

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
ФГБОУ ВО «Кубанский государственный технологический университет»

Кафедра информационных систем и программирования

ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ

Методические указания по самостоятельной работе
для студентов очной формы обучения направления
09.03.03 Прикладная информатика

**Краснодар
2019**

Составитель: д-р техн. наук В.Н. Марков

УДК 510.6

Основы математической логики: методические указания по самостоятельной работе для студентов очной формы обучения направления 09.03.03 Прикладная информатика / Сост.: В.Н. Марков; Кубан. гос. технол. ун-т. Каф. информационных систем и программирования. – Краснодар, 2019. – 15 с.

Содержат цели, задачи, теоретический материал, содержащий пояснения, порядок и методы выполнения самостоятельной работы по подготовке к выполнению и защите лабораторных работ, вопросы для самопроверки.

Содержание

Введение.....	4
1. Цели, задачи и программа дисциплины «Основы математической логики».....	5
2. Теоретический материал, содержащий пояснения, порядок и методы выполнения самостоятельной работы по подготовке к выполнению и защите лабораторных работ.....	7
2.1 Примеры решения заданий по лабораторной работе №1.....	7
2.2 Примеры решения заданий по лабораторной работе №3.....	7
2.3 Примеры решения заданий по лабораторной работе №6.....	8
2.4 Примеры решения заданий по лабораторной работе №7.....	9
3. Вопросы для самопроверки.....	11
3.1 Вопросы для контроля знаний по теории раздела 1 «Алгебра логики».....	11
3.2 Вопросы для контроля знаний по теории раздела 2 «Логический вывод».....	12
3.3 Вопросы для контроля знаний по теории раздела 3 «Теория алгоритмов».....	13
Список литературы.....	15

Введение

Самостоятельная работа - планируемая учебная, учебно-исследовательская, научно-исследовательская работа студентов, выполняемая во внеаудиторное (аудиторное) время по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его непосредственного участия (при частичном непосредственном участии преподавателя, оставляющем ведущую роль за работой студентов). Самостоятельная работа студентов в ВУЗе является важным видом учебной и научной деятельности студента. Самостоятельная работа студентов играет значительную роль в рейтинговой технологии обучения. Государственным стандартом предусматривается, как правило, 50% часов из общей трудоёмкости дисциплины на самостоятельную работу студентов (далее СРС). В связи с этим, обучение в ВУЗе включает в себя две, практически одинаковые по объёму и взаимовлиянию части – процесса обучения и процесса самообучения. Поэтому СРС должна стать эффективной и целенаправленной работой студента. Настоящие методические указания составлены в соответствии с рабочей программой курса « Основы математической логики» для подготовки бакалавров направления 09.03.03 Прикладная информатика.

Методические указания по самостоятельной работе посвящены теоретическому материалу, который выносятся на самостоятельное обучение. В конце каждой темы приводятся вопросы для самопроверки. Эти темы так же выносятся на экзамен, являются важной частью изучения дисциплины и формирования её компетенций.

1 Цели, задачи и программа дисциплины «Основы математической логики»

Цели изучения дисциплины:

- формирование у студентов фундаментальных знаний в области математической логики и теории алгоритмов, являющихся основой математического обеспечения современных информационных технологий;
- формирование у студентов знаний абстрактных вычислительных моделей, оценки сложности алгоритмов, методов и приёмов формализации задач;
- формирование умений применения математического аппарата в сфере профессиональной деятельности, исследования математических основ информатики и вычислительной техники, применения теории сложности вычислений, применения математического аппарата для решения задач информатики и вычислительной техники;
- получение представлений о математической логике, логическом программировании и теории алгоритмов как базе для изучения специализированных курсов;
- приобретение представлений о новейших тенденциях развития математического инструментария.

Задачи дисциплины:

- получение представления об основных понятиях математической логики и теории алгоритмов: высказывание, нормальные и совершенные нормальные формы, предикат, исчисление, аксиоматическая система, формальный вывод, алгоритм, алгоритмическая система, алгоритмически неразрешимая проблема др.;
- получение представления об основах алгебры логики, логики высказываний, логики предикатов, логического вывода, теории алгоритмов и алгоритмической сложности вычислений;
- получение представления о приёмах, методах и способах математической формализации прикладных задач и оценки их сложности;
- приобретение практических навыков применения полученных знаний для формализации задач в научных и производственных областях, связанных с современными информационными технологиями;
- приобретение практических навыков применения методов алгебры логики, логики высказываний и предикатов, и теории алгоритмов для

решений прикладных задач и анализа результатов.

Согласно рабочей программы дисциплины «Основы математической логики» направления подготовки бакалавров 09.03.03 Прикладная информатика изучаются следующие теоретические разделы:

- Алгебра логики;
- Логический вывод;
- Теория алгоритмов.

Все эти разделы будут изучены в аудитории на лекциях и лабораторных занятиях. Контроль полученных знаний будет осуществляться путём опроса теоретического материала во время лекций и защиты лабораторных работ и написания отчётов.

К каждой лабораторной работе студент готовится самостоятельно. Для этого ему необходимо подробно изучить лекционный материал, а так же использовать знания полученные на других предметах ранее. Что бы преодолеть трудности с освоением нового материала, при отсутствии достаточной практики в реализации компьютерных программ на языке дизъюнктов Хорна, языке машины Тьюринга, языке машины интерпретации нормальных алгоритмов Маркова и языке равнодоступной адресной машины здесь приводится ряд примеров с решением для подготовки к четырём лабораторным работам. Опыт полученный в результате их выполнения позволит подготовиться к остальным лабораторным работам и выполнить задания по вариантам.

По указанным вопросам в разделе 3 данного МУ будет проведён опрос, который будет учитываться при выставлении УПВ по этой дисциплине.

2 Теоретический материал, содержащий пояснения, порядок и методы выполнения самостоятельной работы по подготовке к выполнению и защите лабораторных работ

2.1 Примеры решения заданий по лабораторной работе №1

Преобразовать таблицы истинности в аналитическую форму

x	y	z	$f(x,y,z)$	$g(x,y,z)$	$h(x,y,z)$	$p(x,y,z)$
0	0	0	1	0	1	0
0	0	1	0	1	0	0
0	1	0	0	1	1	0
0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0
1	0	1	0	1	1	1
1	1	0	1	1	1	0
1	1	1	1	0	1	1

$$f(x, y, z) = \neg x \neg y \neg z + xy \neg z + xyz = \neg x \neg y \neg z + xy$$

$$g(x, y, z) = \neg x \neg y z + \neg x y \neg z + \neg x y z + x \neg y \neg z + x \neg y z + x y \neg z = \neg x (\neg y z + y \neg z + y z) + x (\neg y \neg z + \neg y z + y \neg z) = \neg x (\neg y z + y) + x (\neg y + y \neg z) = \neg x (z + y) + x (\neg y + \neg z).$$

2.2 Примеры решения заданий по лабораторной работе №3

Минимизировать логическую функцию, заданную таблично, методом неопределённых коэффициентов.

x	y	Сумма коэффициентов	$f(x, y)$
1	1	$f(1, 1) = a_1 + a_3 + a_5$	1
1	0	$f(1, 0) = a_1 + a_4 + a_7$	1
0	1	$f(0, 1) = a_2 + a_3 + a_6$	0
0	0	$f(0, 0) = a_2 + a_4 + a_8$	1

$$f(1, 1) = a_1 + a_3 + a_5 = 1$$

$$f(1, 0) = a_1 + a_4 + a_7 = 1$$

$$f(0, 1) = a_2 + a_3 + a_6 = 0$$

$$f(0, 0) = a_2 + a_4 + a_8 = 1$$

Согласно третьему равенству три из восьми коэффициентов равны нулю.

$$a_2 + a_3 + a_6 = 0$$

$$f(1, 1) = a_1 + a_5 = 1$$

$$f(1, 0) = a_1 + a_4 + a_7 = 1$$

$$f(0, 0) = a_4 + a_8 = 1$$

Для слагаемых наименьшего ранга имеем:

$$a_1 = 1$$

$$a_4 = 1$$

Следовательно, функция имеет вид:

$$f(x, y) = x + \neg y$$

2.3 Примеры решения заданий по лабораторной работе №6

Построение двухразрядного арифметического сумматоров в базисе Жегалкина. Пусть даны два двухразрядных двоичных числа $A = a_2a_1$ и $B = b_2b_1$. Тогда их поразрядная арифметическая сумма $C = c_2c_1$ и перенос из второго разряда p_2 выглядит так:

$$\begin{array}{r} p_2 \ p_1 \\ + \ a_2 \ a_1 \\ \quad b_2 \ b_1 \\ \hline p_2 \ c_2 \ c_1 \end{array}$$

Логические выражения для разрядов суммы $p_2 \ c_2 \ c_1$ и для разряда переноса p_1 выглядят следующим образом:

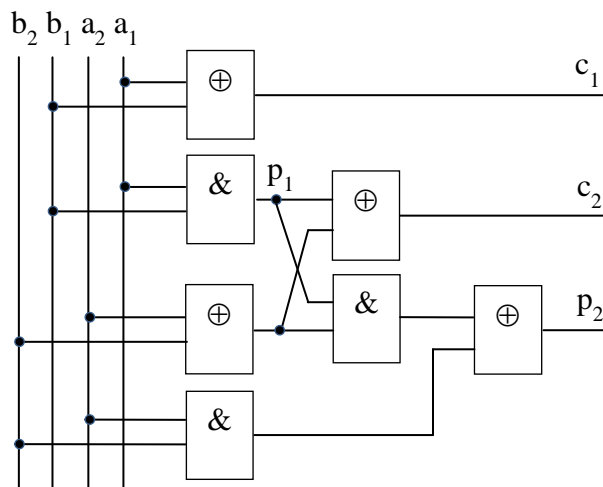
$$c_1 = a_1 \oplus b_1;$$

$$p_1 = a_1 \& b_1;$$

$$c_2 = a_2 \oplus b_2 \oplus p_1;$$

$$\begin{aligned} p_2 &= a_2b_2 \vee a_2p_1 \vee b_2p_1 = |\text{булева сумма трёх переменных}| = \\ &= a_2b_2p_1 \oplus a_2b_2\bar{p}_1 \oplus a_2\bar{b}_2p_1 \oplus a_2\bar{b}_2\bar{p}_1 \oplus a_2b_2 \oplus a_2\bar{p}_1 \oplus b_2p_1 = \\ &= a_2b_2 \oplus a_2p_1 \oplus b_2p_1 = a_2b_2 \oplus (a_2 \oplus b_2)p_1. \end{aligned}$$

На основании полученных выражений можно синтезировать комбинационное устройство, которое будет иметь следующую функциональную схему:



2.4 Примеры решения заданий по лабораторной работе №7

Моделирование электронных схем начинается с определения функциональных элементов и правил их работы. Пусть функциональными элементами являются двухвходовые логические элементы И, ИЛИ и инвертор НЕ.

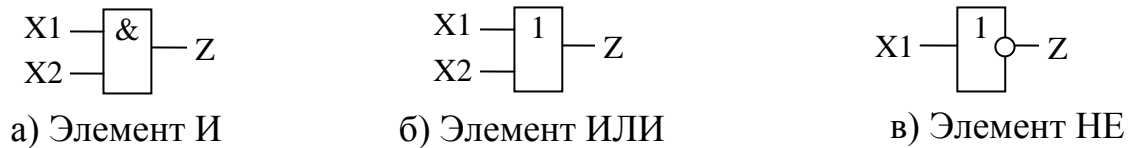


Рис.1. Обозначения логических элементов

Опишем логику работы элементов в виде соответствия выходного сигнала **Out** поданным входным сигналам **In1** и **In2**:

и (0, 0, 0) . и (0, 1, 0) . и (1, 0, 0) . и (1, 1, 1) .
или (0, 0, 0) . или (0, 1, 1) . или (1, 0, 1) . или (1, 1, 1) .
не (0, 1) . не (1, 0) .

А теперь разработаем в РИЕ модель элемента И-НЕ на основе двух соответствующих элементов. Для этого выход Y элемента И соединим со входом элемента НЕ (рис.2).

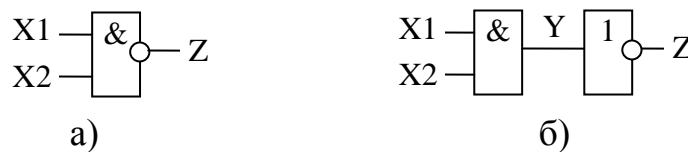


Рис.2. Обозначение двухвходового элемента И-НЕ (а) и его модель (б)

Определим правило для элемента И-НЕ:

и_не (X1, X2, Z) :- и (X1, X2, Y) , не (Y, Z) .

Обратите внимание, что переменная **Y**, являющаяся выходной в предикате и (X1, X2, Y) , одновременно является входной в предикате не (Y, Z) . Это полностью соответствует описанию на рис.1.

Пример 5. Проверим работу элемента И-НЕ с помощью нижеуказанной программы:

и (0, 0, 0) . и (0, 1, 0) . и (1, 0, 0) . и (1, 1, 1) .
или (0, 0, 0) . или (0, 1, 1) . или (1, 0, 1) . или (1, 1, 1) .
не (0, 1) . не (1, 0) .

и_не (X1, X2, Z) :- и (X1, X2, Y) , не (Y, Z) .

run () :-

```
init(),  
и_не(x1,x2,z),  
writef("% % -> %",x1,x2,z),nl,  
fail();  
write("Bcë!!!"),  
_ = readchar().
```

Запустите эту программу и убедитесь, что она печатает на экране таблицу истинности для элемента И-НЕ. Эта модель может работать при любой комбинации входных и выходных данных.

3. Вопросы для самопроверки

3.1 Вопросы для контроля знаний по теории раздела 1 «Алгебра логики»

Лекция 1. Основы алгебры Буля

- Элементарные логические операции.
- Что такое носитель алгебры?
- Чем определяется алгебра?
- Воспроизведите равенство Блейка-Порецкого.
- Язык алгебры Буля.
- Элементная база операций алгебры логики.

Лекция 2. Булевы функции

- Понятие логической функции.
- Способы её задания.
- Сколько существует бинарных функций?
- Сколько существует тернарных функций?

Лекция 3. Разложения булевых функций по переменным

- Что такое элементарная дизъюнкция?
- Что такое нормальная форма?
- Что такое элементарная конъюнкция?
- Дизъюнктивная и конъюнктивная нормальные формы.
- Что такое совершенная форма?
- Совершенная дизъюнктивная нормальная форма.
- Что такое правильная элементарная конъюнкция?
- Совершенная конъюнктивная нормальная форма.

Лекция 4. Минимизация булевых функций

- Метод неопределённых коэффициентов.
- Зачем выполняется минимизация логических функций?
- Что такое карта Карно?
- Как определяются контуры на карте Карно?
- Минимизация частично определённых булевых функций.

Лекция 5. Полнота и замкнутость булевых функций

- Двойственные функции.
- Что такое самодвойственная функция?
- Понятие функционально полной системы
- Что такое базис?
- Замыкание и замкнутые классы.
- Что такое предполный класс?
- В чём заключается критерий Поста?

Лекция 6. Свойства булевых функций

- Проблема разрешимости булевых функций.
- Что такое тавтология?
- Что такое тождественно ложные функции?
- Что такое выполнимые функции?
- Производные от булевых функций.
- Что выражает производная первого порядка?
- Что такое смешанная производная?
- Что выражает производная k-го порядка?
- Что такое арифметическое представление логических функций?

Лекция 7. Алгебра Жегалкина

- Алгебра Жегалкина
- Для решения каких задач применяется алгебра Жегалкина?
- Что такое полусумматор и сумматор?

3.2 Вопросы для контроля знаний по теории раздела 2 «Логический вывод»

Лекция 8. Формальные системы и дедукция

- Что такое формальная система?
- Аксиоматические формальные системы.
- Чем отличается аксиоматическая система от формальной?
- Теоремы и доказательства в формальных системах.
- Что такое доказательство?
- Что такое независимая аксиома?
- Правила вывода в формальных системах.
- Что такое интерпретация?
- Какие проблемы создания формальных систем существуют?
- Дедуктивный вывод.
- Как работает modus ponens?
- Как работает modus tollens?
- Силлогизмы.

Лекция 9. Недедуктивный логический вывод

- Традукция.
- Абдукция.
- Определение индукции.
- Полная индукция.

Лекция 10. Исчисление высказываний

- Язык исчисления высказываний.
- Что такое высказывание?

- Аксиомы исчисления высказываний.
- Методы определения общезначимости формул исчисления высказываний.

Лекция 11. Логика предикатов

- Предикаты и операции над ними.
- Определение предиката?
- Область определения предиката?
- Область истинности предиката?
- Аридность предиката?
- Квантор существования и квантор всеобщности?
- Метод резолюций для логики предикатов.
- Что такое унификация?
- Как находится наиболее общий унификатор?
- Какие этапы унификации?
- Дизъюнкты Хорна.
- Проблемы аксиоматического исчисления предикатов.
- Что такое алгоритмическая разрешимость?
- Полная логическая система в узком смысле?

Лекция 12. Машина логического вывода

- Замкнутый вывод в МЛВ.
- Чистота предикатов.
- Синтаксис формальной логики МЛВ.
- Синтаксический сахар?
- Тело правила?
- Голова правила?
- Поиск с возвратом?
- И-ИЛИ дерево вывода?
- Циклы с откатом.
- Рекурсивное правило?
- Правило останова?
- Неоптимизированная рекурсия?
- Хвостовая рекурсия?
- Оптимизация рекурсии.

3.3 Вопросы для контроля знаний по теории раздела 3 «Теория алгоритмов»

Лекция 13. Введение в теорию рекурсивных функций

- Вычислимые функции?
- Схема примитивной рекурсии?
- Схема возвратной рекурсии?

- Схема итерации?
- Операция суперпозиции?
- Примитивно рекурсивные функции?

Лекция 14. Частично рекурсивные и общерекурсивные функции

- Операция минимизации?
- Частично определённые рекурсивные функции?
- Общерекурсивные функции?

Лекция 15. Машина Тьюринга

- Устройство машины Тьюринга?
- Принцип действия машины Тьюринга?
- Детерминированная машина Тьюринга?
- Классификация машин Тьюринга.
- Недетерминированная машина Тьюринга?
- Программирование машины Тьюринга.
- Способы представления программ для машины Тьюринга?

Лекция 16. Нормальные алгоритмы Маркова

- Алфавит и словарные подстановки.
- Композиция слов?
- Подстановка?
- Нормальный алгоритм Маркова.
- Примеры алгоритмов.

Лекция 17. Равнодоступная адресная машина

- Состав РАМ.
- Принцип действия РАМ?
- Состав системы команд РАМ?

Лекция 18. Сложность алгоритмов

- Состав НРАМ.
- Принцип действия НРАМ?
- Проблемы алгоритмической разрешимости?
- Определение сложности алгоритмов?
- Временная сложность?
- Пространственная сложность?
- Асимптотическая сложность?
- Теоретически закрытые и теоретически открытые задачи?
- Классификация задач по сложности.
- Классы сложности алгоритмов?
- Использование недетерминированной машины Тьюринга для определения сложности алгоритма?

Список литературы

1. Игошин В.И. Математическая логика: учебное пособие / В.И. Игошин – М.: ИНФРА-М, 2019. – 398 с. Режим доступа: <https://znanium.com/bookread2.php?book=987006>
2. Игошин В.И. Сборник задач по математической логике и теории алгоритмов: учеб. пособие / В.И. Игошин – М.: КУРС: ИНФРА-М, 2019. – 392 с. Режим доступа: <https://znanium.com/bookread2.php?book=986940>
3. Пруцков А.В., Волкова Л.Л. Математическая логика и теория алгоритмов: учебник / А.В. Пруцков, В.В. Волкова – М.: КУРС: ИНФРА-М, 2018. – 152 с. Режим доступа: <https://znanium.com/bookread2.php?book=956763>