随机算法 Spring 2025

Lecture 1 - 2025 / 2 / 17

Checking Matrix Multiplication

输入：三个 $n \times n$ 矩阵 A, B, C。

输出：是否 $AB = C$。

随机选定向量 $r = (r_1, r_2, \cdots, r_n)$，其中 r_i 独立同分布于 $U(S)$，$2 \le |S| < |\mathbb{N}|$

如果 $(AB)r \ne Cr$ 则输出 `No`，否则输出 `Yes`。

确定算法 $O(n^3)$，或者最优秀的是 $O(n^{2.376})$。

算法时间复杂度 $O(n^2)$。

Claim: 如果 $AB \ne C$，则 $\Pr[(AB)r = Cr] \le \dfrac{1}{|S|}$。

> 设 $D = AB - C \ne 0$，则不失一般性设 $d_{11} \ne 0$。
>
> 如果 $Dr = 0$，则 $(Dr)_1 = \sum_{i=1}^{n} d_{1i} r_i = 0$
>
> 于是 $r_1 = -\dfrac{1}{d_{11}}(d_{12}r_2 + \cdots + d_{1n}r_n)$
>
> 于是对于 $r_2, \cdots, r_n$ 的每种选择，r_1 只有唯一的可能性有可能使 $Dr = 0$，于是 $\Pr[Dr = 0] \le \dfrac{1}{|S|}$
> 。

Checking Associativity

输入：在一个大小为 n 的集合 X 上定义二元运算 $\circ$。

输出：是否满足结合律 $\forall i, j, k \in X, i \circ (j \circ k) = (i \circ j) \circ k$。

确定性算法 $O(n^3)$。

不妨规定 $X = \{1, 2, \cdots, n\}$。

首先可以构造一种 $\circ$ 使得不满足条件的三元组是常数组。

> 事实上，构造 $1 \circ 2 = 1$，其余运算结果全部为 3，则只有 $(1 \circ 2) \circ 2 \neq 1 \circ (2 \circ 2)$。

记 $\mathcal{X} = 2^X$，对于 $R \in \mathcal{X}$，可以用 $R = r_1 r_2 \cdots r_n$ 表示，其中 $r_i \in \mathbb{F}_2$ 表示 i 有没有在 R 中出现。

从而 R 可以写成 $\sum\limits_{i=1}^{n} r_i \cdot i$。

我们在 $\mathcal{X}$ 上定义一种 $+$ 运算，并扩展 $\circ$ 运算

$$
R + S = \sum_{i=1}^{n} (r_i + s_i) \cdot i
$$
$$
R \circ S = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (r_i s_j) \cdot (i \circ j)
$$

我们将算法规定为：

均匀随机选择 $R, S, T \in \mathcal{X}$，如果 $(R \circ S) \circ T \neq R \circ (S \circ T)$ 输出 `No`，否则输出 `Yes`。

可以看出 $\circ$ 在 X 上是结合的，等价于 $\circ$ 在 $\mathcal{X}$ 上是结合的。

> $\Rightarrow$ 可以通过展开得到，$\Leftarrow$ 是因为单元素集 $\in \mathcal{X}$。

Claim: 如果 $\circ$ 不结合，那么 $\Pr[(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)] \leq \dfrac{7}{8}$。

> 假设存在 i^*, j^*, k^* 不结合。
>
> 任取一组 R_0, S_0, T_0 使得 $i^* \notin R_0, j^* \notin S_0, k^* \notin T_0$。
>
> 令 $R_1 = R_0 \cup \{i^*\}, S_1 = S_0 \cup \{j^*\}, T_1 = T_0 \cup \{k^*\}$。
>
> 则设 $f(\alpha, \beta, \gamma) = (\alpha \circ \beta) \circ \gamma + \alpha \circ (\beta \circ \gamma)$。
>
> 不结合即 $f(\{i^*\}, \{j^*\}, \{k^*\}) \neq \varnothing$。
>
> 根据容斥原理
>
> $$
> f(\{i^*\}, \{j^*\}, \{k^*\}) = \sum_{r,s,t \in \{0,1\}} f(R_r, S_s, T_t) \neq \varnothing
> $$
>
> 从而 $\exists r, s, t \in \{0, 1\}$ 使得 $f(R_r, S_s, T_t) \neq \varnothing$。
>
> 由于这样的 (R_0, S_0, T_0) 以及衍生出的 8 个集合构成了 $\mathcal{X}^3$ 的一个划分，所以一定有 $\frac{1}{8}$ 的 $\mathcal{X}$ 的三元组是不满足结合律的。

Testing Polynomial Identities

给定某个域下 2 个 n 元多项式 P, Q，判定是否 $P \equiv Q$。

作差后问题等价于判定 $P \equiv 0$ 是否成立。

我们在有限集 $|S|$ 上均匀随机采样 $r_1, \cdots, r_n$，并带入 P 计算。

Claim: 如果 $P \neq 0$，则 $\Pr[P(r_1, \cdots, r_n) = 0] \leq \dfrac{d}{|S|}$，其中 $d = \deg P$。

> 对于 n 归纳。$n = 1$ 时显然至多 d 个根，结论成立。
>
> 设 k 是 P 关于 x_1 的最大度数。
>
> $$P(x_1, \cdots, x_n) = M(x_2, \cdots, x_n)x_1^k + N(x_1, \cdots, x_n)$$
>
> 其中 $\deg M \leq d - k$，N 中 x_1 的度数 $< k$。
>
> 设 $\mathcal{E}$ 表示 $M(r_2, \cdots, r_n) = 0$。
>
> 1. 如果 $\mathcal{E}$ 发生，则对 M 由归纳，$\Pr[\mathcal{E}] \leq \dfrac{d-k}{|S|}$。
> 2. 如果 $\mathcal{E}$ 不发生，则当固定 $r_2, \cdots, r_n$ 时，P 是关于 x_1 的 k 次多项式，从而能使 $P = 0$ 的 x_1 不超过 k 个，于是 $\Pr[P(r_1, \cdots, r_n) = 0 \mid \neg\mathcal{E}] \leq \dfrac{k}{|S|}$。
>
> 根据 union bound 立刻得证。

Lecture 2 - 2025 / 2 / 20

Bipartite Matching

给定一个二分图 $G = (V_1, V_2, E)$，且 $|V_1| = |V_2| = n$，求 G 是否包含一个完美匹配?

Definition (Tutte matrix): 二分图 G 的 Tutte 矩阵定义为 $n \times n$ 矩阵 $A_G = [a_{ij}]$，其中如果 $(i, j) \in G$ 那么 $a_{ij} = x_{ij}$ 为一个变量，否则 $a_{ij} = 0$。

Claim: G 包含完美匹配当且仅当 $|A_G| \neq 0$。

> 由行列式定义
>
> $$|A_G| = \sum_{\sigma} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)}$$
>
> G 包含完美匹配，也就是存在排列 σ 使得 $\forall 1 \leq i \leq n, a_{i\sigma(i)} \neq 0$。换言之 $\prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)} \neq 0$。
>
> 根据 Tutte 矩阵的定义，每个 σ 对应的乘积包含的变量均不相同，因此只要有一项非 0，就有 $|A_G| \neq 0$。反之亦然。

小知识：$n \times n$ 矩阵的行列式可以通过并行算法，在 $O(n^{3.5})$ 个处理器上用 $O(\log^2 n)$ 的时间计算。

那么利用 Lecture 1 判定多项式是否为 0 的方法即可。

对于一般图?

Finding a Perfect Matching in Parallel

Lemma (Isolation Lemma): 设 $S_1, S_2, \cdots, S_k \subseteq S$，给 S 中的每个元素均匀随机赋值 $\{1, 2, \cdots, l\}$，则

$$\Pr[\exists \text{unique } S_i \text{ of minimal sum of weights}] \geq \left(\frac{l-1}{l}\right)^{|S|} \geq 1 - \frac{|S|}{l}$$

> 我们可以不妨设集合是没有包含关系的。
>
> 我们记所有赋值方法 $w = \{w_x \mid x \in S\}$ 构成的集合为 $\mathcal{W}$，如果 $\forall x, w_x > 1$，那么这样的赋值方法构成的集合为 $\mathcal{W}^+$。
>
> 易知 $|\mathcal{W}| = l^{|S|}$。
>
> 接下来我们构造一个从 $\mathcal{W}^+$ 到“最小集合唯一的赋值方式”的单射。
>
> 对于 $w \in \mathcal{W}^+$，我们任取一个此时的最小集合 S_*，构造 w' 为
>
> $$w'_x = \begin{cases} w_x - 1 & (x \in S_*) \\ w_x & (x \notin S_*) \end{cases}$$
>
> 此时 w' 是一个有唯一最小集合（S_*）的赋值方式。
>
> 而且对于 w'，可以通过取出唯一最小集合 $+1$ 返回得到 w，因此该映射为单射。从而“最小集合唯一的赋值方式”不少于 $|\mathcal{W}^+| = (l-1)^{|S|}$ 种。
>
> 由于 $\dfrac{|\mathcal{W}^+|}{|\mathcal{W}|} = \dfrac{(l-1)^{|\mathcal{S}|}}{l^{|\mathcal{S}|}}$，立刻得证。

于是我们给每条边 e 随机赋值 $w_e \in \{1, 2, \cdots, l\}$，根据 Isolation Lemma 有很大把握认为最小权完美匹配是唯一的。假设确实唯一。

从而我们令 $x_{ij} = 2^{w_{(i,j)}}$，称带入值之后的为矩阵 B，则当 $|A_G| \neq 0$ 即完美匹配存在时：

$$\text{lowbit}(|B|) = 2^{\text{minimal weights perfect match}}$$

求出一个完美匹配的并行算法：

首先计算 $2^w = \text{lowbit}(|B|)$。

然后并行的对于每条边 (i, j)，如果

$$2^{w_{(i,j)}} \times \text{lowbit}(|B_{ij}|) = 2^w$$

那么输出 (i,j)。上式 B_{ij} 表示余子式。

对于一般图?

Fingerprinting

给定 n-bit 数 a 和 b，判断是否相等。

假设这两个数可以快速取模，那么我们在不超过 T 的素数中，随机一个素数 p。

由于 $|a-b|$ 的素因子个数不超过 $\log_2|a-b| \le n$ 个，因此 $a \equiv b \pmod p$ 的概率不超过 $\dfrac{n}{\pi(T)}$。

Theorem (Prime Number Theorem): 用 $\pi(x)$ 表示 $\le x$ 的素数的个数，

$$\forall x \ge 17, \quad \frac{x}{\ln x} \le \pi(x) \le 1.26\frac{x}{\ln(x)}$$

我们随机生成一个不超过 T 的素数，发生错误的概率不超过 $\dfrac{n\ln T}{T}$。

因此取 $T = cn\ln n$，则有错误概率 $\le \dfrac{1}{c} + o(1)$。

更紧的，有结论：n-bit 数的素因子数量不超过 $\pi(n)$，因此取 $T = cn$ 就能达到效果。

Fingerprinting 算法直接应用：Pattern matching。

Lecture 3 - 2025 / 2 / 24

Primality Testing

费马素数测试：随机选择 $a \in \{1,2,\cdots,n-1\}$，如果 $\gcd(a,n) \ne 1$ 直接输出 n 不是素数，否则如果 $a^{p-1} \equiv 1 \pmod n$，则输出 `Yes` ，否则为 `No` 。

Definition (Carmichael number): 对于所有 $1 \le a < n$，都有 $a^{p-1} \equiv 1 \pmod n$，则 n 为 Carmichael 数。

Theorem: 如果 n 是合数且不是 Carmichael 数，则 $\Pr[\text{Error in Fermat test}] \le \dfrac{1}{2}$。

> 后文称 $G = \{a \mid (a,n) = 1\} = \mathbb{Z}_n^*$。
>
> 令 $H = \{a \in G \mid a^{n-1} \equiv 1 \pmod n\}$，显然有 $H \lneq G$，从而根据拉格朗日定理，$\Pr[\text{Error in Fermat test}] \le \dfrac{|H|}{|G|} \le \dfrac{1}{2}$。

现在考虑 Carmichael 数，首先我们处理掉 $n = p^k$ 的情况。

Claim: 可以在 $O(\log^2 n)$ 的时间内，判断一个数是不是 p^k。

> 首先 $k < O(\log n)$，所以每次二分 p 即可。

Lemma: 对于素数 p，一定不存在 $x \not\equiv \pm 1 \pmod p$，$x^2 \equiv 1 \pmod p$。

> $(x-1)(x+1) \equiv 0 \pmod p$

我们试图通过寻找非平凡 1 的平方根的方式来判定素数。

记 $n-1 = 2^w O$。随机选择 $a \in G$。

- 首先根据 Carmichael，$a^{2^w O} \equiv 1 \pmod n$。
- 计算 $a^{2^{w-1} O} \bmod n$，如果是 -1，输出 `Yes` ，如果是 1，继续；否则输出 `No` 。
- 计算 $a^{2^{w-2} O} \bmod n$，如果是 -1，输出 `Yes` ，如果是 1，继续；否则输出 `No` 。
- ……
- 如果 $a^O \equiv 1 \pmod n$ 依然成立，输出 `Yes` 。

显然素数一定能通过这个测试。对于合数，如果 a 能够成功淘汰它，则称 a 为一个 witness。

Claim: 对于存在两个不同素因子 p_1, p_2 的合数 n，$\Pr[a \text{ is a non-witness}] \le \dfrac{1}{2}$。

> 第一步构造一个包含所有 non-witness 的 G 的子群。
>
> 记 $s^* \in \{O, 2O, \cdots, 2^w O\}$ 为最大的满足，$\exists x \in G, x^{s^*} \equiv -1 \pmod n$ 的数。
>
> s^* 一定是良定义的，因为 $(-1)^O \equiv -1 \pmod n$。
>
> 构造 $H = \{a \in G \mid a^{s^*} \equiv \pm 1 \pmod n\} \le G$。易见所有 non-witness 都包含于 H。下面说明 $H \lneq G$，即可由拉格朗日定理得到 $\Pr[a \text{ is a non-witness}] \le \dfrac{|H|}{|G|} = \dfrac{1}{2}$。
>
> 考虑中国剩余定理，取出一个 $(x^*)^{s^*} \equiv -1 \pmod n$，我们构造满足如下方程的 $a \in G$。
>
> $$\begin{cases} a \equiv x^* \pmod{p_1^{k_1}} \\ a \equiv 1 \pmod{p_2^{k_2}} \end{cases}$$
>
> 由于 $a \notin H, a \in G$，从而 H 是真子群，原命题得证。

Probabilistic Method

Theorem (Ramsey): 对于 $n \le 2^{k/2}$ 个点的图，存在而染色方案，使得任意 k 完全子图都不是同色的。

Theorem (Max Cut): 对于图 $G = (V, E)$，存在一个割的大小 $\ge \dfrac{|E|}{2}$。

Independent Set

Claim: 对于图 $G=(V,E)$，存在独立集大小 $\ge \sum_v \frac{1}{\deg(v)+1}$。

> 随机对点赋实数值，如果一个点是自己和邻居的最小值，就将其选入独立集。
>
> 可以看出不会选到相邻的点。v 被选入的概率是 $\frac{1}{\deg(v)+1}$，从而期望即右式。

Crossing Number

Definition (crossing number): 把 $G=(V,E)$ 嵌入平面，交叉数 $c(G)$ 为最少的边的交点数量。

Theorem (Euler's formula): 对于平面图，$|V|+|R|=|E|+2$。同时 $|R|\ge\frac{2|E|}{3}$ 从而 $|E|\le 3|V|-6$ 。

Claim: $c(G)\ge|E|-3|V|+6$

> 容易验证，最佳的嵌入方式满足：
>
> - 边不自交
> - 两条边至多一个交点
> - 有公共点的边不交
>
> 于是，对于原图每一组相交的 $(a,b),(c,d)$，构造新的点 v，断开原来的边并将 $(a,v),(b,v),(c,v),(d,v)$ 连边。
>
> 新图为平面图，$|E'|=|E|+2c(G)$，$|V'|=|V|+c(G)$，从而
>
> $$|E|+2c(G)\le 3|V|+3c(G)-6\Rightarrow c(G)\ge|E|-3|V|+6$$

用概率方法加强这个结论。我们以 p 的概率保留一个点，$1-p$ 的概率把点删去。

从而每条边有 p^2 的概率保留下来，每个原来的交点有 p^4 的概率被保留下来。

从而

$$p^4c(G)\ge\mathbb{E}[c(G)]\ge\mathbb{E}[|E|-3|V|+6]=p^2|E|-3p|V|+6$$

$$c(G)\ge\frac{p^2|E|-3p|V|+6}{p^4}\ge\frac{p|E|-3|V|}{p^3}$$

Claim: 对任何 $|E|\ge 4|V|$ 的图 G，有 $c(G)\ge\frac{|E|^3}{64|V|^2}$。

> 取 $p=\frac{4|V|}{|E|}$ 即可。

Lecture 4 - 2025 / 2 / 27

Unbalancing Lights

对于 $n \times n$ 的灯泡矩阵，每行、每列各有一个开关，作用是翻转完整的一行、一列。

现在对于一个初始状态，试图通过操作开关最大化亮灯数。

Claim: 对于每一种初始状态，存在操作方式使亮灯数量当 $n \to \infty$ 时渐进

$$\frac{n^2}{2} + \sqrt{\frac{1}{2\pi}} n^{3/2}$$

> 首先均匀随机操作每一列的开关。用 $X_{ij} = \pm 1$ 表示 (i, j) 位置的灯是否亮。
>
> 对于第 i 行，用 $Z_i = \sum_j X_{ij}$，由于 $X_{i1}, \cdots, X_{in}$ 在 $\{1, -1\}$ 中均匀随机，因此由随机游走结论：
>
> $$\mathbb{E}[|Z_i|] \sim \sqrt{\frac{2}{\pi} n}$$
>
> 对于每一行的开关，如果操作后亮灯数量增多就操作它。从而根据期望的线性性：
>
> $$\mathbb{E}[\#\text{on} - \#\text{off}] \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} n^{3/2}$$
>
> 从而 $\mathbb{E}[\#\text{on}] \sim \frac{n^2}{2} + \sqrt{\frac{1}{2\pi}} n^{3/2}$。

Large Girth and Chromatic Number

Definition (girth): 一个图 G 的周长为其中最小环的长度。

Definition (chromatic number): 一个图 G 的染色数为同色不相邻染色，最少需要的颜色数。

Theorem: $\forall k, l$，存在一张图的周长 $\geq l$，染色数 $\geq k$。

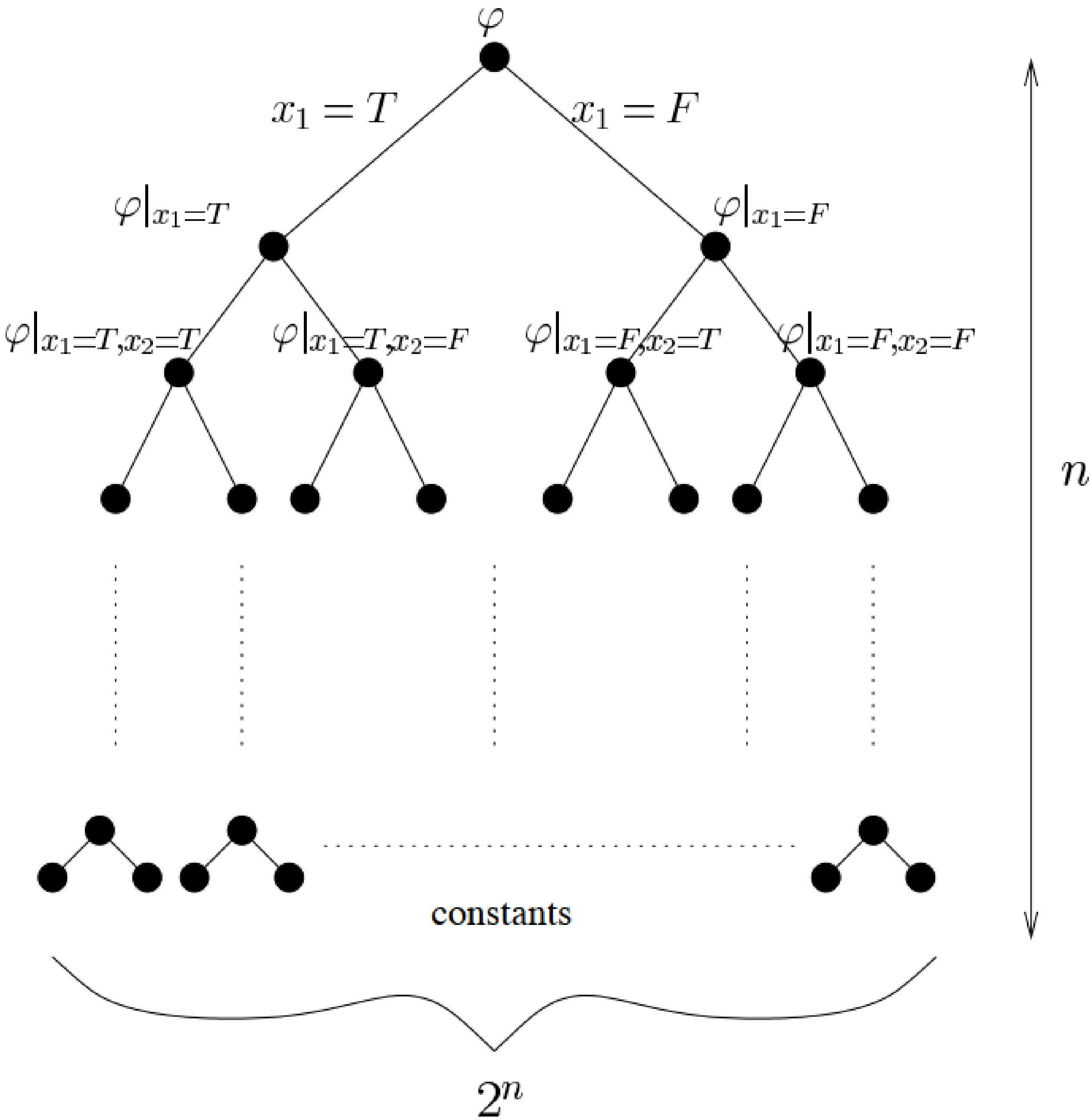
> 取随机图 $G \sim \mathcal{G}_{n,p}$，这里 $p = n^{-1+1/l}$。
>
> 用 X 表示 G 的 $< l$ 的环数量，Y 表示最大独立集的大小。
>
> 首先
>
> $$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=3}^{l-1} \frac{n^i}{2i} p^i \leq \sum_{i=3}^{l-1} \frac{(np)^i}{2i} = \sum_{i=3}^{l-1} \frac{n^{i/l}}{2i} = O(n^{1-1/l}) = o(n)$$
>
> 从而 $\Pr[X \geq \frac{n}{2}] = o(1)$。

> 另一方面，任取 y，
>
> $$\begin{aligned}\Pr[Y \ge y] &\le \binom{n}{y}(1-p)^{\binom{y}{2}} \\ &\le n^y \cdot e^{-p\binom{y}{2}} \le (e^{\ln n - py/4})^y\end{aligned}$$
>
> 取 $y = \dfrac{8\ln n}{p} = 8\ln n \cdot n^{1-1/l} = o(n)$，就有 $\Pr[Y \ge y] \le e^{-\ln n \cdot y} = o(1)$。
>
> 因此，根据 union bound，当 n 足够大，G 有 $\ge \dfrac{1}{2}$ 的概率满足：
>
> - $< l$ 的环的数量不超过 $\dfrac{n}{2}$
> - 最大独立集的大小不超过 $y = o(n)$
>
> 从每个环中删去一个点，剩下的图 G' 周长 $\ge l$，染色数 $\ge \dfrac{n}{y} = \omega(1)$，从而 n 充分大一定可以满足染色数 $\ge k$。

MAX3SAT

记 $\varphi = \{(x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3), \cdots\}$，其中的每一项称为一个 clause。

Claim: 对于任一个 φ，存在一种赋值方法使至少 $\dfrac{7}{8}|\varphi|$ 的 clause 被满足。并且可以高效找出。



> 存在性只需要随机赋值即可证明。
>
> 依次考虑每一个 x_i，由于
>
> $$\frac{7}{8}|\varphi| = \mathbb{E}[\varphi] = \Pr[x_1 = T] \cdot \mathbb{E}[\varphi|x_1 = T] + \Pr[x_1 = F] \cdot \mathbb{E}[\varphi|x_1 = F]$$
>
> 从而一定能有一种条件期望 $\geq \frac{7}{8}|\varphi|$，递归下去寻找即可。

这种方法叫做 **Method of conditional probabilities**。

4-Cliques / Triangles

Definition (threshold): 称 $p(n)$ 是性质 Q 的 threshold，当且仅当：

$$\begin{aligned} p \gg p(n) &\implies \Pr[G \in \mathcal{G}_{n,p} \text{ has } Q] \to 1 \text{ as } n \to \infty \\ p \ll p(n) &\implies \Pr[G \in \mathcal{G}_{n,p} \text{ has } Q] \to 0 \text{ as } n \to \infty \end{aligned}$$

对于图 $G \sim \mathcal{G}_{n,p}$，设 X 为其中的 4-Clique 的个数，$X_C = 0/1$ 代表 C 是不是 4-Clique。

$$\mathbb{E}[X] = \binom{n}{4} p^6 = \Theta(n^4 p^6)$$

Theorem: $p(n) = n^{-2/3}$ 是包含 4-Clique 的 threshold。

> 首先 $p \ll p(n)$ 时，由于 $\mathbb{E}[X] \to 0$，因此 $\Pr[X \geq 1] \leq \mathbb{E}[X] \to 0$。
>
> 当 $p \gg p(n)$ 时，$\Pr[X = 0] \leq \Pr[|X - \mathbb{E}[X]| \geq \mathbb{E}[X]] \leq \dfrac{\mathrm{Var}[X]}{\mathbb{E}[X]^2}$。
>
> 由于
>
> $$\begin{aligned} \mathrm{Var}[X] &= \sum_C \mathrm{Var}[X_C] + \sum_{C,D} \mathrm{Cov}[X_C, X_D] \\ &\leq \Theta(n^4 p^6) + \binom{n}{6}\binom{6}{2} p^{11} + \binom{n}{5}\binom{5}{3} p^9 \\ &= \Theta(n^4 p^6) + \Theta(n^6 p^{11}) + \Theta(n^5 p^9) \end{aligned}$$
>
> 从而 $\dfrac{\mathrm{Var}[X]}{\mathbb{E}[X]^2} = \Theta(n^{-4}p^{-6}) + \Theta(n^{-2}p^{-1}) + \Theta(n^{-3}p^{-3}) \to 0$。

该方法不适用于密集程度“不均匀”的图。

Lecture 5 - 2025 / 3 / 3

Monotone circuits for the majority function

Definition (Boolean circuit): $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$，通过门进行计算，每个门即 $\{0,1\}^2 \to \{0,1\}$ 的函数（共 16 种门）。

Claim: 几乎所有 n 个输入的 Boolean function 需要 $\Omega(2^n/n)$ 个门（包括输入门）。

> 首先 n 个输入的 Boolean function 有 2^{2^n} 种。
>
> 考虑 S 个门能够表达多少种 Boolean function。首先每个门可以选择 S^2 种输入，以及自身有 16 种计算方法，故函数数量不超过 $(16S^2)^S$。

> 将 S 用 $\frac{2^n}{16n}$ 带入，由于
>
> $$S\ln(16S^2) = \frac{2^n}{16n}\ln\left(16\cdot\frac{4^n}{16^2n^2}\right) = \frac{2^n}{16n}(-\ln 16 + n\ln 4 - 2\ln n)$$
> $$= 2^n\frac{\ln 2}{8} + \cdots$$
>
> 另一方面 $\ln 2^{2^n} = 2^n\ln 2$，因此 $S < \frac{2^n}{16n}$ 时，$\lim_{n\to\infty}\frac{(16S^2)^S}{2^{2^n}} = 0$。

Definition (monotone circuits): 一个电路是单调的，当且仅当它的所有门都是单调函数，即：

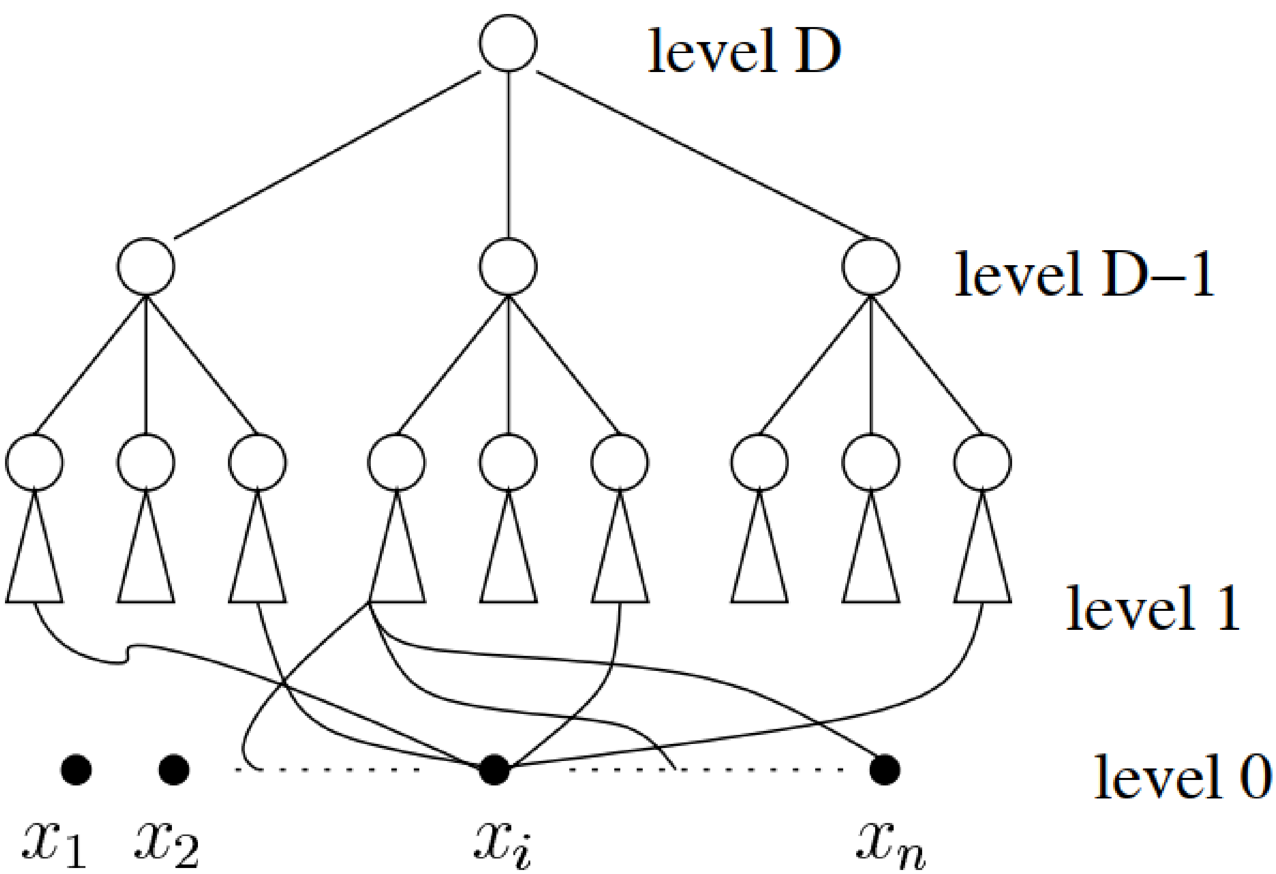
$$f(x_1,\cdots,x_n) = 1, \forall i, y_i \geq x_i \Rightarrow f(y_1,\cdots,y_n) = 1$$

现在考虑众数函数 $\mathrm{Maj}_n(x_1,\cdots,x_n)$，试图找到一个单调电路来实现它。

一个最优的实现 Maj_3 的电路为（因为只用到了单调的 $\wedge,\vee$，故这个电路也是单调的）：

$$(x_1\wedge(x_2\vee x_3))\vee(x_2\wedge x_3)$$

Theorem: 存在一个单调电路计算 Maj_n，n 为奇数，门的数量是 $\mathrm{poly}(n)$，深度是 $O(\log n)$。



> 考虑一个随机电路 C，包含 $D = O(\log n)$ 层的 Maj_3，底层每个 Maj_3 随机从 $x_1,\cdots,x_n$ 中选择 3 个输入。

> 不妨设众数为 1，那么底层每个门输入 1 的概率至少为 $p_0=\dfrac{n+1}{2n}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2n}$。
>
> 如果一个 Maj_3 的每个输入有 p 的概率为 1，那么其输出为 1 的概率为
>
> $$f(p)=p^3+3p^2(1-p)=3p^2-2p^3$$
>
> 考虑迭代过程 $p_1=f(p_0),p_2=f(p_1),\cdots$，目标为证明在 $O(\log n)$ 次迭代后，$p\ge 1-2^{-(n+1)}$，从而根据 union bound，$\Pr[\exists \boldsymbol{x},C(\boldsymbol{x})\neq \mathrm{Maj}_n(\boldsymbol{x})]\le 2^n\cdot 2^{-(n+1)}=\dfrac{1}{2}$，根据概率方法立刻得证。
>
> 1. 第一阶段，$\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2n}\le p_t\le\dfrac{3}{4}$，由于步长增大，计算得
>
> $$\left(p_{t+1}-\frac{1}{2}\right)\ge\frac{11}{8}\left(p_t-\frac{1}{2}\right)$$
>
>   故在 $O(\log n)$ 步内，p_t 可以达到 $\dfrac{3}{4}$。
> 2. 第二阶段：$p_t\ge\dfrac{3}{4}$，设第一次达到这个要求为 p_{t_0}，则：
>
> $$(1-p_{t+1})\le 3(1-p_t)^2\le 3(1-p_{t_0})^{2^{t+1-t_0}}\le\frac{3}{4^{2^{t+1-t_0}}}$$
>
>   故在 $O(\log n)$ 步内，p_t 可以达到 $1-\dfrac{1}{2^{n+1}}$。
>
> 从而总共只需 $D=O(\log n)$ 次迭代即可。

Lecture 6 - 2025 / 3 / 6

Probability amplification using pairwise independence

Claim: 随机变量 $a,b\sim U(\mathbb{Z}_q)$，q 是质数，则

$$\{ax+b\mid x\in\mathbb{Z}_q\}$$

是一组两两独立的随机变量，且同分布于 $U(\mathbb{Z}_q)$。

> 首先 $\forall x,c\in\mathbb{Z}_q,\Pr[ax+b=c]=\dfrac{1}{q}$，故 $ax+b\sim U(\mathbb{Z}_q)$。
>
> 考虑 $\forall x,y,c_1,c_2\in\mathbb{Z}_q,x\neq y$，则 $\Pr[ax+b=c_1,ay+b=c_2]=\dfrac{1}{q^2}=\Pr[ax+b=c_1]\Pr[ay+b=c_2]$。（因为关于 a,b 的方程有唯一解）从而两两独立。

假设现在已有一个随机算法 A，依赖 m 个随机 bits，用来判断 $x\in L\subseteq\{0,1\}^n$ 是否成立。而且满足：

$$
\begin{aligned}
x \in L &\Rightarrow \Pr[A \text{ output Yes}] \geq \frac{1}{2} \\
x \notin L &\Rightarrow \Pr[A \text{ output Yes}] = 0
\end{aligned}
$$

现在试图将这个算法泛化到任何正确性。如果独立重复 t 次，可以做到 $\Pr[\mathcal{E}] \leq 2^{-t}$，从而如果需要达到 $\frac{1}{r}$ 的正确率，则需要生成 $m \log r$ 个随机 bits。

Theorem: 对于 $r \leq 2^m$，可以只生成 $2m$ 随机 bits，在 $O(rm)$ 的时间复杂度内达到 $\Pr[\mathcal{E}] \leq 2^{-t}$ 的效果。

> 考虑生成 r 组两两独立的长度为 m 的随机 bits。形式化的说，每组随机 bits 可以看作从 $U(\{0,1\}^m) \cong U(\mathbb{Z}_{2^m})$ 采样的随机变量，这 r 个随机变量两两独立。一个不太完美的做法可以利用上面 **Claim** 的算法，取质数 $2^m \leq q \leq 2^{m+1}$，通过 rejection sampling 可以通过生成期望 $O(m)$ 个随机 bits 得到 $U(\{0,1\}^m)$ 中 r 组两两独立的比特串。
>
> 然后运行算法 A r 次。用 $X_i = 0/1$ 代表第 i 次 A 的输出，输出 Yes 时 $X_i = 1$。定义 $X = \sum_{i=1}^r X_i$。
>
> 当 $x \in L$ 时，发生错误的概率为
>
> $$\Pr[\mathcal{E}] = \Pr[X = 0] \leq \Pr[|X - \mathbb{E}[X]| \geq \mathbb{E}[X]] \leq \frac{\mathrm{Var}[X]}{\mathbb{E}[X]^2}$$
>
> 其中由于两两独立，$\mathrm{Var}[X] = \sum_{i=1}^r \mathrm{Var}[X_i] \leq \frac{r}{4}, \mathbb{E}[X] \geq \frac{r}{2}$，从而 $\Pr[\mathcal{E}] \leq \frac{1}{r}$。

Derandomization using k-wise independence

考虑给一张完全图 K_n 的边二染色，要求没有同色 k-clique，这里 $n = 2^{k/2}$，根据之前的概率方法，染色方案是存在的。

如果要求出一种方案，一种暴力的策略是枚举 $2^{\binom{n}{2}}$ 种染色方案。

回顾概率证法，设 X 为同色 k-clique 数量，

$$\mathbb{E}[X] = \binom{n}{k} \frac{2}{2^{\binom{k}{2}}} < 1$$

这里其实并不要求所有边的染色全部独立。事实上，只要每 $\binom{k}{2}$ 条边的染色是相互独立的即可。

考虑一族 $\binom{k}{2}$-wise 独立的染色方案，其中每条边的颜色边际分布是均匀的。根据上述概率证法，$\mathbb{E}[X]$ 不变，从而这族染色方案中一定存在一个合法方案。

推广 **Claim** 到 $ax^2 + bx + c$，不难看出，要生成服从 $U(\mathbb{Z}_q)$ 的 $\binom{k}{2}$-wise 独立的随机变量，只需要采样 $\binom{k}{2}$ 个服从 $U(\mathbb{Z}_q)$ 的变量。这里需要 $q \geq \binom{n}{2}$，以保证能够生成足够数量的随机变量。

从而我们枚举 $q^{\binom{k}{2}}$ 种采样的可能性，然后通过固定的解码策略得到唯一对应的 $\binom{k}{2}$-wise 独立的边染色方案。在这族方案上，$\mathbb{E}[X] < 1$，从而其中必有可行解。

由于 $q^{\binom{k}{2}} \simeq n^{O(k^2)}$，相较于暴力做法 $2^{O(n)}$，我们将复杂度降到了多项式级别。

Universal hashing

Definition (2-universal): 一个 $U \to T$ 的函数集 $\mathfrak{H}$ 是 2-universal 的当且仅当 $\forall x, y \in U, x \neq y$，有

$$\Pr_{h\in\mathfrak{H}}[h(x) = h(y)] \leq \frac{1}{|T|}$$

例如，$h_{a,b}(x) = (ax + b) \bmod q \bmod |T|$，其中 $a, b \sim U(\mathbb{Z}_q), q > |U|$。

> $$\begin{aligned}\Pr[h_{a,b}(x) = h_{a,b}(y)] &\leq \sum_{c_1 \equiv c_2 \pmod{|T|}} \Pr[h_{a,b}(x) = c_1] \Pr[h_{a,b}(y) = c_2] \\ &= \frac{q^2}{|T|} \cdot \frac{1}{q} \cdot \frac{1}{q} = \frac{1}{|T|} \qquad \forall x \neq y\end{aligned}$$

Lecture 7 - 2025 / 3 / 10

Double hashing

Claim: 对于一组 2-universal hashing 把 $S \subseteq U$ 的元素投影到 T，且 $|T| = |S|^2$，则存在碰撞的概率 $\leq \dfrac{1}{2}$。

> $$\mathbb{E}[\text{collision}] \leq \binom{|S|}{2} \frac{1}{|T|} \leq \frac{1}{2}$$

当然哈希表大小为 $O(|S|^2)$ 还是过大，希望能压缩到 $O(|S|)$。

Claim: 对于一组 2-universal hashing 把 $S \subseteq U$ 的元素投影到 T，且 $|T| = |S|$。设有 b_i 个元素 $h(x) = i$，则 $\Pr\left[\sum_{i=1}^{|S|} b_i^2 \geq 4|S|\right] \leq \dfrac{1}{2}$。

> 首先注意到：
>
> $$\mathbb{E}[\text{collision}] = \sum_{i=1}^{|S|} \binom{b_i}{2} = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{|S|} b_i^2 - |S|\right)$$
>
> 另一方面 $\mathbb{E}[\text{collision}] = \binom{|S|}{2} \dfrac{1}{|T|} \leq \dfrac{|S|}{2}$，从而 $\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{|S|} b_i^2\right] \leq 2|S|$。

> 从而由 Markov 不等式立刻得证。

从而可以通过第一次 hash 将值域映射到 $|S|$，对于有 b_i 个冲突的组，再进行一次 hash 将值域映射到 b_i^2。从而我们可以在期望 $O(S)$ 次抽取哈希函数，构造一个值域为 $O(S)$ 的无冲突 hash。

Buffon's needle

平面上一组两两距离为 1 的平行线，现在随机投掷（中心点均匀随机、角度均匀随机）一根长度为 1 的针，那么针与线相交的概率是多少?

$$\frac{2}{\pi}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{d=0}^{1/2\sin\theta}1\mathrm{d}d\mathrm{d}\theta=\frac{1}{\pi}\int_{\theta=0}^{\pi}\sin\theta\mathrm{d}\theta=\frac{2}{\pi}$$

Median trick

Theorem (Unbiased Estimator Theorem): 对于两两独立的 $X_1,\cdots,X_t$，期望为 μ，方差为 σ^2，$X=\frac{1}{t}\sum_{i=1}^{t}X_i$，则当 $t\geq\frac{1}{\delta}\cdot\frac{\sigma^2}{\epsilon^2\mu^2}$ 时，

$$\Pr[|X-\mu|\geq\epsilon\mu]\leq\frac{\mathrm{Var}[X]}{\epsilon^2\mu^2}=\frac{\sigma^2}{t\epsilon^2\mu^2}\leq\delta$$

现在所以，达到 δ 的错误率需要通过 $O(\frac{1}{\delta})$ 次采样。现在考虑增加一部分随机性，能否通过 $O(\log\frac{1}{\delta})$ 的样本实现同样的错误率。

Lemma: 对于一枚 $\Pr[\text{Head}]\geq\frac{3}{4}$ 的硬币，在 $2s+1$ 次相互独立投掷中，$\Pr[\#\text{Head}\leq s]\leq(\frac{3}{4})^s$。

> $$\begin{aligned}\Pr[\#\text{Head}\leq s]&\leq\sum_{i=0}^{s}\binom{2s+1}{s}(\frac{3}{4})^i(\frac{1}{4})^{2s+1-i}\\&\leq\left(\sum_{i=0}^{s}\binom{2s+1}{i}\right)(\frac{3}{4})^s(\frac{1}{4})^{s+1}\\&\leq(\frac{3}{4})^s\times\frac{2^{2s+1}}{4^{s+1}}\leq(\frac{3}{4})^s\end{aligned}$$

从而我们组间完全独立、组内两两独立的生成 $2\log_{3/4}\frac{1}{\delta}+1$ 组、每组 $\frac{4\sigma^2}{\epsilon^2\mu^2}$ 个样本。对于每组求平均值、再对所有组求中位数。从而可以在 $O(\log\frac{1}{\delta})$ 次采样实现 δ 的错误率。

Lecture 8 - 2025 / 3 / 13

DNF Counting

Definition (Disjunctive Normal Form): 称形如 $(x_1 \wedge x_2 \wedge \cdots) \vee (\overline{x}_3 \wedge \cdots) \vee \cdots$ 为 DNF。

类似的，CNF 就是常见的 SAT 问题，有 $\#\text{SAT}(\varphi) = 2^n - \#\text{DNF}(\neg\varphi)$。

我们试图设计一个算法在多项式时间内估算 DNF 的解的比例的 FPRAS。

Definition (fully polynomial randomized approximation scheme): 针对 $f : \Sigma^* \to \mathbb{N}$ 的 FPRAS 是一个算法，读入 (x, ε)，在关于 $|x|, \varepsilon^{-1}$ 多项式时间内输出随机变量 Z 满足：

$$\Pr[(1-\varepsilon)f(x) \le Z \le (1+\varepsilon)f(x)] \ge \frac{3}{4}$$

给定 DNF $\varphi_1 \vee \cdots \vee \varphi_n$，共涉及 $x_1, \cdots, x_m$。设第 i 个 term 的解集为 S_i，显然 $S_i = 2^{m-|\varphi_i|}$，目标即为求 $|\bigcup S_i|$。具体而言，构造集合

$$U = \{(a, i) \mid a \in S_i\}$$

从而 $|U| = \sum_{i=1}^{n} |S_i|$。我们可以在 U 中均匀随机采样 (a, i)。我们称一个样本 (a, i) 是 *special* 的，当且仅当 $\forall j < i, a \notin S_j$。换言之，$a$ 最早出现在 S_i 中。

从而

$$\mathbb{E}\left[\frac{\#\text{special}}{\#\text{total}}\right] = \frac{|\bigcup S_i|}{|U|}$$

由于 $\mu \ge \dfrac{1}{n}$，从而由 Unbiased Estimator Theorem，可以有效得到 $\dfrac{3}{4}$ 正确率的 ε 误差估计。实际上根据 Chernoff bound，只需要 $O(n/\varepsilon^2)$ 次独立采样即可。

Network Reliability (1)

对于一张图 G，有 n 个点 m 条边，每条边有 p 的概率割断，记 p_{fail} 为 G 不连通的概率，即“网络鲁棒性”。

Theorem: 存在关于 n, ε^{-1} 多项式时间的 FPRAS 估测 p_{fail}。（对于每条边隔断概率不同的情况，依然存在）

设 c 为最小割的长度。

> 如果 $p^c \ge \dfrac{1}{n^4}$，则直接使用 Monte Carlo 方法，根据 Unbiased Estimator Theorem，由于 $\mu \ge p^c$，可以在 $O(\dfrac{1}{\mu^2\varepsilon^2}) = O(n^8\varepsilon^{-2})$ 次采样中得到估计。**后文假设该性质不成立，即 $p^c = n^{-(4+\delta)}$。**

用 α-最小割 表示大小不超过 αc，且仅将 G 分为两部分的割。

考虑如下算法 $\mathrm{RMinCut}$：均匀随机抽取图中一条边 (u, v)，将两个点缩点（保留重边），直到只剩下 2 个点，返回它们之间所有的边。

Theorem: 设 $C \subset E$ 是任一个最小割，则 $\Pr[\text{RMinCut returns } C] \geq \binom{n}{2}^{-1}$。

> 由于最小割大小为 c，所以任何点的度数都 $\geq c$，也就是 $|E(G)| \geq \dfrac{cn}{2}$。
>
> 从而第 1 轮选中 C 中边的概率 $\leq \dfrac{c}{cn/2} = \dfrac{2}{n}$
>
> 容易看出等价于一直没有选择 C 中的边，而且缩点并不会导致新图最小割变小，从而
>
> $$\begin{aligned}\Pr[C \text{ survive all rounds}] &\geq (1-\frac{2}{n})(1-\frac{2}{n-1})\cdots(1-\frac{2}{3}) \\ &= \frac{2}{n(n-1)}\end{aligned}$$

Corollary: 任意图 G 的最小割的数量不超过 $\binom{n}{2}$，因为 $\mathrm{RMinCut}$ 输出任何一个最小割是互斥事件。

Claim: 只有至多 $n^{2\alpha}$ 个 α-最小割，这些割可以在关于 n, ε^{-1} 的多项式时间内列举出。

> 类似上面的证明方法，对于任意一个 α-最小割 C，有
>
> $$\begin{aligned}\Pr[C \text{ survive until } 2\alpha \text{ vertices remain}] &\geq (1-\frac{2\alpha}{n})\cdots(1-\frac{2\alpha}{2\alpha+1}) \\ &= \binom{n}{2\alpha}^{-1}\end{aligned}$$
>
> 对于剩下 2α 个点的图，任意输出一个割，则
>
> $$\Pr[C \text{ survive}] \geq \binom{n}{2\alpha}^{-1} \frac{1}{2^{2\alpha-1}} \geq \frac{1}{n^{2\alpha}}$$
>
> 最后，根据 coupon-collector，可以在期望 $O(n^{2\alpha} \log n^{2\alpha})$ 次实验内，列举出所有的 α-最小割。

从而，我们对于 $\mathrm{poly}(n)$ 个 α-最小割，可以用加权的 DNF Counting 的方式，估算至少一个发生的概率。具体而言，割掉 x 条边的方案权值为 $p^x(1-p)^{m-x}$，从而一个 term 的总权值为 $p^{|\varphi_i|}$，可以构造

$$\mathbb{E}\left[\frac{\sum_{\text{special }(a,i)} p^{|a|}(1-p)^{m-|a|}}{\sum_{(a,i)} p^{|a|}(1-p)^{m-|a|}}\right] = \frac{\sum_{\text{cut } a} p^{|a|}(1-p)^{m-|a|}}{\sum_{i=1}^{n} p^{|\varphi_i|}}$$

的 $(1 \pm \varepsilon)$ 估计，而右边分子正是我们想求的概率。

Lecture 9 - 2025 / 3 / 17

Network Reliability (2)

接下来，对于 $\geq \alpha c$ 个点的割，我们只需要通过说明

$$\Pr[\text{some cut of size } \geq c\alpha \text{ fails}] \leq \varepsilon p_{\text{fail}}$$

即可。

> 将 $\geq \alpha c$ 个点的割从小到大排序 $c_1 \leq c_2 \leq \cdots$。假设至少有 $n^{2\alpha}$ 个割（如若不然，直接得到总概率不超过 $n^{2\alpha}p^{c\alpha}$），那么前面这部分 fail 的概率不超过
>
> $$n^{2\alpha}p^{c\alpha} \leq n^{2\alpha}n^{-(4+\delta)\alpha} = n^{-(2+\delta)\alpha} \qquad (1)$$
>
> 对于任意 $\beta > 0$，我们知道 $\leq \beta c$ 的割不超过 $n^{2\beta}$ 个，从而 $c_{n^{2\beta}} \geq \beta c$，换言之
>
> $$c_k \geq \frac{c}{2}\log_n k \qquad \Rightarrow \qquad p^{c_k} \leq p^{\frac{c}{2}\log_n k} = k^{-2+\frac{\delta}{2}}$$
>
> 所以
>
> $$\begin{aligned} \Pr[\exists i > n^{2\alpha}, c_i \text{ fails}] &\leq \sum_{i > n^{2\alpha}} k^{-2+\frac{\delta}{2}} \leq \int_{n^{2\alpha}}^{\infty} x^{-2+\frac{\delta}{2}} \mathrm{d}x \\ &= \frac{n^{-2\alpha(1+\frac{\delta}{2})}}{1+\frac{\delta}{2}} \leq n^{-(2+\delta)\alpha} \end{aligned} \qquad (2)$$
>
> 结合 $(1)(2)$，$\Pr[\text{some cut of size } \geq c\alpha \text{ fails}] \leq 2n^{-(2+\delta)\alpha}$。
>
> 取 $\alpha = 2 + \frac{1}{2}\log_n(\frac{2}{\varepsilon})$，立刻得到
>
> $$2n^{-(2+\delta)\alpha} \leq 2n^{-(2+\delta)(2+\frac{1}{2}\log_n(\frac{2}{\varepsilon}))} \leq \varepsilon n^{-(4+\delta)} \leq \varepsilon p_{\text{fail}}$$

综上，直接忽略这些大割，算法可以在 $O(n^{2\alpha}\log n^{2\alpha}) = O(n^4\varepsilon^{-1}(\log n + \log \varepsilon^{-1}))$ 次调用 RMinCut 内，得到关于 p_{fail} 的 $(1 \pm \varepsilon)^2$ 估计。

Chernoff Bounds

Theorem: 让 $X_1, \cdots, X_n$ 为独立 $[0,1]$ 变量 $\mathbb{E}[X_i] = p_i$，$X = \sum_{i=1}^n X_i$，$\mu = \mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^n p_i$，$p = \frac{\mu}{n}$

- $\Pr[X \geq \mu + \lambda] \leq \exp(-nH_p(p + \frac{\lambda}{n}))$，对于 $0 < \lambda < n - \mu$
- $\Pr[X \leq \mu - \lambda] \leq \exp(-nH_{1-p}(1 - p + \frac{\lambda}{n}))$，对于 $0 < \lambda < \mu$

其中 $H_p(x) = x\ln\frac{x}{p} + (1-x)\ln\frac{1-x}{1-p}$ 为 KL 散度。

> 通过矩生成函数证明。

Corollary:

$$\begin{matrix}\Pr[X \le \mu - \lambda] \\ \Pr[X \ge \mu + \lambda]\end{matrix} \le \exp\left(-\frac{2\lambda^2}{n}\right)$$

> 对指数部分求导比较即可。

Corollary:

- 对 $0 < \beta < 1$，$\Pr[X \le (1-\beta)\mu] \le \exp(-\frac{\beta^2\mu}{2})$
- 对 $\beta > 0$，$\Pr[X \ge (1+\beta)\mu] \le \begin{cases}\exp(-\frac{\beta^2\mu}{2+\beta}) & \beta > 0 \\ \exp(-\frac{\beta^2\mu}{3}) & 0 < \beta \le 1\end{cases}$

Corollary: 对于 X_i 在 $[a_i, b_i]$ 中取值时，

$$\begin{matrix}\Pr[X \le \mu - \lambda] \\ \Pr[X \ge \mu + \lambda]\end{matrix} \le \exp\left(-\frac{2\lambda^2}{\sum_{i=1}^n (b_i - a_i)^2}\right)$$

Lecture 10 - 2024 / 3 / 20

Randomized Routing

考虑 n 维超立方体，网格的顶点为 $\{0,1\}^n$，共 $N = 2^n$ 个，每条边双向，令 π 是任意排列，目标是从每个 i 发送一个数据包到对应的 $\pi(i)$，但是同一个条边每个时间只能有 1 个数据包通过。

现在要设计一种路径规划算法，最小化最大传输时间。这里要求 i 的路径只取决于 i 和 $\pi(i)$ 我们称之为 *oblivious*，这是具备现实意义的。

Theorem: 对于任何确定性 oblivious 的路径规划算法，存在一种排列需要 $\Omega(\sqrt{N/n}) = \Omega(\sqrt{2^n/n})$。

Theorem: 存在一种 oblivious 随机路径规划算法，w.h.p 在 $O(n)$ 步停止。

该算法的思路是“随机中转”，即对于每一个 i，等概率采样一个 $\delta(i)$，算法分为两个阶段

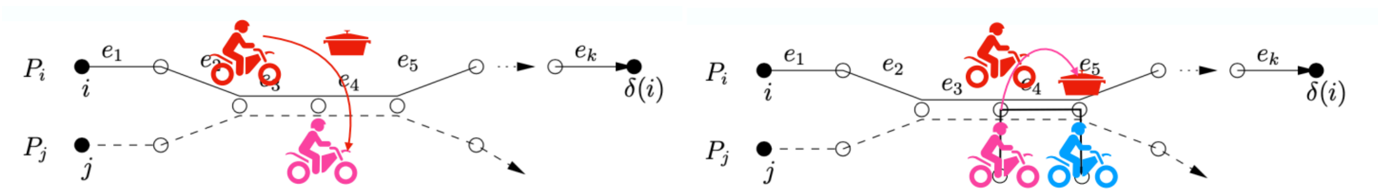
1. 从 $i \to \delta(i)$
2. 从 $\delta(i) \to \pi(i)$

在两个阶段中，都采用 bit-fixing 方式，例如 $x \to y$，就是从左到右逐位比较，如果 $x_i \neq y_i$，那么当前就从对应边前进。

> 不失一般性，我们只分析第 1 阶段的长度。
>
> 用 $D(i)$ 表示 i 在路径中等待的时间长短，那么总时长一定不超过 $n + \max_i D(i)$，我们接下来将证明
>
> $$\forall i, \Pr[D(i) > cn] \leq e^{-2n}$$
>
> 根据 union bound，$\Pr[\exists i, D(i) > cn] \leq 2^n e^{-2n} < 2^{-n}$

用 P_i 表示 $i \to \delta(i)$ 的路径上所经过的点，用 $S_i = \{j \neq i \mid P_j \cap P_i \neq \varnothing\}$，也即路径相交的个数。直观上我们得到以下结论：

Claim: $D(i) \leq |S(i)|$

> 证明的思路是“锅不能停”。
>
> 
>
>
> 在等价意义下，至多只会被每个人阻碍一次，因此 $D(i) \leq |S(i)|$。

Lemma: $\forall i, \Pr[D(i) > cn] \leq e^{-2n}$

> 定义 $H_{ij} = \begin{cases} 1 & P_i \cap P_j \neq \varnothing \\ 0 & P_i \cap P_j = \varnothing \end{cases}$，从而 $D(i) \leq \sum\limits_{j \neq i} H_{ij} = |S(i)|$。
>
> 对于图中每一条边，期望经过它的路径条数为 $\dfrac{Nn/2}{Nn} = \dfrac{1}{2}$，从而 $\mathbb{E}[|S(i)|] \leq \dfrac{n}{2}$，即路径长度乘每条边的期望路径个数。根据 Chernoff bound，有
>
> $$\Pr[D(i) \geq (1+\beta)\mu] \leq \exp(-\frac{\beta^2}{2+\beta}\mu)$$
>
> 容易看出，当我们想分析一个固定的 tail 时，$\mu = \dfrac{n}{2}$ 一定是最坏的，取 $\beta = 6$，有 $\Pr[D(i) \geq \frac{7}{2}n] \leq \exp(-\frac{9}{4}n) \leq \exp(-2n)$。

Hamilton Cycles (1)

对于 $G = (V, E) \in \mathcal{G}(n, p)$，其中 $p \geq \dfrac{72 \ln n}{n-1}$，则存在一个多项式时间的随机算法 w.h.p. 找到一个 Hamiltonian 圈。

算法的思想是利用 coupon collector，算法陈述如下

start with $P = \{v_1\}$ where $v_1 = s$ is an arbitrary vertex
repeat for at most $4(n-1)\ln(n-1)$ steps
    if $|P| = n$ and $\{v_1, v_n\} \in E$ then output P
    else $\boxed{\text{choose vertex } y \text{ with } \{v_k, y\} \in E}$ where v_k is the current path endpoint
        if $y \notin P$ then $extend(P, y)$
        else $rotate(P, y)$
if cycle not found then output "fail"

这里有 *extent* 和 *rotate* 两个函数，分别表示枚举到新端点 v 时，若其之前还没出现 / 已经出现，现在应该如何操作

于是重点在于 *choose* 这一步，我们需要保证的是从“观察者视角”，所有的 V 中的点具有均等概率被选作下一个点。从而我们可以利用 coupon collector 的结论，期望在前 $2n\ln n$ 步收集到所有点形成 Hamiltonian 路，后 $2n\ln n$ 步枚举到与 v_1 相邻的点，找到 Hamiltonian 圈。

严谨的来说，我们要保证

$$\Pr_G[v \in V \text{ is next endpoint} \mid \text{Path history}] \text{ are the same}$$

为了达到这一点，我们需要将边退化为有向边，以确保双向选择的独立性，对于 $(u, v) \in E$ 时，定义 $N(x)$ 为 G' 中 x 的邻居结点

$$\begin{aligned}
&\{y \in N(x) \land x \in N(y)\} \text{ w.p. } \frac{p}{4} \\
&\{y \notin N(x) \land x \in N(y)\} \text{ w.p. } \frac{1}{2} - \frac{p}{4} \\
&\{y \in N(x) \land x \notin N(y)\} \text{ w.p. } \frac{1}{2} - \frac{p}{4} \\
&\{y \notin N(x) \land x \notin N(y)\} \text{ w.p. } \frac{p}{4}
\end{aligned}$$

我们将在实现 *choose* 时从 $N(x)$ 中挑选邻居。定义 $OLD(x) = \{y \mid$ $choose \text{ picked } y \text{ when } x \text{ was endpoint}\}$，选点策略如下：

- 以 $\dfrac{|OLD(x)|}{n-1}$ 的概率，在 $OLD(x)$ 中等概率随机挑选一个点。
- 以剩下的概率，在 $N(x) \setminus OLD(x)$ 中等概率随机挑选一个点。

算法的正确性将在下一讲证明。

Lecture 11 - 2025 / 3 / 24

Hamilton Cycles (2)

Claim: 在 G' 中，$\{y \in N(x)\}$ 是互相独立的事件，且每个以 $\frac{p}{2}$ 的概率发生。

> 首先 $\Pr[y \in N(x)] = p \cdot (\frac{p}{4} + (\frac{1}{2} - \frac{p}{4})) = \frac{p}{2}$。
>
> 其次由于下式，立刻得到独立性：
>
> $$\Pr[y \in N(x) \wedge x \in N(y)] = p \cdot \frac{p}{4} = \frac{p^2}{4} = \Pr[y \in N(x)] \Pr[x \in N(y)]$$

Claim: 取 $p \geq 72\frac{\ln n}{n-1}, G \in \mathcal{G}(n,p)$，w.h.p. *choose* 的实现方法保证了每个点以均等的概率 $\frac{1}{n-1}$ 作为新的端点。

> 我们假设始终有 $N(x) \backslash OLD(x) \neq \varnothing$（接下来会证明），那么
>
> 1. 对于 $y \in OLD(x)$，有 $\Pr[\mathit{choose}\,\text{picks}\,y] = \frac{|OLD(x)|}{n-1} \cdot \frac{1}{|OLD(x)|} = \frac{1}{n-1}$
> 2. 对于 $y \notin OLD(x)$，类似可知也为 $\frac{1}{n-1}$。
>
> 值得注意的是，这里 G 也为随机性来源之一，我们是从观察者视角计算概率，也即我们只能根据 *choose history* 对 G 进行假设。

Claim: 在 $4n\ln n$ 步内，w.h.p $\forall x, N(x) \backslash OLD(x) \neq \varnothing$。

> 我们对于一个 fixed x，说明 $\Pr[N(x) \backslash OLD(x) = \varnothing] = O(\frac{1}{n^2})$ 即可通过 union bound 证明原结论。
>
> 首先 $\Pr[|N(x)| \leq 24\ln n] \leq \frac{1}{n^2}$，这是因为 $|N(x)| \sim B(n-1, \frac{p}{2})$，所以 $\mathbb{E}[|N(x)|] = 36\ln n$。我们根据 Chernoff bound 即可得证。
>
> 接下来 $\Pr[|OLD(x)| \geq 24\ln n] \leq \frac{1}{n^2}$，这是因为，$x$ 作端点的次数 $\sim B(4n\ln n, \frac{1}{n-1})$，而 $|OLD(x)|$ 显然不会超过这个次数，故由 Chernoff bound 再次得证。

Balls and Bins (1)

考虑将 m 个球独立均匀放进 n 个桶里，设第 i 个桶里 X_i 个球，那么

$$\Pr[X_1 = k_1, \cdots, X_n = k_n] = \frac{1}{n^m} \frac{m!}{k_1! \cdots k_n!}$$

另一方面，假设 $Y_1, \cdots, Y_n$ 是一列独立服从 $\pi(\lambda)$ 的变量，

$$\Pr[Y_1 = k_1, \cdots, Y_n = k_n] = \prod_{i=1}^{n} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{k_i}}{k_i!}$$

$$\Pr\left[\sum_{i=1}^{n} Y_i = m\right] = \frac{e^{-\lambda n}(\lambda n)^m}{m!}$$

从而我们有 $\Pr[X_1 = k_1, \cdots, X_n = k_n] = \Pr[Y_1 = k_1, \cdots, Y_n = k_n \mid \sum_{i=1}^{n} Y_i = m]$。

Theorem: 将 n 个球独立均匀放进 n 个桶里，最大负载量 w.h.p 是 $O(\dfrac{\ln n}{\ln\ln n})$。

> 记 $\mathcal{E}_1$ 表示某个桶的球个数 $> (1+\varepsilon)\dfrac{\ln n}{\ln\ln n}$ 我们需要证明 $\Pr[\mathcal{E}_1] = 1/\mathrm{poly}(n)$。
>
> 由于 $X_1 \sim B(n, \frac{1}{n})$，有
>
> $$\begin{aligned}\Pr[X_1 > (1+\varepsilon)\frac{\ln n}{\ln\ln n}] &\le \left(\frac{e\ln\ln n}{(1+\varepsilon)\ln n}\right)^{(1+\varepsilon)\ln n/\ln\ln n} \\ &= \exp\left((1+\varepsilon)\frac{\ln n}{\ln\ln n}\cdot(1+\ln\ln\ln n - \ln(1+\varepsilon) - \ln\ln n)\right) \\ &= \exp(-\Theta((1+\varepsilon)\ln n)) = n^{-\Theta(1+\varepsilon)}\end{aligned}$$
>
> 从而根据 union bound 得证。

Lecture 12 - 2025 / 3 / 27

Balls and Bins (2)

Lemma: 设 $\mathcal{E}$ 是关于 bin loads 的事件，且 $\Pr[\mathcal{E}]$ 关于 m 递增是单调上升 / 单调下降的，则 $\Pr_X[\mathcal{E}] \le 4\Pr_Y[\mathcal{E}]$，其中 X 为 Balls and Bins 模型，Y 为 n 个独立的 $\pi(m/n)$。

> 不妨设 $\Pr[\mathcal{E}]$ 单调上升，则
>
> $$\begin{aligned}\Pr_Y[\mathcal{E}] &= \sum_{k=0}^{\infty}\Pr_Y\left[\mathcal{E} \mid \sum_{i=1}^{n} Y_i = k\right]\Pr\left[\sum_{i=1}^{n} Y_i = k\right] \\ &\ge \sum_{k=m}^{\infty}\Pr_Y\left[\mathcal{E} \mid \sum_{i=1}^{n} Y_i = m\right]\Pr\left[\sum_{i=1}^{n} Y_i = k\right] \\ &\ge \Pr_Y\left[\mathcal{E} \mid \sum_{i=1}^{n} Y_i = m\right]\Pr\left[\sum_{i=1}^{n} Y_i \ge m\right] \\ &\ge \Pr_X[\mathcal{E}]\cdot\frac{1}{4}\end{aligned}$$

最后一步用到对于 $\lambda \in \mathbb{N}$，对于 $X \sim \pi(\lambda)$，有 $\Pr[X \geq \lambda] \geq 1/4$。

Corollary: $\Pr[\forall i, X_i \leq c] \leq 4\Pr[\forall i, Y_i \leq c]$

Theorem: 将 n 个球独立均匀放进 n 个桶里，最大负载量 w.h.p 是 $\Omega(\dfrac{\ln n}{\ln\ln n})$。

> 记 $\mathcal{E}_2$ 表示所有 $Y_i \leq (1-\varepsilon)\dfrac{\ln n}{\ln\ln n}$ 我们需要证明 $\Pr[\mathcal{E}_2] = 1/\mathrm{poly}(n)$。
>
> 由于 $Y_1 \sim \pi(1)$，所以 $\Pr[Y_1 \geq k] = \sum_{j=k}^{\infty} \dfrac{e^{-1}}{j!} \leq \dfrac{1}{k!}$。这是因为 $e = 1 + 1/2 + 1/3! + \cdots$。当然，更直接的有 $\Pr[Y_1 \geq k] \geq \dfrac{1}{ek!}$。
>
> $$\begin{aligned}\Pr[\mathcal{E}_2] &= (1 - \Pr[Y_1 \geq k])^n \\ &\leq \left(1 - \frac{1}{ek!}\right)^n \\ &\leq \exp\left(-\frac{n}{ek!}\right) \\ &\leq \exp(-\exp(\Theta(\varepsilon \ln n))) \\ &= \exp(-n^{\Theta(\varepsilon)})\end{aligned}$$
>
> 于是以指数速度趋于 0。

综上所述，最大负载量 w.h.p 是 $\Theta(\dfrac{\ln n}{\ln\ln n})$。

Stochastic Dominance

Definition (SD w.r.t. random variables): 对于两个在 $[a,b]$ 上的随机变量 X, Y，如果 $\forall c \in [a,b], \Pr[Y \geq c] \geq \Pr[X \geq c]$，则称 Y stochastic dominates X，记作 $X \preceq Y$。

Definiton (SD w.r.t. functions): 对于两个在 $[a,b]$ 上的函数 f, g，如果 $\forall c \in [a,b]$

$$\int_{x \geq c} f(x)\mathrm{d}x \leq \int_{y \geq c} g(y)\mathrm{d}y$$

则称 f stochastic dominates g，记作 $f \preceq g$。

Lemma: $X_1 \preceq Y_1, X_2 \preceq Y_2$，且 X_1, X_2 独立，Y_1, Y_2 独立，则 $X_1 + X_2 \preceq Y_1 + Y_2$。

> 对于任何 c，我们只需证明 $Y_1 + X_2 \preceq Y_1 + Y_2$，则根据对称性得证。

> $$\begin{aligned}\Pr[Y_1+Y_2\ge c] &= \sum_{y_1}\Pr[Y_1=y_1]\Pr[Y_2\ge c-y_1]\\ &\ge \sum_{y_1}\Pr[Y_1=y_1]\Pr[X_2\ge c-y_1]\\ &= \Pr[Y_1+X_2\ge c]\end{aligned}$$

Corollary: 如果函数列 $\{g_j\}_{j=1}^m$ 和 $\{f_j\}_{j=1}^m$ 满足 $f_j(\cdot;x_1,\cdots,x_{i-1})\preceq g_j(\cdot)$，则

$$\int_{\sum x_j\ge c} f_1(x_1)\cdots f_m(x_m;x_1,\cdots,x_{m-1})\mathrm{d}x \le \int_{\sum x_j\ge c} g_1(x_1)\cdots g_m(x_m)\mathrm{d}x$$

> 归纳法，先固定 $x_1,\cdots,x_{m-1}$，将 $f_m(\cdot;x_1,\cdots,x_{m-1})$ 替换为 $g(\cdot)$，然后重复上述过程。

Power of 2 Choices (1)

将 m 个球独立放入 n 个桶中，每个球随机选择两个桶，放入负载较小的那个桶。

Theorem: $m=n$ 时，最大负载量 w.h.p 不超过 $\dfrac{\ln\ln n}{\ln 2}+\Theta(1)$。

证明的大体思路是，设 B_i 为负载量 $\ge i$ 的桶的个数。我们试图找到一系列 bound β_i，使得 w.h.p $B_i\le\beta_i$，则对于任何一个特定的球，其落在负载 $\ge i$ 的桶的概率 $\le\left(\dfrac{\beta_i}{n}\right)^2$。从而 $B_{i+1}\preceq\mathcal{B}(n,(\beta_i/n)^2)$，均值为 β_i^2/n，可以根据 Chernoff bound 取 $\beta_{i+1}=c\beta_i^2/n$，于是有 $\dfrac{\beta_{i+1}}{n}=c\left(\dfrac{\beta_i}{n}\right)^2$，即 β_i/n 平方速度下降，当 $i\approx\dfrac{\ln\ln n}{\ln 2}$ 时有 $\beta_i<1$，这便是最大负载量。

Lecture 13 - 2025 / 3 / 31

Power of 2 Choices (2)

Theorem: 将 n 个球独立放入 n 个桶中，每个球随机选择两个桶，放入负载较小的那个桶，最大负载量 w.h.p 不超过 $\dfrac{\ln\ln n}{\ln 2}+\Theta(1)$。

分两个阶段对该定理进行证明。不妨设 $\beta_6=\dfrac{n}{2e}$，则 $B_6\le\beta_6$ 是 trivial 的，因为 ≥ 6 的桶的个数不超过 $\dfrac{n}{6}<\dfrac{n}{2e}$。对于 $i>6$，定义 $\beta_{i+1}=\dfrac{e\beta_i^2}{n}$。

Claim: 对于任意 $i>6,\beta_i^2\ge 2n\ln n$ 时，有 $\Pr[B_i>\beta_i]\le\dfrac{i}{n^2}$。

> 归纳法。显然有 $\Pr[B_{i+1} > \beta_{i+1}] \le \Pr[B_{i+1} > \beta_{i+1}, B_i \le \beta_i] + \Pr[B_i > \beta_i]$。后项根据归纳假设 $\le \dfrac{i}{n^2}$。
>
> 接下来试图说明前一项不超过 $\Pr[\mathcal{B}(n, (\beta_i/n)^2) > \beta_{i+1}]$，从而根据 Chernoff bound $\Pr[X \ge e\mu] \le e^{-\mu}$ 得知不超过 $\exp(-\beta_i^2/n) \le \dfrac{1}{n^2}$，于是即可证毕。
>
> 定义 $B_i^{(j)}$ 代表当我们放置第 j 个球之前，负载量 $\ge i$ 的桶的个数。用 X_j 作为第 j 个球的高度是否 $\ge i+1$ 的 indicator。则易见 $B_{i+1} \le \sum X_j$。
>
> $$\Pr[B_{i+1} > \beta_{i+1}, B_i \le \beta_i] \le \Pr\left[\sum_{j=1}^{n} X_j > \beta_{i+1}, B_i \le \beta_i\right]$$
>
> 从而将右侧写作 $\sum_{\sum x_j > \beta_{i+1}} \Pr[X_1 = x_1, \cdots, X_m = x_m, B_i \le \beta_i]$，对于其中每一项
>
> $$\begin{aligned} & \Pr[X_1 = x_1, \cdots, X_m = x_m, B_i \le \beta_i] \\ = & \Pr[X_1 = x_1, \cdots, X_m = x_m, B_i^{(1)} \le \beta_i, \cdots, B_i^{(m)} \le \beta_i] \\ \le & \Pr[X_1 = x_1, B_i^{(1)} \le \beta_i] \cdots \Pr[X_m = x_m, B_i^{(m)} \le \beta_i \mid X_j = x_j, B_i^{(j)} \le \beta_i] \\ = & f_1(x_1) \cdots f_m(x_m; x_1, \cdots, x_{m-1}) \end{aligned}$$
>
> 其中 $f_j(x_j; x_1, \cdots, x_{j-1}) = \Pr[X_j = x_j, B_i^{(j)} \le \beta_i \mid X_1 = x_1, B_i^{(1)} \le \beta_i, \cdots, X_{j-1} = x_{j-1}, B_i^{(j-1)} \le \beta_i]$。下面说明 $f_j(1, x_1, \cdots, x_{j-1}) \le (\beta_i/n)^2$。
>
> 实际上这是因为，我们可以通过全概率公式枚举 $B_i^{(j)}$ 的值，而 condition on $B_i^{(j)}$ 的值后，$\Pr[X_j = x_j]$ 是完全与 $x_1, \cdots, x_{j-1}$ 的情况无关的。也就是说，
>
> $$\begin{aligned} f_j(1, x_1, \cdots, x_{j-1}) &= \sum_{b_i^{(j)} \le \beta_i} \Pr[X_j = 1 \mid B_i^{(j)} = b_i^{(j)}] \Pr[B_i^{(j)} = b_i^{(j)} \mid \cdots] \\ &\le \left(\frac{\beta_i}{n}\right)^2 \sum_{b_i^{(j)} \le \beta_i} \Pr[B_i^{(j)} = b_i^{(j)} \mid \cdots] \\ &= \left(\frac{\beta_i}{n}\right)^2 \end{aligned}$$
>
> 至此，我们证明了 $f_j(x_j \mid x_1, \cdots, x_{j-1}) \preceq \mathcal{B}(1, (\beta_i/n)^2)$。根据 stochastic dominance 的 Lemma 证毕。

设 i^* 是第一个满足 $\beta_i^2 < 2n \ln n$ 的 i，则容易看出 $i^* = \dfrac{\ln \ln n}{\ln 2} + O(1)$，我们手动分析最后两个阶段。

Claim: $\Pr[B_{i^*+1} \ge 6 \ln n] = O(1/n)$

> 根据 $\Pr[B_{i^*+1} \geq 6\ln n] \leq \Pr[B_{i^*+1} \geq 6\ln n, B_{i^*} \leq \sqrt{2n\ln n}] + \Pr[B_{i^*} > \sqrt{2n\ln n}]$，后面一项由前面的归纳法 $\leq 1/n$，而前面一项使用前面类似的 Stochastic dominance 的技术 $\leq \Pr[\mathcal{B}(n, 2\ln n/n) \geq 6\ln n] \leq 1/n^2$（Chernoff bound）。

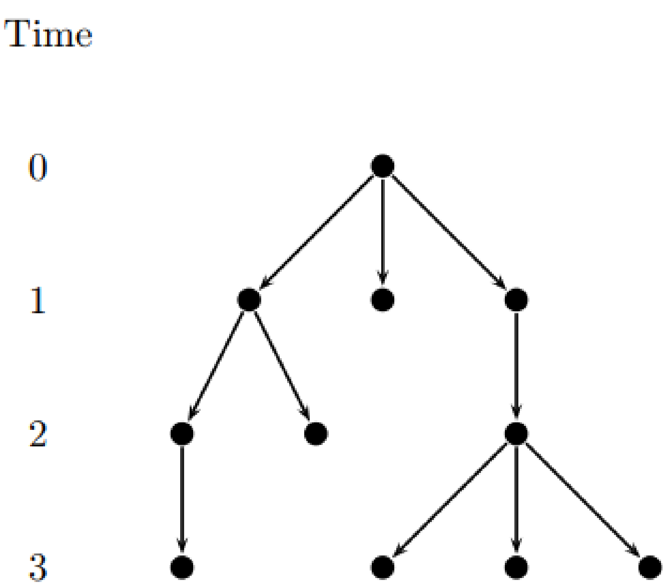
Claim: $\Pr[B_{i^*+2} \geq 1] \leq O(\log^2 n/n)$。

> 根据 $\Pr[B_{i^*+2} \geq 1] \leq \Pr[B_{i^*+2} \geq 1, B_{i^*+1} \leq 6\ln n] + \Pr[B_{i^*+1} > 6\ln n]$，后面一项由前面的 Claim $\leq O(1/n)$，而前面一项使用 Stochastic dominance 的技术 $\leq \Pr[\mathcal{B}(n, (6\ln n/n)^2) \geq 1] \leq (6\ln n)^2/n$（union bound）。

事实上，最大负载量的下界也是 w.h.p $\Omega(\ln\ln n)$ 的。如果每次选择 d 个桶，则最大负载量 w.h.p 是 $\dfrac{\ln\ln n}{\ln d} + O(1)$。

Galton-Watson Branching Process

设 X 是一个非负整数 r.v.，X 定义的分支过程从时间 0 的一个单点开始，每次分支生成 $x \sim X$ 个儿子，并对每个儿子分别独立进行下去。



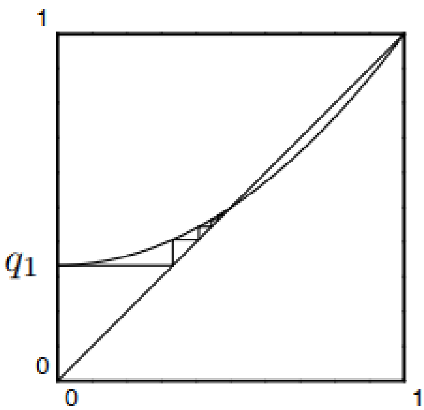
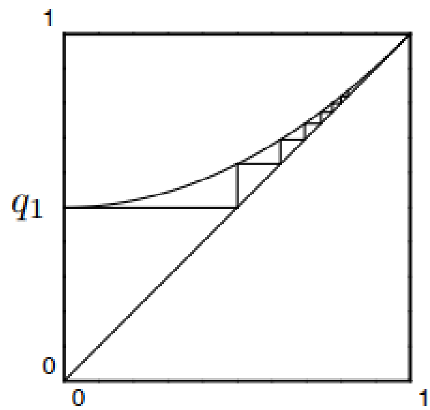
用 Z_i 代表时间 i 的结点数量，则 $Z_0 = 1$，将**灭绝**的概率定义为

$$\Pr[\text{extinction}] = \lim_{n\to\infty} \Pr[Z_n = 0]$$

Theorem: 对于一个 X 定义的分支过程，$\Pr[X=1] < 1, \Pr[X=0] > 0$，有

- 如果 $\mathbb{E}[X] \leq 1$ 则 $\lim_{n\to\infty} \Pr[Z_n = 0] = 1$
- 如果 $\mathbb{E}[X] > 1$ 则 $\lim_{n\to\infty} \Pr[Z_n = 0] = p^* < 1$，其中 p^* 是 $(0,1)$ 之间的方程 $f(x) = x$ 的唯一解，

$$f(x)=\sum_{i\geq 0}\Pr[X=i]x^i$$

> 设 q_n 为时间 n 灭绝的概率，即 $q_n=\Pr[Z_n=0]$，其中 $q_0=0$，我们可以针对第 1 步分裂情况进行讨论，从而列出递推方程 $q_n=f(q_{n-1})$。
>
> 根据实际含义容易看出 $0<q_1\leq q_2\leq q_3\leq\cdots\leq 1$，也就是 (q_n) 单调递增且有界，故必然收敛到 $q^*\leq 1$。
>
> 
>
>
> 
>
>
> 注意到 $f(x)$ 是在 $[0,1]$ 内的严格递增函数，且严格凸的函数，我们针对 $y=f(x)$ 和 $y=x$ 的关系进行讨论。注意 $\mathbb{E}[X]=f'(1)$。
>
> - 对于第二种情况，因为 $\mathbb{E}[X]=f'(1)>1$，所以 $y=f(x)$ 和 $y=x$ 第一次相交于 $a<1$，根据左图 $q^*=a<1$。
> - 对于第一种情况，因为 $\mathbb{E}[X]=f'(1)\leq 1$，所以 $y=f(x)$ 和 $y=x$ 第一次相交于 1，根据右图 $q^*=1$。

Lecture 14 - 2025 / 4 / 7

Giant Component (1)

Theorem: 对于 $G\in\mathcal{G}_{n,p}$，其中 $p=\dfrac{c}{n}$，$c<1$ 是一个常数，则 a.a.s. G 的最大的连通分支大小是 $O(\log n)$ 的。

对于一个结点 v，通过 BFS 找出 v 所在的连通块大小的过程，可以看作从 v 开始的一个 branching process。

- 即根节点为 v，为 v 采样 $\mathcal{B}(n-1,p)$ 个邻居（儿子）结点，假设这里是 2 个 v_1,v_2。
- 为 v_1 采样 $\mathcal{B}(n-3,p)$ 个邻居（儿子结点），即忽略掉 v,v_1,v_2 的影响，假设是 3 个。
- 为 v_2 采样 $\mathcal{B}(n-6,p)$ 个邻居（儿子结点），即忽略掉所有上述已知连通的点的影响……

从而“v 在一个大小为 k 的连通块”即“branching process 可以展出 k 个结点”的概率。注意这里每次针对一个结点展开，而不是针对一层展开。

我们将上述每一步展开放缩为 $\mathcal{B}(n,p)$，这给出了一个上界。进而上述概率不低于“k 次采样 $\mathcal{B}(n,p)$ 之和不低于 $k-1$ 的概率”。

$$1+\mathcal{B}(n,p)+\cdots+\mathcal{B}(n,p)\geq k$$

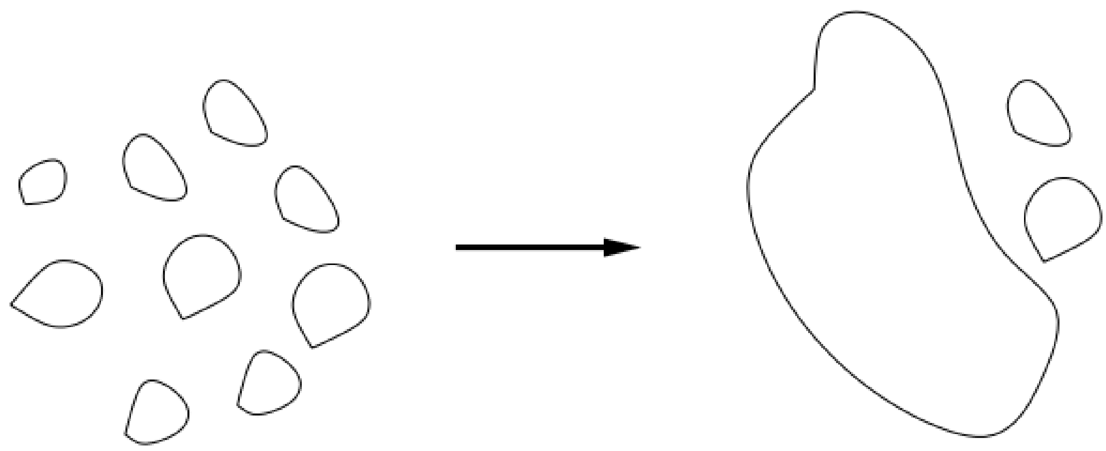
我们基于这一点给出一个 upper bound。

> 设 $X_i\sim\mathcal{B}(n,c/n)$ i.i.d $i=1,2,\cdots,k$，则
>
> $$\Pr\left[\sum_{i=1}^{k}X_i\geq(k-1)\right]=\Pr\left[\sum_{i=1}^{k}X_i\geq ck+(1-c)k-1\right]$$
>
> 注意 $\mu=ck,\beta=\dfrac{(1-c)k-1}{ck}=\Theta(1)$，根据 Chernoff bound
>
> $$\begin{aligned}\Pr\left[\sum_{i=1}^{k}X_i\geq(k-1)\right]&\leq\exp\left(-\frac{((1-c)k-1)^2}{c^2k^2(2+((1-c)k-1)/ck)}ck\right)\\&=\exp\left(-\frac{((1-c)k-1)^2}{((c+1)k-1)}\right)\\&=\exp\left(-\frac{(1-c)^2}{c+1}k+O(1)\right)\end{aligned}$$
>
> 从而取 $k=2\cdot\dfrac{(1+c)}{(1-c)^2}\ln n$，则有上述概率 $\leq O(n^{-2})$。对所有 n 个初始的 v union bound，得到原命题 w.p. $1-O(n^{-1})$ 成立。

Lecture 15 - 2025 / 4 / 10

Giant Component (2)

Theorem: 对于 $G\in\mathcal{G}_{n,p}$，其中 $p=\dfrac{c}{n}$，$c>1$ 是一个常数，则 a.a.s. G 存在唯一一个最大的连通分支大小是 $\beta n(1+o(1))$，其中 β 是 $(0,1)$ 之间 $\beta+e^{-\beta c}=1$ 的唯一解。其余的连通块大小都是 $O(\log n)$ 级别。



Claim: 对于所有结点 v，a.a.s 以下两者之一成立：

1. 从 v 开始的 braching process 在 k^- 步内停止。
2. $\forall k$ s.t. $k^- \le k \le k^+$，从 v 开始的 branching process 在 k 步后，至少有 $(c-1)k/2$ 个已探索但是没有饱和的结点。

对于后者，实际上只需要证明从 v 开始总共至少探索到了

$$\frac{(c-1)k}{2} + k = \frac{(c+1)k}{2}$$

个点。我们定义一个点 v 是 k-*bad* 的，如果从 v 开始的 branching process 在 k 步后停止或者探索到了少于 $(c+1)k/2$ 个点。

因此，当 v 是 k-bad 时，从 v 开始的 branching process 被每次展开服从 $\mathcal{B}\left(n - \frac{(c+1)k^+}{2}, \frac{c}{n}\right)$ 的过程支配（因为总共涉及到的点数不超过 $(c+1)k^+/2$，因此 $\mathcal{B}(n-?, p)$ 的 ? 处不高于这个值）。

进而从 v 开始的 branching process 在 k 步内展开的点数，不低于 k 次采样 $\mathcal{B}\left(n - \frac{(c+1)k^+}{2}, \frac{c}{n}\right)$ 展开的点数。

「上面这一步并没有理解，如果 branching process 提前终止了，为什么还能 dominate 固定次数采样的求和？」

从而 a.a.s 从任何一个点 v 开始的 branching process 要么在 $k^- = O(\log n)$ 轮终止，要么持续至少 $k^+ = n^{2/3}$ 轮。记前面的一类点是 *small* 的，后面的一类是 *large* 的。

Lemma: a.a.s. 存在唯一的一个连通块，包含了所有 large 点。

> 考虑两个 large 的 $u \neq v$。分别从 u, v 独立进行 branching process，则在 k^+ 轮后，两者已探索未饱和的点分别记作 $U(u), U(v)$，则这两个集合大小都 $\geq \dfrac{c-1}{2}k^+$。
>
> 如果前 k^+ 步已经遇到公共点了，则 u, v 已连通。否则我们证明 w.h.p. $U(u), U(v)$ 之间有边。
>
> $$\begin{aligned}\Pr[\nexists \text{edge between } U(u), U(v)] &\leq (1-p)^{(\frac{c-1}{2}k^+)^2} \\ &\leq \exp\left(-p\left(\frac{c-1}{2}k^+\right)^2\right) \\ &\leq \exp\left(-\frac{c(c-1)^2}{4}n^{1/3}\right) \\ &= o(n^{-2})\end{aligned}$$
>
> 从而对所有 u, v 进行 union bound 立刻得到总概率是 $o(1)$。

至此已经证明了最大连通块的唯一性，以及所有小连通块都是 $O(\log n)$，只剩下判断最大连通块的大小了。我们通过对 small 点计数来证明此。

Lemma: a.a.s. small 点的个数是 $(1+o(1))(1-\beta)n$。

根据 small 点的定义，可以知道 $\Pr[v \text{ is small}]$：

- $(\geq)$ 服从 $\mathcal{B}(n, c/n)$ 的 branching process 在 k^- 步内终止的概率。
  这是因为利用 $\mathcal{B}(n-\cdots, p) \leq \mathcal{B}(n, p)$，展出的点变多，终止概率变低。
- $(\leq)$ 服从 $\mathcal{B}(n-k^-, c/n)$ 的 branching process 在 k^- 步内终止的概率。
  这是因为 small 的点总共展出了 $\leq k^-$ 个点，所以 $\mathcal{B}(n-\cdots, p) \geq \mathcal{B}(n-k^-, p)$，展出的点变少，终止概率增大。

更进一步，用 $d(n, p)$ 表示服从 $\mathcal{B}(n, p)$ 的 branching process 终止的概率：

- $(\geq)$ 根据 claim，我们知道 w.h.p. 如果不在 k^- 步终止，则最终不会终止，故下界为 $d(n, c/n) + o(1)$。
- $(\leq)$ 不限制终止步数，终止概率自然增大，故上界为 $d(n-k^-, c/n)$。

> 当 $n \to +\infty$ 时，根据泊松分布的结论，$d(n, c/n) \to 1-\beta$，其中 β 是 $(0,1)$ 之间 $\beta + e^{-\beta c} = 1$ 的解。同时因为 $k^- \ll n$，所以 $d(n-k^-, c/n) \to 1-\beta$。根据 sandwiching 定理，可以知道
>
> $$\Pr[v \text{ is small}] \to 1-\beta =: \alpha$$
>
> 用 $Z = \sum_v Z_v$ 代表 small 点的个数，我们通过 Chebyshev 给 Z 一个 concentration bound。则 $\mathbb{E}[Z_v] \to \alpha, \mathbb{E}[Z] = (1+o(1))\alpha n$。

> $$\begin{aligned}\mathbb{E}[Z^2] &= \mathbb{E}[Z] + \sum_{u\neq v}\mathbb{E}[Z_u Z_v] \\ &= \mathbb{E}[Z] + \sum_{v}\Pr[v \text{ is small}]\sum_{u\neq v}\Pr[u \text{ is small} \mid v \text{ is small}]\end{aligned}$$
>
> 对于最后一个 $\sum$，可以拆分为 u 和 v 在同一连通块、u 和 v 在不同连通块的两类分别计数。
>
> - 和 v 在同一连通块的 u 不超过 k^- 个
> - 和 v 在不同连通块的任何一个 u 满足
>
> $$\begin{aligned}&\Pr[u \text{ is small} \mid v \text{ is small}] \\ =\ &\Pr[u \text{ is small in } \mathcal{G}(n-|\mathrm{Comp}(v)|, p)] \\ \le\ &\Pr[u \text{ is small in } \mathcal{G}(n-k^-, p)] \\ \le\ &d(n-k^-, c/n) \sim d(n, c/n) \to \alpha\end{aligned}$$
>
> 从而 $\mathbb{E}[Z^2] \le \mathbb{E}[Z] + n(\alpha+o(1))(k^- + n(\alpha+o(1))) \sim \mathbb{E}[Z] + n^2\alpha^2(1+o(1)) = \mathbb{E}[Z]^2(1+o(1))$。
>
> 从而根据 Chebyshev 不等式
>
> $$\Pr[|Z-\mathbb{E}[Z]| > \gamma\mathbb{E}[Z]] \le \frac{1}{\gamma^2}\left(\frac{\mathbb{E}[Z^2]}{\mathbb{E}[Z]^2} - 1\right) = \frac{1}{\gamma^2}o(1)$$
>
> 只需取 $\gamma = o(1)$ 但下降足够缓慢，则上式昭示了 a.a.s. 最大连通分支大小是 $(1+o(1))\beta n$。

综合以上两个 Lemma，原 Theorem 得证。

Lecture 16 - 2025 / 4 / 14

Johnson & Lindenstrauss Lemma

Theorem (JL Lemma). 对于任何 $\mathbb{R}^d$ 上 n 个点的集合 X，任何 $\varepsilon \in (0,1)$，存在一个 $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^k$ 的映射 φ，其中

$$k = \left\lceil \frac{4\ln n}{\varepsilon^2/2 - \varepsilon^3/3} \right\rceil \le \left\lceil \frac{24\ln n}{\varepsilon^2} \right\rceil$$

使得 $\forall u, v \in X$，

$$(1-\varepsilon)\|u-v\|_2^2 \le \|\varphi(u)-\varphi(v)\|_2^2 \le (1+\varepsilon)\|u-v\|_2^2$$

> 考虑随机选择一个坐标系，并保留 u 在其中的前 k 个坐标（的一个倍数）作为 $\varphi(u)$。为了分析这个过程，我们可以对称的看作，对于个固定的标准正交坐标系，u 在 $\mathbb{S}^{d-1}$ 上均匀随机采样。

> 于是我们生成一个随机向量 $X=(X_1,\cdots,X_d)$，其中 $X_i\sim\mathcal{N}(0,1)$，可以将 u 表示为 $Z=\frac{1}{\|X\|_2}(X_1,\cdots,X_d)$，降维后的向量定义为 $Y=\varphi(X)=\sqrt{\frac{k}{d}}\cdot\frac{1}{\|X\|_2}(X_1,\cdots,X_k)$。
>
> 需要分析 $L=\dfrac{X_1^2+\cdots+X_k^2}{X_1^2+\cdots+X_d^2}$ 的分布。根据对称性，显然有 $\mathbb{E}[L]=k/d$，于是 $\mathbb{E}[\|Y\|_2^2]=1$。
>
> 根据 Chernoff bound 可以得到
>
> - $\Pr[\|\varphi(u)\|_2^2\ge(1+\varepsilon)]\le\exp(-\frac{k}{2}(\frac{\varepsilon^2}{2}-\frac{\varepsilon^3}{3}))$
> - $\Pr[\|\varphi(u)\|_2^2\le(1-\varepsilon)]\le\exp(-\frac{k}{4}\varepsilon^2)$
>
> 证明过程主要利用了 $\ln(1-\varepsilon)<(-\varepsilon-\frac{\varepsilon^2}{2})$ 和 $\ln(1+\varepsilon)<(\varepsilon-\frac{\varepsilon^2}{2}+\frac{\varepsilon^3}{3})$。
>
> 于是，当 k 满足条件时，$\Pr[|\|\varphi(u)\|_2^2-1|>\varepsilon]\le 2\exp(-2\ln n)=2/n^2$。从而根据 union bound，对于所有 $\binom{n}{2}$ 个点对 (u,v)，都保距的概率 $\ge\frac{1}{n}$。根据 probabilistic method，可以得到 JL 引理。

Embedding into ℓ_p metrics

Theorem. 设 (X,d) 是一个度量空间，$|X|=n$，则 (X,d) 可以被嵌入一个 ℓ_1 空间，保距比为 $O(\log n)$，维度 $k=O(\log^2 n)$。

我们通过构造 $m=O(\log^2 n)$ 个随机的 $A_i\subseteq X$，并定义

$$\varphi(x)=\frac{1}{m}(d(x,A_1),d(x,A_2),\cdots,d(x,A_m))$$

其中 $d(x,A_i)=\min_{y\in A_i}d(x,y)$。我们从两个方向分别证明这个构造的合理性。

Claim. $\forall x,y\in X,\|\varphi(x)-\varphi(y)\|_1\le d(x,y)$

> $$\begin{aligned}\|\varphi(x)-\varphi(y)|_1&=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^m|d(x,A_i)-d(y,A_i)|\\&\le\frac{1}{m}\sum_{i=1}^m d(x,y)=d(x,y)\end{aligned}$$
>
> 上式中，第二个不等式是因为，不妨设 $d(x,A_i)\ge d(y,A_i)$，设 $d(y,A_i)=d(y,z)$，其中 $z\in A_i$，则有 $d(x,A_i)-d(y,A_i)\le d(x,z)-d(y,z)\le d(x,y)$。

我们构造 $\{A_i\}$ 的方法是，对于每个 $t\in\{1,2,\cdots,\log n\}$，构造 $r\log n$ 个随机集合 $\{A_i^{(t)}\}_{i=1}^{r\log n}$，其中每个 $x\in X$ 都独立均匀的以 2^{-t} 的概率包含在 $A_i^{(t)}$ 中。因此 $A_i^{(t)}$ 的期望大小为 $\dfrac{n}{2^t}$，总共有 $r\log^2 n$ 个集合。

Claim. $\exists c, \forall x, y \in X, \|\varphi(x)-\varphi(y)\|_1 \geq \frac{1}{c\log n}d(x,y)$

为了证明这个 claim，我们首先定义“球”：

$$B(x,\rho) = \{z \in X \mid d(x,z) \leq \rho\}$$
$$B^\circ(x,\rho) = \{z \in X \mid d(x,z) < \rho\}$$

定义一列半径 $0 = \rho_0 < \rho_1 < \cdots$，其中 ρ_t 定义为

$$\rho_t = \min\{\rho \mid B(x,\rho), B(y,\rho) \text{ both contain} \geq 2^t \text{ points of } X\}$$

持续定义这样的 ρ_t，直到某一项 $\rho_{t^*} \geq \frac{1}{4}d(x,y)$ 时，修改定义这一项为 $\rho_{t^*} = \frac{1}{4}d(x,y)$，定义结束。可以看出 $B(x,\rho_t), B(y,\rho_t)$ 永远是不交的。

我们称 $A_i^{(t)}$ 是 *good* 的当且仅当（两者之一）：

- ρ_t 对于 $B(x,\rho_t)$ 是紧的，而 $A_i^{(t)}$ 与 $B(y,\rho_{t-1})$ 相交但与 $B^\circ(x,\rho_t)$ 不交。
- ρ_t 对于 $B(y,\rho_t)$ 是紧的，而 $A_i^{(t)}$ 与 $B(x,\rho_{t-1})$ 相交但与 $B^\circ(y,\rho_t)$ 不交。

注意，一个 good 的集合将为 $\|\varphi(x)-\varphi(y)\|_1$ 贡献 $\frac{1}{m}(\rho_t-\rho_{t-1})$。

> 对于任何集合 $A_i^{(t)}$，它 good 的概率有
>
> $$\begin{aligned}\Pr[A_i^{(t)} \text{ is good for } x,y] &= \Pr[A_i^{(t)} \cap B^\circ(x,\rho_t) = \emptyset \wedge A_i^{(t)} \cap B(y,\rho_{t-1}) \neq \emptyset] \\ &\geq \Pr[A_i^{(t)} \cap B^\circ(x,\rho_t) = \emptyset] \cdot \Pr[A_i^{(t)} \cap B(y,\rho_{t-1}) \neq \emptyset] \\ &\geq \left(1-2^{-t}\right)^{2^t} \cdot \left(1-(1-2^{-t})^{2^{t-1}}\right) \\ &\geq \frac{1}{4}\cdot\left(1-\frac{1}{\sqrt{e}}\right)\end{aligned}$$
>
> 第一个不等号是因为两个事件是正相关的，最后一个不等号是因为前者单调递增，后者单调递减。
>
> 因此 $A_i^{(t)}$ 以常数概率是 good 的，对于每个固定的 t，$\mathbb{E}[\#\text{good sets}] \geq \frac{r\log n}{12} = \mu$，根据 Chernoff bound，$\Pr[\#\text{good sets} \leq \mu/2] \leq \exp(-\mu/8) = \exp(-r\log n/96) \leq n^{-3}$，这里取 $r = 288$。从而根据 union bound，对于所有的 x, y, t 都成立的概率 $\geq 1 - \log n/n$。
>
> 因此，当上述事件发生时，

> $$
> \begin{aligned}
> \|\varphi(x)-\varphi(y)\|_1 &= \frac{1}{m}\sum_{t=1}^{\log n}\sum_{i=1}^{r\log n}|d(x,A_i^{(t)})-d(y,A_i^{(t)})| \\
> &\geq \frac{1}{m}\frac{r\log n}{24}\sum_{t=1}^{\log n}(\rho_t-\rho_{t-1}) \\
> &= \frac{1}{m}\frac{r\log n}{24}(\rho_{t^*}-\rho_0) \\
> &= \frac{1}{96\log n}d(x,y)
> \end{aligned}
> $$

Lecture 17 - 2025 / 4 / 17

Martingale

Definition (filter): $\emptyset=\mathcal{F}_0\subseteq\mathcal{F}_1\subseteq\mathcal{F}_2\subseteq\cdots\subseteq\mathcal{F}_n$ 是一个概率空间上的递增 σ-代数。

例如 $\mathcal{F}_n=Z_1,\cdots,Z_n$，其中 Z_i 是随机变量。

Definition (martingale): (X_i) 是关于 $(\mathcal{F}_i)$ 的鞅，如果满足

$$\mathbb{E}[X_i\mid\mathcal{F}_{i-1}]=X_{i-1}$$

Azuma Inequality

Lemma: 对于 r.v. X，若 $|X|\leq 1,\mathbb{E}[X]=0$，则 $\mathbb{E}[e^{tX}]\leq e^{t^2/2}$。

> 根据凸性和 Taylor 展开，$\mathbb{E}[e^{tX}]\leq\frac{1}{2}\left(e^t+e^{-t}\right)\leq e^{t^2/2}$。

Theorem: 设 (X_i) 是关于 $(\mathcal{F}_i)$ 的鞅，$Y_i=X_i-X_{i-1}$ 是“差异”序列，如果 $c_i>0$ 使得 $|Y_i|\leq c_i$，则

$$\begin{matrix}\Pr[X_n\geq X_0+\lambda]\\ \Pr[X_n\leq X_0-\lambda]\end{matrix}\quad\leq\quad\exp\left(-\frac{\lambda^2}{2\sum_{i=1}^n c_i^2}\right)$$

> 当 $n=1$ 时，$|X_1-X_0|\leq c_1$，则
>
> $$
> \begin{aligned}
> \Pr[X_1\geq X_0+\lambda] &= \min_t\Pr[e^{t(X_1-X_0)}\geq e^{t\lambda}] \\
> &\leq \min_t\frac{\mathbb{E}[e^{t(X_1-X_0)}]}{e^{t\lambda}} \\
> &\leq \min_t\exp\left(\frac{c_1^2t^2}{2}-t\lambda\right)=\exp\left(-\frac{\lambda^2}{2c_1^2}\right)
> \end{aligned}
> $$
>
> 接下来归纳，

> $$\begin{aligned}
> \Pr[X_n \geq X_0 + \lambda] &\leq \min_t \frac{\mathbb{E}[e^{t(X_n - X_{n-1})} \cdot e^{t(X_{n-1} - X_0)}]}{e^{t\lambda}} \\
> &= \min_t \frac{\mathbb{E}_{\mathcal{F}_{n-1}}[\mathbb{E}[e^{t(X_n - X_{n-1})} \mid \mathcal{F}_{n-1}] \cdot e^{t(X_{n-1} - X_0)}]}{e^{t\lambda}} \\
> &\leq \min_t \frac{e^{c_n^2 t^2/2} \cdot \mathbb{E}[e^{t(X_{n-1} - X_0)}]}{e^{t\lambda}} \\
> &\leq \min_t \frac{e^{c_n^2 t^2/2} \cdot \exp(-\lambda^2/2 \sum_{i=1}^{n-1} c_i^2)}{e^{t\lambda}} \\
> &\leq \exp\left(-\frac{\lambda^2}{2\sum_{i=1}^{n} c_i^2}\right)
> \end{aligned}$$

Doob Martingale

Claim: 设 $A, (Z_i)$ 是 r.v.，则 $X_i = \mathbb{E}[A \mid Z_1, \cdots, Z_i]$ 是鞅，称之为 A **的 Doob 鞅**。

> 验证定义即可：
>
> $$\begin{aligned}
> \mathbb{E}[X_i \mid Z_1, \cdots, Z_{i-1}] &= \mathbb{E}_{Z_i}[\mathbb{E}[X_i \mid Z_1, \cdots, Z_i] \mid Z_1, \cdots, Z_{i-1}] \\
> &= \mathbb{E}_{Z_i}[\mathbb{E}[A \mid Z_1, \cdots, Z_i] \mid Z_1, \cdots, Z_{i-1}] \\
> &= \mathbb{E}[A \mid Z_1, \cdots, Z_{i-1}] = X_{i-1}
> \end{aligned}$$

Definition: $f(Z_1, \cdots, Z_n)$ 是 c**-Lipschitz 函数**，当且仅当改变 f 的任何一个坐标值，f 的变化绝对值不超过 $\pm c$。

Lemma: 如果 f 是 c-Lipschitz 函数，给定 $Z_1, \cdots, Z_{i-1}$ 的条件下，Z_i 与 $Z_{i+1}, \cdots, Z_n$ 相互独立，则 f 关于 Z_i 的 Doob 鞅 (X_i) 满足 $|X_i - X_{i-1}| \leq c$。

> 我们根据定义对 $|X_i - X_{i-1}|$ 进行展开
>
> $$\begin{aligned}
> &= |\mathbb{E}_{Z_{i+1}, \cdots, Z_n}[f \mid Z_1, \cdots, {\color{blue}Z_i}] - \mathbb{E}_{{\color{red}Z_i}, \cdots, Z_n}[f \mid Z_1, \cdots, Z_{i-1}]| \\
> &= |\mathbb{E}_{Z_{i+1}, \cdots, Z_n}[f \mid Z_1, \cdots, {\color{blue}Z_i}] - \mathbb{E}_{Z_{i+1}, \cdots, Z_n}[\mathbb{E}_{{\color{red}Z_i}}[f \mid Z_1, \cdots, Z_{i-1}, Z_{i+1}, \cdots, Z_n] \mid Z_1, \cdots, Z_{i-1}]| \\
> &= |\mathbb{E}_{Z_{i+1}, \cdots, Z_n}[f(Z_1, \cdots, {\color{blue}Z_i}, \cdots, Z_n) \mid Z_1, \cdots, Z_{i-1}] \\
> &\quad - \mathbb{E}_{Z_{i+1}, \cdots, Z_n}[\mathbb{E}_{{\color{red}Z_i}}[f(Z_1, \cdots, Z_n) \mid Z_1, \cdots, Z_{i-1}, Z_{i+1}, \cdots, Z_n] \mid Z_1, \cdots, Z_{i-1}]| \\
> &= |\mathbb{E}_{Z_{i+1}, \cdots, Z_n}[f(Z_1, \cdots, {\color{blue}Z_i}, \cdots, Z_n) \\
> &\quad - \mathbb{E}_{{\color{red}Z_i}}[f(Z_1, \cdots, {\color{red}Z_i}, \cdots, Z_n) \mid Z_1, \cdots, Z_{i-1}, Z_{i+1} \cdots, Z_n] \mid Z_1, \cdots, Z_{i-1}]| \\
> &= |\mathbb{E}_{Z_{i+1}, \cdots, Z_n}[\mathbb{E}_{{\color{red}Z_i}}[f(Z_1, \cdots, {\color{blue}Z_i}, \cdots, Z_n) - f(Z_1, \cdots, {\color{red}Z_i}, \cdots, Z_n) \\
> &\qquad \mid Z_1, \cdots, Z_{i-1}, Z_{i+1} \cdots, Z_n] \mid Z_1, \cdots, Z_{i-1}]|
> \end{aligned}$$
>
> 注意这里 ${\color{blue}Z_i}$ 是已知量，而 ${\color{red}Z_i}$ 是未知量，可以看作两者是独立同分布的变量。从而每一项均 $\leq c$，由此结论成立。

Applications: Balls and Bins

m 个球 n 个桶，Z_i 是 i 号球选择的桶，$X = f(Z_1, \cdots, Z_m)$ 是空桶的个数。容易看出 f 是 1-Lipschitz 的，从而

$$\Pr[|X - \mathbb{E}[X]| \geq \lambda] \leq 2 \exp\left(-\frac{\lambda^2}{2m}\right)$$

这是 Chernoff bound 所不能得到的结论。

Applications: Chromatic Number of $\mathcal{G}_{n,1/2}$

染色数 $\chi(G)$ 代表最少需要的颜色数量，使得存在一组同色不相邻的方案。

对于随机图我们有两种常见的鞅。

Edge Exposure Martingale: 用 $Z_i = 0/1$ 表示第 i 条边是否在图中出现，则 $A = f\left(Z_1, \cdots, Z_{\binom{n}{2}}\right)$ 的 Doob 鞅是 edge exposure maringle。

Vertex Exposure Martingle: 用 $Z_i \in \{0,1\}^{n-i}$ 代表是否 i 和 j（满足 $j > i$）的边是存在的，则 $A = f(Z_1, \cdots, Z_n)$ 的 Doob 鞅是 vertex exposure martingle。

这里我们使用后者，用 $X = f(Z_1, \cdots, Z_n)$ 代表 $\chi(G)$，则容易看出 f 是 1-Lipschitz 的。从而

$$\Pr[|X - \mathbb{E}[X]| \geq \lambda] \leq 2 \exp\left(-\frac{\lambda^2}{2n}\right)$$

注意我们不依赖任何关于 $\mathbb{E}[X]$ 的知识，给出了一个 concentration bound。

Lecture 18 - 2025 / 4 / 21

Quick Sort

考虑随机版本的快速排序算法

```
def QuickSort(a : list[int])
  x = random element in a
  a1 = [ y in a | y < x ]
  a2 = [ y in a | y > x ]
  QuickSort(a1)
  QuickSort(a2)
```

定义 Q_n 为对于大小为 n 的集合 S 进行快速排序所需要的比较次数，$q_n = \mathbb{E}[Q_n]$，经典地，有：

$$q_n = (n-1) + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(q_{j-1} + q_{n-j})$$

$$q_n = 2n\ln n - (4-2\gamma)n + 2\ln n + O(1)$$

其中 γ 是欧拉常数，现在考虑给 Q_n 一个 concentration bound。一个构造鞅的想法是记递归树上前 k 层的分割结果为 $\mathcal{F}_k$，取 Q_n 关于 $(\mathcal{F}_i)$ 的 Doob 鞅。但是以第 1 层划分为例，划分在最边上和最中间造成的差异远超常数级别。因此 $\mathbb{E}[Q_n \mid \mathcal{F}_k]$ 并不满足 Azuma inequality 的使用条件。

回归 Azuma inequality 的证明过程，我们需要给予 $\mathbb{E}[e^{t(X_k - X_{k-1})} \mid \mathcal{F}_{k-1}]$ 一个上界。假设 $\mathcal{F}_{k-1}$ 中记录了第 $k-1$ 层时，各段长度为 $L_1, L_2, \cdots, L_m$，则各个段之间相互独立。定义 $T_j := \mathbb{E}[Q_{L_j} \mid \mathcal{F}_k^{(j)}] - \mathbb{E}[Q_{L_j}]$，则显然

$$|T_j| = |(L_j - 1 + q_{L_1'} + q_{L_2'}) - q_{L_j}| \le L_j$$

上式在“最不平均”的分割时贴近取等，从而

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[e^{t(X_k - X_{k-1})} \mid \mathcal{F}_{k-1}] &= \mathbb{E}[e^{t\sum_{j=1}^{m} T_j}] \\
&= \prod_{j=1}^{n} \mathbb{E}[e^{tT_j}] \\
&\le \prod_{j=1}^{n} \exp\left(\frac{1}{2}t^2 L_j^2\right) \\
&\le \exp\left(\frac{1}{2}t^2 (\max_{j=1}^{m} L_j) n\right) \qquad (*)
\end{aligned}$$

第一个 $\le$ 使用了和证明 Azuma 相同的 Lemma，第二个 $\le$ 把每一项的一个 L_j 放缩成了 $\max L_j$。

Lemma: $\forall 0 < \alpha < 1$，当 $k > \ln\frac{1}{\alpha}$，对于第 k 层的 $L_1, L_2, \cdots, L_m$，有

$$\Pr[\max_{j=1}^{m} L_j \ge \alpha n] \le \alpha \left(\frac{2e\ln\frac{1}{\alpha}}{k}\right)^k$$

> 看作如下过程：第 1 层随机采样 $U_1 \sim \mathrm{U}[0,1]$，将长度为 n 的区间划分为长度为 $U_1 n$ 和 $(1-U_1)n$ 的两段，然后第二层采样 $U_2, U_3 \sim \mathrm{U}[0,1]$，分别表示左、右区间的划分点，然后第三层再采样 $U_4, U_5, U_6, U_7 \sim \mathrm{U}[0,1]$......
>
> 第 k 层划分结束产生 2^k 个区间，L_j 的长度可以视作 $n \cdot U_1 \cdot U_{2/3} \cdots U_{2^{k-1}/\cdots/2^k-1}$，上式即
>
> $$\begin{aligned}\Pr\left[\left(\max_{j=1}^{2^k}\prod_{i=1}^{k} n \cdot U_1 \cdots\right) \ge \alpha n\right] &\le 2^k \cdot \Pr\left[\prod_{i=1}^{k} U_i \ge \alpha\right] \\ &\le 2^k \cdot \Pr\left[\sum_{i=1}^{k} \ln U_i \ge \ln\alpha\right]\end{aligned}$$

> 注意到 $-\ln U_i \sim \text{Exp}(1)$，从而 $-\sum_{i=1}^k \ln U_i \sim \Gamma(n,1)$，
>
> $$\begin{aligned}\Pr\left[\sum_{i=1}^k \ln U_i \geq \ln\alpha\right] &\leq \Pr_{X\sim\Gamma(k,1)}[-X \geq \ln\alpha] \\ &= \min_{t>0} \Pr_{X\sim\Gamma(k,1)}[(\alpha e^X)^t \leq 1] \\ &= \min_{t>0} \mathbb{E}_{X\sim\Gamma(k,1)}[(\alpha e^X)^t] \\ &= \min_{t>0} \alpha^t(1-t)^{-k}\end{aligned}$$
>
> 当 $1-t = k/\ln\dfrac{1}{\alpha}$ 时，上式为 $\alpha\left(\dfrac{e\ln\frac{1}{\alpha}}{k}\right)^k$，结合 union bound 给出的 2^k 原命题得证。

接下来我们分 3 个阶段分析快速排序过程：

1. 对于前 k_1 层，比较次数不超过 $k_1 n$
2. 对于 $k_1+1\sim k_2$ 层，高概率有 k_1 层的 $\max L_j \leq \alpha n$ (1)，从而 $(*) \leq \exp\left(\dfrac{1}{2}t^2\alpha n^2\right)$
3. 对于 k_2 层，高概率有 $\max L_j < 2$ (2)，从而算法停止。

Theorem: $\forall\varepsilon>0$，$\Pr[|Q_n - q_n| \geq \varepsilon q_n] \leq n^{-(2+o(1))\varepsilon\ln\ln n}$

> 根据上述 Lemma，事件 $(1),(2)$ 均发生的概率 $\geq$
>
> $$1-\alpha\left(\frac{2e\ln\frac{1}{\alpha}}{k_1}\right)^{k_1} - \frac{2}{n}\left(\frac{2e\ln\frac{n}{2}}{k_2}\right)^{k_2}$$
>
> 假设这两个事件发生，对于 $k_1+1\sim k_2$ 层，根据 $(*)$，类比于 Azuma inequality 得到
>
> $$\Pr[|Q_n-q_n| \geq k_1 n + \lambda] \leq 2\exp\left(-\frac{\lambda^2}{2(k_2-k_1)\alpha n^2}\right)$$
>
> 只需取得 $k_1 n+\lambda \leq \varepsilon q_n$，并让上述 3 个概率之和为 $n^{-(2+o(1))\varepsilon\ln\ln n}$ 时，原命题即证毕。

接下来为琐碎的调参工作，首先希望 k_2 尽量小，取 $k_2 = (\ln n)(\ln\ln n)$，则

$$\frac{2}{n}\left(\frac{2e\ln\frac{n}{2}}{k_2}\right)^{k_2} \sim \exp\left((\ln n)(\ln\ln n)(-\ln\ln\ln n)\right)$$

接下来为了 k_1 尽量大，但必须有 $k_1 \leq n^{-1}(\varepsilon q_n - \lambda) \sim 2\varepsilon\ln n - \dfrac{\lambda}{n}$，这里希望 $2\varepsilon\ln n$ 是主导项，需要 $\lambda = o(\varepsilon n\ln n)$。从而可以令 $k_1 = 2\varepsilon\ln n - \dfrac{2\lambda}{n}$

$$2\exp\left(-\frac{\lambda^2}{2(k_2-k_1)\alpha n^2}\right) \sim \exp\left(-\frac{\lambda^2}{(\ln n)(\ln\ln n)n^2\alpha}\right) \qquad (A)$$

同时有（注意 $\alpha < 1$）

$$\alpha\left(\frac{2e\ln\frac{1}{\alpha}}{k_1}\right)^{k_1} \sim \exp\left(2\varepsilon\ln n\ln\ln\frac{1}{\alpha}\right) \qquad \text{(B)}$$

(A) 式希望 λ 尽可能大一些，故取 $\lambda = \dfrac{\varepsilon n\ln n}{\ln\ln n}$，(A)式变为

$$\exp\left(\frac{\varepsilon^2\ln n\ln\ln n}{\alpha}\right)$$

通过权衡两式，取 $\alpha = \dfrac{\varepsilon^2}{\ln\ln n}$，则 (A) 式为 $\exp(-\ln n(\ln\ln n)^2)$，(B) 式为

$$\exp(-2\varepsilon\ln n\ln\ln n + O(\ln\ln\ln n))$$

Corollary: $\forall\varepsilon > 0$，$\Pr[|Q_n - q_n| \geq \varepsilon q_n] = n^{-(2+o(1))\varepsilon\ln\ln n}$

Optional Stopping Theorem

Definition (Stopping time): $(\mathcal{F}_i)$ 是一组 filter，一个 r.v. $T \in \{0, 1, \cdots\} \cup \{\infty\}$ 是一个 $(\mathcal{F}_i)$ 的**停时**如果事件 $T = i$ 是 $\mathcal{F}_i$-可测的。

Theorem (Optinal stopping theorem): (X_i) 是一个鞅，T 是一个关于 $(\mathcal{F}_i)$ 的停时，则当下面条件成立时：

1. $\Pr[T < \infty] = 1$
2. $\mathbb{E}[|X_T|] < \infty$
3. $\mathbb{E}[X_i \cdot 1\{T > i\}] \to 0$ 当 $i \to \infty$ 时。

或者更强一些，满足：

1. $\mathbb{E}[T] < \infty$
2. $\mathbb{E}[|X_i - X_{i-1}| \mid \mathcal{F}_i] \leq c$ 对任意 i

则此时有 $\mathbb{E}[X_T] = \mathbb{E}[X_0]$。

Gambler's Ruin

考虑从 0 处开始随机游走，$1/2$ 概率 $+1$，$1/2$ 概率 -1。第一次到达 $-a$ 或 b 的时候停止。

定义 T 为上述停时，可以验证坐标位置 (X_i) 是一组鞅，并且满足停时定理的条件，则

$$\mathbb{E}[X_T] = p\cdot(-a) + (1-p)\cdot b = 0$$

解出 $p = \dfrac{b}{a+b}$，即首先碰到 $-a$ 的概率。

接下来定义 $Y_i = X_i^2 - i$ 以分析 $\mathbb{E}[T]$。

Claim: (Y_i) 是一组关于 (X_i) 的鞅。

> $$\mathbb{E}[Y_i \mid X_1, X_2, \cdots, X_{i-1}] = \frac{1}{2}\left((X_{i-1}-1)^2 + (X_{i-1}+1)^2\right) - i = X_{i-1}^2 - (i-1) = Y_{i-1}$$

从而 $\mathbb{E}[Y_T] = \mathbb{E}[X_T^2] - \mathbb{E}[T] = \mathbb{E}[Y_0] = 0$，即 $\mathbb{E}[T] = \mathbb{E}[X_T^2] = a^2\dfrac{b}{a+b} + b^2\dfrac{a}{a+b} = ab$。

Lecture 19 - 2025 / 4 / 24

Ballot

有两个竞选者 A, B，分别收到 a, b 张票。假设选票按随机顺序计入，$a > b$，则 A 的选票数量一直 $>$ B 的选票数量的概率是多少。

定义 S_k 为 k 轮后 A, B 的选票数量之差，则 $S_n = a - b$。定义 $X_k = \dfrac{S_{n-k}}{n-k}$，即倒过来看，$X_0 = \dfrac{a-b}{a+b}$。

Claim: (X_k) 是鞅。

> 在给定 X_{k-1} 的情况下，此时 A, B 的选票数量 a', b' 满足 $X_{k-1} = \dfrac{a'-b'}{a'+b'}$。因此
>
> $$\begin{aligned}\mathbb{E}[X_k \mid X_{k-1}] &= \frac{a'}{a'+b'}\cdot\frac{(a'-1)-b'}{a'+b'-1} + \frac{b'}{a'+b'}\cdot\frac{a'-(b'-1)}{a'+b'-1} \\ &= \frac{a'(a'-1)-b'(b'-1)}{(a'+b')(a'+b'-1)} \\ &= \frac{(a'-b')(a'+b'-1)}{(a'+b')(a'+b'-1)} = X_{k-1}\end{aligned}$$

定义 $T = \min\{k \mid X_k = 0\}$ 或者 $n-1$ 如果 k 不存在。

- 如果 A 一直领先，则 $T = n-1$，故 $X_T = X_{n-1} = S_1 = 1$
- 如果存在平票的时刻，则 $X_T = 0$。

从而第一种情况的概率，即答案为 $\mathbb{E}[X_T] = \mathbb{E}[X_0] = \dfrac{a-b}{a+b}$。

Submartingale

Definition (sub/supmartingale): (X_i) 是关于 filter $(\mathcal{F}_i)$ 的**下鞅**如果

$$\mathbb{E}[X_i \mid \mathcal{F}_{i-1}] \geq X_{i-1}$$

反之，是**上鞅**如果

$$\mathbb{E}[X_i \mid \mathcal{F}_{i-1}] \le X_{i-1}$$

在满足相应条件下，关于下鞅，有 $\mathbb{E}[X_T] \ge \mathbb{E}[X_0]$；对于上鞅，有 $\mathbb{E}[X_T] \le \mathbb{E}[X_0]$。

基于此可以有一种 bound $\mathbb{E}[T]$ 的方式：

记 $D_i = X_i - X_{i-1}$，假设 (X_i) 是一个鞅，即 $\mathbb{E}[D_i \mid X_1, \cdots, X_{i-1}] = 0$，并且有 $\mathbb{E}[D_i^2 \mid X_1, \cdots, X_{i-1}] \ge \sigma^2$。那么设 $Y_i = X_i^2 - \sigma^2 \cdot i$，从而

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Y_i \mid X_1, \cdots, X_{i-1}] &= \mathbb{E}[X_i^2 \mid X_1, \cdots, X_{i-1}] - \sigma^2 \cdot i \\
&= \mathbb{E}[D_i^2 \mid X_1, \cdots, X_{i-1}] + X_{i-1}^2 - \sigma^2 \cdot i \\
&\ge \sigma^2 + (Y_{i-1} + \sigma^2 \cdot (i-1)) - \sigma^2 \cdot i \\
&= Y_{i-1}
\end{aligned}$$

这表明 (Y_i) 是一个下鞅，从而对于一个停时 T，

$$\mathbb{E}[Y_T] \ge \mathbb{E}[Y_0] \quad \Rightarrow \quad \mathbb{E}[T] \le \frac{\mathbb{E}[X_T^2] - \mathbb{E}[X_0^2]}{\sigma^2}$$

现在考虑一个上鞅 (X_i)，定义在区间 $[0, n]$ 上，$X_0 = s$，满足：

$$\begin{gathered}
\mathbb{E}[D_i \mid X_1, \cdots, X_{i-1}] \le 0 \\
\mathbb{E}[D_i^2 \mid X_1, \cdots, X_{i-1}] \ge \sigma^2
\end{gathered}$$

Claim: 设 T 是第一次到达 0 的时刻，$\mathbb{E}[T] \le \dfrac{2ns - s^2}{\sigma^2} \le \dfrac{n^2}{\sigma^2}$

> 构造 $Y_i = X_i^2 - 2nX_i - \sigma^2 i$，可以验证 Y_i 是一个下鞅，从而
>
> $$\mathbb{E}[Y_T] \ge \mathbb{E}[Y_0] \quad \Rightarrow \quad \mathbb{E}[T] \le \frac{2ns - s^2}{\sigma^2} \le \frac{n^2}{\sigma^2}$$

Random 2-SAT

对于一个有 n 个变量的 2-CNF ϕ，任意选定一个起始赋值 a_0。如果 ϕ 不满足，则任取一个没满足的 clause C_0，任选其中的一个 literal 并翻转之。

Claim: 如果 ϕ 是可满足的，则上述随机算法在期望 $O(n^2)$ 次找到一个合法赋值。

> 任取一个合法赋值 a^*，用 X_i 代表 i 轮后的赋值 a_i 和 a^* 的 Hamming 距离，则当 a_i 仍是不满足的赋值时，
>
> $$|X_i - X_{i-1}| = 1, \quad \Pr[X_i - X_{i-1} = -1] \ge \frac{1}{2}$$
>
> 后者是因为一个错误的 clause 当中所涉及的两个变量，不妨在 a^* 中的赋值是 00，则在 a_{i-1} 中的赋值只可能是 $01, 10, 11$。对于前两者 Hamming 距离期望不变，而对于最后一种情况 Hamming 距离一定 -1

> 。
>
> 因此设 $D_i = X_i - X_{i-1}$，则有
>
> $$\begin{aligned}\mathbb{E}[D_i \mid X_1, \cdots, X_{i-1}] \le 0 \\ \mathbb{E}[D_i^2 \mid X_1, \cdots, X_{i-1}] = 1\end{aligned}$$
>
> 从而根据前述结论，有 $\mathbb{E}[\text{steps to } a^*] \le n^2$。
>
> 注：事实上在上述迭代过程中可能中途即出现 $a_i \ne a^*$ 已经满足了 ϕ 的情况，此时迭代会收敛，因为找不到“错误的 clause”，但这是有助于结论的，故不做考虑。

Lecture 20 - 2025 / 4 / 28

Percolation on d-Regular Graphs

Theorem: G 为 n 顶点的 d-正则图，其中 $3 \le d \le n-1$。用 $\mathcal{C}_1$ 代表 G 上的 p-渗滤的最大的连通分支，其中 $p = \dfrac{1}{d-1}$，则对任意 $A > 0$:

$$\Pr[|\mathcal{C}_1| \ge An^{2/3}] \le \frac{\alpha}{A^{3/2}}$$

其中 α 是一个 universal 常数。

考虑选定一个点 v 开始分支过程，用 X_t 表示当前“前沿”点的数量，每次展开一个“前沿”点。初始 $X_0 = 1$，于是

$$X_t = X_{t-1} - 1 + \mathcal{B}\left(d-1, \frac{1}{d-1}\right)$$

可以看出 (X_t) 是鞅，我们关注的是 $X_T = 0$ 的时刻。

Lemma: 假设 (X_t) 是关于 $(\mathcal{F}_t)$ 的鞅，$X_0 = 1, X_t \ge 0$，定义停时 $T = \min\{k, \min\{t \mid X_t = 0 \vee X_t \ge h\}\}$，那么如果满足

- （方差有下界）$\mathrm{Var}[X_t \mid \mathcal{F}_{t-1}] \ge \sigma^2 > 0$，对于 $X_t > 0$
- （越界不太多）$\mathbb{E}[X_T^2 \mid X_T \ge h] \le Dh^2$

那么就有 $\Pr[\forall t \le k, X_t > 0] \le \dfrac{1}{h} + \dfrac{Dh}{k\sigma^2}$。

> 首先所求即 $\Pr[X_T \ne 0] \le \Pr[T \ge k] + \Pr[X_T \ge h]$。
>
> 容易根据 Markov 不等式得到 $\Pr[X_T \ge h] \le \dfrac{\mathbb{E}[X_T]}{h} = \dfrac{1}{h}$。

> 考虑 $Y_t := X_t^2 - hX_t - \sigma^2 t$，易见 (Y_t) 是下鞅，从而 $1 - h = \mathbb{E}[Y_0^2] \le \mathbb{E}[Y_T^2] \le \mathbb{E}[X_T^2] - h\mathbb{E}[X_T] - \sigma^2\mathbb{E}[T]$。
>
> 注意到 $\mathbb{E}[X_T^2] - h\mathbb{E}[X_T]$ 在 $X_T < h$ 时是负的，故 $\le \Pr[X_T \ge h] \cdot (Dh^2 - h^2) \le (D-1)h$。于是立刻可以得到 $\mathbb{E}[T] \le Dh/\sigma^2$。
>
> 再根据 Markov 不等式，有 $\Pr[T \ge k] \le \dfrac{Dh}{k\sigma^2}$。

我们考虑将上述引理应用到 (X_t) 上。易见方差 $\sigma^2 = \dfrac{d-2}{d-1} \ge \dfrac{1}{2}$，于是只需关注 $X_T \ge h$ 时的情况，我们针对最后一步展开。

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[X_T^2 \mid X_T \ge h] &\le \mathbb{E}_{Z\sim\mathcal{B}(d-1,1/(d-1))}[(h+Z)^2] \\
&\le h^2 + 2h + 2 \le 2h^2 \quad (\forall h \ge 3)
\end{aligned}
$$

于是根据 Lemma，对于任何 $h \ge 3$，都有 $\Pr[\forall t \le k, X_t > 0] \le \dfrac{1}{h} + \dfrac{4h}{k}$，取 $h = \dfrac{\sqrt{k}}{2}$ 得到最优概率 $\dfrac{2}{\sqrt{k}}$，即设 $C(v)$ 表示从 v 开始分支过程的连通分支大小，则有 $\Pr[C(v) \ge k] \le \dfrac{2}{\sqrt{k}}$。下证 Theorem。

> 如果直接对所有 v 使用 union bound，则将得到 $\Pr[\exists v, C(v) \ge k] \le \dfrac{2n}{\sqrt{k}}$，这显然对于 $k = O(n^{2/3})$ 是一个不好的界限。我们可以巧妙地将分母再乘一个 k。
>
> 考虑用 N_k 代表位于 $\ge k$ 个点的连通分支的点数，则 $\mathbb{E}[N_k] = n\Pr[C(v) \ge k] = \dfrac{2n}{\sqrt{k}}$。根据 Markov 不等式，有 $\Pr[N_k \ge k] \le \dfrac{2n}{k^{3/2}}$。取 $k = An^{2/3}$，则有
>
> $$\Pr[|\mathcal{C}_1| \ge An^{2/3}] \le \frac{2}{A^{3/2}}$$

Lecture 21 - 2025 / 5 / 8

Lovász Local Lemma

Lemma: 设 $A_1, \cdots, A_n$ 是一系列“坏事件”，$\Pr[A_i] \le p$，并且每个 A_i 独立于除最多 d 个其他事件 A_j 之外的所有事件。如果 $ep(d+1) \le 1$，则

$$\Pr\left[\bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}\right] > 0$$

Claim: 对于任意任何 $S \subseteq \{1, \cdots, n\}$，对任意 i，有 $\Pr\left[A_i \mid \bigcap_{j\in S} \overline{A_j}\right] \le \dfrac{1}{d+1}$。

> 对 $m := |S|$ 归纳，$m=0$ 时 $\Pr[A_i] \le p \le \frac{1}{e(d+1)} < \frac{1}{d+1}$。
>
> 将 S 分为 $S_1 = S \cap D_i, S_2 = S \backslash S_1$，其中 D_i 为和 A_i 有关的事件集合。
>
> $$\Pr\left[A_i \mid \bigcap_{j \in S} \overline{A_j}\right] = \frac{\Pr\left[A_i \cap \bigcap_{j \in S_1} \overline{A_j} \mid \bigcap_{k \in S_2} \overline{A_k}\right]}{\Pr\left[\bigcap_{j \in S_1} \overline{A_j} \mid \bigcap_{k \in S_2} \overline{A_k}\right]}$$
>
> 分子 $\le \Pr\left[A_i \mid \bigcap_{k \in S_2} \overline{A_k}\right] \le \Pr[A_i]$。
>
> 对于分母，不妨设 $S_1 = \{1, 2, \cdots, |S_1|\}$。
>
> $$\begin{aligned}\Pr\left[\bigcap_{j \in S_1} \overline{A_j} \mid \bigcap_{k \in S_2} \overline{A_k}\right] &= \prod_{j=1}^{|S_1|}\left(1 - \Pr\left[A_j \mid \bigcap_{j'<j} \overline{A_{j'}} \cap \bigcap_{k \in S_2} \overline{A_k}\right]\right) \\ &\ge \left(1 - \frac{1}{d+1}\right)^{|S_1|} \\ &\ge \left(1 - \frac{1}{d+1}\right)^{d} > \frac{1}{e}\end{aligned}$$
>
> 从而原式 $\le \frac{p}{1/e} = ep \le \frac{1}{d+1}$，根据归纳法原命题得证。

根据 Claim，我们有

$$\begin{aligned}\Pr\left[\bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}\right] &= \prod_{i=1}^{n}\left(1 - \Pr\left[A_i \mid \bigcap_{j<i} \overline{A_j}\right]\right) \\ &\ge \left(1 - \frac{1}{d+1}\right)^{n} > 0\end{aligned}$$

从而 LLL 得证。

Example: k-SAT

Claim: 任何 k-CNF φ，如果每个变量都出现在至多 $\frac{2^{k-2}}{k}$ 个 clause 里，则 φ 是可被满足的。

> $A_i :=$ 第 i 个 clause 不满足，则 $\Pr[A_i] = 2^{-k} = p$，同时 $d = k \cdot \frac{2^{k-2}}{k} = 2^{k-2}$。容易验证此时 LLL 的条件满足。

Lecture 22 - 2025 / 5 / 12

Packet Routing

考虑给定一张无向图 G，第 i 个数据包想从 $s_i \to t_i$，沿着固定的路径 P_i。但是每条边每个时刻只能通过一个数据包。我们想要设计一个调度方案，使得传输完所有数据包的总时间最少。

定义 c_e 为经过 e 的路径数量，$c = \max\{c_e\}$，d 为所有路径 P_i 长度的最大值。显然答案必须 $\geq \max\{c, d\}$。

Theorem: 存在一种调度方案满足时间为 $O(c+d)$ 且只有常数大小的缓冲区。

Theorem': 存在一种调度方案满足时间为 $O((c+d)2^{O(\log^\star(c+d))})$ 且只有 $O((\log d)2^{O(\log^\star(c+d))})$ 大小的缓冲区。这里 $\log^\star$ 的意思是通过不断取 $\ln$ 直到变成常数规模所需要的次数。

不失一般性设 $c = d$。考虑尝试安排数据包 i 在起点等待 Z_i 时间，然后直接不等待地沿着路径 P_i 完成传输。这里 Z_i 是独立均匀从 $\{1, 2, \cdots, \alpha d\}$ 中抽取，$\alpha > 1$ 是待确定常数，显然这种做法的时间开销是 $(1+\alpha)d$，正确性待证。

Claim: 将时间切分为 $\ln d$ 长度的帧，可以将问题分割为若干子问题，其中每个数据包想从这个帧内的起点到这个帧内的终点。以正概率每个子问题中的边的冲突次数（经过的路径数量）为 $\ln c$。

> 对于每条边 e 定义坏事件 A_e 代表在某个帧内经过 e 的路径数量超过 $\ln c$。
>
> 注意到 A_e 只和 $A_{e'}$ 相关，其中 e, e' 存在公共经过的数据包。由于只有至多 c 个数据包经过 e，每个数据包经过的路径长度至多 d，因此 A_e 至多依赖 $cd = d^2$ 个坏事件。
>
> 接下来分析 $\Pr[A_e]$。对于任何一个数据包，因为帧的长度是 $\ln d$，所以对于一个特定的帧，在其中任何数据包经过 e 的概率仅为 $\ln d / \alpha d$。于是该帧内经过 e 的总边数 $\sim \mathcal{B}(c, \ln d/\alpha d)$，因此 $\Pr[A_e] = (1+\alpha)d \cdot \Pr[\mathcal{B}(c, \ln d/\alpha d) > \ln c]$，即对所有 $< (1+\alpha)d$ 个帧 union bound。
>
> 根据 Chernoff bound，
>
> $$\Pr[A_e] \leq (1+\alpha)d \cdot \left(\frac{ce\ln d}{d\alpha \ln c}\right)^{\ln d} = (1+\alpha)d^{2-\ln\alpha}$$
>
> 因此只需要取 α 足够大，即可满足 $\Pr[A_e] < 1/e(d^2+1)$。

利用这一性质，可以将问题拆分为 $(1+\alpha)d/\ln d$ 个子问题，参数分别为 $\ln c$ 和 $\ln d$，然后分别递归解决。通过不断取 $\ln$，最终问题会变成常数规模，于是我们可以构造一个确定的调度方案。最终通过合并解决原问题。由于递归层数是 $O(\log^\star(c+d))$ 的，每层总长度会伸长 $1+\alpha$ 倍，因此总时间为 $d2^{O(\log^\star(c+d))}$，同时不同帧之间不会影响，因此缓冲区大小为 $O((\log d)2^{O(\log^\star(c+d))})$。

Asymmetric LLL

Lemma (General LLL): 设 $A_1, \cdots, A_n$ 是一系列坏事件，$D_i \subseteq \{A_1, \cdots, A_n\}$ 是 A_i 相关的事件集合，如果存在实数 $x_1, \cdots, x_n \in [0, 1)$ 使得对所有的 i，有 $\Pr[A_i] \le x_i \prod_{j \in D_i}(1 - x_j)$，则 $\Pr[\bigcap_{i=1}^n \overline{A_i}] \ge \prod_{i=1}^n (1 - x_i) > 0$。

通过带入 $x_i = 2\Pr[A_i]$，有

Corollary (Asymmetric LLL): 同上，如果 $\sum_{j \in D_i} \Pr[A_j] \le 1/4$，则 $\Pr[\bigcap_{i=1}^n \overline{A_i}] \ge \prod_{i=1}^n (1 - 2\Pr[A_i]) > 0$。

Frugal Graph Coloring

Definition: 称 G 的一个合法染色是 β-frugal 的，如果对于任何 $v \in G$ 的邻居，都没有一种颜色出现了多于 β 次。

Theorem: 如果 G 的最大度数 $\Delta \ge \beta^\beta$，则 G 有一种用 $16\Delta^{1+1/\beta}$ 种颜色的 β-frugal 染色。

> 对于 $\beta = 1$，有 $16\Delta^2$ 种颜色，这是容易做到的。
>
> 对于 $\beta \ge 2$，对 G 随机均匀 $Q := 16\Delta^{1+1/\beta}$ 染色。下面证明有正数概率是满足条件的即可。有两类坏事件：
>
> 1. A_{uv}：相邻的两点 u, v 染成同一种颜色。
> 2. $B_{u_1, u_2, \cdots, u_{\beta+1}}$：某一个点的邻居 $u_1, u_2, \cdots, u_{\beta+1}$ 染成了同一种颜色。
>
> 容易看出 $\Pr[A_{uv}] = 1/Q, \Pr[B_{u_1, \cdots, u_{\beta+1}}] = 1/Q^\beta$。对于 A 类事件，它与至多 2Δ 个 A 类事件、$2\Delta\binom{\Delta}{\beta}$ 个 B 类事件相关；对于 B 类事件，它与至多 $(\beta+1)\Delta$ 个 A 类事件、$(\beta+1)\Delta\binom{\Delta}{\beta}$ 个 B 类事件相关。可见 B 类事件的相关性更强，我们对其验证 Asymmetric LLL 的使用条件：
>
> $$\begin{aligned}&\left((\beta+1)\Delta \cdot \frac{1}{Q}\right) + \left((\beta+1)\Delta\binom{\Delta}{\beta} \cdot \frac{1}{Q^\beta}\right)\\ \le\ & \frac{(\beta+1)\Delta}{Q} + \frac{(\beta+1)\Delta^{\beta+1}}{\beta! Q^\beta}\\ \le\ & \frac{\beta+1}{16\Delta^{1/\beta}} + \frac{\beta+1}{\beta! 16^\beta} \le \frac{\beta+1}{16\beta} + \frac{\beta+1}{\beta! 16^\beta} < 1/4\end{aligned}$$
>
> 因此满足 Asymmetric LLL 的使用条件，得证。

Lecture 23 - 2025 / 5 / 15

Markov Chains

Definition: 一个 Markov 链是一列随机变量 $(X_t)_{t=0}^\infty$，满足

$$\Pr[X_t = y \mid X_{t-1} = x, X_{t-2}, \cdots, X_0] = \Pr[X_t = y \mid X_{t-1} = x] = P(x, y)$$

其中 $P(x,y)$ 是一个转移概率，P 是行和为 1 的矩阵。

我们有 $p_x^{(t)} = p_x^{(0)} P^t$，其中 $p_x^{(0)}$ 是从 x 出发的 one-hot 初始分布。

Definition (irreducible): $\forall x, y$, $\exists t$ s.t. $p_x^{(t)}(y) > 0$

Definition (aperiodic): $\forall x, y$, $\gcd\{t \mid p_x^{(t)}(y) > 0\} = 1$

Stationary Distribution

Theorem (Fundamental Theorem): 如果 P 是不可约且非周期的，则存在唯一的平稳分布 π，满足 $\pi P = \pi$，且 $p_x^{(t)}(y) \xrightarrow{t \to \infty} \pi(y) \quad \forall x, y$。这里 π 实际上是 P 特征值为 1 的唯一左特征向量。

Observation 1: 如果 P 是对称的，则 π 是均匀分布。

Observation 2: 如果 P 列和也为 1，则 π 是均匀分布。

Observation 3: 如果 P 关于某个分布 π 可反的，即 $\pi(x)P(x,y) = \pi(y)P(y,x)$，则 π 是平稳分布。

Metropolis Process

给定一个大集合 Ω 和权重 $w : \Omega \to \mathbb{R}^+$，希望设计一个稳态分布为 $\pi(x) = w(x)/Z$ 的 Markov 链，其中 $Z = \sum_{x \in \Omega} w(x)$，并且我们假定 Z 是不知道的，或者正是我们想求的。

大空间采样过程给定将 Ω 连接起来的无向图，以及位于 x 时抽取邻居的分布 $\kappa(x,y) > 0$，并且有 $\kappa(x,y) = \kappa(y,x)$，我们构造 Markov 链如下：

- 在 x 时，抽取一个邻居 y，概率为 $\kappa(x,y)$。
- 以概率 $\min\{1, w(y)/w(x)\}$ 接受 y，否则停留在 x。

Claim: 由大空间采样构造出的 Markov 链的平稳分布为 $\pi(x) = w(x)/Z$。

> 不妨设 $w(x) \geq w(y)$。当 x, y 不是邻居时，$\pi(x)P(x,y) = \pi(y)P(y,x) = 0$。当 x, y 是邻居时，
>
> $$\pi(x)P(x,y) = \frac{w(x)}{Z} \cdot \kappa(x,y) \frac{w(y)}{w(x)} = \frac{w(y)}{Z} \kappa(x,y) = \pi(y)P(y,x)$$
>
> 最后一个等号是因为 $\kappa(x,y) = \kappa(y,x)$。

事实上，如果不满足 $\kappa(x,y) = \kappa(y,x)$，我们只需将接受概率修改为 $\min\{1, (w(y)\kappa(y,x))/(w(x)\kappa(x,y))\}$。

Lecture 24 - 2025 / 5 / 19

Mixing Time

Definition (Vartiation Distance): 对于两个 Ω 上的分布 μ, ξ，定义

$$\|\mu - \xi\| = \frac{1}{2}\sum_{x\in\Omega} |\mu(x) - \xi(x)| = \max_{A\subseteq\Omega} |\mu(A) - \xi(A)|$$

Definition: 对于一个不可约无周期的 Markov 链，定义时间 t 的距离为 $\Delta(t) = \max_{x\in\Omega} \|\pi - p_x^{(t)}\|$。

Definition (Mixing Time): 定义 τ_{mix} 为混合时间：$\tau_{\text{mix}} = \min\{t \mid \Delta(t) \le 1/2e\}$。

Fact: $\Delta(\tau_{\text{mix}}\lceil\ln\epsilon^{-1}\rceil) \le \epsilon$

> 通过 coupling 的方式可以证明 $\Delta(kt) \le (2\Delta(t))^k$。

Definition (Strong Stationary Time): 停时 T 是一个强稳定时间，如果停下来时可以保证收敛 $\Pr[X_t = y \mid T = t] = \pi(y)$。

Claim: $\Delta(t) \le \Pr[T > t]$

> 虽然 $\Delta(t)$ 是一个固定的数，但我们可以对它求期望
>
> $$\begin{aligned}\mathbb{E}[\Delta(t)] &= \Pr[T > t]\cdot\mathbb{E}[\Delta(t) \mid T > t] + \Pr[T \le t]\cdot\mathbb{E}[\Delta(t) \mid T \le t] \\ &\le \Pr[T > t]\cdot 1 + \Pr[T \le t]\cdot 0 = \Pr[T > t]\end{aligned}$$

Example: Top-in-at-Random

考虑一种洗牌方式：每次把最顶上的牌插入随机位置。

Claim: 这种洗牌方式的混合时间为 $O(n\log n)$。

> 用 T 表示原本最底下的牌被随机插入的时刻，则 T 是一个强稳定时间。可见 $T = T_1 + T_2 + \cdots + T_{n-1} + 1$，其中 T_i 表示从位置 i 变动到 $i+1$ 所需要的时间。每个 T_i 的分布是几何分布，期望为 n/i，故 $\mathbb{E}[T] = O(n\log n)$。根据 Markov 不等式，$\tau_{\text{mix}} \le O(n\log n)$。

Example: Riffle Shuffle

考虑一种洗牌方式：每次把牌按照 $\mathcal{B}(n, 1/2)$ 分成两堆，然后随机均匀交叉。它的逆过程是，随机将每张牌标记为 $0/1$，然后将 0 的牌挪到上面，1 的牌挪到下面。

Claim: 这种洗牌方式的混合时间 $\le 2\log_2 n + O(1)$。

> 将每轮的编号串联为一个二进制串，用 T 表示每张牌被唯一标号确定的时间，也即给每张牌随机抽样 $[0, 2^T)$ 内的编号，能够做到不重复的时间。

> 根据生日悖论，n 个人从 cn^2 大小的集合抽取生日，有生日冲突的概率渐进趋向 $1-\exp(-1/2c)$。因此，只需 $1-\exp(-1/2c)\le 1/2e$ 且 $2^t\ge cn^2$，则有 $\tau_{\text{mix}}\le 2\log_2 n+O(1)$。
>
> 另一种看法是，对于固定的两张牌 (x,y)，无法被分开的概率为 2^{-t}，根据 union bound，只需要 $t=O(\log n)$ 即可使得 $n^2 2^{-t}\le 1/2e$。

Coupling

Definition (Coupling): 设 $(X_t),(Y_t)$ 为一个 Markov 链的两个样本，称它们是一个耦合，如果

1. 边际上 X_t 和 Y_t 的分布相同，即 $\Pr[X_t=y]=\Pr[Y_t=y]$；
2. $X_t=Y_t$ 时，$X_{t+1}=Y_{t+1}$。

Definition (Meeting Time): T_{xy} 是从 x,y 开始的两个 Markov 链的耦合的第一次相遇时间。即 $T_{xy}=\min\{t\mid X_t=Y_t,X_0=x,Y_0=y\}$。

Claim: $\Delta(t)\le\max_{x,y}\Pr[T_{xy}\ge t]$

> 首先注意到，对于任何两个 r.v. X,Y，都有 $\Pr[X\ne Y]\ge\|P_X-P_Y\|$。
>
> 从而 $\Delta(t)=\max_x\|P_x^{(t)}-\pi\|\le\max_{x,y}\|P_x^{(t)}-P_y^{(t)}\|\le\max_{x,y}\Pr[X_t\ne Y_t\mid X_0=x,Y_0=y]\le\max_{x,y}\Pr[T_{xy}\ge t]$。其中第一个不等号是因为 π 可以写作 $P_y^{(t)}$ 的线性组合 $\pi=\sum_y\pi(y)P_y^{(t)}$：
>
> $$\pi(x)=(\pi P^t)(x)=\sum_y\pi(y)P^t(y,x)=\sum_y P_y^{(t)}(x)\pi(y)$$

Corollary: $\tau_{\text{mix}}\le 2e\max_{x,y}\mathbb{E}[T_{xy}]$

> 根据 Markov 不等式，$\Pr[T_{xy}\ge t]\le\mathbb{E}[T_{xy}]/t$，因此 $\Delta(t)\le\max_{x,y}\mathbb{E}[T_{xy}]/t$。当 $t=2e\max_{x,y}\mathbb{E}[T_{xy}]$ 时，$\Delta(t)\le 1/2e$。

Example: Random Transposition Shuffle

考虑一种洗牌方式：每次随机选择两个位置交换。这个洗牌方式的等价描述是，选择一个位置和一张牌 c，将 c 交换到位置 i。

Claim: 这种洗牌方式的混合时间为 $O(n^2)$。

> 用 Coupling 来分析，用 D_t 表示 X_t,Y_t 不同的位置，目标是分析多久之后 $D_t=0$。
>
> 考虑一次选中 (i,c)，
>
> - 如果 c 已经匹配了，则 D_t 不会改变
> - 如果 c 没有匹配，则 D_t 不会上深，且如果 i 位置之前不匹配，将会至少减少 1。

> 因此，如果当前 $D_t = d$，则 $\Pr[D_t \text{ decreases}] \ge (d/n)^2$。于是 $\mathbb{E}[T_{xy}] \le \sum_{d=1}^{n}(n/d)^2 = O(n^2)$。

注：实际上为 $\Theta(n\log n)$。

Lecture 25 - 2025 / 5 / 22

Graph Colorings

给定一张无向图 $G=(V,E)$，最大度数为 Δ，k 种颜色。目标是随机生成一个 k-着色，使得同色不相邻。

考虑如下过程：

1. 随机选择结点 v 和颜色 c
2. 如果 v 可以用 c 染色，即染

Theorem: 如果 $k \ge 4\Delta+1$ 则这个 Markov 链的混合时间为 $O(n\log n)$。

> 定义一个 coupling：X_t 和 Y_t 每次选择同样的 v, c，用 D_t 表示 X_t, Y_t 不同色的结点，$d_t = |D_t|$，目标则是计算 $d_t = 0$ 所需的时间。
>
> - 好的操作：如果 $v \in D_t$，且 c 对 X_t, Y_t 都合法，则 $d_{t+1} = d_t - 1$。好的操作数量 $\ge d_t(k-2\Delta)$。
> - 坏的操作：如果 $v \in V \setminus D_t$，且 c 对 X_t, Y_t 当中的一个合法、另一个不合法，则 $d_{t+1} = d_t + 1$。坏的操作数量 $\le 2d_t\Delta$。这可以通过枚举 v 的异色邻居计数。
>
> 从而 $\mathbb{E}[d_{t+1} \mid d_t] \le d_t + d_t\dfrac{4\Delta - k}{kn} \le d_t(1-1/kn)$。进而 $\mathbb{E}[d_t \mid d_0] \le d_0(1-1/kn)^t$。取 $t = Ckn\log n$，结合 $d_0 \le n$ 有 $\mathbb{E}[d_t] \le 1/2e$。

Theorem: 如果 $k \ge 3\Delta+1$ 则这个 Markov 链的混合时间为 $O(n\log n)$。

> 我们通过设计一个更好的 coupling 来证明。具体而言，X_t 和 Y_t 每次选择同样的 v，但 X_t 选择颜色 c 时：
>
> - 如果 X_t, Y_t 中都可以用 c 染色，则 Y_t 也选择颜色 c。
> - 如果 X_t, Y_t 中都不可以用 c 染色，则 Y_t 也选择颜色 c。
> - 如果 X_t 可以用 c 染色，Y_t 不可以，则 Y_t 尽量选择一个可以染色的颜色。
> - 如果 X_t 不可以用 c 染色，Y_t 可以，则 Y_t 尽量选择一个不可以染色的颜色。
>
> 上述定义的思路是“将 $N_X(v)\setminus N_Y(v)$ 和 $N_Y(v)\setminus N_X(v)$” 尽量配对起来，其中 $N(v)$ 表示与 v 邻居的颜色集合。从而好的操作数量仍然为 $d_t(k-2\Delta)$，而坏的操作数量 $\le d_t\Delta$，缩小了一半。从而好坏操作的差 $\le d_t(3\Delta - k)$。

Theorem: 如果 $k \ge 2\Delta+1$ 则这个 Markov 链的混合时间为 $O(n\log n)$。

> 我们只需对上面的 coupling 进行更为精细的分析。事实上，好坏操作的差为
>
> $$d_t k - \sum_{v \in D_t} |N_X(v) \cup N_Y(v)| - \sum_{v \in V \setminus D_t} \max\{|N_X(v) \setminus N_Y(v)|, |N_Y(v) \setminus N_X(v)|\}$$
>
> 采用贡献法，对于每个 $v \in D_t$ 及其邻居构成的有序二元组 (v, u)，如果 $u \in D_t$，则这条边分别在第一个求和 v 时贡献两次，如果 $u \in V \setminus D_t$，则这条边在第一个求和 v 时贡献一次，在第二个求和 u 时贡献一次。从而总贡献量不超过 $2d_t\Delta$，即好坏操作的差 $\leq d_t(2\Delta - k)$。

Algorithmic LLL

Theorem: 对于任何 k-SAT 问题 ϕ，如果每个变量至多在 $\dfrac{2^{k-d}}{k}$ 个子句出现，则该实例是可满足的，且赋值可以在多项式时间内构造得到。

解的存在性是 LLL 的经典应用，考虑如何构造。首先给 ϕ 随机赋值，然后每次取出一个尚未满足的子句 C，将其中的每个变量重新随机赋值。直到所有子句都满足为止。

```
Solve(ϕ):
    Pick a random assignment of ϕ
    while there is an unsatisfiable clause C
        Fix(C)
Fix(C):
    Replace the variables of C with new random values
    while there is clause D that shares a variable with C that is not satisfied
        Fix(D)
```

下面从 Kolomogrov 复杂度的角度给出证明这个算法终止性证明。

> 考虑随机串是“不可压缩的”，那么进行 F 次修复就需要 Fk 个 bit。但是现在更换方式为记录最终赋值和修复历史 $C_1, C_2, \cdots, C_F$，可以看出通过这些信息足够恢复出所用到的所有随机 bit。因为修复一个 clause 前这个 clause 一定是完全不满足的，而最后一次被修复的信息又可通过最终赋值获得。
>
> 从而记录随机串只需要 $c + n + F(k - d)$ 个 bit，其中 c 是常数。最后一项是因为被 `Solve` 调用的 `Fix` 可以用 $m \log m$ bit 记录，m 是子句数目。而递归调用的 `Fix` 涉及的 clause D 是与 C 有交的，因此只需要 $\log 2^{k-d} = k - d$ bit 记录。
>
> 综上 $c + n + F(k - d) \geq Fk$ 可以推出 F 是多项式级别的。结合随机串高概率 Kolomogrovly random 可知结论成立。