 Estimateur . . . 7
2.1.2 Exemples élémentaires . . . 8
2.1.3 Qualités d'un estimateur . . . 8
2.2 Statistique suffisante (exhaustive) . . . 10
2.2.1 Définition d'une statistique exhaustive . . . 10
2.2.2 Lois permettant une statistique exhaustive . . . 10
2.2.3 L'information de Fisher . . . 11
2.3 Information de Fisher et suffisance . . . 11
2.4 Borne de Freshet-Damois-Cramer-Rao (FDCR) . . . 11
2.5 Estimateur efficace . . . 12
2.6 Estimateur sans biais de variance minimale (MVUE) . . . 12
2.7 Généralisation (Cas multidimensionnel) . . . 12

Introduction

Les probabilités sont l'étude du hasard et de l'incertain. Elle permettent de donner un cadre formel et rigoureux aux nombreux phénomènes physique aléatoires.

L'étude des probabilités a connu son essor au **XX**ème siècle lorsque leur application à d'autre domaines des sciences ont été découvert : en physique (mécanique quantique, physique statistique), en biologie (météorologie, génétique des populations), en économie (théorie des jeux, mathématiques financières, assurances), en sociologie (démographie, sondage)... Elle constitue actuellement un champs d'étude très actif.

Chapitre Un

L'ECHANTILLONNAGE STATISTIQUE

1.1 Rôle de l'échantillonnage

1.2 Vocabulaire

1.3 Méthode d'Echantillonnage

1.4 Définition et Caractéristiques d'un Echantillon

1.5 Distribution Echantillonnage

1.5.1 La distribution normale comme distribution d'échantillonnage

1.5.2 La distribution du χ^2 (Khi-Deux)

1.5.3 La distribution du t (Student)

Définition 1.5.1. *On appelle variable aléatoire du t , ou v.a. de Student à k degrés de liberté une v.a. continue qui prend des valeurs réelles , et dont la densité est*

$$f_T(t) = \frac{1}{\sqrt{k\pi}} \frac{\Gamma(\frac{k+1}{2})}{\Gamma(\frac{k}{2})} \left(1 + \frac{t^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}} , -\infty < t < +\infty$$

où k est un entier positif . Par la suite, on désignera par $St(k)$ la famille des v.a. du t à k dergés de liberté, de telle sorte que pour une v.a. X , on pourra écrire $X \sim St(k)$

Caractéristiques d'une v.a. du t

Il est possible de prouver que l'espérance et la variance d'une v.a. X du t à m degrés de liberté sont données par : $E(X) = 0$ si $m > 1$ et $Var(X) = \frac{m}{m-2}$ si $m > 2$

Représentation graphique et utilisation des tables

La courbe représentant la densité de la v.a. du t à k degrés de liberté est une courbe en forme de cloche, qui est symétrique par rapport à la droite $t = 0$, tout comme celle de la densité normale centrée réduite. Cependant, la courbe est plus aplatie que celle de la normale centrée réduite, comme en témoigne la figure ci- dessous.

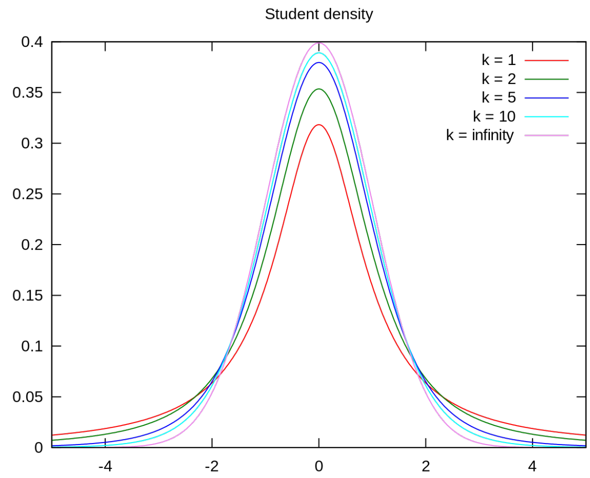


FIGURE 1.1 – Densité de probabilité

Lotrsque k augmente, la courbe de la t converge celle de la normale. On peut même montrer que, lorsque k tend vers l'infini, la densité de la densité de la variable de $St(k)$ converge vers la densité normale centrée réduite. La table 3 de l'annexe donne les les probabilités cumulées de la forme "plus grand ou égal".

On utilise la notation t_α pour désigner une valeur particulière de la v.a. de St à k degrés de liberté telle que la probabilité que la v.a. prenne une valeur plus grande ou égale à cette valeur particulière est égale à α , c'est à dire $\mathbb{P}(t \geq t_{\alpha,m}) = \alpha$.

Propriété 1.5.1. *Soit* $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ *et* $Y \sim \chi^2_m$ X *et* Y *etant indépendantes, alors la v.a* $X/\sqrt{Y/m} \sim St(m)$

Utilisation comme distribution d'échantillonnage

Théorème 1.5.1. *La distribution de* $(\bar{X} - \mu)/(S/\sqrt{n})$ *Soit* $(X_1, \ldots, X_n)$ *un échantillon aléatoire de taille* n *tiré d'une population normale de moyenne* μ *et de variance* σ^2 *, et soit* S^2 *la variance de cet échantillon (*S *son écart type) ; alors la statistique*

$$\frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim St(n-1)$$

Exemple 1.5.1. *Pour estimer le montant hebdomadaire moyen dépensé par les familles de* 4 *personnes pour leur épicerie, on tire un échantillon aléatoire de* 25 *personnes (chaque personne représentant famille). On suppose que les montants moyens dépensés sont distribués normalement avec une moyenne* $\mu = 120\$$ *et une variance inconnue. Si la variance de l'échantillon de taille* 25 *est* $s^2 = 36\$$ *, calculer la probabilité que la moyenne* $\bar{X}$ *de l'échantillon soit supérieure ou égale à* 123\$ *.*

La distribution de inconnues mais égales $(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)$ pour deux populations normales de variances inconnues mais égales

Précedemment, on a vu que pour comparer deux populations par rapport à une certaine carac- téristique, on tire indépendamment un échantillon de taille n_1 dans la première, et un échantillon de taille n_2 dans la deuxième puis on considère la dèistribution de la différence $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$ entre les deux moyennes échantillonnales. On va maintenant supposer que les deux les deux popu- lations étudiées sont normales de moyennes μ_1 et μ_2 sont connuues, mais que les variances σ_1^2et σ_2^2 sont inconnues. On va aussi supposer que ces variances inconnues sont égales $(\sigma_1^2 = \sigma_2^2\ )$. Alors on considère une statistique analogue à $(\bar{X}?\mu)/(S/\sqrt{n})$ mais adaptée aux cas de deux populations. On a le résultat suivant : si S_1^2 et S_2^2 sont les variances de chacun des deux échantillons alors la statistique

$$\frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}}$$

suit une distribution du t à $(n_1 + n_2 - 2)$ degrés de de libertés. Autrement dit, si $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ et $X_2 \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$, σ_1^2 et σ_2^2 inconnues mais égales, alors

$$\left[\frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}}\right] \sim t(n_1 + n_2 - 2)$$

Exemple :

Reprenons l'exemple concernant la durée de vie des pneus produits par deux manufacturiers M_1 et M_2 . Supposons que pneus de M_1 aient une durée de vie moyenne de 50.000 km avec un écart type inconnu, et que ceux de M_2 aient une durée de vie moyenne de 40.000 km avec un écart type inconnu, ces deux durées de vie étant distribuées normalement, et les écarts types inconnus mais supposés égaux. Pour comparer les pneus de ces deux manufacturiers, on a tiré un échantillon aléatoire de 10 pneus M_1 , et l'on a obtenu un écart type de 6.000 km ; on a tiré un échantillon aléatoire de 15 pneus M_2 , et l'on a obtenu un écart type de 4.000 km. Quelle est la probabilité que la durée de vie moyennes de ces 10 pneus M_1 soit d'au moins 15.000 km de plus que la durée de vie moyennes de ces 15 pneus M_2 ?

1.5.4 La distribution du F (Fisher)

Définition 1.5.2. *On appelle variable aléatoire du F , ou v.a. de Fisher à d_1 et d_2 degrés de liberté une v.a. continue qui prend des valeurs réelles positives, et dont la densité est :*

$$f(x) = \frac{\left(\frac{d_1\,x}{d_1\,x+d_2}\right)^{d_1/2}\ \left(1 - \frac{d_1\,x}{d_1\,x+d_2}\right)^{d_2/2}}{x\ \mathrm{B}(d_1/2, d_2/2)}$$

où d_1 et d_2 sont des entiers positifs et B est la fonction bêta. Par la suite, on désignera par $F(d_1, d_2)$ la famille des v.a. du F à d_1 et d_2 dergés de liberté, de telle sorte que pour une v.a. X , on pourra écrire $X \sim F(d_1, d_2)$.

Caractéristiques d'une v.a. du F

Il est possible de prouver que l'espérance et la variance d'une v.a. X du F à d_1 et d_2 degrés de liberté sont données par :

$E(X) = \frac{d_2}{d_2-1}, sid_2 > 2$ et

$Var(X) = \frac{2m_2^2(m_1+m_2-2)}{m_1(m_2-2)^2(m_2-4)}, si m_2 > 4$

Représentation graphique et utilisation des tables

Tout comme la courbe représentant la densité de la v.a. du χ^2 , la courbe de la F est non symétrique, et elle est définie seulement pour des valeurs positives de la variable.

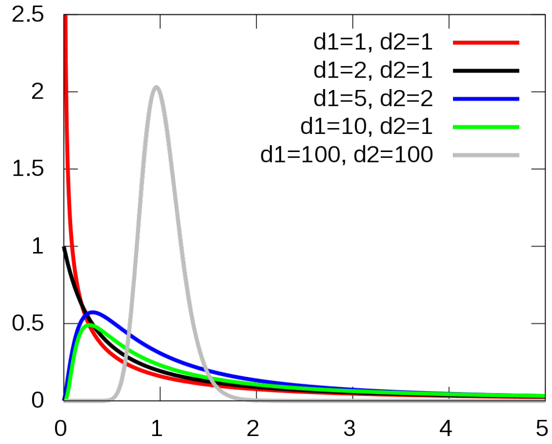


FIGURE 1.2 – Densité de probabilité

Propriété 1.5.2. *Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes suivant toutes deux une distribution du χ^2 à m_1 et m_2 degrés de liberté respectivement, alors la v.a. $Y = (X_1/m_1)/(X_2/m_2) \sim F(m_1, m_2)$.*

Utilisation comme distribution d'échantillonnage

Pour comparer deux populations par rapport à une certaine carctéristique, on peut comparer leurs moyennes, on peut aussi vouloir comparer les variances de ces populations. À cette fin, on tire indépendamment un échantillon aélatoire de taille n_1 dans la première population, et un échantillon aélatoire de taille n_2 dans la deuxième. Pour comparer les variances σ_1^2 et σ_2^2 de ces deux populations, on se sert du rapport S_1^2/S_2^2 des variances des deux échantillons tirés. Plus précisément, si les deux populations considérées sont normales, alors la statistique une distribution du F à $(n_1?1)$ et $(n_2?1)$ degrés de liberté. Autrement dit, si $X_1 \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ et $X_2 \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$ alors $\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} \sim F(n_1 - 1, n_2 - 1)$.

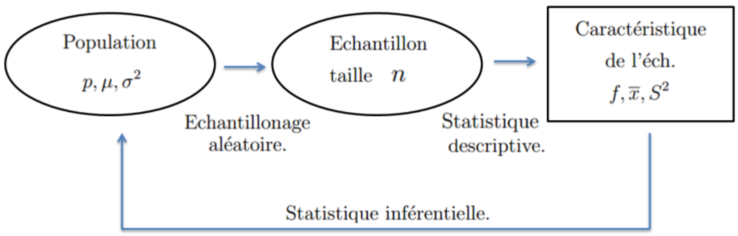
On peut aussi noter que, sous l'hypothèse $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ (les deux populations ont la même variance), la statistique $\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2}$ se réduit simplement au quotient S_1^2/S_2^2 des deux variances échantillonnales.

Exemple 1.5.2. *On désire maintenant comparer les variances des durées de vie des pneus des deux manufacturiers M_1 et M_2 . Supposons que la durée de vie des pneus M_1 soit normale de variance $\sigma_1^2 = (3015)^2 km^2$, et que celle des pneus M_2 soit normale de variance $\sigma_2^2 = (4000)^2 km^2$. Si l'on tire indépendamment un échantillon aléatoire de 10 pneus de M_1 et un échantillon aléatoire de 20 pneus de M_2 , calculer la probabilité que la variance S_1^2 du premier échantillon soit au moins 2 fois plus grande que la variance S_2^2 du deuxième échantillon.*

Chapitre Deux

Estimation ponctuelle

L'estimation consiste à donner des valeurs approchées aux paramètres d ?une popula- tion (p, μ, σ^2) ou (proportion, moyenne, variance) à partir des données de l ?échantillon $(f, \bar{x}, S^2)$. On supposera vérifiée l ?hypothèse d ?échantillonnage aléatoire simple. La statistique inférentielle peut se résumer par le schéma suivant :



2.1 Généralités

2.1.1 Estimateur

Soient $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ un n-échantillon aléatoire simple issu d ?une variable aléatoire X (discrète ou continue) et θ un paramètre associé à la distribution $\mathbb{P}_\theta(X = x)$ ou $f_\theta(x)$ de X. Un estimateur de θ est une variable aléatoire T fonction des X_i

$$T = f(X_1, X_2, \ldots, X_n)$$

Si on considère n observations $x_1, x_2, \ldots, x_n$, l'estimateur T fournira une estimation de θ notée :

$$\hat{\theta} = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

Définition 2.1.1. *(Lois de distribution). Soit $(X_1, \ldots, X_n)$ un échantillon de taille n de la variable aléatoire $X \sim \mathcal{L}(\theta)$ et $(x_1, \ldots, x_n)$ une réalisation. On appelle distribution de la loi $\mathcal{L}(\theta)$ la valeur : $\mathbb{P}_\theta(X = x)$ ou $f_\theta(x)$*

On définit alors la loi de distribution de l'échantillon :

— *Si $\mathcal{L}(\theta)$ est discrète par :*

$$
\begin{aligned}
L(x_1, \ldots, x_n, \theta) &= \mathbb{P}(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n, \theta) && (2.1)\\
&= \mathbb{P}_\theta(X_1 = x_1) \times \cdots \times \mathbb{P}_\theta(X_n = x_n) && (2.2)
\end{aligned}
$$

— *Si $\mathcal{L}(\theta)$ est continue :*

$$L(x_1, \ldots, x_n, \theta) = f_\theta(x_1) \times \cdots \times f_\theta(x_n) \tag{2.3}$$

On nomme, dans les deux cas, $L(x_1, \ldots, x_n, \theta)$ la fonction de vraisemblance du paramètre θ

2.1.2 Exemples élémentaires

$\bar{x}, s^2$ sont des estimations de μ et de σ^2 (resp.). Les variables aléatoires $\overline{X}$ et S^2 , sont les estimateurs de μ et σ^2 (resp.).

Remarque 2.1.1. *Le même paramètre peut-être estimé à l ?aide d ?estimateurs différents.*

Exemple 2.1.1. *Le paramètre λ d ?une loi de Poisson peut-être estimé par $\overline{X}$ et S^2 .*

2.1.3 Qualités d'un estimateur

Estimateur convergent

Soit θ le paramètre à estimer et $T = f(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ un estimateur. La première qualité d'un estimateur est d ?être **convergent** (consistant : $\lim\limits_{n\to+\infty} T = \theta$). Deux estimateurs convergents ne convergent cependant pas nécessairement à la même vitesse, ceci est lié à la notion de précision d'un estimateur. On mesure généralement la précision d ?un estimateur par l'erreur quadratique moyenne.

Perte quadratique : C'est l ?écart au carré entre le paramètre et son estimateur :

$$l(\theta, T) = (\theta - T)^2$$

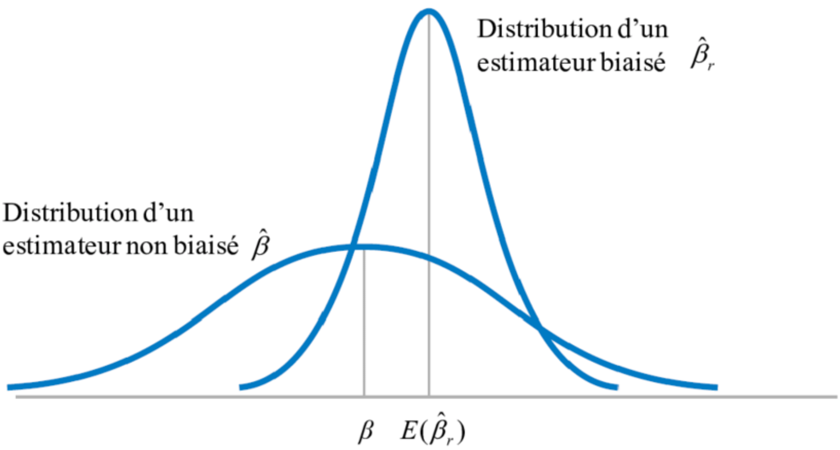
Risque d'un estimateur : C'est la moyenne des pertes :

$$R(T, \theta) = \mathbb{E}(l(\theta, T))$$

$R(T, \theta) = \mathbb{E}(\theta - T)^2$ est le risque quadratique moyen.
Un estimateur T est dit convergent si $\lim\limits_{n\to+\infty} R(T, \theta) = 0$

Estimateur sans biais

La quantité $\mathbb{E}(T) - \theta$ est appelée biais de l'estimateur. T est dit sans biais si $\mathbb{E}(T) = \theta$.



Exemple 2.1.2. $\overline{X}$ *est sans bias pour* μ*, mais* $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$ *est biasé pour* σ^2*. C'est pourquoi on utilise* $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$

Remarque 2.1.2.

$$R(T, \theta) = E\Big((T - \theta)^2\Big) = Var(T) + \Big((\mathbb{E}(T) - \theta)^2\Big)$$

<u>Preuve :</u> *utilse l'astuce de cette décomposition :* $T - \theta = T - \mathbb{E}(T) + \mathbb{E}(T) - \theta$

Remarque 2.1.3. *Si* T *est sans biais alors* $R(T, \theta) = Var(T)$ *et* T *convergent si* $\lim_{n \to +\infty} Var(T) = 0$. *Entre deux estimateurs sans biais, le plus précis est donc celui de variance minimale.*

Meilleur estimateur

Soient T_1 , T_2 deux estimateur de θ. On dit que T_1 est meilleur que T_2 si :

$$R(T_1, \theta) < R(T_2, \theta), \forall \theta$$

Estimateur asymptotiquement sans biais

T est dit asymptotiquement sans biais si :

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{E}(T) = \theta$$

Pour un échantillon $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ issu de X de loi $f(x, \theta)$, on se contentera de rechercher un estimateur sans biais de variance minimale, ce problème est lié à l'existence de statistiques exhaustives.

2.2 Statistique suffisante (exhaustive)

Dans un problème statistique où figure un paramètre θ inconnu, un échantillon nous apporte certaine information sur ce paramètre. Lorsque l'on résume cet échantillon par une statistique, il s'agit de ne pas perdre cette information. Une statistique qui conserve l'information sera dite suffisante (exhaustive).

2.2.1 Définition d'une statistique exhaustive

Soit $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ un n-échantillon et $L(x, \theta)$ sa vraisemblance. Soit θ un paramètre influant sur la loi de probabilité à laquelle sont soumis les X_i . Une statistique T est dite exhaustive (pour le paramètre θ) si la loi conditionnelle de l'échantillon sachant T est indépendante de θ . Cela peut se traduire par la formule suivante :

$$\mathbb{P}(X = x | S(X) = s, \theta) = \mathbb{P}(X = x | T = s)$$

En pratique l'on se sert peu de cette formule pour montrer qu'une statistique est exhaustive et l'on préfère en règle générale utiliser le critère suivant appelé critère de factorisation (parfois aussi appelé critère de Fisher-Neyman) :

Une statistique T est exhaustive si et seulement s'il existe deux fonctions g et h mesurables telles que :

$$L(x, \theta) = g(\theta, T) \times h(x)$$

Exercice 2.2.1. *Soit $X_1, X_2, \dots, X_n$ issu de $X \sim \mathcal{P}(\theta)$, θ inconnu*
La Statistique $T = \sum_{i=1}^{n} X_i$ est-elle exhaustive pour θ ?

2.2.2 Lois permettant une statistique exhaustive

Soit une variable X dont le domaine de définition ne dépend pas de θ

— Une condition nécessaire et suffisante pour que l'échantillon $(X_1, ..., X_n)$ admette une statistique exhaustive est que la forme de la densité soit : $f(x, \theta) = \exp(a(x) \cdot \alpha(\theta) + b(x) + \beta(\theta))$ (famille exponentielle)

— Si la densité est de cette forme et si de plus l'application $x_i \to \sum_{i=1}^{n} a(x_i)$ est bijective et continûment différentiable pour tout i, alors $T = \sum_{i=1}^{n} a(X_i)$ est une statistique exhaustive particulière.

Remarque 2.2.1. *Ce théorème est un outil très puissant pour la recherche d ?une statistique exhaustive.*

Exercice 2.2.2. *Soit $(X_1, \dots, X_n)$ un n-echantillon issu de $X \sim \gamma(\theta)$*

$$f(x, \theta) = \frac{1}{\Gamma(\theta)} e^{-x} x^{\theta - 1}, x > 0$$

Determiner une statistique exhaustive pour θ ?

Remarque 2.2.2. *Lorsque le domaine de X dépend de θ, le théorème de Darmois ne s'applique pas, ce qui n'empêche pas de trouver une statistique exhaustive.*

2.2.3 L'information de Fisher

Définition 2.2.1. *On appelle quantité d'information de Fisher $I_n(\theta)$ apportée par un échantillon sur le paramètre θ, la quantité suivante positive ou nulle (si elle existe) : "*

$$I_n(\theta) = \mathbb{E}\Big[\Big(\frac{\partial \ln L(X,\theta)}{\partial \theta}\Big)^2\Big]$$

avec $L(X,\theta) = \prod_{i=1}^n f(X_i,\theta)$

Théorème 2.2.1. *Si le domaine de définition de X ne dépend pas de θ alors*

$$I_n(\theta) = -\mathbb{E}\Big[\frac{\partial^2 \ln L(X,\theta)}{\partial \theta^2}\Big]$$

Propriété 2.2.1. *d'additivité de l'information de Fisher : Soit Y une variable aléatoire indépendante de X dont la loi dépend du même paramètre θ. Soit $f(x,\theta), g(y,\theta), h(x,y,\theta)$ les densités de X, Y et du couple (X,Y) (resp.), d'information de Fisher $I_X(\theta)$, $I_Y(\theta)$, $I(\theta)$ (resp.) Si les domaines de définition de X,Y ne dépendent pas de θ alors :*

$$I(\theta) = I_X(\theta) + I_Y(\theta).$$

<u>Consequence</u> : Si le domaine de définition ne dépend pas de θ alors : $I_n(\theta) = nI_1(\theta)$ avec

$$I_1 = \mathbb{E}\left(\frac{\partial^2 \ln f(X,\theta)}{\partial \theta^2}\right)$$

<u>i.e</u> : que chaque observation a la même importance. Ce qui n ?est pas le cas pour la loi uniforme sur $[0, ?]$ où la plus grande observation est la plus intéressante.

Exercice 2.2.3. *Soit $X \sim \mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$ Calculer l ?information de Fisher apportée par un n-échantillon issu de X sur le paramètre μ.*

2.3 Information de Fisher et suffisance

On montre que l'nformation portée par une statistique est inférieure ou égale à celle apportée par un échantillon. En effet : soit T la statistique de densité $g(t,\theta)$ que l'on substitue à l'échantillon.

$$I_n(\theta) \geq I_T(\theta)$$

Si T est suffisante $I_n(\theta) = I_T(\theta)$
La réciproque est vraie si le domaine de X est indépendant de θ.

2.4 Borne de Freshet-Damois-Cramer-Rao (FDCR)

Le résultat suivant nous indique que la variance d'un estimateur ne peut être inférieur à une certaine borne, qui dépend de la quantité d'information de Fisher apportée par l ?échantillon sur le paramètre θ

Théorème 2.4.1. *Si le domaine de définition de X ne dépend pas de θ alors pour tout estimateur sans biais :*

$$Var(T) \geq \frac{1}{I_n(\theta)}$$

Si T est un estimateur sans biais de $h(\theta)$

$$Var(T) \geq \frac{[h^{'}(\theta)]^2}{I_n(\theta)}$$

2.5 Estimateur efficace

Définition 2.5.1. *Un estimateur T est dit efficace si sa variance est égale à la borne de FDCR.*

Propriété 2.5.1. *Un estimateur sans biais efficace est convergent.*

Preuve : A faire

Remarque 2.5.1. *Un estimateur efficace T est un estimateur sans biais de variance minimale.*

2.6 Estimateur sans biais de variance minimale (MVUE)

Théorème 2.6.1. *S ?il existe un estimateur de θ sans biais, de variance minimale, il est unique presque sûrement.*

2.7 Généralisation (Cas multidimensionnel)

Statistique exhaustive

Soit le modéle statistique paramétrique : $(\mathcal{X}, (\mathbb{P}_\theta)_{\theta\in\Theta})$, avec $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^p$

Soit $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ un n-échantillon issu de $X \sim f(x, \theta)$, on suppose que $f(x, \theta)$ appartiennent à la famille exponentielle :

$$f(x, \theta) = c(\theta).h(x).\exp(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j(\theta)T_j(x))$$

Si $X(\Omega)$ ne dépend pas de θ

La statistique $(\sum_{i=1}^n T_1(X_i)), (\sum_{i=1}^n T_2(X_i)), \ldots, (\sum_{i=1}^n T_p(X_i))$ est exhaustive pour θ.

Information de Fisher

Soit $X \sim f(x, \theta)$, $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^p$. On note $\theta = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_p)$

On fait les hypothèses de régularité suivante :

(H_1) : $\forall x, \forall\theta, f(x, \theta) > 0$

(H_2) : $grad_\theta f$ existe $\forall\theta$, ie : on peut dériver f par rapport à θ_i , $\forall i \in \{1, \ldots p\}$, $\mathbb{P}_\theta$ *ps*

(H_3) : On peut dériver au moins deux fois $f(x, \theta)$ par rapport à θ_i , $\forall i \in \{1, \dots p\}$, dériver $\int f(x, \theta)dx$ et permuter entre dérivation et intégration.

$grad_\theta f = \left(\frac{\partial f}{\partial \theta_1}, \frac{\partial f}{\partial \theta_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial \theta_p}\right)$ vecteur ligne $(1, p)$. On appelle score $S(x, \theta)$ le vecteur $(1, p)$ défini par $grad_\theta \log f$

Définition 2.7.1. *On appelle information en θ la matrice (p, p) de variance-covariance de $grad_\theta \log f(x, \theta)$*

$$I(\theta) = \mathbb{E}(S^T S)$$

Comme dans le cas réel :

— $\mathbb{E}\Big[grad_\theta \log f(x, \theta)\Big] = 0$

— $\mathbb{E}\Big[\frac{1}{f}\frac{\partial^2 f(X,\theta)}{\partial \theta_i \partial \theta_j}\Big] = 0,\ \forall i, j \in \{1, \dots, p\}$

Sous les hypothèses H_1, H_2, H_3 on obtient, $I(\theta)$: la matrice dont le terme général $I_{ij}(\theta)$,

$$-\mathbb{E}\Big[\frac{\partial^2 f(X, \theta)}{\partial \theta_i \partial \theta_j}\Big]$$

$I(\theta)$ est une matrice définie positive.

Exercice 2.7.1. *Soit $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ un n-échantillon issu de $N(\mu, \sigma^2)$, avec μ, σ^2 inconnus.*