Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

ФГБОУ ВО «Кубанский государственный технологический университет»

Кафедра информационных систем и программирования

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

Методические указания по самостоятельной работе
для студентов всех форм обучения
направления 09.03.03 Прикладная информатика

Краснодар
2019

Составитель: д.ф.-м.н., проф. В.М. Трофимов

Дискретная математика: методические указания по самостоятельной работе студентов всех форм обучения направления 09.03.03 Прикладная информатика /Сост.: В.М. Трофимов; Кубан. гос. технол. ун-т. Каф. Информационных систем. – Краснодар, 2019 – 33с.

Составлены в соответствии с рабочей программой курса «Дискретная математика» для студентов всех форм обучения направления 09.03.03 Прикладная информатика.

Содержат описание целей и задач дисциплины, пояснены смысл и значение изучаемых тем, примеры задач и варианты решений, рекомендации по решению задач и рекомендуемая литература для изучения дисциплины.

Табл.2, Ил.18, Библиогр.: 5 назв

Рецензенты: д-р техн. наук, проф. каф. ИСП В.Н. Марков
канд. техн. наук, доц каф. ИСП А.Г. Мурлин

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

Самостоятельная работа - планируемая учебная, учебно-исследовательская, работа студентов, выполняемая во внеаудиторное (аудиторное) время по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его непосредственного участия (при частичном непосредственном участии преподавателя, оставляющем ведущую роль за работой студентов).

Самостоятельная работа студентов в ВУЗе является важным видом учебной и научной деятельности студента. Самостоятельная работа студентов играет значительную роль в рейтинговой технологии обучения. Государственным стандартом предусматривается, как правило, 50% часов из общей трудоемкости дисциплины на самостоятельную работу студентов (далее СРС). В связи с этим, обучение в ВУЗе включает в себя две, практически одинаковые по объему и взаимовлиянию части – процесса обучения и процесса самообучения. Поэтому СРС должна стать эффективной и целенаправленной работой студента.

Настоящие методические указания составлены в соответствии с рабочей программой курса «Дискретная математика» для подготовки студентов всех форм обучения направления 09.03.03 Прикладная информатика.

Методические указания по самостоятельной работе посвящены теоретическому материалу, который выносится на самостоятельное обучение.

В конце каждой темы приводятся вопросы для самопроверки. Эти темы так же выносятся на экзамен, являются важной частью изучения дисциплины и формирования её компетенций.

1 Цели, задачи и программа дисциплины «Дискретная математика»

1.1. Цели изучения дисциплины «Дискретная математика»

Целью преподавания дисциплины является:

– раскрытие роли дискретной математики в методах и алгоритмах решения как прикладных задач информатики, так и задач системного программирования;
– изучение применяемых в программировании и информатике методов и алгоритмов дискретной математики;
– изучение взаимосвязи различных разделов дискретной математики как между собой, так и с информатикой и программированием;
– обучение основам решения комбинаторных задач на множествах и

графах.

1.2. Задачи дисциплины

Основными задачами содержания дисциплины являются:

– получение представления об основных положениях теории множеств;
– получение представления об основных положениях математической логики;
– получение представления об основных положениях комбинаторной теории;
– получение представления об основных положениях теории графов;
– получение представления о методах и алгоритмах решения основных задач дискретной математики;
– приобретение практического навыка по реализации стандартных методов и алгоритмов дискретной математики на одном из языков программирования;
– приобретение практического навыка по реализации комбинированных и нестандартных методов и алгоритмов дискретной математики на одном из языков программирования;
– приобретение практического навыка по использованию основных методов и алгоритмов решения задач поиска решений и обработки данных методами и алгоритмами дискретной математики и написанию соответствующих программ на одном из языков программирования.

2 Содержание дисциплины

Дисциплина «Дискретная математика» относится к базовой части математического и естественнонаучного цикла дисциплин учебного плана.

Основным содержанием дисциплины является: понятие дискретности, понятие конечного множества, понятие кортежа, понятие бинарного отношения, базовые правила комбинаторики, стандартные комбинации, основы математической логики, понятие графа, основные положения теории графов, понятия цикла, связности, стандартные алгоритмы работы с графами, методы решения типовых задач комбинаторики и теории графов, элементы теории алгоритмов.

2.1. Тематический план дисциплины

№ раздела дисциплины	Наименование раздела дисциплины	Лекции	Лабораторные работы
1	Множества, шаблоны доказательств и индукция	*	*
2	Отношения и функции	*	*
3	Подсчеты и комбинаторика	*	*
4	Теория графов	*	*
5	Математическая логика	*	*

2.2. Содержание лекций

№ раздела дисциплины	Наименование лекции и её содержание	Количество часов	Заочная форма
1	*Лекция №1. Множества: основные определения.* 1. математическое описание множеств (теоретико-множественные обозначения, некоторые важные множества); 2. соотношения между множествами; 3. диаграммы Венна.	2	
1	*Лекция №2. Множества: шаблоны доказательств.* 1. шаблоны доказательств (принадлежность элемента множеству, включение множества, отрицание включения множества, собственное включение множества, равенство множеств, неравенство множеств, импликации и «тогда и только тогда, когда»).	2	
1	*Лекция №3. Операции над множествами.* 1. объединение и пересечение; 2. разность, дополнение и произведение множеств; 3. компьютерное представление множеств.	2	
1	*Лекция №4. Законы де Моргана и новые шаблоны.* 1. законы де Моргана (о связи объединения, пересечения и дополнения); 2. новые шаблоны (доказательство разбором случаев, опровержение при помощи контрпримера, доказательство от противного, непрямое доказательство).	2	

1	*Лекция №5.Принцип включения-исключения. Математическая индукция.* 1. конечная мощность множеств; 2. принцип включения-исключения (подсчёт мощности) для двух, трёх и конечного числа множеств; 3. шаблон для построения доказательства по индукции и приложения к алгоритмам вычисления.	2	
2	*Лекция №6. Бинарные отношения.* 1. бинарные и *n*-арные отношения; 2. операции на бинарных отношениях (обратные отношения, композиция отношений).	2	
2	*Лекция №7.Свойства и виды отношений.* 1.рефлексивные и антирефлексивные, симметричные и антисимметричные, а также транзитивные отношения; 2. рефлексивные, симметричные и транзитивные замыкания; 3. транзитивные замыкания в технике и медицине.	2	
2	*Лекция №8.Отношения эквивалентности и отношения порядка.* 1.отношения эквивалентности: разбиения множеств, классы эквивалентности; 2. отношения частичного порядка и отношения линейного порядка; 3. хранение информации в отношениях и реляционные базы данных.	2	
2	*Лекция №9.Функции.* 1.основные определения, функции *в* и *на,* биекции; 2. операции на функциях (композиция, обратная функция); 3. принцип Дирихле (простой и обобщённый).	2	
3	*Лекция №10. Принципы подсчёта.* 1. принцип сложения и принцип умножения; 2. принцип разбиения множеств: подсчёт элементов дополнения и использование принципа Дирихле; 3.перестановки, размещения и сочетания.	2	
3	*Лекция №11. Подсчёт повторяющихся объектов и комбинаторные тождества.* 1. перестановки и сочетания с повторениями; 2.комбинаторные тождества (Ньютона и Паскаля); 3. треугольник Паскаля.	2	

4	*Лекция №12. Основные понятия теории графов.* 1. понятие графа: полный граф, двудольный граф, подграфы: остовный и индуцированный графы; 2. пример архитектуры распределённых сетей (гиперкуб); 3. задача рукопожатий.	2	
4	*Лекция №13. Циклы, изоморфизм, представление графов в компьютере* 1. маршруты, пути и циклы (гамильтонов цикл); 2. изоморфизм графов; 3. представление графов (матрица смежности, списки смежности).	2	
4	*Лекция №14. Связные графы.* 1. алгоритм поиска в глубину, его корректность и сложность; 2. алгоритм поиска в ширину; 3. отыскание компонент связности (алгоритм).	2	
4	*Лекция №15. Графы-деревья* 1. определение и характеризация деревьев; 2. остовные деревья и алгоритм Краскала; 3. деревья бинарного поиска (алгоритм поиска).	2	
4	*Лекция №16. Ориентированные графы*. 1. основные определения, изоморфизм направленных графов; 2. отыскание цикла в направленном графе, корректность алгоритма; 3. составление алгоритм проверки на связность и вычисления	2	
4	*Лекция №17. Приложения ориентированных графов*. 1. составление расписания: алгоритм топологической сортировки; 2. связность орграфов и разработка маршрутов одностороннего движения; 3. эйлеровы контуры в ориентированных графах.	2	
5	*Лекция №18. Логика высказываний.* 1. высказывания и логика: таблицы истинности, тавтологии; 2. предикаты и кванторы.	2	
	Итого:	36	

3 Варианты задач, решения и рекомендации

***Множества** являются фундаментальным объектом современной математики. На понятии множества строятся все другие понятия. Они также лежат в основе главных методов и приёмов математических **доказательств**. Поэтому множествам и доказательствам необходимо уделить особое внимание – от понимания их свойств зависит всё дальнейшее изучение **дискретной математики**.*

*Чтобы овладеть **теоретико-множественными методами** анализа практических задач, необходимо научиться работать с множествами, осуществлять операции над ними.*

Примеры и решения:

1. Пусть X — множество всех студентов университета. Пусть A — множество студентов первого года обучения, B — множество студентов второго года обучения, C — множество студентов, изучающих дискретную математику, D — множество студентов, специализирующихся в международных отношениях, E — множество студентов, побывавших на концерте в понедельник вечером, а F — множество студентов, которые во вторник занимались до двух часов дня. Используя обозначения теории множеств, опишите следующие множества студентов.

(a) Все студенты второго года обучения, изучающие дискретную математику.

Пример решения. $\{x \in X : x \in B$ и $x \in C\}$.

(b) Все студенты первого года обучения, которые во вторник занимались до двух часов дня.

(c) Все студенты, специализирующиеся в международных отношениях, которые в понедельник вечером побывали на концерте.

(d) Все студенты второго года обучения, которые во вторник занимались до двух часов дня и не специализируются в международных отношениях.

2. Найдите, по крайней мере, два способа заменить многоточия в данных описаниях множеств. **Пример решения:** $\{2, 4, \ldots, 12\}$ можно записать как $\{2n\colon 1 \le n \le 6$ и $n \in \mathbb{N}\}$ или $\{n + 1\colon n \in \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}\}$.

(a) $\{1, 3, \ldots, 31\}$. (b) $\{1, 2, \ldots, 26\}$. (c) $\{2, 5, \ldots, 32\}$.

3. Приведите три описания элементов множества $\{2, 5, 8, 11, 14\}$.

4. Сколько элементов содержит каждое из следующих множеств?

(a) $A = \emptyset$.

(b) $B = \{\emptyset\}$. **Пример решения:** множество B содержит один элемент.

(c) $C = \{\{0, 1\}, \{1, 2\}\}$.

(d) $D = \{0, 1, 2, \{0, 1\}, \{1, 2\}, \{0, 1, 2\}, A\}$.

5. Какие из следующих пар множеств равны? Для каждой пары неравных множеств найдите элемент, который входит в одно множество, и не входит в другое.

(a) $\{0, 1, 2\}$ и $\{0, 0, 1, 2, 2, 1\}$.

(b) $\{0, 1, 3, \{1, 2\}\}$ и $\{0, 1, 2, \{2, 3\}\}$.

(c) $\{\{5, 3, 5, 1, 5\}, \{2, 4, 6\}, \{5, 1, 3, 3\}\}$ и $\{\{1, 3, 5, 1\}, \{6, 4, 2\}, \{6, 6, 4, 4, 6\}\}$. **Пример решения:** эти множества равны, так как содержат одинаковые элементы

(d) $\emptyset$ и $\{x \in \mathbb{N}: x > 1 \text{ и } x^2 = x\}$.

(e) $\emptyset$ и $\{\emptyset\}$.

6. В этой задаче речь идет о следующих множествах:

$A = \{0, 2, 4, 6\}$ $B = \{1, 3, 5\}$ $C = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$,

$D = \emptyset$ $E = \mathbb{N}$ $F = \{\{0, 2, 4, 6\}\}$.

(a) Перечислите подмножества множества A.

(b) Перечислите подмножества множества B. **Пример решения**: подмножествами множества B будут $\{ 1 \}, \{ 2 \}, \{ 3 \}, \{ 1,2 \}, \{1,3 \}, \{ 2,3 \}, \{ 1, 2, 3 \}, \{\emptyset\}$.

(c) Перечислите подмножества множества C.

(d) Перечислите подмножества множества D.

7. Пусть $A = \{n: n \in \mathbb{N} \text{ и } n = 2k + 1 \text{ для некоторого } k \in \mathbb{N}\}$, $B = \{n: n \in \mathbb{N} \text{ и } n = 4k + 1 \text{ для некоторого } k \in \mathbb{N}\}$ и $C = \{m \in \mathbb{N}: m = 2k - 1 \text{ и } k \in \mathbb{N} \text{ и } k \geq 1\}$. Докажите следующие утверждения.

(a) 35 $\in$ A. (b) 35 $\in$ C. (c) 35 $\notin$ B.
Пример решения: число 35 не принадлежит множеству B, потому что для равенства $35 = 4k + 1$ нельзя найти натуральное число k.
(d) A = C. (e) B $\subseteq$ A. (f) B $\subseteq$ C. (g) B $\subset$ A. (h) B $\subset$ C.

8. Пусть $A = \{n\colon n \in \mathbb{N}$ и $n = 3k + 2$ для некоторого $k \in \mathbb{N}\}$, $B = \{n\colon n \in \mathbb{N}$ и $n = 5k - 1$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$ такого, что $k \geq 5\}$ и $C = \{m \in \mathbb{N}\colon m = 6k - 4$ и $k \in \mathbb{N}$ и $k \geq 1\}$. Докажите следующие утверждения.

(a) C $\subseteq$ A. (b) A $\neq$ B. (c) B $\neq$ C. (d) A $\neq$ C. (e) C $\subset$ A.

9. Пусть A, B и C — некоторые множества.

(a) Докажите, что если A $\subset$ B и B $\subseteq$ C, то A $\subset$ C.

(b) Докажите, что если A $\subseteq$ B и B $\subset$ C, то A $\subset$ C.

(c) Докажите, что если A $\subseteq$ B и A $\subsetneq$ C, то B $\subsetneq$ C.

Важнейшую роль в математике играют приёмы доказательств математических утверждений. С этой целью в данном курсе сформулированы и особо выделены шаблоны доказательств: ***принадлежности элемента множеству, вхождения в множество, строгое вхождение в множество, равенство множеств, неравенство множеств, импликация, двойная импликация****. Особую роль играет метод доказательства, опирающийся на принцип математической индукции.*

Задания: Множества, шаблоны доказательств.

1. Пусть A = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,10}, B = {2, 3, 6, 8} и C = {3, 5, 4, 8, 2}.

Найдите выписанные множества:

(a) B $\cup$ C. (b) B $\cap$ C.
Пример решения: B $\cap$ C = {2, 8}
(c) B – C. (d) A – B. (e) A – C.
Пример решения: A – C = {1, 6, 7, 9,10}

2. Пусть U = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}, A = {0, 1, 2, 3}, B = {0, 2, 4} и C = {0, 3, 6, 9}.

(a) Найдите A $\cup$ B, A $\cap$ B, $\overline{\mathrm{A}}$, $\overline{(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})}$ и (B $\cup$ C) – A.

(b) Найдите P (A), P (B), P (A $\cap$ B), P (A) $\cap$ P (B).

(c) Верно ли, что $P(A \cup B) = P(A) \cup P(B)$? Объясните ваш ответ.

(d) Почему не имеет смысла запись $\overline{P(A)}$?

3. Пусть $A = \{0, 3\}$, $B = \{x, y, z\}$. Найдите выписанные множества:

(a) $A \times B$.
Пример решения: $\{(0,x), (0,y), (0,z), (3,x), (3,y), (3,z)\}$
(b) $A \times A \times B$. (c) $B \times A$. (d) $B \times A \times B$.

4. Пусть $X = \{2, 4\}$, $Y = \{1, 4\}$ и $Z = \{0, 4, 8\}$. Постройте следующие множества:

(a) $X \times Y$. (b) $X \times Y \times Z$. (c) $Y \times Z$. (d) $Z \times Y \times X$. (e) $Z \times X \times Y$.

5. Найдите три множества A, B, и C такие, что $A \subseteq B \cup C$, но $A \subsetneq B$ и $A \subsetneq C$.

6. Пусть $A = \{1, 2, \{\{1,2\}\}\}$.

(a) Сколько элементов входит в A? Сколько элементов входит в $P(A)$? Сколько элементов входит в $P(P(A))$?

В пунктах (b)–(m) выясните, верно ли каждое из утверждений, и, если оно не верно, объясните почему.

(b) $1 \in A$. (c) $\{1, 2\} \in A$. (d) $\{\{1, 2\}\} \in A$.

(e) $\emptyset \in A$. (f) $1 \in P(A)$. (g) $\{1, 2\} \in P(A)$.

(h) $\{\{1, 2\}\} \in P(A)$. (i) $\emptyset \in P(A)$. (j) $1 \in P(P(A))$.

(k) $\{1, 2\} \in P(P(A))$. (l) $\{\{1, 2\}\} \in P(P(A))$. (m) $\emptyset \in P(P(A))$.

7. Какие из следующих утверждений верны? Докажите каждое из верных утверждений. Опровергните каждое неверное утверждение, подобрав контрпример.

(a) Множества A и B не пересекаются тогда и только тогда, когда не пересекаются множества B и A. (Будьте внимательны, читая утверждение, –порядок, в котором перечислены множества, может играть роль!)

(b) Множества $A \cup B$ и C не пересекаются тогда и только тогда, когда верны оба следующих утверждения: (i) A и C не пересекаются, и (ii) B и C не пересекаются.

(c) Множества $A \cap B$ и C не пересекаются тогда и только тогда, когда верны оба следующих утверждения: (i) A и C не пересекаются, и (ii) B и C не пересекаются.

(d) Множества A ∪ B и C не пересекаются тогда и только тогда, когда хотя бы одно из следующих утверждения: (i) A и C не пересекаются, и (ii) B и C не пересекаются.

Имеются три вида доказательств, применяющихся в импликациях: ***прямой метод, обратный, контрпример****. Важна научиться применять любой из них в зависимости от смысла задачи и её формулировки.*

8. В пунктах (a) и (b) докажите сформулированные утверждения. В пунктах (c) и (d) приведите контрпримеры, опровергающие эти утверждения.

(a) $A \oplus B = (A \cup B) - (A \cap B)$.

(b) $A \cap (B \oplus C) = (A \cap B) \oplus (A \cap C)$.

(c) $(A \cap B) \oplus (C \cap D) \subseteq (A \oplus C) \cap (B \oplus D)$.

(d) $(A \cup B) \oplus (C \cup D) \subseteq (A \cup C) \oplus (B \cup D)$

Доказательство разбором случаев *часто встречается в сложных задачах дискретной математики, позволяя свести их к набору более простых задач.*

9. Даны четыре произвольных целых числа x_1, x_2, x_3 и x_4, ни одно из которых не четно и не кратно пяти. Докажите, что некоторое последовательное произведение этих целых чисел оканчивается цифрой 1. В последовательное произведение входит один, или два, или три, или все четыре множителя подряд, причем в том порядке, в котором они перечислены в списке x_1, x_2, x_3, x_4.

(*Указание:* Воспользуйтесь разбором случаев).

Контрольные вопросы

- Какие существуют способы описания множеств?
- Как можно определить понятие множества и подмножества?
- Что такое пустое множество?

Для будущих программистов необходимо научиться подсчитывать мощность множеств, опираясь на основную ***теорему подсчёта мощности и принцип включения - исключения****.*

Задания

1. В группе из 35 студентов все биологи или блондины, и других нет. Биологов среди них 27, а блондинов 21. Сколько биологов – блондины? **Пример решения**: воспользуемся правилом включения- исключения; пусть A – множество биологов, а B – множество блондинов. Тогда 35 = |A| + |B| - |A ⋂ B|. Подставляя в формулу |A|=27 и |B| = 21, получаем: число биологов-блондинов равно |A ⋂ B| = 27 + 21 – 35 = 13.
2. В группе режиссуры 33 студента любят фильмы Хичкока, 21 студент любит фильмы Спилберга и 17 студентов любят фильмы обоих режиссеров. Сколько студентов в этой группе, если каждый из них попал в какую-нибудь категорию?
3. В теннисном лагере 39 игроков. Из них 25 человек левши, 22 человека бьют с задней линии двумя руками, и других нет. Сколько левшей бьют с задней линии двумя руками?
4. Руководству факультета иностранных языков нужно было узнать, сколько из 2000 студентов университета не изучают ни одного иностранного языка. Объединив данные по классам, выяснили, сколько студентов изучают французский, немецкий и испанский языки в том или ином сочетании. Эти данные отражены в следующей таблице:

Языки	Число студентов
Французский	75
Немецкий	68
Испанский	199
Французский и немецкий	32
Французский и испанский	41
Немецкий и испанский	11
Французский, немецкий и испанский	7

Сколько студентов не изучают ни одного иностранного языка?

5. Сколько целых чисел от 500 и 10 000 делятся на 5 или на 7? **Пример решения**: пусть множество A – делящиеся на 5 числа, видно что их 10 000/ 5 – 500/5 = 2000 – 100 = 1900. Пусть B – множество

делящихся на 7 : возьмём целую часть от делений 10 000/7 – 500/7 = 1428 – 71 = 1357. Из суммы мощностей этих множеств вычтем количество чисел, делящихся на 35. Найдём количество чисел, делящихся на 35: 10 000/35 – 500/35 = 285 – 14 = 271. Значит ответ будет: 1900 + 1357 – 271 = 2986.

6. (a) Сколько чисел от 1 до 70 000 000, включая эти два числа, делятся на 2, 5 или 7?

(b) Сколько чисел от 1 до 6 000 000, включая оба эти числа, делятся на 4, 5 или 6?

Контрольные вопросы

– В чем заключён смысл теоремы основной теоремы о подсчете мощности множества?

– Сформулируйте принцип включения – исключения для двух, трёх и n множеств?

– Как связаны теоремы о подсчёте с диаграммами Венна?

Чтобы научиться использовать методы анализа ***отношений и функций****, овладеть навыками нахождения* ***обратных отношений и композиции отношений, сюръекции и инъекции, анализа функций****, различных способов описания функций, необходимо решить ряд задач на применение понятия* ***бинарного отношения****.*

Задание:

1. Для людей из генеалогического дерева (по предложенной схеме), построить таблицы из следующих отношений:

(a) IsAncestorOf

(b) IsDescendentOf

(c) IsSiblingOf

(d) IsCousinOf

Примеры решений:

1.

Mary = John

Peter=Elaine Maude=Harold

George Elizabeth

1. (a)

IsAncestorOf Elaine George Mary George John George Peter George Harold Elizabeth Maude Elizabeth Mary Elizabeth John Elizabeth Mary Elaine John Elaine Mary Maude John Maude

1. (b)

IsDescendentOf George Mary George John George Peter George Elaine Maude Mary Maude John Elizabeth Maude Elizabeth Harold Elizabeth Mary Elizabeth John Elaine Mary Elaine John

1. (c)

IsSiblingOf Elaine Maude Maude Elaine

1. (d)

IsCousinOf George Elizabeth Elizabeth George

Задание:

2. Определите элементы в каждом из следующих отношений определённых на множестве R:

(a) $(x,y) \in R$ если и только если $x + 1 < y$;

(b) $(x,y) \in R$ если и только если $y < 0$ or $2x \leq 3$;

(c) $(x,y,z) \in R$ если и только если $x2 + y = z\ 3$.

Задание с решениями (для англоязычных студентов):

3. Let $A = \{1,2,3,...,10\}$. Let $R = \{(1, 2), (1, 4), (1, 6), (1, 8), (1, 10), (3, 5), (3, 7), (4, 6), (6, 8), (7, 10)\}$ be a relation on A. Let $S = \{(2,4),(3,6),(5,7), (7,9),(8,10),(8,9),(8,8),(9,9),(3,8),(4,9)\}$be a second relation on A. Find:

(a) $R \circ S$;

(b) $S \circ R$.

3. (a) $\{(2,6),(3,8),(5,10)\}$

3. (b) $\{(1,4),(1,9),(1,10),(1,8),(3,7),(3,9),(6,10),(6,9),(6,8)\}$

Задание с решениями (для англоязычных студентов):

4. Let R,S and T be binary relations on a set X.

(a) Prove that $R \subseteq S$ if and only if $R-1 \subseteq S-1$.

(b) Prove that if $R \subseteq S$, then $R \circ T \subseteq S \circ T$ and $T \circ R \subseteq T \circ S$.

(c) If $R \circ T \subseteq S \circ T$ and $T \circ R \subseteq T \circ S$ for some relation T, does it follow that $R \subseteq S$?

(d) If $R \circ T \subseteq S \circ T$ and $T \circ R \subseteq T \circ S$ for every relation T, does it follow that $R \subseteq S$? Prove that your answers to (c) and (d) are correct.

4. (a) Assume that $R \subseteq S$. ($\Rightarrow$) Let $(x,y) \in R-1$. $(x,y) \in R-1 \Rightarrow (y,x) \in R \Rightarrow (y,x) \in S \Rightarrow (x,y) \in S-1$ Therefore, $R-1 \subseteq S-1$. ($\Leftarrow$) Now assume that $R-1 \subseteq S-1$. Then, by the result above, $(R-1)-1 \subseteq (S-1)-1)$ Thus, by Theorem 2, $R \subseteq S$.

4. (b)

$(x,y) \in R \circ T \Rightarrow$ there is a z such that $(z,y) \in R$ and $(x,z) \in T \Rightarrow (z,y) \in S$ and $(x,z) \in T$(since $R \subseteq S$) $\Rightarrow (x,y) \in S \circ T$

Therefore, if $R \subseteq S$, then $R \circ T \subseteq S \circ T$. $(x,y) \in T \circ R \Rightarrow$ there is a x such that $(z,y) \in T$ and $(x,z) \in R \Rightarrow (z,y) \in T$ and $(x,z) \in S$(since $R \subseteq S$) $\Rightarrow (x,y) \in T \circ S$

Therefore, if $R \subseteq S$, then $T \circ R \subseteq T \circ S$.

1. (c) No. Note that for any relations R, S on any set X, $R \circ \emptyset = \emptyset = S \circ \emptyset$. But it does not follow that $R \subseteq S$, for example, let $X = N, R = LTN, S = \emptyset$. 13. (d) Yes. Take $T = IdX$. By hypothesis, $R \circ IdX \subseteq S \circ IdX$–that is, $R \subseteq S$.

Такие свойства бинарных отношений, как ***рефлексивность, симметричность, антирефлексивность, антисимметричность, транзитивность*** *позволяют проводить глубокий анализ оттенков различий функциональных связей между множествами.*

Задания:

1. Какие из следующих отношений на множестве всех людей рефлексивны? Антисимметричны? Транзитивны? Докажите ваши выводы.

Which of the following relation on the set of all people are reflexive? Symmetric? Antisymmetric? Transitive? Prove your assertions.

(a) R(x,y) if y makes more money than x.

(b) R(x,y) if x and y are about the same height.

(c) R(x,y) if x and y have an ancestor in common.

(d) R(x,y) if x and y are the same sex.

(e) R(x,y) if x and y both collect stamps.

(f) R(x,y) if x and y like some of the same music.

Решение:

	Reflexive	Symmetric	Antisymmetric	Transitive
(a)	No	No	Yes	Yes
(b)	Yes	Yes	No	Yes
(c)	Yes	Yes	No	No
(d)	Yes	Yes	No	Yes
(e)	Yes	Yes	No	Yes
(f)	Yes	Yes	No	No

2. Какие из следующих отношений на множестве всех людей рефлексивны? Симметричны? Антисимметричны? Транзитивны? Объясните ваши выводы. (Which of the following relations on the set of all people are reflexive? Symmetric? Antisymmetric? Transitive? Explain why your assertions are true).

(a) R(x,y) if x and y either both like German food or both dislike German food.

(b) R(x,y) if (i) x and y either both like Italian food or both dislike it, or (ii) x and y either both like Chinese food or both dislike it.

(c) R(x,y) if y is at least two feet taller than x.

Решение:

	Reflexive	Symmetric	Antisymmetric	Transitive
(a)	Yes	Yes	No	Yes
(b)	Yes	Yes	No	No
(c)	No	No	Yes	Yes

3. Какие из следующих отношений на некотором множестве людей рефлексивны? Антирефлексивны? Симметричны? Антисимметричны? Транзитивны? (Which of the following relations on the set of people indicated are reflexive? Irreflexive? Symmetric? Antisymmetric? Transitive?)

(a) IsSisterOf on the set of all females

(b) IsBrotherOfOrEquals on the set of all males

(c) IsSiblingOf on the set of all people

(d) IsSiblingOfOrEquals on the set of all people

(e) IsCousinOfOrEquals on the set of all people

Докажите ваши выводы. (Prove your assertions).

Решение:

	Reflex.	Irreflex.	Symm.	Antisymm.	Trans.
(a) IsSisterOf	N	Y	Y	N	N
(b) IsBrotherOfOrEquals	Y	N	Y	N	Y
(c) IsSiblingOf	N	Y	Y	N	N
(d) IsSiblingOfOrEquals	Y	N	Y	N	Y
(e) IsCousinOfOrEquals	Y	N	Y	N	N

4. Пусть A ={a,b,c,d}. Отношения R_1 и R_2 определены на A как R_1 = {(a,a),(a,b),(b,d)} и R_2 = {(a,d),(b,c),(b,d),(c,b)}

Найдите:

(a) $R_1 \circ R_2$; (b) $R_2 \circ R_1$; (c) R_1^2 ; (d) R_2^2 .

Решение:

(a) (c, d)

(b) (a, d), (a, c)

(c) (a, a), (a, b), (a, d)}

(d) {(b, b), (c, d), (c, c)}

Контрольные вопросы

– В чем отличие отношений от обычных множеств?

– Объясните основные свойства бинарных отношений.

– Чем одинаковы и чем отличаются функции от отношений?

*Знание смысла **функциональной зависимости** и умений её анализа средствами теории множеств лежит в основе овладения методами математического исследования объектов.*

Задания на тему функции:

1. Какие из следующих отношений являются функциями? Если да, то почему? (Which of the following are functions? If not, why not?)

(a) X is the set of students in a discrete mathematics class. For x ∈ X, define g(x) to be the youngest cousin of x.

(b) X is the set of senators serving in 1998. For $x \in X$, define $g(x)$ to be the number of terms a senator has held.

(c) For $x \in R$, define $g(x) =|x/|x||$.

Решение:

(a) Not a function. Not everyone has a cousin, let alone a youngest one.

(b) A function since the number of terms is clearly associated with each senator.

(c) Not a function since $g(0)$ is not defined.

2. What are the domain and range of the addition function on the real numbers? Multiplication? Subtraction? Division?

Решение:

Addition : domain is R×R: range is R

Multiplication : domain is R×R: range is R

Subtraction : domain is R×R: range is R

Division : domain is R×R−{0}: range is R

3. Найдите первые шесть чисел последовательности определённой как (Find the first six terms of the sequence with the elements defined as):

$F(0) = 1$, $F(1) = 3$, $F(2) = 5$, and $F(n) = 3F(n-1) + 2F(n-2)-3F(n-3)$ for $n \geq 3$.

Решение:

$F(0) = 1;F(1) = 3;F(2) = 5;F(3) = 18;F(4) = 55;F(5) = 186$

4. Пусть $X = \{-1,0,1,2\}$ и $Y = \{-4,-2,0,2\}$. Найдите функцию $F : X \to Y$ как $F(x) = x^2 - x$. Докажите что F не является ни инъективной ни сюрьективной (is neither 1-1 nor onto).

Решение:

$F(1) = F(0)$ так что F не инъективная функция. F – не сюръективная, так как - 4 не является образом ни одного элемента.

Транзитивные замыкания *находят широкое применение в различных отраслях науки, медицины, техники (в частности в реляционных базах знаний).*

На основе решения упражнений и задач изучить смысл и освоить специфику транзитивных замыканий.

Задание:

1. Пусть $X =\{1,2,3,4\}$, и определено отношение на X как $R = \{(1,2),(2,3),(3,4)\}$

(a) Найдите рефлексивное замыкание R.

(b) Найдите симметричное замыкание R.

(c) Найдите транзитивное замыкание R.

(d) Найдите рефлексивное и транзитивное замыкание R.

Решение:

(a) $R \cup Id X$ = {(1, 2), (2, 3), (3, 4), (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)}

(b) $R \cup R-1$ = {(1, 2), (2, 3), (3, 4), (2, 1), (3, 2), (4, 3)}

(c) $R+$ = {(1, 2), (2, 3), (3, 4), (1, 3), (2, 4), (1, 4) } 11. (d) $R* = R+ \cup$ {(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)}

2. Пусть A = {1, 2, 3, 4}. Найдите транзитивное замыкание отношения R, определённого на A как R = {(1,2),(2,1),(2,3),(3,4)}

Решение:

{(1,2),(2,1),(2,3),(3,4),(1,1),(1,3),(2,2), (2,4),(1,4)}

Контрольные вопросы

– В чём состоит понятие транзитивности?

– Какие приложения свойства транзитивности в медицине и технике вы можете назвать?

Комбинаторика и подсчёты *вариантов являются важнейшими инструментами программирования.*

На основе выполнения заданий по комбинаторике требуется овладеть методами подсчёта комбинаций без повторений и умениями применять их на практике.

Задания на применение принципа умножения:

1. Сколько номеров авто может быть выдано, если номер состоит из двух букв латиницы и трёх цифр? (How many license plates can be made using two uppercase letters followed by a 3-digit number?)

Решение:

Используем принцип умножения (Use the Multiplication Principle). $26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 676{,}000$

2. Сколькими способами может быть выбрана одна правая перчатка и одна левая перчатка из шести пар разных перчаток без получения пары? (How many ways can one choose one right glove and one left glove from six pairs of different gloves without obtaining a pair?)

Решение:

Выберем правую перчатку шестью способами. После выбора правой перчатки левая перчатка не может быть выбрана как левая перчатка так как левая перчатка должна быть выбрана из другой пары. Следовательно, существует пять способов выбора левой перчатки. Принцип умножения даёт ответ 30. (Choose the right glove in one of 6 ways. After choosing the right glove, the left glove of that pair cannot be chosen as the left glove since the left glove must come from a different pair. Therefore, there are 5 choices for the left glove. By the Multiplication Principle the answer is 30).

3. Сколько натуральных чисел больших или равных 1000 и меньших 5400 имеют свойства: (How many natural numbers greater than or equal to 1000 and less than 5400 have the properties):
(a) Ни одно число не повторяется (No digit is repeated).
(b) Цифры 2 и 7 отсутствуют (The digits 2 and 7 do not occur).
Решение:
(a) There are two cases: (i) the first digit is 5 and (ii) the first digit is one of 1, 2, 3, 4. The count for these two cases is: $1 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 7 + 4 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$. 7.
(b) There are two cases: (i) the first digit is 5 and (ii) the first digit is one of 1, 3, 4. The count for these two cases is: $1 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 5 + 3 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$.

4. Сколько 6-значных чисел может быть получено использованием {1, 2, ..., 9} без повторений таких, что 1 и 2 отсутствуют в последовательном соседстве? (How many 6-digit numbers can be formed using {1, 2, ..., 9} with no repetitions such that 1 and 2 do not occur in consecutive positions?)
Решение:
Count the total number of numbers that can be formed and then subtract the number of numbers that have 1 and 2 in consecutive positions. Consider S = {{1,2},3,4,5,6,7,8,9}. The number of ways to choose four elements other than {1, 2}is $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$. Now the pair{1, 2}can be inserted in any of five locations. At each location {1, 2} is inserted, the values can appear as 12 or 21. Thus the total number with 1 and 2 appearing consecutively is $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 2$. Subtract this number from the total number of ways a six digit number can be formed: $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$.

11. Сколько положительных целых чисел меньших, чем 1000000 может быть получено использованием только 7, 8 и 9? Сколько использованием только цифр 0, 8 и 9? (How many positive integers less than 1,000,000 can be written using only the digits 7, 8, and 9? How many using only the digits 0, 8, and 9?)
Решение:
36; 36 −1 as the only choice eliminated is all 0‘s.

Контрольные вопросы

- Объясните вывод формулы для размещений без повторений.
- Объясните вывод формулы для сочетаний без повторений.

Комбинации с повторениями

Эта тема представляет определённую сложность для студентов, если не опирается на ***принцип умножения*** *и решение ряда типичных задач.*

На основе выполнения заданий по комбинаторике овладеть методами подсчёта комбинаций с повторениями и уметь применять их на практике.

Задания:

1. Сколько перестановок существует для слов Bathesheba? Solomon? Ahab? Вашего собственного имени?

Решение:

Используем теорему о перестановках с повторениями. 9!/(2!2!2!2!); 7!/3!; 4!/2!

2. Сколько слов из 12 букв можно сформировать, используя символы

a,a,a,a,b,b,b,b,b,b,b,b

и при этом никакие слова не должны содержать два символа a рядом?

Решение:

Запишем в строку символы b, оставляя пространство передпервым символом, между ними и в конце строки. Получается девять мест. Выберем четыре места из девяти мест и подсчитаем количество способов выбора. Это будет ровно C(9,4) способов.

3. Сколькими способами можно разместить пять идентичных объявлений в трех почтовых ящиках, если каждый почтовый ящик получает по крайней мере одно объявление? Сколько способов, если каждый почтовый ящик может не получить ни одного? (Порядок, в котором почтальон доставляет сообщения, несуществен.)

Решение:

Количество решений системы $x1 + x2 + x3 = 2$ с $x1 \geq 0$, $x2 \geq 0$, $x3 \geq 0$ дает ответ на первый вопрос. Количество решений уравнения $x1 + x2 + x3 = 5$ дает ответ на второй вопрос.

4. Как много способов существует, чтобы выбрать восемь букв из aaaaa bbbbbb cccccccc таким образом, чтобы, по крайней мере, была одна a, одна b и две c?

Решение:

После удаления букв, которые должны быть выбраны, пусть x_a будет число выбранных букв a, x_b будет число выбранных букв b и пусть x_c будет числом избранных букв c . Мы должны решить уравнение $x_a + x_b + x_c = 4$, где $x_a \geq 0$, $x_b \geq 0$ и $x_c \geq 0$. Ответ C (6,2).

5. Сколькими способами два книготорговца могут разделить между собой 300 экземпляров одной книги, 200 экземпляров другой, и 100 экземпляров третьей, если ни один книготорговец не может получить все экземпляры любой из книг?

Решение:

Каждый книготорговец получает от 1 до 299 копий первой книги, от 1 до 199 копий второй книги и от 1 до 99 копий третьей. Ответ 299 • 199 • 99.

6. Как много способов распределения шести конфеты среди трех детей, если каждый ребенок должен получить по меньшей мере, один шоколадный батончик?

Чтобы освоить приёмы работы с графами, необходимо прежде всего научиться приёмам представления графов, поиска подграфов, путей и циклов, исследованию на изоморфизм. Решите следующие примеры, опираясь на разобранные случаи.

Задания:

1. Найдите граф с 12 ребрами, в котором шесть вершин степени три, а у остальных вершин степени меньше.
2. Приведите пример графа, в котором по крайней мере четыре вершины, или докажите, что такого графа не существует, если
a) в графе нет ни одной вершины нечетной степени;
b) в графе нет ни одной вершины четной степени;
c) в графе ровно одна вершина нечетной степени;
d) в графе ровно одна вершина четной степени;
e) в графе ровно две вершины нечетной степени.
3.
a) Постройте граф с шестью вершинами и последовательностью степеней 1, 1, 2, 2, 3, 3.
b) Постройте граф с шестью вершинами и последовательностью степеней 1, 1, 3, 3, 3, 3.
c) Можете ли вы найти по крайней мере два графа с каждой из этих последовательностей степеней?
4. Постройте все последовательности степеней для графов с четырьмя вершинами, среди которых нет ни одной изолированной.

5. Перечислите все возможные последовательности степеней для графов с шестью ребрами и пятью вершинами, среди которых нет ни одной изолированной.
6. Перечислите все возможные последовательности степеней для графов с восемью ребрами и пятью вершинами, среди которых нет ни одной изолированной.
7. Пусть d_1, d_2,…, d_n — неубывающая последовательность неотрицательных чисел, выражающих степени вершин некоторого графа. Докажите, что сумма $\sum_{i=1}^{n} d_i$ четна. Верно ли обратное утверждение?
8. Покажите, что последовательность 2, 2, 2, 3, 3, 4, 5, 5, 6 соответствует некоторому графу. При построении ответа исходите из графа с последовательностью степеней 1, 1, 1, 1, 1, 1.
9. Для n = 2,3,4,5 получите соотношение между числом ребер и числом вершин n-регулярного графа с p вершинами, где p = 1,2,3,... . Постройте все 3-регулярные графы с четырьмя и шестью вершинами.
10. Пусть G—граф. Докажите, что он двудольный тогда и только тогда, когда в графе G нет ни одного нечетного цикла.
11. Постройте граф с 16 вершинами, пронумерованными элементами множества {0,1} x {0,1} x {0,1} x {0,1} и ребрами, соответствующими ребрам графа Q4
12. Докажите, что в графе Q_n , где n —степень двойки, 2n вершин и n • 2n-1 ребер.
13. Докажите, что граф Q_n двудольный при n = 2,3,4,... .

Обход графов в глубину и в ширину – это простейшие алгоритмы исследования графов *– их «инвентаризации»*

Чтобы освоить приёмы работы с графами, известными как обход графа в глубину и обход графа в ширину, которые широко используются в программировании, необходимо решить ряд примеров, указанных преподавателем.

Связность в графах - это предмет первоначального изучения графа

Чтобы освоить приёмы построения связных графов с заданными свойствами, решите следующие примеры.

1. Постройте такие связные графы:
(a) все графы с пятью вершинами и по крайней мере с семью рёбрами;
(b) все кубические графы в которых не более восьми рёбер;
(c) один 4-регулярный граф с шестью вершинами;
(d) три 5-регулярных графа с восемью вершинами.

Решение:

(a) The table indicates the number of graphs on five vertices with 0, 1, 2, ..., 10 edges. You can check your construction against these values to see if you have constructed all the graphs.
#edges #graphs 0 1 1 1 2 2 3 4 4 6 5 6 6 6 7 4 8 2 9 1 10 1
You really need only construct the graphs on zero through four edges and take complements to get the graphs on six through ten edges. A separate case for five edges also must be dealt with. In the case of five edges, some of the graphs can be isomorphic to their complement so it will not suffice to find three graphs with five edges.

(b) All cubic graphs with fewer than ten vertices:
SIX VERTICES: (1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,5),(3,6),(4,5),(4,6),(5,6)
(1,2),(1,3),(1,4),(2,5),(2,6),(3,5),(3,6),(4,5),(4,6)
EIGHT VERTICES:
(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,5),(4,6),(5,7),(5,8),(6,7),(6,8),(7,8)
(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,5),(3,6),(4,5),(4,7),(5,8),(6,7),(6,8),(7,8)
(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,5),(3,6),(4,7),(4,8),(5,7),(5,8),(6,7),(6,8)
(1,2),(1,3),(1,4),(2,5),(2,6),(3,5),(3,7),(4,6),(4,7),(5,8),(6,8),(7,8)
(1,2),(1,3),(1,4),(2,5),(2,6),(3,5),(3,7),(4,6),(4,8),(5,8),(6,7),(7,8)

(c) A 4-regular graphs on 6 vertices: K6 −{(1,4),(2,5),(3,6)}

(d) Three 5-regular graphs on 8 vertices:
K8 −{(1,2),(2,3),(3,4),(4,5),(5,6),(6,7),(7,8),(8,1)}
K8 −{(1,2,(2,3),(3,4),(4,1),(5,6),(6,7),(7,8),(8,5)}
K8 −{(1,2),(2,3),(3,1),(4,5),(5,6),(6,7),(7,8),(8,4)}

2. Найдите граф G такой, что граф $\bar{G}$ несвязный.

Решение:
V (G) ={1,2,3,4}; E(G) = {(1,2),(1,3),(1,4)}

5. Пусть G = (V,E) связный граф, в котором по крайней мере две вершины. Докажите, что если |V | > |E|, то в графе G есть вершина степени один.
Решение:
Предположим deg(v) ≥2 для всех v ∈ V.

$$2|V| \leq \sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|$$

Следовательно, |E| ≥ |V|, что является противоречием. Следовательно, по крайней мере одна вершина должна быть степени один.

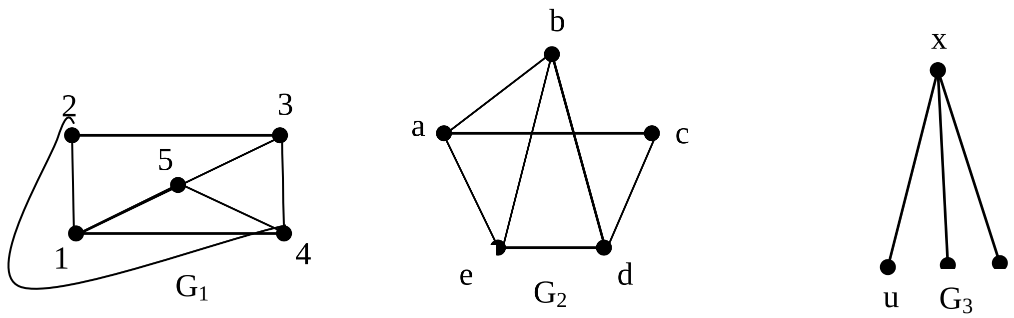
Уметь находить циклы и контуры в графах крайне полезно для решения многих практических задач программирования (проверка графа на ацикличность в задачах с источниками и стоками и др.).

Чтобы освоить приёмы нахождения контуров и циклов в графах, изучить гамильтоновы циклы, а также научиться исследовать графы на изоморфизм, необходимо решить ряд следующих задач.

1. Докажите, что для любого графа G с шестью вершинами либо G, либо $\overline{G}$ содержит треугольник,

Постройте $\overline{C_5}$, $\overline{K_{3,3}}$ и $\overline{K_{2,4}}$.

2. Для графов



найдите

a) степень каждой вершины;

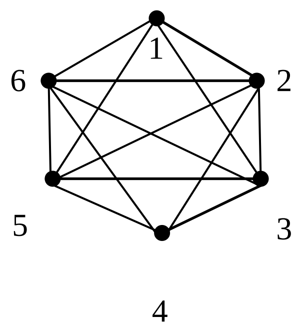
b) путь длины больше четырех, если такой существует;

c) цикл длины больше четырех, если такой существует;

d) маршрут длины шесть, если такой существует;

e) контур, в котором ребер больше, чем вершин в графе, если такой существует.

3. Для графа



найдите

a) n—регулярные подграфы без изолированных вершин для n = 2,3,4,5;

b) по одному пути длины три, четыре, пять и шесть;

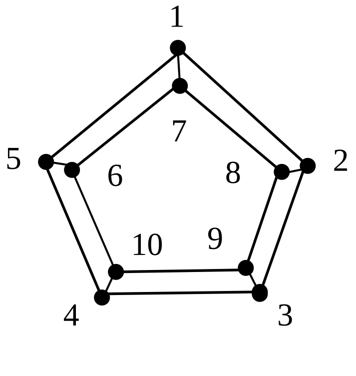
c) по одному циклу длины три, четыре, пять и шесть;

d) по одному маршруту длины 6, 8,10 и 12;

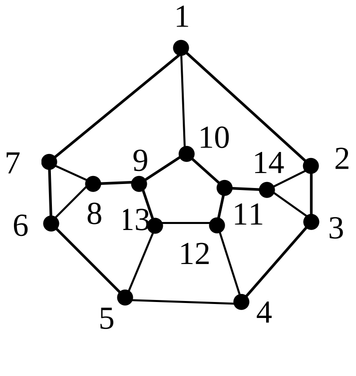
e) индуцированные подграфы, определяемые множествами вершин {1,3,4}, {2,3,5,6}, {2,4,6} и (1,3,4,5,6}.

Решение пунктов a), b), c) и e) нужно изобразить графически, обозначив вершины так же, как на рисунке. Для пункта d) перечислите вершины в том порядке, в котором они встречаются в маршруте.

4. Докажите, что если для нечетного n, n > 3, в графе G есть n-контур, то в G есть нечетный цикл.
5. Покажите, что последовательность 1, 2, 2, 3, 4 графическая, а последовательность 1, 3, 3, 3 — нет. Докажите теорему Гавела—Хакими о том, что при n ≥ 1 последовательность d_1, d_2,… , d_n, графическая тогда и только тогда, когда последовательность d_1, d_2,… , $\boldsymbol{d_{n-d_n}}$-1,… , d_{n-1}-1 – графическая.
6. Пусть d_1, d_2,… , d_n —последовательность различных целых чисел, где n ≥ 1 и 0 ≤ d_i < n - 1 при 1≤i≤n. Докажите, что эта последовательность не соответствует графу.
7. Пусть G = (V,E)— двудольный граф с биразбиением V = $\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}$. Докажите, что если |A| ≠ |B|то граф G не гамильтонов.
8. Найдите гамильтонов цикл в Q_3.
9. Найдите гамильтоновы циклы в следующих графах:

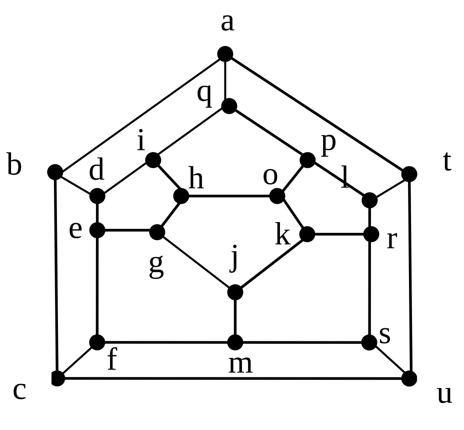


G_1

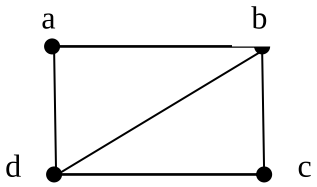


G_2

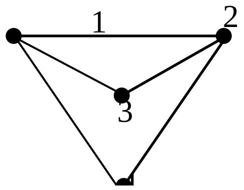
10. Найди ильтонов цикл в следующем гр



11. Завершите доказательство из примера 5 раз. 6.3.1.
12. Завершите доказательство случая и из примера 6 разд. 6.3.1.
13. Покажите, что функция F(a)=3, F(b)=1, F(c)=4 и F(d)=2 осуществляет изоморфизм между следующими графами G и H:

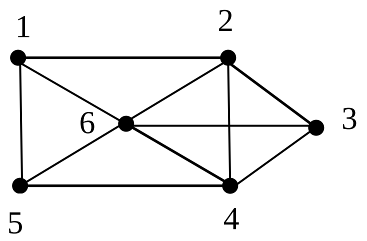


G

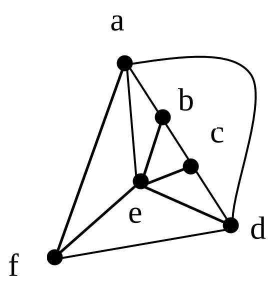


H

14. Докажите, что два графа G и H изоморфны друг другу тогда и только тогда, когда граф $\bar{G}$ изоморфен $\bar{H}$.
15. Пусть G = (V, E) и H == (V1, E1) — изоморфные графы. Докажите, что степени вершин графа G равны степеням вершин H. Покажите, что из одних только условий |V| = |V1| и |E| = | E1| не следует, что графы G и H изоморфны.
16. Докажите, что изображенные ниже графы G и H изоморфны:

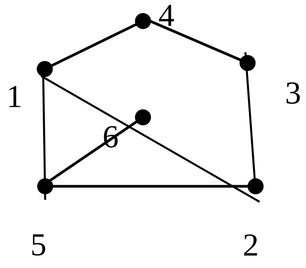


G

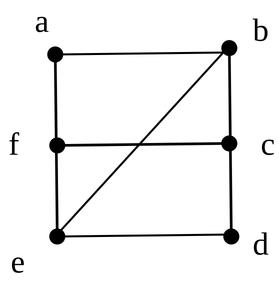


H

17. Докажите, что изображенные ниже графы G и H не изоморфны:

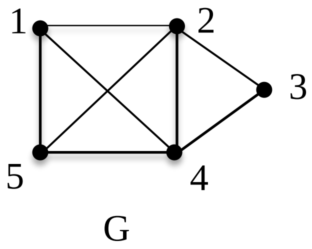


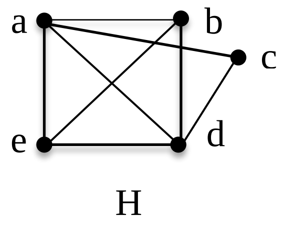
G



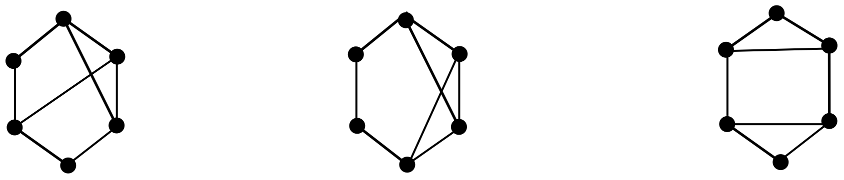
H

18. Докажите, что изображенные ниже графы G *и* H изоморфны:



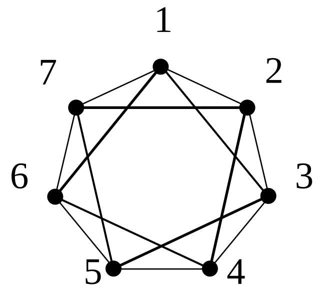


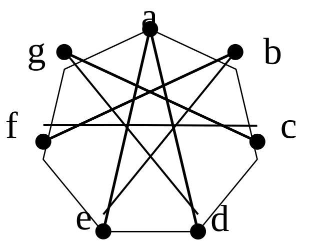
19. Докажите, что никакие два из изображенных ниже графов G_1, G_2 и G_3 не изоморфны:



G_1 G_2 G_3

20. Докажите, что изображенные ниже графы G *и* H изоморфны:





Ориентированные графы *часто используются в практических приложениях математики: в* ***транспортных сетях, сетевых графиках, планировании комплексных работ****.*

Чтобы освоить приёмы работы с ориентированными графами, циклическими и ациклическими, исследовать отношения частичного порядка, задаваемые орграфами, продумайте и решите следующие задачи.

1. Пусть D – направленный граф, степень исхода каждой вершины которого не меньше единицы. Докажите, что D содержит направленный цикл.

Покажите, что результат остается в силе, если степень захода каждой вершины не меньше единицы.

2. Докажите, что любой направленный ациклический граф содержит по крайней мере одну вершину с нулевой степенью захода. Воспользуйтесь этим результатом, чтобы построить другой алгоритм, осуществляющий топологическую сортировку. (Prove that any directed acyclic graph contains at least one vertex with indegree of zero. Use this result to devise a different algorithm to do a topological sort).

Решение:

Предположим, что это не так. Затем выберем вершину x. Так как *indeg (x)* $\neq 0$ существует вершина есть y_1 такая, что (y_1, x) принадлежит графу. Так *indeg* (y_1) $\neq 0$ существует y_2 такая, что (y_2, x) принадлежит графу. Так как G ациклический, то $y_2 \neq 0$. Действуя таким образом, чтобы построим бесконечный ориентированный путь. Поскольку граф конечен, это противоречие.

For a topological sort, find a vertex of indegree zero, list it, and then delete its edges from the graph. The resulting graph is still acyclic and so a new vertex of indegree zero can be found. List this vertex second, delete its edges from the graph. Proceed in this way until all the vertices have been listed.

3. Докажите, что если в графе Ж содержится эйлеров контур, то граф Ж ориентируемый. (Prove that if a graph G contains an Eulerian circuit, then G is orientable).

Решение:

For an Eulerian path, direct the edges in the direction of the path as you traverse the Eulerian circuit.

4. Докажите, что связный ненаправленный граф ориентируем тогда и только тогда, когда каждое его ребро содержится в цикле. (Prove that a connected undirected graph is orientable if and only if each edge is contained in a cycle).

Решение:

Necessity clear. Sufficiency: Choose any circuit C and orient its edges cyclically. If every edge of G is contained in C, proof complete. If not, choose any edge e which is not in C but which is adjacent to an edge of C. By hypothesis, e is contained in a circuit C_0 whose edges we may direct cyclically (with the exception of those already directed). Proceed at each stage directing at least one new edge. At each stage G is strongly connected, so at the end it is.

5. Докажите, что если направленный граф эйлеров, то он сильно связен. (Prove that if a directed graph is Eulerian, then it is strongly connected).

Решение:

List the edges of an Eulerian circuit C. Pick any two vertices, x and y. Find an occurrence of x in C and an occurrence of y in C. Then,

$$C = A_1 x A_2 y A_3$$

Now the directed trail xA_2y can be refined to become a directed path from x to y. Similarly, yA_3A_1x can be refined to become a directed path form y to x.

6. Найдите направленный граф, который не является эйлеровым, но для которого основной граф эйлеров. (Find a directed graph that is not Eulerian but for which the underlying graph is Eulerian).

Решение:
(1, 2), (3, 2), (3, 4), (1, 4)

7*. Challenge: A complete directed graph is a directed graph whose underlying graph is a complete graph. Show that the sum of the squares of the indegrees over all vertices is equal to the sum of the squares of the outdegrees over all vertices in any directed complete graph.

Определение 1. Турниром T_n называется ориентированный граф с n вершинами такой, что каждая пара вершин v,w соединена с одним и только одним из ориентированных ребер (v,w) или (w,v). Каждой вершине турнира засчитывается число очков, равное её степени исхода. **Последовательность очков**, или **рэнкинг** турнира – это последовательность очков вершин, расположенных в неубывающем порядке. Турнир является **транзитивным**, если из существования ребер $(a, в)$ и $(в, c)$ следует существование ребра (a, c). **Дополнение** турнира образуется обращением всех направлений ребер турнира.

8. Докажите , что если D – турнир, то в нем есть направленный гамильтонов путь.

Решение:
The proof is by induction on the number of vertices p in the tournament. Check all tournaments on 1, 2, 3, or 4 vertices and verify that each contains a Hamiltonian path. So assume that each tournament of order n where n ≥ 4 contains a Hamiltonian path and consider a tournament T of order n + 1. Let v ∈ V (T). < V (T −{v}) is a tournament of order n. By the induction hypothesis, < V (T) −{v}) contains a Hamiltonian path, say P : v1,v2,...,vn. Now if (v,v1) is an edge of T, then T contains a Hamiltonian path v,v1,v2,...,vn. If (vn,v) is an edge of T, then T contains a Hamiltonian path. So suppose (v1,v) is an edge of T. If all the vertices v1,v2,...,vn are adjacent to v, then T contains a Hamiltonian path because (vn,v) is an edge of T. If not all the vertices v1,v2,...,vn are adjacent to v, then there must be a vertex vi where 1 ≤ i ≤ n−1 such that (vi,v) and (v,vi+1) are edges of T. Then, v1,v2,...,vi,v,vi+1,...,vn is a Hamiltonian path.

***Математическая логика** лежит в основе математических утверждений и их доказательств или опровержений.*

Чтобы освоить и научиться применять законы формальной логики, решите следующие задачи:

1. Переведите следующие выражения в формулы логики высказываний. Используйте такие пропозициональные буквы (Translate the following expressions into propositional logic. Use the following proposition letters):
p = “Jones told the truth”;
q = “The butler did it”;
r = “I’ll eat my hat”;
s = “The moon is made of green cheese”;
t = “If water is heated to 100◦ C, it turns to vapor”.
(a) If Jones told the truth, then if the butler did it, I’ll eat my hat.
(b) If the butler did it, then either Jones told the truth or the moon is made of green cheese, but not both.
(c) It is not the case that both Jones told the truth and the moon is made of green cheese.
(d) Jones did not tell the truth, and the moon is not made of green cheese, and I’ll not eat my hat.
(e) If Jones told the truth implies I’ll eat my hat, then if the butler did it, the moon is made of green cheese.
(f) Jones told the truth, and if water is heated to 100◦ C, it turns to vapor.

Решение:
(a) $p \to (q \to r)$;
(b) $q \to ((p \lor s) \land \neg(p \land s))$;
(c) $\neg(p \land s)$ 1. (d) $\neg p \land \neg s \land \neg r$;
(e) $(p \to r) \to (q \to s)$;
(f) $p \land t$;
2. Пусть p обозначает высказывание «Джилиграет в баскетбол», а q обозначает высказывание «Джим играет в футбол». Как можно яснее объясните, что означают следующие высказывания (Let p denote the proposition “Jill plays basketball” and q denote the proposition “Jim plays soccer.” Write out–in the clearest way you can– what the following propositions mean):
(a) $\neg p$; (b) $p \land q$; (c) $p \lor q$; (d) $\neg p \land q$; (e) $p \to q$; (f) $p \leftrightarrow q$; (g) $\neg q \to p$.

Решение:
(a) Jill does not play basketball.
(b) Jill plays basketball and Jim plays soccer.
(c) Jill plays basketball or Jim plays soccer.
(d) Jill does not play basketball and Jim plays soccer.

(e) If Jill plays basketball then Jim plays soccer.
(f) Jill plays basketball if and only if Jim plays soccer.
(g) If Jim does not play soccer then Jill plays basketball.

3. Jim, George, and Sue belong to an outdoor club. Every club member is either a skier or a mountain climber, but no member is both. No mountain climber likes rain, and all skiers like snow. George dislikes whatever Jim likes and likes whatever Sue dislikes. Jim and Sue both like rain and snow. Is there a member of the outdoor club who is a mountain climber? (Есть ли среди этих троих альпинист?)

Решение:
Member Mt. Climb. Skier Like rain Like snow Jim No Yes Yes Yes George Yes No No No Sue No Yes Yes Yes
Yes, by George! We do not assume here that a club member dislikes a sport if he or she does not participate in that sport.

4. Пусть значение p равно T, а значение q равно F, а значение r равно T. Найдите истинностные значения следующих формул (Let proposition p be T, proposition q be F, and proposition r be T. Find the truth values for the following):

(a) $p \lor q \lor r$;   (b) $p \lor (\neg q \land \neg r)$;   (c) $p \rightarrow (q \lor r)$;   (d) $(q \land \neg p) \leftrightarrow r$;   (e) $\neg r \rightarrow (p \land q)$;
(f) $(p \rightarrow q) \rightarrow \neg r$;   (g) $((p \land r) \rightarrow (\neg q \lor p)) \rightarrow (q \lor r)$.

Решение:
(a) T
(b) T
(c) T
(d) F
(e) T
(f) T
(g) T

5. Постройте деревья следующих формул (Find the expression tree for the following formulas): (a) $\neg p \land (\neg q \lor r)$;   (b) $p \lor (\neg q \land \neg r)$;   (c) $((p \lor q) \leftrightarrow r) \leftrightarrow p$;
(d) $(\neg q \land \neg r) \leftrightarrow (p \rightarrow (q \lor r))$.

4 Основная, дополнительная и нормативная литература

1. Лекции по дискретной математике : учеб. пособие / В.Б. Алексеев. — М. : ИНФРА-М, 2018. — 90 с. — (Высшее образование: Бакалавриат). - Режим доступа: http://znanium.com/catalog/product/952158
2. Дискретная математика. Углубленный курс: Учебник / Соболева Т.С.; Под ред. Чечкина А.В. - М.:КУРС, НИЦ ИНФРА-М, 2017. - 278 с.: - (Бакалавриат) - Режим доступа: http://znanium.com/catalog/product/851215
3. Дискретная математика. Задачи и упражнения с решениями: Учебно-методическое пособие / А.А. Вороненко, В.С. Федорова. - М.: НИЦ ИНФРА-М, 2014. - 104 с.: 60х88 1/16. - (Высшее образование: Бакалавриат). (обложка) ISBN 978-5-16-006601-1 - Режим доступа: http://znanium.com/catalog/product/424101

4. Дискретная математика: Учебное пособие / Васильева А.В., Шевелева И.В. - Краснояр.:СФУ, 2016. - 128 с.: ISBN 978-5-7638-3511-3 - Режим доступа: http://znanium.com/catalog/product/967274
5. Дискретная математика. Теория и практика решения задач по информатике / Окулов С.М., - 3-е изд. - М.:БИНОМ. ЛЗ, 2015. - 425 с.: ISBN 978-5-9963-2541-2 - Режим доступа: http://znanium.com/catalog/product/366843.