设 $u=f(\boldsymbol{x})$ 在区域 D 上有定义，$\boldsymbol{x}_0\in D$，$\boldsymbol{v}=(\cos\theta_1,\cos\theta_2,\ldots,\cos\theta_n)$ 为一方向，如果极限 $\lim_{t\to 0+0}\dfrac{f(\boldsymbol{x}_0+t\boldsymbol{v})-f(\boldsymbol{x}_0)}{t}$ 存在，则称为 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处沿 $\boldsymbol{v}$ 的**方向导数**，记为 $\dfrac{\partial f(\boldsymbol{x}_0)}{\partial \boldsymbol{v}}$。

一个二元函数在 (x_0,y_0) 处的所有方向导数都存在也未必连续，例如 $f(x,y)=[y=x^2,x\neq 0]$ 在 $(0,0)$ 处。

记 $\Delta\boldsymbol{x}=(\Delta x_1,\Delta x_2,\cdots,\Delta x_n)$，并称它为自变量的**全增量**。若存在仅依赖于 $\boldsymbol{x}_0$ 的常数 A_i，使得 $\Delta f(\boldsymbol{x}_0)=f(\boldsymbol{x}_0+\Delta\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{x}_0)=\sum_{i=1}^n A_i\Delta x_i+o(|\Delta\boldsymbol{x}|)$，则称 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处可微，并称 $\sum_{i=1}^n A_i\Delta x_i$ 为**全微分**，记为 $\mathrm{d}f(\boldsymbol{x}_0)$。

可微一定连续，且必然有 $\mathrm{d}f(\boldsymbol{x}_0)=\sum_{i=1}^n\dfrac{\partial f(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_i}\mathrm{d}x_i$。

定理：如果 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $U(\boldsymbol{x}_0,\delta_0)$ 存在各个偏导数，并且这些偏导数在 $\boldsymbol{x}_0$ 处连续，即 $f(\boldsymbol{x})\in C^1(D)$，则 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处可微。

> 对 n 归纳。$n=k$ 成立，当 $n=k+1$ 时，由一元函数拉格朗日中值定理，$f(\boldsymbol{x}_0+\Delta\boldsymbol{x})-f(x_1^0+\Delta x_1,\cdots,x_k^0+\Delta x_k,x_{k+1}^0)=\dfrac{\partial f(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_{k+1}}\Delta x_{k+1}+o(1)|\Delta x_{k+1}|$。
> 根据归纳假设，$f(x_1^0+\Delta x_1,\cdots,x_k^0+\Delta x_k,x_{k+1}^0)-f(\boldsymbol{x}_0)=\sum_{i=1}^k\dfrac{\partial f(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_i}\Delta x_i+o(1)\sqrt{\sum_{i=1}^k(|\Delta x_i|)^2}$。相加得到 $\Delta f(\boldsymbol{x}_0)=\sum_{i=1}^{k+1}\dfrac{\partial f(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_i}\Delta x_i+o(1)\sqrt{\sum_{i=1}^{k+1}(|\Delta x_i|)^2}$。

定理：如果 $f(\boldsymbol{x}_0)$ 可微，对于 $\boldsymbol{v}=(\cos\theta_1,\cdots,\cos\theta_n)$，它的方向导数为 $\dfrac{\partial f(\boldsymbol{x}_0)}{\partial\boldsymbol{v}}=\sum_{i=1}^n\dfrac{\partial f(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_i}\cos\theta_i$。

从上式看出，可微函数的方向导数最大的方向向量为 $\dfrac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^n(\dfrac{\partial f(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_i})^2}}(\dfrac{\partial f(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_1},\dfrac{\partial f(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_2},\cdots,\dfrac{\partial f(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_n})$，同时它的模就是方向导数的值。称 $(\dfrac{\partial f(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_1},\dfrac{\partial f(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_2},\cdots,\dfrac{\partial f(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_n})$ 为 $\boldsymbol{x}_0$ 处的**梯度**，记为 $\mathbf{grad}f(\boldsymbol{x}_0)$。所以 $\dfrac{\partial f(\boldsymbol{x}_0)}{\partial\boldsymbol{v}}=\mathbf{grad}f(\boldsymbol{x}_0)\cdot\boldsymbol{v}$。

后文所有向量默认为列向量

设向量函数 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=(f_1(\boldsymbol{x}),f_2(\boldsymbol{x}),\cdots,f_m(\boldsymbol{x}))^T$ 在区域 D 上有定义，$\Delta\boldsymbol{x}=(\Delta x_1,\Delta x_2,\cdots,\Delta x_n)^T$ 为 $\boldsymbol{x}$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处的全增量，如果存在只与 $\boldsymbol{x}_0$ 有关的 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 使得 $|\Delta\boldsymbol{x}|\to 0$ 时，$\Delta\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)=(\Delta f_1(\boldsymbol{x}_0),\Delta f_2(\boldsymbol{x}_0),\cdots,\Delta f_m(\boldsymbol{x}_0))^T=\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\alpha}(|\Delta\boldsymbol{x}|)$，其中

$\boldsymbol{\alpha}(|\Delta \boldsymbol{x}|)=(\alpha_1(|\Delta \boldsymbol{x}|),\alpha_2(|\Delta \boldsymbol{x}|),\cdots,\alpha_m(|\Delta \boldsymbol{x}|))^T$，$\alpha_j$ 依赖 $\Delta \boldsymbol{x}$ 且 $\lim_{|\Delta \boldsymbol{x}|\to 0}\dfrac{\alpha_j(|\Delta \boldsymbol{x}|)}{|\Delta \boldsymbol{x}|}=0$，则称 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处**可导/可微**。$\boldsymbol{A}$ 称为 **Frechet 导数**，记作 $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}_0)$ 或者 $\mathrm{D}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)$；$\boldsymbol{A}\Delta \boldsymbol{x}$ 称为全微分，记作 $\mathrm{d}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)$，即 $\mathrm{d}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)=\mathrm{D}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)\Delta \boldsymbol{x}$。

定理：向量函数可微的充要条件是它包含的所有函数可微，此时

$$\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}_0)=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f_1(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_1(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_n}\\ \dfrac{\partial f_2(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_2(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_n}\\ \vdots & & & \\ \dfrac{\partial f_m(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_m(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_m(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_n}\end{pmatrix}$$

称为**雅可比 Jacobi 矩阵**，记为 $\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{x}_0)$，特别的，如果是方阵，那么它的行列式称为**雅可比行列式**，记作 $\dfrac{\partial(f_1,f_2,\cdots,f_n)}{\partial(x_1,x_2,\cdots,x_n)}\Big|_{\boldsymbol{x}_0}$

如果 $f_j(\boldsymbol{x})$ 的各个偏导数在区域 D 上连续，我们称 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 在 D 上是 C^1 的，记作 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\in C^1(D)$。特别的，如果区域 D 到 $\mathit{\Omega}$ 的变换 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\in C^1(D)$ 及 $\boldsymbol{f}^{-1}\in C^1(\mathit{\Omega})$，则说这个变换是 C^1 的。

如果 $f(\boldsymbol{x}):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$，$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ 列向量函数，则 $(f(\boldsymbol{x})\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}))'=f(\boldsymbol{x})\boldsymbol{g}'(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})f'(\boldsymbol{x})$。

> $(f(\boldsymbol{x})\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}))'(i;j)=\dfrac{\partial(f(\boldsymbol{x})g_i(\boldsymbol{x}))}{\partial x_j}=f(\boldsymbol{x})\dfrac{\partial g_i(\boldsymbol{x})}{\partial x_j}+g_i(\boldsymbol{x})\dfrac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_j}=f(\boldsymbol{x})\boldsymbol{g}'(\boldsymbol{x})(i;j)+\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})f'(\boldsymbol{x})(i;j)$

$f(\boldsymbol{u})$ 在 $\boldsymbol{u}_0$ 处可微，$\boldsymbol{u}_0=\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}_0)$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处可微，则 $f(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}))$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处可微，且 $f'(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}_0))=f'(\boldsymbol{u}_0)\boldsymbol{u}'(\boldsymbol{x}_0)$。

> $\Delta f(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}))=f'(\boldsymbol{u}_0)\Delta\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})+\beta(|\Delta\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})|)=f'(\boldsymbol{u}_0)(\boldsymbol{u}'(\boldsymbol{x}_0)\Delta\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\alpha}(|\Delta\boldsymbol{x}|))+\beta(|\Delta\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})|)$
> 下面说明 $\lim_{|\Delta\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{0}|}\dfrac{f'(\boldsymbol{u}_0)\boldsymbol{\alpha}(|\Delta\boldsymbol{x}|)+\beta(|\boldsymbol{u}'(\boldsymbol{x}_0)\Delta\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\alpha}(|\Delta\boldsymbol{x}|)|)}{|\Delta\boldsymbol{x}|}=0$ 即可。前一半是显然的，后一半由于 $|\boldsymbol{u}'(\boldsymbol{x}_0)\Delta\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\alpha}(|\Delta\boldsymbol{x}|)|\le||\boldsymbol{u}'(\boldsymbol{x}_0)|||\Delta\boldsymbol{x}|+|\Delta\boldsymbol{x}|\le|\Delta\boldsymbol{x}|(||\boldsymbol{u}'(\boldsymbol{x}_0)||+1)\to 0$，故同样也是 0。

推论：$\boldsymbol{f},\boldsymbol{u}$ 均可微，$\mathrm{d}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}))=\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}))\boldsymbol{u}'(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}$。

推论：$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 是 D 到 Ω 的 C^1 变换，则 $(\boldsymbol{f}^{-1})'(\boldsymbol{y})=[\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})]^{-1}$，从而 $\dfrac{\partial(y_1,y_2,\cdots,y_n)}{\partial(x_1,x_2,\cdots,x_n)}\cdot\dfrac{\partial(x_1,x_2,\cdots,x_n)}{\partial(y_1,y_2,\cdots,y_n)}=1$。

推论（链锁法则）：$f(\boldsymbol{u})$ 在 $\boldsymbol{u}_0$ 处可微，$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})=(u_1(\boldsymbol{x}),u_2(\boldsymbol{x}),\cdots,u_m(\boldsymbol{x}))^T$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处可微（可以减弱为存在各个偏导数），$\boldsymbol{u}_0=\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}_0)$，则 $\dfrac{\partial f(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}_0))}{\partial x_i}=\sum_{j=1}^m(\dfrac{\partial f(\boldsymbol{u}_0)}{\partial u_j}\cdot\dfrac{\partial u_j(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_i})$。

当 $\dfrac{\partial(\frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_i})}{\partial x_k}$ 存在时，可以将其记为 $\dfrac{\partial^2 f(\boldsymbol{x})}{\partial x_k\partial x_i}$ 或 $f''_{x_kx_i}(\boldsymbol{x})$。

定理：对于 j,k，如果 $f''_{jk}(\boldsymbol{x})$ 与 $f''_{kj}(\boldsymbol{x})$ 在 $U(\boldsymbol{x}_0,\delta)$ 内存在，且在 $\boldsymbol{x}_0$ 处连续，则 $f''_{jk}(\boldsymbol{x}_0)=f''_{jk}(\boldsymbol{x}_0)$。

> 考虑 $I=\dfrac{f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0+\Delta y)+f(x_0,y_0)}{\Delta x\Delta y}$，一方面，$I=\dfrac{f'_x(x_0+\theta\Delta x,y_0+\Delta y)-f'_x(x_0+\theta\Delta x,y_0)}{\Delta y}=f'_{yx}(x_0+\theta\Delta x,y_0+\mu\Delta y)$，另一方面可以写作 $f'_{xy}(x_0+\theta'\Delta x,y_0+\mu'\Delta y)$，由连续性得到相等。

对于**高阶微分**可以形式化的记 $\mathrm{d}^k f(\boldsymbol{x})=(\sum_{i=1}^n \mathrm{d}x_i\dfrac{\partial}{\partial x_i})^k f(\boldsymbol{x})$。

特别的，对于二元函数 $f(x,y)$，$\mathrm{d}^k f(x,y)=\sum_{j=0}^k C_k^j\dfrac{\partial^k f(x,y)}{\partial x^{k-j}\partial y^j}\mathrm{d}x^{k-j}\mathrm{d}y^j$。

定理（拉格朗日余项泰勒公式）：设函数 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $U(\boldsymbol{x}_0,\delta_0)$ 内具有连续 $K+1$ 阶偏导数，则 $\forall\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{h}\in U(\boldsymbol{x}_0,\delta_0)$，存在 $0<\theta<1$，

$$f(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{h})=f(\boldsymbol{x}_0)+\sum_{k=1}^K\frac{1}{k!}(\sum_{i=1}^n h_i\frac{\partial}{\partial x_i})^k f(\boldsymbol{x}_0)+\frac{1}{(K+1)!}(\sum_{i=1}^n h_i\frac{\partial}{\partial x_i})^{K+1}f(\boldsymbol{x}_0+\theta\boldsymbol{h})$$

> 构造 $\varphi(t)=f(\boldsymbol{x}_0+t\boldsymbol{h})$，则 $\varphi(t)$ 有 $K+1$ 阶连续导数，使用一元函数泰勒公式即可证明。

推论（皮亚诺余项泰勒公式）：$f(\boldsymbol{x})\in C^K(U(\boldsymbol{x}_0,\delta_0))$，则

$$f(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{h})=f(\boldsymbol{x}_0)+\sum_{k=1}^K\frac{1}{k!}(\sum_{i=1}^n h_i\frac{\partial}{\partial x_i})^k f(\boldsymbol{x}_0)+o(|\boldsymbol{h}|^K)$$

推论（拉格朗日微分中值定理）：$f(\boldsymbol{x})\in C^1(D)$，则 $\forall t\in[0,1]$，$\boldsymbol{x}_0+t(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)\in D$，有

$$f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{x}_0)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f(\boldsymbol{x}_0+\theta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0))}{\partial x_i}(x_i-x_i^0)=f'(\boldsymbol{x}_0+\theta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0))(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)$$

海色 Hessi 矩阵:

$$\boldsymbol{H}_f(\boldsymbol{x}_0)=\begin{pmatrix}\frac{\partial^2 f(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_1\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_1\partial x_n}\\ \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_2\partial x_1} & \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_2\partial x_n}\\ \vdots & & & \\ \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_n\partial x_1} & \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_n\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_n^2}\end{pmatrix}$$

在 Taylor 展式中令 $K=1$，则有 $f(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{h})=f(\boldsymbol{x}_0)+f'(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{h}+\frac{1}{2}\boldsymbol{h}^T\boldsymbol{H}_f(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{h}+o(|\boldsymbol{h}|^2)$。

隐函数存在定理：设二元函数 $F(x,y)$ 在 $U((x_0,y_0),\delta)$ 内满足:

1. $F(x_0,y_0)=0$
2. $F(x,y),F_y'(x,y)$ 在 $U((x_0,y_0),\delta)$ 内连续。
3. $F_y'(x_0,y_0)\neq 0$

则存在 $0<\delta_0<\delta$，使得在 $U(x_0,\delta_0)$ 内存在唯一满足下述条件的连续函数 $y=f(x)$:

- $y_0=f(x_0)$
- $F(x,f(x))=0$，$\forall x\in U(x_0,\delta_0)$
- 如果 $F_x'(x,y)$ 在 $U((x_0,y_0),\delta)$ 内连续，则 $f(x)\in C^1(U(x_0,\delta_0))$，且 $f'(x)=-\frac{F_x'(x,f(x))}{F_y'(x,f(x))}$。

> 不妨 $F_y'(x_0,y_0)>0$，则存在 δ_0，$\forall(x,y)\in U((x_0,y_0),\delta_0)$，有 $F_y'(x,y)>0$。故 $F(x_0,y_0-\delta_0)<0,F(x_0,y_0+\delta_0)>0$，进而存在 $\delta_1<\delta_0$，$\forall x\in U(x_0,\delta_1)$，$F(x,y_0-\delta_0)<0$，$F(x,y_0+\delta_0)>0$，故由单调性有唯一的 $F(x,f(x))=0$。
> 至于连续性，则由于 $\forall\varepsilon>0$，对于 $\overline{y}=f(\overline{x})$，有 $F(\overline{x},\overline{y}-\varepsilon)<0,F(\overline{x},\overline{y}+\varepsilon)>0$，故存在 δ 使得 $\forall x\in U(\overline{x},\delta),F(x,\overline{y}-\varepsilon)<0,F(x,\overline{y}+\varepsilon)>0$，从而 $f(x)\in(\overline{y}-\varepsilon,\overline{y}+\varepsilon)$，也即 $|f(x)-f(\overline{x})|<\varepsilon$。
> 如果 x 的偏导数连续，那么设 $\Delta y=f(\overline{x}+\Delta x)-f(\overline{x})$。由微分中值定理，$0=F(\overline{x}+\Delta x,\overline{y}+\Delta y)-F(\overline{x},\overline{y})=F_x'(\overline{x}+\theta\Delta x,\overline{y}+\theta\Delta y)\Delta x+F_y'(\overline{x}+\theta\Delta x,\overline{y}+\theta\Delta y)\Delta y$，移项后令 $\Delta x\to 0$ 由连续性得证。

推广隐函数存在定理：设函数 $F(\boldsymbol{x},y)$ 在 $U((\boldsymbol{x}_0,y_0),\delta)$ 内满足:

1. $F(\boldsymbol{x}_0, y_0) = 0$
2. $F(\boldsymbol{x}, y), F'_y(\boldsymbol{x}, y)$ 在 $U((\boldsymbol{x}_0, y_0), \delta)$ 内连续。
3. $F'_y(\boldsymbol{x}_0, y_0) \neq 0$

则存在 $0 < \delta_0 < \delta$，使得在 $U(\boldsymbol{x}_0, \delta_0)$ 内存在唯一满足下述条件的连续函数 $y = f(\boldsymbol{x})$:

- $y_0 = f(\boldsymbol{x}_0)$
- $F(\boldsymbol{x}, f(\boldsymbol{x})) = 0$，$\forall x \in U(\boldsymbol{x}_0, \delta_0)$
- 如果 $F(\boldsymbol{x}, y)$ 在 $U((x_0, y_0), \delta)$ 内存在各个连续偏导数，则 $f(\boldsymbol{x}) \in C^1(U(x_0, \delta_0))$，且 $\dfrac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_i} = -\dfrac{F'_{x_i}(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))}$。

隐函数组存在定理：设 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})$ 在 $U((\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{u}_0), \delta)$ 内有定义，且满足

1. $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{u}_0) = \boldsymbol{0}$
2. $F_j(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})$ 及它的各个偏导数在 $U((\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{u}_0), \delta)$ 内连续。
3. $\dfrac{\partial(F_1, F_2, \cdots, F_m)}{\partial(u_1, u_2, \cdots, u_m)}\Big|_{(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{u}_0)} \neq 0$

则存在 $0 < \delta_0 < \delta$，使得在 $U(\boldsymbol{x}_0, \delta_0)$ 内存在唯一满足下述条件的 m 维 n 元向量函数 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$:

- $\boldsymbol{u}_0 = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)$
- $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})) = \boldsymbol{0}$，$\forall x \in U(\boldsymbol{x}_0, \delta_0)$
- $f_j(\boldsymbol{x})$ 在 $U(\boldsymbol{x}_0, \delta_0)$ 内存在连续偏导数，

$$\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}) = -(\frac{\partial \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})}{\partial \boldsymbol{x}})^{-1}(\frac{\partial \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})}{\partial \boldsymbol{u}})$$

逆映射存在定理：设 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 是区域 D 到 Ω 的一个 C^1 映射，并且在 $\boldsymbol{x}_0 \in D$ 处有 $\dfrac{\partial(f_1, f_2, \cdots, f_n)}{\partial(x_1, x_2, \cdots, x_n)}\Big|_{\boldsymbol{x}_0} \neq 0$，记 $\boldsymbol{y}_0 = f(\boldsymbol{x}_0)$，则存在 $U(\boldsymbol{x}_0, \delta_0) \subset D$，使得 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 是 $U(\boldsymbol{x}_0, \delta_0)$ 到 $\boldsymbol{f}(U(\boldsymbol{x}_0, \delta_0))$ 的 C^1 同胚映射。

> 记 $F_j(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = y_j - f_j(\boldsymbol{x})$，考虑 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{0}$ 设个方程组，各个子函数的各偏导数都连续，并且 $\dfrac{\partial(F_1, F_2, \cdots, F_n)}{\partial(x_1, x_2, \cdots, x_n)}\Big|_{(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0)} = (-1)^n \dfrac{\partial(f_1, f_2, \cdots, f_n)}{\partial(x_1, x_2, \cdots, x_n)}\Big|_{\boldsymbol{x}_0} \neq 0$，因此存在隐函数 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{y})$，且有各个连续偏导数。

定理：设 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 取极值且 $f(\boldsymbol{x})$ 关于 x_i 可偏导，则有 $\dfrac{\partial f(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_i} = 0$，特别的，若可微，则 $f'(\boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{0}$。

$f'(\boldsymbol{x}_0) = 0$，则称 $\boldsymbol{x}_0$ 为 $f(\boldsymbol{x})$ 的一个**驻点/临界点**，如果一个驻点不是极值点，则称为**鞍点**。

定理 $f(\boldsymbol{x})$ 有二阶连续偏导数，$f'(\boldsymbol{x}_0)=0$，设 $\boldsymbol{H}_f(\boldsymbol{x}_0)$ 为满秩矩阵，则

1. 正定 - 极小值
2. 负定 - 极大值
3. 不定 - 不取极值

> 由于 $\boldsymbol{h}^T\boldsymbol{H}_f(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{h}$ 是 $\{\boldsymbol{h}:|\boldsymbol{h}|=1\}$ 上的一个连续函数，又由于这是一个紧集，故有最大值 M 最小值 m。下面只证明正定，即 $m>0$。
> $f(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{x}_0)+f'(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)+\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)^T\boldsymbol{H}_f(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)+o(|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|^2)>f(\boldsymbol{x}_0)+\dfrac{1}{2}\dfrac{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)^T}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|}\boldsymbol{H}_f(\boldsymbol{x}_0)\dfrac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|}|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|^2+o(|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|^2)>f(\boldsymbol{x}_0)+\dfrac{m}{4}|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|^2$

定理：设函数 $f(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})=(\varphi_1(\boldsymbol{x}),\cdots,\varphi_m(\boldsymbol{x}))^T$ 在 $D\subset\mathbb{R}^n$ 有各个连续偏导数，$m<n$，$\boldsymbol{x}_0$ 为 $f(\boldsymbol{x})$ 在约束条件 $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{0}$ 下的极值点，$\boldsymbol{\varphi}'(\boldsymbol{x}_0)$ 的秩为 m，则存在 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m\in\mathbb{R}$，使得 $\boldsymbol{x}_0$ 处成立下述等式：

$$\frac{\partial f(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_i}+\sum_{j=1}^{m}\lambda_j\frac{\partial\varphi_j(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_i}=0\qquad i=1,2,\cdots,n$$

> 证明 $n=2,m=1$ 的情况。$\varphi'(x_0,y_0)\neq\boldsymbol{0},\varphi(x_0,y_0)=0$，因此不妨存在隐函数 $y=g(x)$（或者反过来），x_0 是 $f(x,g(x))$ 的一个通常极值点，因此 $\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}+\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}g'(x_0)=0$，结合 $g'(x_0)=-\dfrac{\varphi_x'(x_0,y_0)}{\varphi_y'(x_0,y_0)}$，原命题得证。

这种求极值点的必要条件的方法称为**拉格朗日乘数法**。

设曲线 $\varGamma$ 由连续映射 $\boldsymbol{h}(t)$，$t\in[\alpha,\beta]$ 所确定，且是单射，那么称为**简单曲线**。如果 $\boldsymbol{h}(\alpha)=\boldsymbol{h}(\beta)$ 且 $\boldsymbol{h}$ 在 $[\alpha,\beta)$ 是单射，那么称为**简单闭曲线 / Jordan 曲线**。

对于三维空间参数方程曲线 $x=x(t),y=y(t),z=z(t)$，曲线在 $\boldsymbol{x}(t_0)$ 处的切向量为 $\boldsymbol{x}'(t_0)$，法平面用向量内积记为 $\boldsymbol{x}'(t_0)\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}(t_0))=0$。而对于由 $F_1(x,y,z)=F_2(x,y,z)=0$ 确定的曲线方程，如果 $\boldsymbol{F}'(x_0,y_0,z_0)$ 的秩为 2，则由隐函数存在定理，在邻域内存在参数方程形式，故 F_1 对 t 求偏导得 $\dfrac{\partial F_1(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x}x'(t_0)+\dfrac{\partial F_1(\boldsymbol{x}_0)}{\partial y}y'(t_0)+\dfrac{\partial F_1(\boldsymbol{x}_0)}{\partial z}z'(t_0)=0$，对于 F_2 同理，因此切向量与 $F_1'(\boldsymbol{x}_0)\times F_2'(\boldsymbol{x}_0)=A\boldsymbol{i}+B\boldsymbol{j}+C\boldsymbol{k}$ 平行，从而切向量为 $\dfrac{x-x_0}{A}=\dfrac{y-y_0}{B}=\dfrac{z-z_0}{C}$，而法平面为 $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$。

对于三维空间 C^1 曲面 $F(x,y,z)=0$，在 (x_0,y_0,z_0) 处任取一条曲面上的光滑曲线 $(x(t),y(t),z(t))$，则 $\frac{\partial F_1(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x}x'(t_0)+\frac{\partial F_1(\boldsymbol{x}_0)}{\partial y}y'(t_0)+\frac{\partial F_1(\boldsymbol{x}_0)}{\partial z}z'(t_0)=0$，因此可以推出切面方程为 $\frac{\partial F_1(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial F_1(\boldsymbol{x}_0)}{\partial y}(y-y_0)+\frac{\partial F_1(\boldsymbol{x}_0)}{\partial z}(z-z_0)=0$，于是直线 $\frac{x-x_0}{F'_x(\boldsymbol{x}_0)}=\frac{y-y_0}{F'_y(\boldsymbol{x}_0)}=\frac{z-z_0}{F'_z(\boldsymbol{x}_0)}$ 为法线方程。反之如果平面由参数方程 $x=x(u,v),y=y(u,v),z=z(u,v)$ 定义，对于平面上的曲线 $x=x(u_0,v),y=y(u_0,v),z=z(u_0,v)$，切向量为 $\frac{\partial(x_0,y_0,z_0)^T}{\partial u}=(x'_u(u_0,v_0),y'_u(u_0,v_0),z'_u(u_0,v_0))$，同理可知，法向量为 $\boldsymbol{n}=\frac{\partial(x_0,y_0,z_0)^T}{\partial u}\times\frac{\partial(x_0,y_0,z_0)^T}{\partial v}=A\boldsymbol{i}+B\boldsymbol{j}+C\boldsymbol{k}$，立刻得到法线方程和切平面方程。

设 D 是一个凸域，$f(\boldsymbol{x})$ 在 D 内有定义，如果 $\forall\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{x}_1\in D$，$\forall t\in(0,1)$，有 $f(t\boldsymbol{x}_1+(1-t)\boldsymbol{x}_2)\le tf(\boldsymbol{x}_1)+(1-t)f(\boldsymbol{x}_2)$，则称 f 在 D 内是**凸函数**，如果成立严格不等式则是**严格凸函数**。

定理：如果 $f(\boldsymbol{x})$ 在 D 内有二阶连续偏导数，则 f 凸与下面两条均等价：

1. $\forall\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{x}$，成立 $f(\boldsymbol{x})\ge f(\boldsymbol{x}_0)+f'(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)$。
2. $\forall\boldsymbol{x}_0$，$\boldsymbol{H}_f(\boldsymbol{x}_0)$ 半正定。

> $f(\boldsymbol{x}_0+t\Delta\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{x}_0)+tf'(\boldsymbol{x}_0)\Delta\boldsymbol{x}+\frac{t^2}{2}\Delta\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{H}_f(\boldsymbol{x}_0)\Delta\boldsymbol{x}+o(|t\Delta\boldsymbol{x}|^2)\qquad(*)$
> 由凸，$f(\boldsymbol{x}_0+t\Delta\boldsymbol{x})\le tf(\boldsymbol{x}_0+\Delta\boldsymbol{x})+(1-t)f(\boldsymbol{x}_0)$，带入 $(*)$ 的一阶形式则 1 得证。反过来，$tf(\boldsymbol{x}_1)+(1-t)f(\boldsymbol{x}_2)\ge f(\boldsymbol{x}_0)+f'(\boldsymbol{x}_0)(t(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0)+(1-t)(\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_0))$，令 $\boldsymbol{x}_0=t\boldsymbol{x}_1+(1-t)\boldsymbol{x}_2$ 则得到凸的定义式。
> 把 1 和 $(*)$ 联立，令 $t\to 0$ 立刻得到 2。而 2 结合 $(*)$ 自然说明 1。