称 $U(\boldsymbol{x}_0,\delta)=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n:|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|<\delta\}$ 为 $\boldsymbol{x}_0$ 为心的 δ 邻域，**球形领域**。

称 $N(\boldsymbol{x}_0,\delta)=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n:|x_i-x_i^0|<\delta,i=1,2,\cdots,n\}$ 为**方形邻域**。

$U(\boldsymbol{x}_0,\delta)\subset N(\boldsymbol{x}_0,\delta)\subset U(\boldsymbol{x}_0,\sqrt{n}\delta)$

$\lim_{k\to\infty}\boldsymbol{x}_k=\boldsymbol{x}_0$ 的充要条件是 $\forall i$，都有 $\lim_{k\to\infty}x_i^k=x_i^0$。

设 $E\subset\mathbb{R}^n$，$\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$。用 E^c 代表 $\mathbb{R}^n\backslash E$。

- 若存在 $\delta>0$，$U(\boldsymbol{x},\delta)\subset E$，则称 $\boldsymbol{x}$ 是 E 的内点，内点构成的集合为 E 的**内部**。
- 若存在 $\delta>0$，$U(\boldsymbol{x},\delta)\cap E=\varnothing$，则称 $\boldsymbol{x}$ 是 E 的外点，外点构成的集合为 E 的外部。
- 若 $\forall\delta>0$，$U(\boldsymbol{x},\delta)\cap E\neq\varnothing$ 且 $U(\boldsymbol{x},\delta)\cap E^c\neq\varnothing$，则称 $\boldsymbol{x}$ 是 E 的边界点，∂E 代表 E 的边界点集，称之为 E 的边集。

内部记作 E°，则外部为 $(E^c)^\circ$，内 + 外 + 边 = 全集。

设 $E\subset\mathbb{R}^n$，若 $E=E^\circ$，则称 E 为**开集**。规定 $\varnothing$ 为开集。

性质：$\mathbb{R}$ 的开集是可数个开区间的并。

> 对于开集 E，$\forall x\in E$，向两边尽量延伸，有 $(l_x,r_x)\subset E$，此时 $\bigcup_{x\in E}(l_x,r_x)=E$，且若两个区间有橡胶，则一定完全相同，因此本质不同的区间数量不超过有理数个（每个区间中一定有有理数）。

任意个开集的并是开集，有限个开集的交是开集。而无限个开集的交则不一定，例如 $\bigcap_{k=1}^{\infty}U(x,\frac{1}{k})=\{x\}$。

设 $E\subset\mathbb{R}^n$，若 E^c 是开集，则称 E 是**闭集**。

对任何开集 $E\subset\mathbb{R}^n$，若 $F=E\cup\partial E$，则可以看出 F 必为闭集。

有限个闭集的并是闭集，任意个闭集的交是闭集。

德·摩根公式：$(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}E_\lambda)^c=\bigcap_{\lambda\in\Lambda}E_\lambda^c$；$(\bigcap_{\lambda\in\Lambda}E_\lambda)^c=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}E_\lambda^c$

闭集的聚点表述：如果 E' 是 E 的全体聚点集合（**导集**），记 $\overline{E}=E\cup E'$ 为 E 的**闭包**。

定理：$E\subset\mathbb{R}^n$ 是闭集充要条件为 $E=\overline{E}$。

> 首先 $E=\overline{E}$ 等价于 $E'\subset E$。
> 如果 E 闭，那么 E^c 开，即 $\forall\boldsymbol{x}\notin E,\exists\delta_{\boldsymbol{x}}$，使得 $U(\boldsymbol{x},\delta_{\boldsymbol{x}})\subset E^c$，从而 $\boldsymbol{x}\notin E'$。
> 如果 $E'\subset E$，那么 $\forall\boldsymbol{x}\notin E$，有 $\boldsymbol{x}\notin E'$，从而 $\exists\delta_{\boldsymbol{x}},U(\boldsymbol{x},\delta_{\boldsymbol{x}})\cap E=\varnothing$，于是 $U(\boldsymbol{x},\delta_{\boldsymbol{x}})\subset E^c$，从而 E^c 开。

闭集套定理：记 $\operatorname{diam}(E)=\sup_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in E}\{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|\}$ 为 E 的**直径**。若非空闭集列 $F_{k+1}\subset F_k,\lim_{k\to\infty}\operatorname{diam}(F_k)=0$，则存在唯一的 $\boldsymbol{x}_0\in\mathbb{R}^n$，使得 $\{\boldsymbol{x}_0\}=\bigcap_{k=1}^{\infty}F_k$。

波尔查诺-魏尔斯特拉斯定理：$\mathbb{R}^n$ 中有界点列必有收敛子列。这个定理等价于 $\mathbb{R}^n$ 中任意有界无穷集一定至少有一个聚点。

设 $\{O_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 是一个开集族，若 $E\subset\bigcup_{\lambda\in\Lambda}O_\lambda$，则称 $\{O_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 是一个**开覆盖**。若 Λ 有限元素，则称为有限开覆盖。

若 E 的任何开覆盖都存在有限子覆盖，则称 E 为**紧集**。

定理：E 为紧集等价于 E 为有界闭集。

> 必要性：能有限覆盖必然有界，倘若 E 不闭，则存在聚点 $\boldsymbol{x}_0\notin E$，定义 $O_{\boldsymbol{x}}=U(\boldsymbol{x},\frac{1}{2}|\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{x}|)$，则 $\{O_{\boldsymbol{x}}\}_{\boldsymbol{x}\in E}$ 是一组开覆盖。如果 E 是紧的，那么应当存在有限开覆盖，但有限必然无法完全覆盖 $\boldsymbol{x}_0$ 附近的小邻域。
> 充分性：倘若不是紧集，那么存在一个开覆盖，不存在有限子覆盖。利用闭集套定理证明，类比于 $\mathbb{R}$ 上的二分法，这里用 2^n 分法，有一个单点需要无穷个开集来覆盖，矛盾。

设函数 $z=f(x,y)$ 在 $N_0((x_0,y_0),\delta_0)$ 内，对每个固定的 $y\neq y_0$，$\lim_{x\to x_0}f(x,y)=\varphi(y)$ 存在，并且 $\lim_{y\to y_0}\varphi(y)=A$，则称 A 是 $f(x,y)$ 趋于 (x_0,y_0) 的先 x 后 y 的**累次极限**。记为 $A=\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0}f(x,y)$。

如果极限存在，且 $\varphi(y)$ 处处存在，那么累次极限一定和函数极限相同。

定理：$E\subset\mathbb{R}^n$，向量函数 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 在 E 上连续，$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y})$ 在 $\boldsymbol{f}(E)$ 上连续，则 $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{f}(x))$ 在 E 上连续。

$D=[\alpha,\beta]\subset\mathbb{R}$，称 D 上的一个 n 维连续函数为 $\mathbb{R}^n$ 的一条**连续曲线**，或**道路/路径**。

设非空集合 E，对 $\forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in E$，都存在 $\boldsymbol{h}(t):t\in[\alpha,\beta]$，使得 $\boldsymbol{h}(\alpha)=\boldsymbol{x},\boldsymbol{h}(\beta)=\boldsymbol{y}$，且 $\boldsymbol{h}([\alpha,\beta])\subset E$，则称 E 是道路**连通**的。连通的开集称为**区域**，称区域 D 的 $D\cup\partial D$ 为一个**闭区域**。若 $\forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in D$，有 $t\boldsymbol{x}+(1-t)\boldsymbol{y}\in D\ (t\in[0,1])$，则称 D 为**凸域**。

定理：E 为紧集，$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 在 E 上连续，则 $\boldsymbol{f}(E)$ 是紧集。

> 首先 $\boldsymbol{f}(E)$ 有界，否则存在 $\{\boldsymbol{x}_k\}$，$|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_k)|\to\infty$，又 E 紧，所以不妨设 $\boldsymbol{x}_k\to\boldsymbol{x}_0$，由连续性应当有 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_k)\to\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)$。
> 再证明闭集。对于 $\boldsymbol{u}\in\boldsymbol{f}(E)'$，存在 $\{\boldsymbol{x}_k\}$，使得 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_k)\to\boldsymbol{u}$，再由 E 紧，不妨设 $\boldsymbol{x}_k\to\boldsymbol{x}_0$，于是 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)\in\boldsymbol{f}(E)$。

推论：$f(\boldsymbol{x})$ 在紧集 E 上连续，则 $f(\boldsymbol{x})$ 能取到 $\max,\min$。

定理：E 连通，$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 在 E 上连续，则 $\boldsymbol{f}(E)$ 是连通集。

> $\forall \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 \in \boldsymbol{f}(E)$，存在 $\boldsymbol{u}_1 = f(\boldsymbol{x}_1), \boldsymbol{u}_2 = f(\boldsymbol{x}_2)$。于是存在道路 $\boldsymbol{h}(t)$ 连接 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$，于是 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{h}(t))$ 是连接 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2$ 的道路。

推论：$f(\boldsymbol{x})$ 在连通集 E 上连续，则满足介值性质。

$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 在紧集 E 上连续，则一定**一致连续**。

$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 是一个一一对应，则存在逆映射 $\boldsymbol{f}^{-1}(\boldsymbol{y})$。如果 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 和 $\boldsymbol{f}^{-1}(\boldsymbol{y})$ 分别连续，则称为 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 是 $E \to \boldsymbol{f}(E)$ 的**同胚映射/变换**。

性质：不存在 $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ 的同胚。

> 假如存在同胚 $\boldsymbol{f}$，$\mathbb{R}^*$ 不是连通集，而 $\boldsymbol{f}(\mathbb{R}^*)$ 一定是连通集。那么 $\boldsymbol{f}^{-1}$ 会把一个连通集映射为不连通集，矛盾。

一元连续函数如果存在反函数则一定连续，但是多元函数不一定。反例如 $\boldsymbol{f}(r, \theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$，反函数在 $(r_0, 0)$ 处处不连续（θ 可以靠近 0，也可以靠近 2π）。