

Élément fini d'Hermite en rotations modérées

Octobre 2025

Sylvain Drapier, *Prof.*

Département Mécanique et Procédés d'Elaboration directe
Centre Science des Matériaux et des Structures & LGF UMR CNRS 5307
École Nationale Supérieure des Mines de Saint-Étienne
158, cours Fauriel ; CS 62362
42023 Saint-Étienne Cedex 2

bureau J3-15, tél : 00-79

Ouvrages de référence

- Support de cours de 'Méthodes numériques d'approximation et de résolution en mécanique des structures' https://www.emse.fr/~drapier/index_fichiers/CoursPDF/Meca_MNS/SDrapier_Comp_struct_meca_2024.pdf - Sections 1.3 et 4.4 pour la formulation du problème non-linéaire et l'application au flambage (« linéarisé ») des poutres,
- Support de cours de 'Mécanique des Structures' https://www.emse.fr/~drapier/index_fichiers/CoursPDF/Meca-Structu2A/SDrapier_Meca-struct-num_2024.pdf - Chapitre 6 pour la formulation de l'élément fini d'Hermite sans cisaillement et Chapitre 4 pour la base du flambage.

Table des matières

1	EF de poutre d'Hermite	1
1.1	Cadre linéaire	1
1.1.1	Rappels	1
1.1.2	Approximation par élément fini	3
1.2	Déformations et contraintes	5
1.2.1	Déformations dans le cas général	5
1.2.2	Déformations et contraintes généralisées	6
1.2.3	Repère local et repère de structure	8
1.3	Formulation de l'élément fini d'Hermite en statique linéaire	9
1.3.1	Définition des grandeurs élémentaires	9
1.3.2	Expressions en tension-flexion dans la base globale	12
2	Formulation en rotations modérées	15
2.1	Formulation en du problème tangent	15
2.1.1	Non-linéarités géométriques	15
2.1.2	Problème tangent	17
2.2	Cas des poutres	20
2.2.1	Simplification : flambage à contrainte constante	20
2.2.2	Formulation à partir du problème tangent	20
2.2.3	Rigidité $[\mathbf{K}_\sigma]$	21
2.2.4	Problème formel	23
2.3	Chargement plus général des poutres	26
2.3.1	Matrice de rigidité géométrique	26
2.3.2	Expression dans le repère global	27
2.3.3	Enchaînement des calculs	28
2.3.4	Quelques points de détails dans la mise en oeuvre des calculs.	29

3 Vibrations propres	31
3.1 Matrice de masse en tension-flexion dans le repère local de l'élément	32
3.1.1 Vibrations libres en tension	32
3.1.2 Vibrations libres en flexion	32
3.1.3 Matrice de masse en tension-flexion dans le repère global	33

1.

EF de poutre d'Hermite

1.1 Cadre linéaire

1.1.1 Rappels

On représente ici le comportement de poutres - poutres à plan moyen (O, \vec{x}, \vec{y}) chargées dans ce plan - de type Bernoulli, *i.e.* sans cisaillement transverse. Le champ de déplacement associé, dans un repère tel que représenté sur la Figure 1.1, est donné par les relations suivantes, et la seule déformation non-nulle associée se déduit du gradient de ce déplacement $\left(\frac{d \square}{dx} = \square'\right)$:

$$\begin{cases} u(x, y) = u(x) - y \frac{dv}{dx} \\ v(x, y) = v(x) \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} \epsilon_{xx}(x, y) = u'(x) - yv''(x) \\ = e_x(u') - y \kappa_z(v'') \end{cases} \quad (1.1)$$

La formulation générale du PPV pour les poutres de type Bernoulli prend la forme classique suivante, qui se déduit également de l'application du principe d'Hamilton en dynamique ce qui justifie les conditions homogènes imposées au champs test aux instants initial et final $C.I.(0)$:

$$\delta \mathcal{P}_{int}(\delta \vec{u}(\vec{x}, t)) + \delta \mathcal{P}_{ext}(\delta \vec{u}(\vec{x}, t)) = \delta \mathcal{P}_{acc}(\delta \vec{u}(\vec{x}, t)) \quad , \forall \delta \vec{u}(\vec{x}, t) \text{ C.A.}(0) - C.I.(0) \quad (1.2)$$

avec ces 3 termes qui s'expriment $\left(\frac{d\Box}{dt} = \dot{\Box}\right)$:

$$\delta\mathcal{P}_{int}(\delta\vec{u}(x,t)) = - \int_0^l \{N(x,t) \delta u'(x,t) + T(x,t) \delta v'(x,t) + M(x,t) \delta v''(x,t)\} dl \quad (1.3a)$$

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{P}_{ext}(\delta\vec{u}(x,t)) &= \int_0^l \{c_z(x,t) \delta v'(\vec{x},t) + p_x(x,t) \delta u(\vec{x},t) + p_y(x,t) \delta v(\vec{x},t)\} dl \\ &+ [N_i(t)\delta u_i(t) + T_i(t)\delta v_i(t) + M_i(t) \delta v'_i(t)]_0^l \end{aligned} \quad (1.3b)$$

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{P}_{acc}(\delta\vec{u}(x,t)) &= \int_0^l \{\rho S \ddot{u}(x,t) \delta u(x,t) + \rho S \ddot{v}(x,t) \delta v(x,t) + \\ &\quad \cancel{< \rho I > \ddot{v}''(x,t) \delta v(x,t)}\} dl \xrightarrow{\sim 0} \end{aligned} \quad (1.3c)$$

avec les contraintes généralisées définies par $\{\vec{R}\} = N(x) \vec{x} + T(x) \vec{y} + M(x) \vec{z}$.

Dans notre cas de tension - flexion (et cisaillement plus tard¹) en statique et HPP (pour le moment), cette formulation intégrale faible correspondant à l'équilibre s'écrira plus précisément

$$\begin{aligned} &- \int_0^l \left\{ N(x) \delta u'(x) + \cancel{T(x) \delta v'(x)} \xrightarrow{\sim 0} + M(x) \delta v''(x) \right\} dx \\ &+ \int_0^l \{p_x(x) \delta u(\vec{x}) + p_y(x) \delta v(\vec{x})\} dx + [N_i(t)\delta u_i(t) + T_i(t)\delta v_i(t) + M_i(t) \delta v'_i(t)]_0^l \\ &= 0, \quad \forall \delta\vec{u}(x) \text{ C.A.}(0) \quad (\text{i.e. pour la variation du champ réel}). \end{aligned} \quad (1.4)$$

Remarque sur le cisaillement La cinématique de Bernoulli est une cinématique qui ne peut prendre l'effet du cisaillement. L'effort tranchant (noté T dans l'équilibre - Eq. 1.4) ne peut pas être pris en compte car aucune grandeur cinématique ne permet de représenter le différentiel de rotation des sections autour de \vec{z} qui caractérise ce cisaillement. Toutefois, l'effort tranchant est une condition aux limites indispensable. Pour s'en convaincre, on peut formuler le PPV pour une poutre de Timoshenko ($\gamma(x) = v'(x) - \theta(x)$), qui donne - cf support de cours sur les poutres - :

$$\begin{aligned} &- \int_0^l \left\{ N(x) \delta u'(x) + T(x) (\cancel{\delta v'(x)} \xrightarrow{\sim 0} - \delta\theta(x)) + M(x) \delta\theta'(x) \right\} dx \\ &+ \int_0^l \{p_x(x) \delta u(\vec{x}) + p_y(x) \delta v(\vec{x})\} dx + [N_i(t)\delta u_i(t) + T_i(t)\delta v_i(t) + M_i(t) \delta\theta_i(t)]_0^l \\ &= 0, \quad \forall \delta\vec{u}(x) \text{ C.A.}(0) \end{aligned} \quad (1.5)$$

1. si interpolation de Lagrange en flexion par exemple, et donc plus interpolation d'Hermite

1.1.2 Approximation par élément fini

L'approximation par élément fini se fait avec un élément fini à 2 noeuds et 6 degrés de liberté (Figure 1.1). C'est la superposition d'un élément fini à approximation linéaire en tension et un élément fini à approximation cubique de type Hermite en flexion.

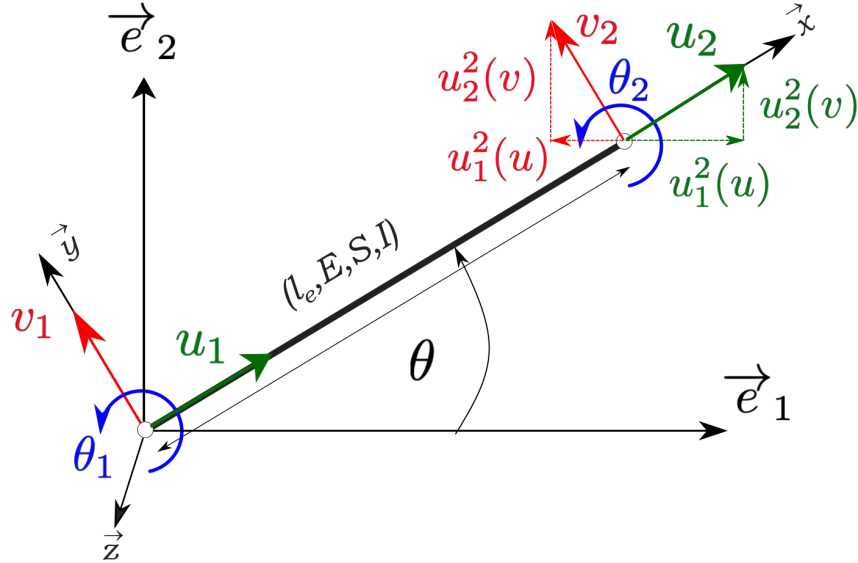


Figure 1.1: Élément de tension-flexion de type Hermite (flexion) - repère local associé et repère global.

Approximation en flexion Pour la partie flexion, l'interpolation cubique du déplacement transverse à la poutre $v(x)$ s'obtient avec 2 ddls pour chacun des 2 noeuds :

$$\begin{aligned}
 v(x, t) \vec{y} &= \sum^e v^e(x) \vec{y} \\
 v^e(x) &\simeq v^h(x) = \mathcal{N}_1(x)v_1 + \mathcal{N}_2(x)\theta_1 + \mathcal{N}_3(x)v_2 + \mathcal{N}_4(x)\theta_2 \\
 v^h(x) &= \langle \mathcal{N}_1(x), \mathcal{N}_2(x), \mathcal{N}_3(x), \mathcal{N}_4(x) \rangle \cdot \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \\
 &= \langle \mathcal{N}(x) \rangle \cdot \{ \mathbf{u}_f^e \}
 \end{aligned} \tag{1.6}$$

et la rotation est égale à la dérivée du déplacement transverse - donc pas de cisaillement dans cet élément fini :

$$\theta^h(x) = \frac{dv^h}{dx}(x) = \frac{d\mathcal{N}_1(x)}{dx}v_1 + \frac{d\mathcal{N}_2(x)}{dx}\theta_1 + \frac{d\mathcal{N}_3(x)}{dx}v_2 + \frac{d\mathcal{N}_4(x)}{dx}\theta_2 \tag{1.7}$$

Finalement, les fonctions d'interpolation sont des polynômes cubiques et s'écrivent (dans l'élément réel) :

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_1(x) &= 1 - 3 \left(\frac{x}{l^e} \right)^2 + 2 \left(\frac{x}{l^e} \right)^3 & \mathcal{N}_2(x) &= l^e \left(\left(\frac{x}{l^e} \right) - 2 \left(\frac{x}{l^e} \right)^2 + \left(\frac{x}{l^e} \right)^3 \right) \\ \mathcal{N}_3(x) &= 3 \left(\frac{x}{l^e} \right)^2 - 2 \left(\frac{x}{l^e} \right)^3 & \mathcal{N}_4(x) &= -l^e \left(\left(\frac{x}{l^e} \right)^2 - \left(\frac{x}{l^e} \right)^3 \right) \end{aligned} \quad (1.8)$$

Approximation en tension-compression On aura également la cinématique en tension-compression (d'une barre) qui s'écrit classiquement :

$$\begin{aligned} u(x) \vec{x} &= \sum^e u^e(x) \vec{x} \\ u^e(x) &\simeq u^h(x) = u_1 N_1(x) + u_2 N_2(x) \\ &= \langle N_1(x), N_2(x) \rangle \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \\ &= \langle N(x) \rangle \cdot \{\mathbf{u}_t^e\} \end{aligned} \quad (1.9)$$

avec les fonctions d'interpolation linéaires (dans l'élément réel)

$$\begin{cases} N_1(x) = -\frac{x - x_2}{l_e} \\ N_2(x) = \frac{x - x_1}{l_e} \end{cases} \quad (1.10)$$

Approximation complète Au final, l'approximation du déplacement complet s'écrit :

$$\begin{aligned} u \vec{x} + v \vec{y} &\simeq \begin{bmatrix} N_1(x) & 0 & 0 & N_2(x) & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{N}_1(x) & \mathcal{N}_2(x) & 0 & \mathcal{N}_3(x) & \mathcal{N}_4(x) \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \\ &= \langle \mathbf{N}(x) \rangle \cdot \{\mathbf{q}^e\} \end{aligned} \quad (1.11)$$

où $\{\mathbf{q}^e\}$ représente le vecteur des degrés de liberté exprimés dans le repère local de la poutre.

Stockage des ddl s Même si cela ne présente qu'un intérêt de clarté, on pourra stocker les degrés de liberté sous 2 formes. Pour la pédagogie on a bien :

$$\{\mathbf{u}_t^e\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad \{\mathbf{u}_f^e\} = \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (1.12)$$

ou encore

$$\{\mathbf{u}_t^e\} = \langle u_1, u_2 \rangle^T \quad \text{et} \quad \{\mathbf{u}_f^e\} = \langle v_1, \theta_1, v_2, \theta_2 \rangle^T$$

et pour des raisons pragmatiques de stockage, on utilisera aussi

$$\{\mathbf{q}^e\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}, \quad \text{avec} \quad \{\mathbf{q}_t^e\} = \langle u_1, 0, 0, u_2, 0, 0 \rangle^T \quad \text{et} \quad \{\mathbf{q}_f^e\} = \langle 0, v_1, \theta_1, 0, v_2, \theta_2 \rangle^T$$

$$\text{de sorte que} \quad \{\mathbf{q}^e\} = \{\mathbf{q}_t^e\} + \{\mathbf{q}_f^e\}$$

(1.13)

1.2 Déformations et contraintes

Il est important d'être attentif aux dimensions quand on dérive les grandeurs physiques qui vont nous être nécessaires pour le calculs des efforts internes, ils sont proportionnels aux gradients de déplacement.

1.2.1 Déformations dans le cas général

Dans un milieu continu de type Cauchy, on déduit aisément les déformations discrétisées depuis l'approximation des déplacements. Ensuite, pour des raisons de stockage, il faut préciser si ces déformations, et les contraintes conjuguées sont définies par élément ou aux noeuds. Il n'y a pas de choix standard, puisque les déformations et contraintes peuvent être linéaires ou quadratiques par élément dans certains cas. Toutefois, comme on recourt à des intégrations numériques pour définir les grandeurs telles que les rigidités par exemple, ou bien calculer les contraintes via les déformations et les lois de comportement, et pour ne pas reformuler les grandeurs stockées en fonction du nombre de nœud par élément, on va supposer ici que ces grandeurs sont définies par éléments. On cherche donc à approcher les déformations du problèmes comme la somme des approximations par élément :

$$\underline{\underline{\epsilon}}(\vec{u}) = \frac{1}{2}(\underline{\underline{\nabla}}\vec{u} + \underline{\underline{\nabla}}^T\vec{u}) \simeq \underline{\underline{\epsilon}}^h(\vec{u}^h) = \sum^e \{\epsilon^e\}$$

Dans un cas tri-dimensionnel, les déformations et les contraintes conjuguées définies par élément seront contenus dans des vecteurs de dimension (6×1) en utilisant un stockage de Voigt (vectoriel). Le vecteur des inconnues nodales sera, quant à lui, de taille $(n_{dofs} \times 1)$ où n_{dofs} est le nombre de degrés de libertés par élément. Dans le cadre HPP, dans le cas 3D où l'approximation s'écrit sur un élément où chacun des k nœuds possède 3 déplacements $u_{1,2,3}^k$ dans un repère cartésien (interpolation de degré $m = k - 1$), le déplacement discrétisé s'écrit :

$$u_i^h(\vec{x}^h) = \sum_{k=1}^n N_k(\vec{x}^h) u_i^k \quad \text{ou} \quad \{\mathbf{u}^e\} = \langle N(\vec{x}^h) \rangle^T \vec{q}^e$$

et donc les déformations discrétisées sont :

$$\left\{ \begin{array}{c} \epsilon_{11}^e \\ \epsilon_{22}^e \\ \epsilon_{33}^e \\ 2\epsilon_{12}^e \\ 2\epsilon_{13}^e \\ 2\epsilon_{23}^e \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cccccccccccc} \frac{\partial N_1}{\partial x_1} & \frac{\partial N_2}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial N_k}{\partial x_1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{\partial N_{k+1}}{\partial x_2} & \frac{\partial N_{k+2}}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial N_{2k}}{\partial x_2} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{\partial N_{2k+1}}{\partial x_3} & \frac{\partial N_{2k+2}}{\partial x_3} & \dots & \frac{\partial N_{3k}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial N_1}{\partial x_2} & \frac{\partial N_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial N_k}{\partial x_2} & \frac{\partial N_{k+1}}{\partial x_1} & \frac{\partial N_{k+2}}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial N_{2k}}{\partial x_1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{\partial N_1}{\partial x_3} & \frac{\partial N_2}{\partial x_3} & \dots & \frac{\partial N_k}{\partial x_3} & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{\partial N_{2k+1}}{\partial x_1} & \frac{\partial N_{2k+2}}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial N_{3k}}{\partial x_1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{\partial N_{k+1}}{\partial x_3} & \frac{\partial N_{k+2}}{\partial x_3} & \dots & \frac{\partial N_{2k}}{\partial x_3} & \frac{\partial N_{2k+1}}{\partial x_2} & \frac{\partial N_{2k+2}}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial N_{3k}}{\partial x_2} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} u_1^1 \\ u_2^1 \\ \vdots \\ u_1^p \\ u_2^p \\ u_3^p \\ \vdots \\ u_1^k \\ u_2^k \\ u_3^k \end{array} \right\}$$

$$\{\epsilon^e\} = \nabla \langle \mathbf{N}^e(\{\mathbf{x}^h\}) \rangle \{\mathbf{q}^e\} = [\mathbf{B}_L^e] \{\mathbf{q}^e\} \quad (1.14)$$

La matrice $[\mathbf{B}_L^e]$ contient les gradients des fonctions d'interpolation. Elle est de dimension $6 \times n_{dofs}$ ($n_{dofs} = 3k$ en 3D pour un élément possédant k nœuds et 3 *ddl*s par nœud). Ce qui permet d'écrire, de façon générale :

$$\underline{\epsilon}(\vec{u}) = \frac{1}{2}(\underline{\nabla} \vec{u} + \underline{\nabla}^T \vec{u}) \simeq \underline{\epsilon}^h(\vec{u}^h) = \sum^e \{\epsilon^e\}$$

$$\text{et } \{\epsilon^e\} = \nabla \langle \mathbf{N}^e(\{\mathbf{x}^h\}) \rangle \{\mathbf{q}^e\} = [\mathbf{B}_L^e] \{\mathbf{q}^e\} \quad (1.15)$$

$$\text{dimensions } (6 \times 1) = (6 \times n_{dofs}) \times (n_{dofs} \times 1)$$

1.2.2 Déformations et contraintes généralisées

Pour les poutres, les contraintes sont classiquement intégrées sur les sections. Conjugées à ces contraintes dites "généralisées", on doit calculer les déformations généralisées, *i.e.* mesurées au centre des sections de poutres.

Déformations généralisées Dans notre cas, les déplacements étant ceux d'une structure (poutre, Eq. 1.1), les courbures interviennent dans les calculs de la seule composante de déformation non-nulle ici - pour rappel $\epsilon_{xx}(x, y) = u'(x) - y v''(x) = e_x(u') - y \kappa_z(v'')$. En

introduisant les discrétisation des déplacements $u(x)\vec{x} + v(x)\vec{y}$, on peut (au moins moralement) écrire :

$$\begin{aligned} \{\epsilon^e\} &= \underbrace{\nabla < N^e(\{\mathbf{x}^h\}) > \{\mathbf{u}_t^e\}}_{[\mathbf{B}_L^e]_t \{\mathbf{u}_t^e\}} - y^h \underbrace{\nabla^2 < \mathcal{N}^e(\{\mathbf{x}^h\}) > \{\mathbf{u}_f^e\}}_{y [\mathbf{B}_L^e]_f \{\mathbf{u}_f^e\}} \end{aligned} \quad (1.16)$$

La présence du terme " y " dans cette expression est liée à l'étude d'une structure, différente de l'étude d'un milieu de Cauchy car la distance du point considéré par rapport au centre de gravité de la section considérée intervient dans la description de la flexion. Supposons pour le moment que les 2 grandeurs définissant les déformations de la section de la poutre suffisent à décrire le champ de déformation complet. En introduisant les expressions plus complètes qui sont assez simples ici puisque les gradients sont unidimensionnels $\left(\nabla \square = \frac{d \square}{dx} = \square'\right)$, on aboutit à

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} e_x^h(x) \\ \kappa_z^h(x) \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} N_1'(x) & 0 & 0 & N_2'(x) & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{N}_1''(x) & \mathcal{N}_2''(x) & 0 & \mathcal{N}_3''(x) & \mathcal{N}_4''(x) \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} [\nabla < \mathbf{N} >^e] & [\mathbf{0}] \\ [\mathbf{0}] & [\nabla^2 < \mathcal{N} >^e] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\mathbf{u}_t^e\} \\ \{\mathbf{u}_f^e\} \end{Bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} [\mathbf{B}_L^e]_t & [\mathbf{0}] \\ [\mathbf{0}] & [\mathbf{B}_L^e]_f \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\mathbf{u}_t^e\} \\ \{\mathbf{u}_f^e\} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (1.17)$$

$$\text{ou } \{\epsilon^e\} = [\mathbf{B}_L^e] \cdot \{\mathbf{u}^e\}$$

$$\dim (2 \times 1) = (2 \times 6) \times (6 \times 1)$$

Contraintes généralisées Les contraintes généralisées représentent les contraintes intégrées sur la section de la poutre. Comme indiqué précédemment, l'effet de l'effort tranchant sur l'énergie interne ne peut être pris en compte, puisque, par construction, ici le degrés de liberté nodal de rotation des sections θ^h est strictement égal à la différentielle du degrés de liberté nodal de déplacement transverse v^h (Eq. 1.7). Dans les poutres les contraintes généralisées sont définies classiquement :

$$\begin{cases} N(x) = \int_S \sigma_{xx}(x) ds \\ M(x) = \int_S -y \sigma_{xx}(x) ds \end{cases} \quad (1.18)$$

où l'on vérifie que l'altitude y apparaît ici, ce qui permet de retrouver l'énergie interne (par unité de longueur) de la poutre égale à : $N(x)e_x(x) + M(x)\kappa_z(x)$ - cf Eq. 1.4. Les contraintes généralisées sont donc associées aux déformations généralisée, définies ci-dessus (Eq. 1.17), via la loi de comportement du matériau constitutif que nous noterons simplement ' ES ' et ' EI '², les rigidités en membrane et flexion respectivement. Pour ces contraintes généralisées prises constantes par élément, on a finalement :

$$\{\mathbf{N}^e\} = \begin{Bmatrix} N(x^h) = ES \, u'(x^h) \\ M(x^h) = EI \, v''(x^h) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} ES & 0 \\ 0 & EI \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} e_x(x^h) \\ \kappa_z(x^h) \end{Bmatrix} = [\mathcal{L}^e] \cdot \{\epsilon^e\} \quad (1.19)$$

Conditions de Neuman Partant de cette forme des efforts internes, on peut maintenant définir la forme des efforts qui peuvent être imposés par l'extérieur sur la poutre. Auparavant, il faut noter que, si la contribution du cisaillement dans la puissance virtuelle des efforts intérieurs est négligée (car par de cinématique associée dans Bernoulli), l'effort tranchant est une condition aux limites indispensable (c'est même son nom : condition dite *essentielle*) - cf terme de bord de l'Eq. 1.4. Par exemple, si un effort tranchant est imposé en $x = l$: $T(l) = -F$ comme effort extérieur, le travail virtuel de cette effort terminal dans la formulation intégrale faible discrétisée s'écrira (Eq. 1.24), pour un élément fini avec son nœud 2 en cette abscisse :

$$T^h \delta v^h(l) = T^h(l) \sum_{j=1}^n \mathcal{N}_j(l) \delta q_j = T^h(l) \mathcal{N}_3(l) \delta v_2 = T^h(l) \delta v_2 = -F \delta v_2$$

le vecteur des contraintes généralisées nodales imposées par l'extérieur s'écrit donc :

$$\{\mathbf{F}^e\} = \begin{Bmatrix} N_1 \\ T_1 \\ M_1 \\ N_2 \\ T_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} \quad (1.20)$$

1.2.3 Repère local et repère de structure

La formulation élément fini est écrite naturellement dans le repère de la poutre. Afin de traiter les problèmes génériques, où les poutres possèdent des orientations quelconques par rapport au repère global, il faut insérer les contributions élémentaires dans ce problème global. On peut définir le vecteur tangent de cette poutre qui va permettre de passer des expressions locales aux expressions globales. Pour notre EF avec une approximation géométrique linéaire, ce passage est direct (Figure 1.1).

2. pour un matériau constitutif isotrope, E est le module d'Young, S est l'aire de la section, et I est le moment quadratique par rapport à \vec{z} tel que $I = \int_S y^2 ds$

Pour simplifier on travail dans l'élément réel, et dans le repère global de la structure. Toutes les grandeurs définies jusqu'à présent l'ont été dans le repère de la poutre, que nous appellerons le repère local. Le changement de repère se fait classiquement pour les déplacements v et u (θ porté par $\vec{z} = \vec{e}_3$ ne change pas) :

$$\begin{aligned} v \vec{y} &= -\underbrace{v \sin \theta}_{u_1(u)} \vec{e}_1 + \underbrace{v \cos \theta}_{u_2(u)} \vec{e}_2 = v \begin{pmatrix} -S \\ C \end{pmatrix}_{(\vec{e}_1, \vec{e}_2)} \\ u \vec{x} &= \underbrace{u \cos \theta}_{u_1(v)} \vec{e}_1 + \underbrace{u \sin \theta}_{u_2(v)} \vec{e}_2 = u \begin{pmatrix} C \\ S \end{pmatrix}_{(\vec{e}_1, \vec{e}_2)} \end{aligned} \quad (1.21)$$

et donc un changement de base classique, en notant $C \equiv \cos \theta$ et $S \equiv \sin \theta$

$$\{\mathbf{u}^e\}_{(g)} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \theta \end{Bmatrix}_{(\vec{e}_1, \vec{e}_2)} = \begin{bmatrix} C & -S & 0 \\ S & C & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ \theta \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y})} = [\mathbf{P}] \{\mathbf{u}^e\}_{(l)} \quad (1.22)$$

et un vecteur des inconnues nodales complet qui va changer selon la base d'expression - se référer à la Figure 1.1 pour les notations :

$$\{\mathbf{q}^e\}_{(l)} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y})} \leftrightarrow \begin{Bmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \\ \theta^1 \\ u_1^2 \\ u_2^2 \\ \theta^2 \end{Bmatrix}_{(\vec{e}_1, \vec{e}_2)} = \{\mathbf{q}^e\}_{(g)} \quad (1.23)$$

1.3 Formulation de l'élément fini d'Hermite en statique linéaire

1.3.1 Définition des grandeurs élémentaires

Flexion seule Partant de la formulation faible établie dans un cadre HPP ci-dessus (Eq. 1.4), on va d'abord s'intéresser à la flexion seule, sur un élément de longueur $l^e = x_2 - x_1$ soit :

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{P}_{int}(\delta v(x)) + \delta \mathcal{P}_{ext}(\delta v(x)) &= 0, \forall \delta v(x) \text{ C.A.}(0) \rightsquigarrow \\ - \int_{x_1}^{x_2} M^h(x) \delta v''^h(x) dx^h + \int_{x_1}^{x_2} p_y(x) \delta v^h(x) dx^h + [T_i^h \delta v_i^h - M_i^h \delta v_i'^h]_{x_1}^{x_2} & \end{aligned} \quad (1.24)$$

dans lequel on introduit classiquement la discrétisation du champ test et du déplacement, tous 2 choisis dans la même base de fonctions - méthode de Galerkin - donc avec la même

discrétisation telle que définie dans la relation 1.6. Les conditions aux limites de Dirichlet et Neumann seront introduites ultérieurement, dans les cas particuliers que nous aurons à résoudre. La formulation intégrale faible (Eq. 1.24) devient, sur chaque élément dont les propriétés sont supposées constantes, et pour un chargement linéique p_y éventuelle dépendant de x) :

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^4 \left\{ \sum_{j=1}^4 \int_{x_1}^{x_2} \left(-E^e I^e \delta q_i^e \frac{d^2 \mathcal{N}_i}{dx^2} \frac{d^2 \mathcal{N}_j}{dx^2} q_j^e + p_y \delta q_i^e \mathcal{N}_i \right) dx^h \right\} \\ & \Leftrightarrow \sum_{i=1}^4 \delta q_i^e \left\{ \sum_{j=1}^4 \left(-E^e I^e \int_{x_1}^{x_2} \frac{d^2 \mathcal{N}_i}{dx^2} \frac{d^2 \mathcal{N}_j}{dx^2} dx^h \right) q_j^e + \int_{x_1}^{x_2} p_y(x^h) \mathcal{N}_i(x^h) dx^h \right\} \end{aligned} \quad (1.25)$$

En reprenant les calculs classiquement réalisés dans un élément de référence tel que $x(\xi = -1) = x_1$ et $x(\xi = 1) = x_2$ (voir détails dans les cours cités en introduction), on a pour un élément

$$\begin{aligned} & \begin{Bmatrix} \delta v_1 \\ \delta \theta_1 \\ \delta v_2 \\ \delta \theta_2 \end{Bmatrix}^T \left(E^e I^e \left(\frac{2}{l_e} \right)^3 \begin{bmatrix} \int_{-1}^1 \mathcal{N}_1'' \mathcal{N}_1'' d\xi & \int_{-1}^1 \mathcal{N}_1'' \mathcal{N}_2'' d\xi & \int_{-1}^1 \mathcal{N}_1'' \mathcal{N}_3'' d\xi & \int_{-1}^1 \mathcal{N}_1'' \mathcal{N}_4'' d\xi \\ \int_{-1}^1 \mathcal{N}_2'' \mathcal{N}_2'' d\xi & \int_{-1}^1 \mathcal{N}_2'' \mathcal{N}_3'' d\xi & \int_{-1}^1 \mathcal{N}_2'' \mathcal{N}_4'' d\xi & \\ \text{sym} & \int_{-1}^1 \mathcal{N}_3'' \mathcal{N}_3'' d\xi & \int_{-1}^1 \mathcal{N}_3'' \mathcal{N}_4'' d\xi & \\ & \int_{-1}^1 \mathcal{N}_4'' \mathcal{N}_4'' d\xi & & \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \right) \dots \\ & \dots - \left(\frac{l_e}{2} \right) \begin{Bmatrix} \int_{-1}^1 p_y(\xi) \mathcal{N}_1 d\xi \\ \int_{-1}^1 p_y(\xi) \mathcal{N}_2 d\xi \\ \int_{-1}^1 p_y(\xi) \mathcal{N}_3 d\xi \\ \int_{-1}^1 p_y(\xi) \mathcal{N}_4 d\xi \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (1.26)$$

ce qui peut aussi se mettre sous la forme générique $\delta q_i^e (K_{ij}^e q_j^e - f_i^e)$, et tous calculs faits (pour un chargement linéique p_y constant) :

$$[\mathbf{K}_f^e] = \frac{EI}{l_e^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l_e & -12 & 6l_e \\ & 4l_e^2 & -6l_e & 2l_e^2 \\ & & 12 & -6l_e \\ & & & 4l_e^2 \end{bmatrix} \quad \{ \mathbf{f}_{py}^e \} = \left(\frac{p_y l_e}{2} \right) \begin{Bmatrix} 1 \\ \frac{l_e}{6} \\ 1 \\ -\frac{l_e}{6} \end{Bmatrix} \quad (1.27)$$

En utilisant les définitions des matrices de passage entre déplacements et courbures (Eq. 1.17), on peut écrire formellement cette matrice sous la forme locale

$$\begin{aligned} & \{ \delta \mathbf{u}_f^e \}^T \underbrace{\int_e [\mathbf{B}_L^e]_f^T [\mathcal{L}_f] [\mathbf{B}_L^e]_f dx^h}_{[\mathbf{K}_f^e]} \{ \mathbf{u}_f^e \} \\ & = \{ \delta \mathbf{u}_f^e \}^T [\mathbf{K}_f^e] \{ \mathbf{u}_f^e \} \end{aligned} \quad (1.28)$$

avec $[\mathcal{L}_f]$ la sous-matrice de $[\mathcal{L}]$ (Eq. 1.19) pour le comportement en flexion et qui se résume

ici à la rigidité $E^e I^e$. Et pour le second membre :

$$\begin{aligned} & \{\delta \mathbf{u}_f^e\}^T \underbrace{\int_e p_y < \mathcal{N}(x^h) >^T dx^h}_{\{\mathbf{f}_{py}^e\}} \\ &= \{\delta \mathbf{u}_f^e\}^T \{\mathbf{f}_{py}^e\} \end{aligned} \quad (1.29)$$

Si on veut intégrer un effort réparti qui n'est pas constant, par exemple qui évolue linéairement entre $p_y(x_1) = p_{y1}$ et $p_y(x_2) = p_{y2}$ les valeurs aux nœuds, soit $p_y(\xi) = N_1(\xi)p_{y1} + N_2(\xi)p_{y2}$, le second membre s'écrit alors depuis l'Eq. 1.25 et avec la notation de l'Eq. 1.29 :

$$\{\mathbf{f}_{py}^e\} = \int_e p_y(x^h) < \mathcal{N}(x^h) >^T dx^h = \left(\frac{l_e}{2}\right) \begin{Bmatrix} \int_{-1}^1 \mathcal{N}_1(\xi) p_y(\xi) d\xi \\ \int_{-1}^1 \mathcal{N}_2(\xi) p_y(\xi) d\xi \\ \int_{-1}^1 \mathcal{N}_3(\xi) p_y(\xi) d\xi \\ \int_{-1}^1 \mathcal{N}_4(\xi) p_y(\xi) d\xi \end{Bmatrix} = \left(\frac{l_e}{20}\right) \begin{Bmatrix} 7p_{y1} + 3p_{y2} \\ l_e \left(p_{y1} + \frac{2p_{y2}}{3}\right) \\ 3p_{y1} + 7p_{y2} \\ -l_e \left(\frac{2p_{y1}}{3} + p_{y2}\right) \end{Bmatrix} \quad (1.30)$$

Tension seule Pour le problème de tension qui se superpose au problème de flexion (dans notre cadre linéaire HPP), on a la forme intégrale faible

$$\begin{aligned} & \delta \mathcal{P}_{int}(\delta u(x)) + \delta \mathcal{P}_{ext}(\delta u(x)) = 0, \forall \delta u(x) \text{ C.A.}(0) \rightsquigarrow \\ & - \int_{x_1}^{x_2} N^h(x) \delta u'^h(x) dx + \int_{x_1}^{x_2} p_x(x) \delta u^h(x) dx + [N_i^h \delta u_i^h]_{x_1}^{x_2} \end{aligned} \quad (1.31)$$

qui donne, une fois la discrétisation linéaire (Eq. 1.9) introduite pour le champ recherché et le champ test, pour un élément

$$\begin{aligned} & -E^e S^e \begin{Bmatrix} \delta u_1 \\ \delta u_2 \end{Bmatrix}^T \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} < N_1(x), N_2(x) >^T \frac{d}{dx} < N_1(x), N_2(x) > dx \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \dots \\ & \dots + \begin{Bmatrix} \delta u_1 \\ \delta u_2 \end{Bmatrix}^T \int_{x_i}^{x_{i+1}} p_x(x) < N_1(x), N_2(x) >^T dx^h \end{aligned} \quad (1.32)$$

Ce qui conduit à la matrice de rigidité et au second membre (p_x constant) dans le repère local de la poutre :

$$\begin{aligned} \text{Rigidité} \quad K_{ij,t}^e &= E^e S^e \int_{x_1}^{x_2} \frac{dN_j(x)}{dx} \frac{dN_i(x)}{dx} dx = E^e S^e \left(\frac{l_e}{2}\right) \int_{-1}^1 \frac{dN_j(\xi)}{d\xi} \frac{dN_i(\xi)}{d\xi} d\xi \\ &= \begin{cases} \frac{E^e S^e}{l_e} & \text{si } i = j \\ -\frac{E^e S^e}{l_e} & \text{si } i \neq j \end{cases} \\ \text{Efforts extérieurs} \quad f_{i,px}^e &= p_x \int_{x_1}^{x_2} N_i(x) dx = p_x \left(\frac{l_e}{2}\right) \int_{-1}^1 N_i(\xi) d\xi = p_x \left(\frac{l_e}{2}\right) \end{aligned} \quad (1.33)$$

qu'on aurait pu directement calculer comme pour le problème de flexion (Eqs. 1.28 et 1.29).

$$\begin{aligned} [\mathbf{K}_t^e] &= \int_e [\mathbf{B}_L^e]_t^T [\mathcal{L}_t] [\mathbf{B}_L^e]_t dx^h \\ \{\mathbf{f}_{px}^e\} &= p_x \int_e N(x^h) >^T dx^h \end{aligned} \quad (1.34)$$

avec $[\mathcal{L}_t]$ la sous-matrice de comportement en membrane, limitée ici à la seule rigidité $E^e S^e$. Tous calculs faits, ces expressions ont la forme suivante dans le repère local de la poutre :

$$[\mathbf{K}_t^e] = \frac{E^e S^e}{l_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \{\mathbf{f}_{px}^e\} = p_x \left(\frac{l_e}{2} \right) \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (1.35)$$

Pour un effort linéique affine - $p_x(\xi) = N_1(\xi)p_{x1} + N_2(\xi)p_{x2}$ -, le second membre s'écrit un peu plus simplement qu'en flexion (Eq. 1.30)

$$\{\mathbf{f}_{px}^e\} = \int_e p_x(x^h) < N(x^h) >^T dx^h = \left(\frac{l_e}{2} \right) \begin{Bmatrix} \int_{-1}^1 N_1(\xi) p_x(\xi) d\xi \\ \int_{-1}^1 N_2(\xi) p_x(\xi) d\xi \end{Bmatrix} = \left(\frac{l_e}{6} \right) \begin{Bmatrix} 2 p_{x1} + p_{x2} \\ p_{x1} + 2 p_{x2} \end{Bmatrix} \quad (1.36)$$

1.3.2 Expressions en tension-flexion dans la base globale

Les relations entre les degrés de liberté dans le repère de la poutre et le repère global s'écrivent à partir des relations 1.22 adaptées pour les 2 noeuds de l'élément (indices (1) et (2) ci-après) :

$$\{\delta \mathbf{q}^e\}_{(l)} = [\mathbf{R}]^T \{\delta \mathbf{q}^e\}_{(g)} \quad \text{ou} \quad \{\delta \mathbf{q}^e\}_{(l)} = \begin{Bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \theta \end{pmatrix}_{(1)} \\ \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \theta \end{pmatrix}_{(2)} \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y})} = \begin{bmatrix} [\mathbf{P}]^T & [\mathbf{0}] \\ [\mathbf{0}] & [\mathbf{P}]^T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \\ \theta^1 \\ u_1^2 \\ u_2^2 \\ \theta^2 \end{Bmatrix}_{(\vec{e}_1, \vec{e}_2)} \quad (1.37)$$

Efforts extérieurs Le vecteur discret des efforts extérieurs linéiques $\vec{p}(x)$ considéré d'intensité constante par élément s'écrit donc dans la base globale, en repartant de l'expression

de la puissance virtuelle des efforts répartis

$$\begin{aligned}
 & p_y \left(\frac{l_e}{2} \right) \begin{Bmatrix} \delta v_1 \\ \delta \theta_1 \\ \delta v_2 \\ \delta \theta_2 \end{Bmatrix}_{(l)}^T \begin{Bmatrix} 1 \\ \frac{l_e}{6} \\ 1 \\ -\frac{l_e}{6} \end{Bmatrix}_{(l)} + p_x \left(\frac{l_e}{2} \right) \begin{Bmatrix} \delta u_1 \\ \delta u_2 \end{Bmatrix}_{(l)}^T \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}_{(l)} = \left(\frac{l_e}{2} \right) \begin{Bmatrix} \delta u_1 \\ \delta v_1 \\ \delta \theta_1 \\ \delta u_2 \\ \delta v_2 \\ \delta \theta_2 \end{Bmatrix}_{(l)}^T \begin{Bmatrix} p_x \\ p_y \\ \frac{l_e}{6} p_y \\ p_x \\ p_y \\ -p_y \frac{l_e}{6} \end{Bmatrix}_{(l)} \\
 & \rightsquigarrow \{\delta \mathbf{q}^e\}_{(g)}^T \{\mathbf{f}_p^e\}_{(g)} = \{\delta \mathbf{q}^e\}_{(l)}^T \{\mathbf{f}_p^e\}_{(l)} = \left([\mathbf{R}]^T \{\delta \mathbf{q}^e\}_{(g)} \right)^T \{\mathbf{f}_p^e\}_{(l)} = \{\delta \mathbf{q}^e\}_{(g)}^T [\mathbf{R}] \{\mathbf{f}_p^e\}_{(l)} \\
 & \rightsquigarrow \{\mathbf{f}_p^e\}_{(g)} = \left(\frac{l_e}{2} \right) \begin{Bmatrix} C p_x - S p_y \\ S p_x + C p_y \\ \frac{l_e}{6} p_y \\ C p_x - S p_y \\ S p_x + C p_y \\ -p_y \frac{l_e}{6} \end{Bmatrix}_{(g)}
 \end{aligned} \tag{1.38}$$

Et pour des chargements linéiques de forme linéaire (Eqs. 1.30 et 1.36.) :

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{l_e}{2} \right) \begin{Bmatrix} \delta v_1 \\ \delta \theta_1 \\ \delta v_2 \\ \delta \theta_2 \end{Bmatrix}_{(l)}^T \begin{Bmatrix} \frac{7}{10} p_{y1} + \frac{3}{10} p_{y2} \\ l_e \left(\frac{p_{y1}}{10} + \frac{p_{y2}}{15} \right) \\ \frac{3}{10} p_{y1} + \frac{7}{10} p_{y2} \\ -l_e \left(\frac{p_{y1}}{15} + \frac{p_{y2}}{10} \right) \end{Bmatrix}_{(l)} + \left(\frac{l_e}{2} \right) \begin{Bmatrix} \delta u_1 \\ \delta u_2 \end{Bmatrix}_{(l)}^T \begin{Bmatrix} \frac{2}{3} p_{x1} + \frac{1}{3} p_{x2} \\ \frac{1}{3} p_{x1} + \frac{2}{3} p_{x2} \end{Bmatrix}_{(l)} \\
 & \rightsquigarrow \{\mathbf{f}_p^e\}_{(g)} = \left(\frac{l_e}{2} \right) \begin{Bmatrix} C \left(\frac{2}{3} p_{x1} + \frac{1}{3} p_{x2} \right) - S \left(\frac{7}{10} p_{y1} + \frac{3}{10} p_{y2} \right) \\ S \left(\frac{2}{3} p_{x1} + \frac{1}{3} p_{x2} \right) + C \left(\frac{7}{10} p_{y1} + \frac{3}{10} p_{y2} \right) \\ l_e \left(\frac{p_{y1}}{10} + \frac{p_{y2}}{15} \right) \\ C \left(\frac{1}{3} p_{x1} + \frac{2}{3} p_{x2} \right) - S \left(\frac{3}{10} p_{y1} + \frac{7}{10} p_{y2} \right) \\ S \left(\frac{1}{3} p_{x1} + \frac{2}{3} p_{x2} \right) + C \left(\frac{3}{10} p_{y1} + \frac{7}{10} p_{y2} \right) \\ -l_e \left(\frac{p_{y1}}{15} + \frac{p_{y2}}{10} \right) \end{Bmatrix}_{(g)}
 \end{aligned} \tag{1.39}$$

À ce vecteur, il faut ajouter le vecteur des efforts ponctuels appliqués aux noeuds de

la poutre (Eq. 1.20) dans le repère de structure. Au final, le vecteur complet des efforts qui agissent aux nœuds de la discrétisation s'écrit, dans le repère global s'écrit :

$$\{\mathcal{F}^e\}_{(g)} = \{f_p^e\}_{(g)} + \{F^e\}_{(g)} = [\mathbf{R}] \{f_p^e\}_{(l)} + \{F^e\}_{(g)}$$

Rigidité La matrice de rigidité en tension-flexion s'écrit dans la base locale, comme la somme des contributions des rigidités de flexion (Eq. 1.27) et de tension (Eq. 1.35), en posant $\alpha = \frac{E^e S^e}{l_e}$ et $\beta = \frac{E^e I^e}{l_e^3}$:

$$[\mathbf{K}^e]_{(l)} = \begin{array}{c|cccccc} & u_1 & v_1 & \theta_1 & u_2 & v_2 & \theta_2 \\ \hline \alpha & 0 & 0 & -\alpha & 0 & 0 & \\ & 12\beta & 6l_e\beta & 0 & -12\beta & 6l_e\beta & \\ & & 4l_e^2\beta & 0 & -6l_e\beta & 2l_e^2\beta & \\ & & & \alpha & 0 & 0 & \\ & & & & 12\beta & -6l_e\beta & \\ & & & & & 4l_e^2\beta & \end{array} \begin{array}{l} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{array} \quad (1.40)$$

et le changement de base s'effectue en repartant de l'expression de la puissance virtuelle des efforts intérieurs (Eqs. 1.25-1.28 en flexion et Eq. 1.32 en tension) :

$$\begin{aligned} \{\delta q^e\}_{(l)}^T [\mathbf{K}^e]_{(l)} \{q^e\}_{(l)} &= \{\delta q^e\}_{(g)}^T \underbrace{[\mathbf{R}] [\mathbf{K}^e]_{(l)} [\mathbf{R}]^T}_{[\mathbf{K}^e]_{(g)}} \{q^e\}_{(g)} \\ &= \{\delta q^e\}_{(g)}^T [\mathbf{K}^e]_{(g)} \{q^e\}_{(g)} \end{aligned} \quad (1.41)$$

ce qui conduit à l'expression finale :

$$[\mathbf{K}^e]_{(g)} = \begin{array}{cccccc|c} u_1^1 & u_2^1 & \theta^1 & u_1^2 & u_2^2 & \theta^2 & \\ \hline C^2\alpha + 12S^2\beta & CS(\alpha - 12\beta) & -6S\beta l_e & -C^2\alpha - 12S^2\beta & -CS(\alpha - 12\beta) & -6S\beta l_e & u_1^1 \\ CS(\alpha - 12\beta) & 12C^2\beta + S^2\alpha & 6C\beta l_e & CS(-\alpha + 12\beta) & -12C^2\beta - S^2\alpha & 6C\beta l_e & u_2^1 \\ -6S\beta l_e & 6C\beta l_e & 4\beta l_e^2 & 6S\beta l_e & -6C\beta l_e & 2\beta l_e^2 & \theta^1 \\ -C^2\alpha - 12S^2\beta & CS(-\alpha + 12\beta) & 6S\beta l_e & C^2\alpha + 12S^2\beta & CS(\alpha - 12\beta) & 6S\beta l_e & u_1^2 \\ -CS(\alpha - 12\beta) & -12C^2\beta - S^2\alpha & -6C\beta l_e & CS(\alpha - 12\beta) & 12C^2\beta + S^2\alpha & -6C\beta l_e & u_2^2 \\ -6S\beta l_e & 6C\beta l_e & 2\beta l_e^2 & 6S\beta l_e & -6C\beta l_e & 4\beta l_e^2 & \theta^2 \end{array} \quad (1.42)$$

2.

Formulation en rotations modérées

2.1 Formulation en du problème tangent

Considérons l'écriture ci-dessous de l'équilibre global pour un problème non-linéaire. Pour décomposer le problème, supposons que seules les non-linéarités géométriques sont prises en compte.

2.1.1 Non-linéarités géométriques

Déformations de Green-Lagrange On rappelle que les expressions des déformations non-linéaires sont telles que :

$$\begin{aligned}\underline{\underline{\gamma}}(\vec{u}) &= \frac{1}{2}(\underline{\underline{\nabla}}\vec{u} + \underline{\underline{\nabla}}^t\vec{u}) + \frac{1}{2}\underline{\underline{\nabla}}^t\vec{u} \cdot \underline{\underline{\nabla}}\vec{u} = \underline{\underline{\epsilon}}(\vec{u}) + \underline{\underline{\mu}}(\vec{u}) \\ &= \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) + \frac{1}{2}(u_{k,i} u_{k,j})\end{aligned}\tag{2.1}$$

et que, naturellement, le tenseur des déformations non-linéaire est de la même taille que la partie linéaire (6×6). Sous sa forme discrète, ce tenseur de déformation non-linéaire se met généralement sous la forme de 2 types de contributions séparées portant sur les gradients des fonctions de forme, une linéaire en les gradients de déformations, et la seconde quadratique :

$$\begin{aligned}\underline{\underline{\gamma}}(\vec{u}) &\simeq \underline{\underline{\gamma}}^h(\vec{u}^h) = \sum^e \{\gamma^e(\{\mathbf{q}^e\})\} \\ \{\gamma^e(\{\mathbf{q}^e\})\} &= \left([\mathbf{B}_L^e] + \frac{1}{2} [\mathbf{B}_{NL}^e(\{\mathbf{q}^e\})] \right) \{\mathbf{q}^e\} = [\mathbf{B}^*] \{\mathbf{q}^e\}\end{aligned}\tag{2.2}$$

Ces matrices contenant les gradients de fonctions de forme sont symétriques et de taille identique, fonction de la discrétisation élémentaire ; par exemple ($6 \times n_{dofs}$) si on considère les composantes de déformations définies par élément et stockées dans un vecteur (6×1). Le terme non-linéaire étant en facteur du déplacement, la matrice $[\mathbf{B}_{NL}^e]$ dépendra linéairement des gradients de déplacements.

Pour intégrer, au moins de façon formelle, ces non-linéarités dans la discrétisation par éléments finis, il faut introduire les non-linéarités des déformations. L'expression 1.15 page 6

est complétée par la partie non-linéaire discrétisée. Pour un champ de déplacement élémentaire $u_{1,2,3}^h$ cette relation complémentaire s'écrit par exemple (il n'y a pas d'écriture *standard*)

$$\begin{aligned} \{\boldsymbol{\mu}^e\} &= \{\boldsymbol{\nabla} \mathbf{u}^e\}^T \{\boldsymbol{\nabla} \mathbf{u}^e\} \\ &= \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial u_1^h}{\partial x_1} & 0 & 0 & \frac{\partial u_2^h}{\partial x_1} & 0 & 0 & \frac{\partial u_3^h}{\partial x_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial u_1^h}{\partial x_2} & 0 & 0 & \frac{\partial u_2^h}{\partial x_2} & 0 & 0 & \frac{\partial u_3^h}{\partial x_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial u_1^h}{\partial x_3} & 0 & 0 & \frac{\partial u_2^h}{\partial x_3} & 0 & 0 & \frac{\partial u_3^h}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_1^h}{\partial x_2} & \frac{\partial u_1^h}{\partial x_1} & 0 & \frac{\partial u_2^h}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2^h}{\partial x_1} & 0 & \frac{\partial u_3^h}{\partial x_2} & \frac{\partial u_3^h}{\partial x_1} & 0 \\ \frac{\partial u_1^h}{\partial x_3} & 0 & \frac{\partial u_1^h}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2^h}{\partial x_3} & 0 & \frac{\partial u_2^h}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3^h}{\partial x_3} & 0 & \frac{\partial u_3^h}{\partial x_1} \\ 0 & \frac{\partial u_1^h}{\partial x_3} & \frac{\partial u_1^h}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial u_2^h}{\partial x_3} & \frac{\partial u_2^h}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial u_3^h}{\partial x_3} & \frac{\partial u_3^h}{\partial x_2} \end{bmatrix}}_{[\mathbf{A}^e]} \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial u_1^h}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u_1^h}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u_1^h}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_2^h}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u_2^h}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u_2^h}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_3^h}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u_3^h}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u_3^h}{\partial x_3} \end{pmatrix}}_{\{\boldsymbol{\theta}^e\}} \\ &= [\mathbf{A}^e] \{\boldsymbol{\theta}^e\} \end{aligned}$$

Par ailleurs, l'opérateur $[\mathbf{H}^e]$ que nous ne détaillerons pas ici, permet d'écrire les déformations non-linéaires en fonction du vecteur des déplacements élémentaires $\{\mathbf{u}^e\}$, soit $\{\boldsymbol{\mu}^e\} = [\mathbf{A}^e] [\mathbf{H}^e] \{\mathbf{u}^e\}$. Finalement, en intégrant la matrice des fonctions de forme comme dans le cas des déformations linéaires, les déformations non-linéaires s'écrivent :

$$\{\boldsymbol{\mu}^e\} = \frac{1}{2} [\mathbf{A}^e] \{\boldsymbol{\theta}^e\} = \frac{1}{2} [\mathbf{A}^e] [\mathbf{H}^e] \{\mathbf{u}^e\} = \frac{1}{2} \underbrace{[\mathbf{A}^e] [\mathbf{H}^e] [\mathbf{N}^e]}_{[\mathbf{B}_{NL}^e(\{\mathbf{q}^e\})]} \{\mathbf{q}^e\} \quad (2.3)$$

Illustration en déformations planes Pour expliciter un peu plus la discrétisation de la partie non-linéaire des déformations, considérons un cas de déformations planes - déplacement plan discrétisé avec n_{dofs} degrés de liberté - $u_i^h(\vec{x}^h) = \sum_{k=1}^{n_{dofs}} N_k(\vec{x}^h) u_i^k$, avec $i = 1, 2$ - tel que :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ 2\epsilon_{12} \end{pmatrix}^e + \begin{pmatrix} \gamma_{11} \\ \gamma_{22} \\ 2\gamma_{12} \end{pmatrix}^e &= \begin{bmatrix} \langle \mathbf{N}_{,1}^e \rangle & \langle 0 \rangle \\ \langle 0 \rangle & \langle \mathbf{N}_{,2}^e \rangle \\ \langle \mathbf{N}_{,2}^e \rangle & \langle \mathbf{N}_{,1}^e \rangle \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\mathbf{u}_1^e\} \\ \{\mathbf{u}_2^e\} \end{Bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \langle d_{11} \rangle & \langle 0 \rangle & \langle 0 \rangle & \langle d_{21} \rangle \\ \langle 0 \rangle & \langle d_{22} \rangle & \langle d_{12} \rangle & \langle 0 \rangle \\ 2\langle d_{12} \rangle & 2\langle d_{21} \rangle & \langle 0 \rangle & \langle 0 \rangle \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \langle d_{11} \rangle^T \\ \langle d_{22} \rangle^T \\ \langle d_{12} \rangle^T \\ \langle d_{21} \rangle^T \end{Bmatrix} \\ \text{dim. } (3 \times 2 n_{dofs}) \times (2 n_{dofs} \times 1) &+ (3 \times 4 n_{dofs}) \times (4 n_{dofs} \times 1) \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\text{avec } \langle d_{ij} \rangle \equiv u_{i,j}^h = \sum_{k=1}^{n_{dofs}} \frac{\partial N_k(\vec{x}^h)}{\partial x_j^h} u_i^k = \langle \mathbf{N}_{,j}^e(\{\mathbf{x}^h\}) \rangle \{\mathbf{u}_i^e\}.$$

Forme intégrale faible La partie non-linéaire de ces déformations peut être ré-écrite en combinant les gradients des fonctions de forme des produits $\mu_{ij}^h = u_{k,i}^h u_{k,j}^h = \langle d_{ki} \rangle \{d_{jk}\}$, et l'Eq. 2.4 peut alors se mettre sous la forme proposée dans l'Eq. 2.3 en fonction des déplacements nodaux. On retrouve finalement l'expression 2.2 pour la déformation de Green-Lagrange complète. La variation de cette déformation non-linéaire s'exprime en utilisant les symétries de $[\mathbf{B}_L]$ et $[\mathbf{B}_{NL}]$ - ceci est illustré au §2.2 ci-après pour nos éléments de poutre d'Hermite -

$$\{\delta \gamma^e(\{q^e\})\} = ([\mathbf{B}_L^e] + [\mathbf{B}_{NL}^e(\{q^e\})]) \{\delta q^e\} = [\bar{\mathbf{B}}^e(\{q^e\})] \{\delta q^e\} \quad (2.5)$$

Pour se convaincre de la forme de la partie non-linéaire, il suffit de revenir au cas simple des déformations en rotations modérées pour une poutre (cf Chapitre 4 de http://www.emse.fr/~drapier/index_fichiers/CoursPDF/Meca-Structu2A/Meca-struct-num-Octobre-2023.pdf). La variation de la déformation de membrane s'écrit :

$$\delta \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \left(\frac{1}{2} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right)^2 \right) = \delta \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \delta \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \quad (2.6)$$

où l'on vérifie que les opérateurs différentiels restent inchangés mis à part le facteur $\frac{1}{2}$ de la partie non-linéaire qui disparaît.

On en déduit la forme intégrale faible élémentaire associée. Pour cela, on introduit les efforts conjugués aux déformations, ici les composantes du second tenseur de Piola-Kirchhoff, qui s'écrivent sous la forme d'un vecteur des contraintes $\{\mathcal{S}^e(\{\gamma^e\})\}$ de la même dimension que les déformations de façon à ce que l'énergie de déformation s'écrive $\{\mathcal{S}^e(\{\gamma^e\})\}^T \cdot \{\gamma^e(\{q^e\})\}$. La forme intégrale faible élémentaire s'écrit alors :

$$- \int_{\Omega_e^0} \{\mathcal{S}^e(\{\gamma^e\})\}^T [\bar{\mathbf{B}}^e(\{q^e\})] \{\delta q^e\} d\Omega_e^0 + \{\delta q^e\}^T \{\mathcal{F}^e(\{q^e\})\} \quad (2.7)$$

et l'équilibre global s'écrit, après assemblage :

$$\begin{aligned} & \{\delta q\}^T \left(\int_{\Omega^0} [\bar{\mathbf{B}}(\{q\})]^T \{\mathcal{S}(\{\gamma\})\} d\Omega^0 - \{\mathcal{F}(\{q\})\} \right) = 0, \forall \{\delta q\}^T C.A.(0) \\ & = \{\delta q\}^T \left(\underbrace{\int_{\Omega^0} [\bar{\mathbf{B}}(\{q\})]^T [\mathcal{L}] [\bar{\mathbf{B}}(\{q\})] d\Omega^0}_{[\mathbf{K}(\{q\})]} \{q\} - \{\mathcal{F}(\{q\})\} \right) \\ & \Rightarrow \{\Psi(\{q\})\} \equiv [\mathbf{K}(\{q\})] \{q\} - \{\mathcal{F}(\{q\})\} = \{0\} \quad (2.8) \end{aligned}$$

2.1.2 Problème tangent

Comme pour tout système non-linéaire, on cherche à résoudre ce système algébrique en opérant une linéarisation dite de *Newton*. En supposant que l'introduction de pressions dans un cadre

purement discrétisé peut se faire 'simplement', au contraire de la formulation continue, la variation linéaire (incrémentale) de l'expression 2.8 caractérisant l'équilibre s'écrit :

$$\begin{aligned} d\{\Psi(\{q\})\} &= \underbrace{\frac{\partial}{\partial\{q\}} ([K(\{q\})] \{q\})}_{[K^T]} \{dq\} - \underbrace{\frac{\partial\{\mathcal{F}(\{q\})\}}{\partial\{q\}}}_{[K_f^T]} \{dq\} \\ &= [K^T] \{dq\} - [K_f^T] \{dq\} \end{aligned} \quad (2.9)$$

où $[K^T]$ est la matrice tangente du système associée à sa réponse. Compte-tenu des dépendances vis-à-vis des déplacements (déformations), on voit que les efforts extérieurs ne contribuent pas à cette rigidité tangente qui est en fait le *hessien* du système. La contribution des efforts qui dépendrait des déplacements (les pressions suiveuses dépendent des configuration géométrique) apparaît dans le terme $[K_f^T]$ qu'on cherche généralement à ne pas prendre en compte car il peut faire apparaître un système non-symétrique.

On peut donc calculer l'incrément associé au problème sécant (Eq. 2.8), c'est-à-dire le problème tangent (Eq. 2.9). Pour cela, on montre que l'incrément de déformation associé s'écrit, en exploitant les symétries comme pour les variations ci-dessus (Eq. 2.5) - cf cas des poutres ci-après § 2.2 :

$$\begin{aligned} d[\overline{B}(\{q^e\})] &= [\overline{B}(\{q_{i+1}^e\})] - [\overline{B}(\{q_i^e\})] \quad \text{si } d\{q^e\} = \{q_{i+1}^e\} - \{q_i^e\} \\ &= \frac{1}{2} [B_{NL}(\{q_{i+1}^e\})] - \frac{1}{2} [B_{NL}(\{q_i^e\})] \quad \text{car } \frac{\partial [B_L^e]}{\partial \{q^e\}} = [0] \\ &= \frac{\partial [B_{NL}(\{q^e\})]}{\partial \{q^e\}} \{dq^e\} = [dB_{NL}] \\ \Rightarrow \text{(Eq. 2.8)} \quad d\left(\{\delta q^e\}^T [\overline{B}(\{q^e\})]^T\right) &= \{\delta q^e\}^T [dB_{NL}(\{q^e\})]^T \end{aligned} \quad (2.10)$$

où la matrice $[dB_{NL}]$ est désormais constante par rapport aux gradients de déplacements; on rappelle que $[B_{NL}(\{q^e\})]$ est linéaire par rapport à ces gradients, et donc par rapport aux inconnues nodales.

En négligeant $[K_f^T]$, l'équilibre incrémentale s'écrit finalement :

$$\begin{aligned} d\{\Psi(\{q\})\} &\equiv [K^T] \{dq\} = d\left(\int_{\Omega^0} \{\mathcal{S}(\{\gamma\})\}^T [\overline{B}(\{q\})] d\Omega^0\right) \\ &= \underbrace{\int_{\Omega^0} \{\mathcal{S}(\{\gamma\})\}^T [dB_{NL}] d\Omega^0}_{[K_\sigma^T]} + \int_{\Omega^0} \{d\mathcal{S}(\{\gamma\})\}^T [\overline{B}(\{q\})] d\Omega^0 \\ &= [K_\sigma^T] \{dq\} + \int_{\Omega^0} \{d\mathcal{S}(\{\gamma\})\}^T [\overline{B}(\{q\})] d\Omega^0 \end{aligned} \quad (2.11)$$

La rigidité tangente $[K_\sigma^T]$ est appelée matrice *des contraintes initiales* ou matrice de rigidité *géométrique*. C'est par elle que l'état de contrainte initial, ou l'état de contrainte courant, peut produire des effets non-linéaires. C'est l'élément essentiel pour prendre en compte les effets de

flambage notamment, elle contient des termes constants en les déplacements (déformations) et des contraintes. Pour poursuivre les développements, considérons un matériau de type Hookéen pour simplifier. Le problème tangent s'écrit donc :

$$\begin{aligned}
 d\{\Psi(\{q\})\} &= [\mathbf{K}_\sigma^T(\{q\})] \{dq\} \\
 &= \int_{\Omega^0} \{d\mathcal{S}(\{\gamma\})\}^T [\bar{\mathbf{B}}(\{q\})] d\Omega^0 \\
 &= \int_{\Omega^0} [\bar{\mathbf{B}}(\{q\})]^T [\mathcal{L}] [\bar{\mathbf{B}}(\{q\})] \{dq\} d\Omega^0 \\
 &= \underbrace{\int_{\Omega^0} [\mathbf{B}_L]^T [\mathcal{L}] [\mathbf{B}_L] d\Omega^0}_{[\mathbf{K}_0^T]} \{dq\} \\
 &\quad + \underbrace{\int_{\Omega^0} \left([\mathbf{B}_L]^T [\mathcal{L}] [\mathbf{B}_{NL}] + [\mathbf{B}_{NL}]^T [\mathcal{L}] [\mathbf{B}_L] + [\mathbf{B}_{NL}]^T [\mathcal{L}] [\mathbf{B}_{NL}] \right) d\Omega^0}_{[\mathbf{K}_{NL}^T(\{q\})]} \{dq\} \\
 &= [\mathbf{K}_0^T] \{dq\} + [\mathbf{K}_{NL}^T(\{q\})] \{dq\}
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

Ces rigidités tangentées représentent respectivement la rigidité du problème *linéaire (HPP)* pour $[\mathbf{K}_0]$ qui ne contient que des termes constants, et la rigidité *des grands déplacements* $[\mathbf{K}_{NL}^T(\{q\})]$ qui contient des termes linéaires ou quadratiques en les déplacements (déformations). Finalement, le problème tangent s'écrit :

$$d\{\Psi(\{q\})\} = ([\mathbf{K}_\sigma^T] + [\mathbf{K}_0^T] + [\mathbf{K}_{NL}^T(\{q\})]) \{dq\} \tag{2.13}$$

Sa résolution passe par des techniques de contrôle des chargements, tels que des schémas itératifs et de prédiction-correction par exemple. En l'absence de grands déplacements, ou pour des problèmes linéarisés, la résolution se ramène à un calcul de valeurs propres comme nous le verrons ci-dessous.

Remarque : On peut introduire ce problème tangent en considérant le lagrangien pour un système conservatif (pas de dissipation et pas de forces suiveuses), et utiliser le théorème de **Lejeune-Dirichlet** qui montre qu'un système est stable quand la variation seconde de cette forme est positive ou, de façon équivalente en statique, que la variation de sa partie au moins quadratique en les déplacements est positive - cf section 2.2.2 ci-dessous pour le cas des poutres. On voit par exemple ici clairement que les contributions des efforts extérieurs, présentes dans le problème sécant ($\{\mathcal{F}\}$) disparaissent au profit des effets internes de pré-contraintes notamment.

2.2 Cas des poutres

Pour les poutres droites, il est classique de ramener ce problème fortement non-linéaire à un problème *linéarisé*. Ceci se fait en se plaçant dans l'**hypothèse de rotations modérées**, où l'effet non-linéaire est introduit en reformulant le terme de déformation de membrane - cf cours de Mécanique des Structures indiqué en référence :

$$\begin{aligned} \underline{\gamma}(\underline{u}) &= \frac{1}{2}(\underline{\nabla} \underline{u} + \underline{\nabla}^t \underline{u}) + \frac{1}{2} \underline{\nabla}^t \underline{u} \cdot \underline{\nabla} \underline{u} = \underline{\epsilon}(\underline{u}) + \underline{\mu}(\underline{u}) \\ \text{Poutre} \rightsquigarrow &\begin{cases} \gamma_x(u', v', v'') &= \gamma_x^m(u', v') - y \kappa_z(x) \\ &= e_x(u') + \mu_x(v') - y \kappa_z(x) \\ &= u' + \frac{1}{2} v'^2 - y v''(x) \end{cases} \end{aligned} \quad (2.14)$$

Par rapport à la déformation linéarisée introduite précédemment (Eq. 1.16), la partie non-linéaire va apporter la contribution non-linéaire $[\mathbf{B}_{NL}^e]$ formellement introduite dans l'Eq. 2.2.

2.2.1 Simplification : flambage à contrainte constante

Dans un premier temps, utilisons la forme intégrale faible explicite avant de revenir à l'écriture formelle. Le problème de flambage s'écrit alors, pour toute fonction test égale à la variation du champs réel :

$$\int_0^l \left(N(x) (\delta u' + v' \delta v') + M(x) \delta v'' \right) dx - N(l) \delta u(l) = 0, \quad \forall (\delta u, \delta v) \text{ C.A.}(0) \quad (2.15)$$

Pour le cas basique d'une poutre droite bloquée à son origine et soumise à un effort de compression $N(l) = -F$, on obtient directement l'expression de l'effort normal à l'intérieur de la poutre, tel que $\frac{dN(x)}{dx} = 0 \Rightarrow N(x) = -F$. Ceci correspond à l'hypothèse de flambage à contrainte constante. On aboutit à la forme connue qu'on peut discrétiser :

$$\sum_e \underbrace{\int_{x_1}^{x_2} \left(N^h(x) \delta u^{h'} + M^h(x) \delta v^{h''} \right) dx}_{[\mathbf{K}_0^e]} - \underbrace{F \int_{x_1}^{x_2} v^{h'} \delta v^{h'} dx}_{F [\mathbf{K}_\sigma^e]} = 0, \quad \forall \{\delta q\} \text{ C.A.}(0) \quad (2.16)$$

car on retrouve les formes de la première variation de l'énergie potentielle établies en flexion et en tension respectivement dans les relations 1.31 et 1.24.

2.2.2 Formulation à partir du problème tangent

Pour formuler ce problème directement comme nous l'avons établi ci-dessus dans le cas général (Eq. 2.13), on peut réécrire soit la seconde variation de l'énergie potentielle, soit

la variation de sa partie au moins quadratique. Dans les 2 cas, seule la partie interne (énergie de déformation) subsiste pour des chargements indépendants des déplacements (différents des forces suiveuses) qui, dans ce cas, produisent un travail linéaire par rapport aux déplacements.

Dans notre cas, la variation de l'énergie de déformation (termes au moins quadratiques en les déplacements) donne :

$$\begin{aligned}
 \delta P_2(\vec{u}) &= \delta \left(\int_0^l \left(N(x) \left(u' + \frac{1}{2} v'^2 \right) + M(x) v'' \right) dx \right) = 0 \\
 &= \int_0^l \left(N(x) \delta u' + M(x) \delta v'' \right) dx + \int_0^l N(x) v' \delta v' dx \\
 &= \underbrace{\int_0^l \left(u' ES \delta u' + v'' \delta v'' \right) dx}_{\delta W(d^2)} + \underbrace{\int_0^l ES \left(u' + \frac{1}{2} v'^2 \right) v' \delta v' dx}_{\delta W(d^3, d^4)} = 0, \quad \forall (\delta u, \delta v) \text{ C.A.}(0) \\
 &\hspace{15cm} (2.17)
 \end{aligned}$$

La variation seconde de l'énergie potentielle de la poutre s'écrit (par exemple en reprenant l'exemple ci-dessus Eq. 2.15) :

$$\begin{aligned}
 d(\Psi(\vec{u})) &= d(\delta P(\vec{u})) = \delta^2 P(\vec{u}) = 0, \quad \forall (\delta u, \delta v) \text{ C.A.}(0) \\
 &= d \left(\int_0^l \left(N(x) \delta u' + M(x) \delta v'' \right) dx + \int_0^l N(x) v' \delta v' dx - N(\ell) \delta u(\ell) \right) \\
 &= \int_0^l \left(du' ES \delta u' + dv'' EI \delta v'' \right) dx + \int_0^l dv' N(x) \delta v' dx \\
 &\Downarrow \text{ après discrétisation} \\
 \sum_e &\left[\mathbf{K}_0^{\mathbf{T},e} \right] + \left[\mathbf{K}_\sigma^{\mathbf{T},e}(\mathbf{N}(\mathbf{x}^h)) \right] = 0, \quad \forall \{\delta \mathbf{q}\} \text{ C.A.}(0) \\
 &\hspace{15cm} (2.18)
 \end{aligned}$$

On retrouve bien le même système à partir de ces formulations. Pour des problèmes plus complexes, la seconde variation sera systématiquement employée, on travaillera directement sur le hessien.

La matrice de rigidité initiale est par nature définie positive, elle correspond à la discrétisation de l'énergie de déformation dans le cas linéaire. En l'absence de matrice de rigidité des grands déplacements ($[\mathbf{K}_{\mathbf{NL}}^{\mathbf{T}}(\{\mathbf{q}\})]$) la stabilité sera donnée par le signe de la matrice tangente des contraintes ; elle doit être positive pour que le système soit stable. On peut également intégrer le signe des pré-chargeurs extérieurs (ici efforts normaux $N(x^h)$) dans cette matrice, et dans ce cas les valeurs critiques seront affectées de ce signe également.

2.2.3 Rigidité $[\mathbf{K}_\sigma]$

Dans ces expressions on reconnaît la *rigidité élastique* de flexion qui donnera la matrice de rigidité du système discret $[\mathbf{K}]_0$ (Eq. 3.8 page 33), et la nouvelle rigidité qui exprime

l'influence de la géométrie sur la rigidité de la structure $[\mathbf{K}_\sigma]$, appelée *rigidité géométrique*. En intégrant la discrétisation du champ de déplacement en flexion seule (Eq. 1.6), cette matrice de rigidité géométrique $[\mathbf{K}_\sigma]$ s'écrit dans le repère local de la poutre :

$$K_{\sigma ij}^e = \int_{x_1}^{x_2} N^h(x^h) \frac{d\mathcal{N}_i}{dx} \frac{d\mathcal{N}_j}{dx} dx^h \simeq N^e \int_{x_1}^{x_2} \frac{d\mathcal{N}_i}{dx} \frac{d\mathcal{N}_j}{dx} dx^h \quad (2.19)$$

et on peut sortir les efforts normaux de cette contribution, par exemple en supposant qu'ils sont constants. On peut toutefois imaginer des cas plus généraux de distributions plus fines des états de contraintes puisque les intégrations numériques seront réalisées aux points de Gauss de l'élément.

Classiquement, on pourra supposer que l'état de contrainte et de déformation induit par le terme de membrane de la poutre peut être négligé - la partie $N^h(x)\delta u^{h'}$ de l'équilibre 2.16 ci-dessus. Dans ce cas, les matrices de rigidité élastiques et géométriques n'impliquent plus que les degrés de liberté en flexion. Mais il s'agit ici d'une simplification assez forte que nous n'aurons pas besoin de faire ici puisque nous avons intégré la tension à la rigidité élastique de notre élément (Eq. 3.8) qui reste inchangée dans la forme tangente à résoudre.

Tous calculs faits pour ce cas de 'flambage linéaire', la matrice de rigidité géométrique s'écrit dans le repère de la poutre :

$$[\mathbf{K}_\sigma^e]_{(\vec{x}, \vec{y})} = \frac{1}{30l_e} \begin{vmatrix} v_1 & \theta_1 & v_2 & \theta_2 \\ 36 & 3l_e & -36 & 3l_e \\ 4l_e^2 & -3l_e & -l_e^2 & \theta_1 \\ & 36 & -3l_e & v_2 \\ & & 4l_e^2 & \theta_2 \end{vmatrix} \quad (2.20)$$

Pour l'expression dans le repère global, il faut simplement veiller aux dimensions, pour notre cas de poutre en rotations modérées, car ici seule la partie flexion du déplacement intervient pour la partie non-linéaire. On peut définir la projection dans le repère global limitée aux ddls de flexion sur la même base que le changement pour tous les ddls (Eq. 1.22) :

$$\begin{aligned} \{\mathbf{u}_f\}_{(g)} &= \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \theta \end{Bmatrix}_{(\vec{e}_1, \vec{e}_2)} = \begin{bmatrix} -S & 0 \\ C & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v \\ \theta \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y})} = [\mathbf{P}_f] \{\mathbf{u}_f\}_{(l)} \\ \text{et } \{\mathbf{u}_f^e\}_{(g)} &= \{\mathbf{q}_f^e\}_{(g)} = \begin{bmatrix} [\mathbf{P}_f] & [0] \\ [0] & [\mathbf{P}_f] \end{bmatrix} \{\mathbf{u}_f^e\}_{(l)} \\ &= [\mathbf{R}_f] \{\mathbf{q}_f^e\}_{(l)} \quad (\text{dimensions : } (6 \times 1) = (6 \times 4)(4 \times 1)) \end{aligned} \quad (2.21)$$

La rigidité géométrique exprimée localement par l'Eq. 2.20 prend alors la forme :

$$\begin{aligned} \{\delta \mathbf{q}^e\}_{(l)}^T [\mathbf{K}_\sigma^e]_{(l)} \{\mathbf{q}^e\}_{(l)} &= \{\delta \mathbf{q}^e\}_{(g)}^T \underbrace{[\mathbf{R}_f] [\mathbf{K}_\sigma^e]_{(l)} [\mathbf{R}_f]^T}_{[\mathbf{K}_\sigma^e]_{(g)}} \{\mathbf{q}^e\}_{(g)} \\ &= \{\delta \mathbf{q}^e\}_{(g)}^T [\mathbf{K}_\sigma^e]_{(g)} \{\mathbf{q}^e\}_{(g)} \end{aligned} \quad (2.22)$$

soit littéralement :

$$[\mathbf{K}_\sigma]_{(\vec{e}_1, \vec{e}_2)} = \frac{1}{30l_e} \begin{vmatrix} u_1^1 & u_2^1 & \theta^1 & u_1^2 & u_2^2 & \theta^2 \\ 36S^2 & -36CS & -3Sl_e & -36S^2 & 36CS & -3Sl_e \\ & 36C^2 & 3Cl_e & 36CS & -36C^2 & 3Cl_e \\ & & 4l_e^2 & 3Sl_e & -3Cl_e & -l_e^2 \\ & & & 36S^2 & -36CS & 3Sl_e \\ & & & & 36C^2 & -3Cl_e \\ & & & & & 4l_e^2 \end{vmatrix} \begin{matrix} u_1^1 \\ u_2^1 \\ \theta^1 \\ u_1^2 \\ u_2^2 \\ \theta^2 \end{matrix} \quad (2.23)$$

Les charges de flambage peuvent ensuite être déterminées par un calcul aux valeurs propres. Par rapport au cas simplifié précédent, *i.e.* un chargement normal constant dans le repère de la poutre égal à l'effort terminal imposé $-F\vec{x}$ (Eq. 2.16), le pré-chargement peut être plus complexe. Dans ce cas, les valeurs propres donnent le coefficient multiplicateur de ce chargement pour atteindre les niveaux critiques de bifurcation.

$$\det([\mathbf{K}_0] + \lambda[\mathbf{K}_\sigma]) = 0 \quad (2.24)$$

On verra dans la section §2.3 suivante que dans un cas plus général, les efforts normaux qui règnent dans un ensemble de poutres doivent être évalués par la résolution préalable du problème linéaire.

2.2.4 Problème formel

La partie non-linéaire de notre poutre en rotation modérée permet d'illustrer l'écriture formelle présentée ci-dessus. Dans cette formulation suffisante pour déterminer les charges critiques, la courbure n'est pas modifiée, la partie non-linéaire porte ici sur le terme de membrane seul, comme introduit dans l'Eq. 2.14 : $\gamma_x(u', v', v'') = u'(x) + \frac{1}{2}v'^2(x) - y v''(x)$. On peut donc compléter la relation définissant $[\mathbf{B}_L^e]$ (Eq. 1.16) pour la déformation complète dans le repère de la poutre :

$$\{\gamma(q^e)\} = [\mathbf{B}_L^e] \cdot \{q^e\} + \{\mu(q^e)\}$$

Et en rappelant la définition de $[\mathbf{B}_L^e]$

$$\left\{ \begin{matrix} e_{NL}^h(u'^h, v'^h) \\ \kappa_z^h(v''^h) \end{matrix} \right\} = \begin{bmatrix} [\nabla < \mathbf{N} >^e] & [0] \\ [0] & [\nabla^2 < \mathcal{N} >^e] \end{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} \{u_t^e\} \\ \{u_f^e\} \end{matrix} \right\} + \{\mu(u_f^e)\} \quad (2.25)$$

$$= \begin{bmatrix} [\mathbf{B}_L^e]_t & [0] \\ [0] & [\mathbf{B}_L^e]_f \end{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} \{u_t^e\} \\ \{u_f^e\} \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} \mu_x^{h,e}(v'^h) \\ 0 \end{matrix} \right\}$$

$$\dim(2 \times 1) = (2 \times 6) \times (6 \times 1) + (2 \times 1)$$

La partie non-linéaire discrétisée se limite, dans notre cas, au terme unique : $\mu_x^{h,e}(v'^h) = \frac{1}{2}v'^{h,e}v'^{h,e}$. Si on veut aboutir aux expressions attendues définies de façon générique, il faut prendre quelques précautions qui sont rarement détaillées dans les ouvrages présentant les éléments finis.

Stockage et dimensions de la partie non-linéaire On veut donc aboutir, pour notre cas spécifique, aux grandeurs définies plus globalement précédemment, et notamment :

$$\begin{aligned} \text{Eq. 2.2 : } \{\gamma^e(\{q^e\})\} &= \left([\mathbf{B}_L^e] + \frac{1}{2} [\mathbf{B}_{NL}^e(\{q^e\})] \right) \{q^e\} = [\mathbf{B}^*] \{q^e\} \\ \text{et Eq. 2.5 : } \{\delta\gamma^e(\{q^e\})\} &= ([\mathbf{B}_L^e] + [\mathbf{B}_{NL}^e(\{q^e\})]) \delta \{q^e\} = [\overline{\mathbf{B}}^e(\{q^e\})] \{\delta q^e\} \\ \text{et enfin Eqs. 2.7 et 2.11 : } \int_{\Omega^0} \{\mathcal{S}(\{\gamma\})\}^T [d\mathbf{B}_{NL}] d\Omega^0 \{\delta q^e\} &= \{\delta q^e\}^T [\mathbf{K}_\sigma^{\mathbf{T},e}] \{dq_f^e\} \end{aligned} \quad (2.26)$$

On connaît la relation entre le déplacement et l'approximation nodale (Eq. 1.6), il est donc direct de calculer le gradient de ce déplacement dans notre cas 1D :

$$\begin{aligned} v'^h(x) &= \langle \mathcal{N}'_1(x), \mathcal{N}'_2(x), \mathcal{N}'_3(x), \mathcal{N}'_4(x) \rangle \cdot \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \\ &= \langle \nabla \mathcal{N}(x) \rangle \cdot \{\mathbf{u}_f^e\} \end{aligned} \quad (2.27)$$

et donc, la déformation non-linéaire discrète $\mu_x^{h,e}(v'^h) = \frac{1}{2}v'^{h,e}v'^{h,e}$ devient :

$$\begin{aligned} v'^{h,e}v'^{h,e} &= (\langle \nabla \mathcal{N}^e(x) \rangle \cdot \{\mathbf{u}_f^e\})^T \langle \nabla \mathcal{N}^e(x) \rangle \cdot \{\mathbf{u}_f^e\} \\ &= \{\mathbf{u}_f^e\}^T \langle \nabla \mathcal{N}^e(x) \rangle^T \langle \nabla \mathcal{N}^e(x) \rangle \{\mathbf{u}_f^e\} \end{aligned} \quad (2.28)$$

Pourtant, cette expression ne peut être intégrée directement dans notre approche. Une façon de voir cela consiste à regarder les expressions de l'Eq. 2.26 : il faut que la matrice $[\mathbf{B}_{NL}^e]$ ait les mêmes dimensions ($1 \times n_{dofs}$) que la matrice des gradients linéaire $[\mathbf{B}_L^e]_f$ pour factoriser la discrétisation des déformations non-linéaires (Eq. 2.2) par rapport au vecteur des inconnues nodales (en flexion ici), et obtenir le vecteur contenant les déformations discrétisées. Or, l'expression 2.28 ci-dessus est de la dimension d'un scalaire, et ceci quelle que soit la dimension (discrétisation) du problème ; on est en effet sur la même structure qu'une énergie par exemple. Pour s'en convaincre, il suffit de revenir à la définition des rigidités du §1.3.1, ou encore l'Eq. 2.19 pour l'expression initiale de la rigidité géométrique.

Les ouvrages sur la méthode des éléments finis dans un cadre non-linéaire géométrique trouvent tous leur solution propre pour exprimer correctement ce terme. Ici, on propose de définir $[\mathbf{B}_{NL}^e(\{q^e\})]$ en excluant le vecteur des inconnues nodales, mais en gardant en tête la dépendance par rapport à ce déplacement. La matrice ainsi définie possède la structure

attendue *via* les opérateurs différentiels. On aboutit donc à

$$\begin{aligned}
 \gamma_{x^h}^{h,e}(x^h, y^h) &\simeq \\
 \left\{ \begin{matrix} e_{NL}^e \\ \kappa_z^e \end{matrix} \right\} &= [\mathbf{B}_L^e] \{q^e\} + \frac{1}{2} \underbrace{v'^{h,e} < \nabla \mathcal{N}^e(x) > \{u_f^e\}}_{\text{en intégrant et Eq. 1.17 : } \int_{x_1}^{x_2} \square dx^h} \\
 \downarrow & \\
 \{\gamma(\{q^e\})\} &= [\mathbf{B}_L^e] \{q^e\} + \frac{1}{2} [\mathbf{B}_{NL}^e(\{q_f^e\})] \{q_f^e\}
 \end{aligned} \tag{2.29}$$

i.e. on retrouve l'Eq. 2.2 dans le cas général où tous les ddls nécessaires pour μ_x^{he} sont inclus dans $\{q^e\}$. Si on reprend l'exemple en 3D des 6 composantes de déformations et de contraintes stockées dans un vecteur colonne par élément (6×1) - c'est une hypothèse pour des éléments linéaires en déplacements -, alors $[\mathbf{B}_{NL}^e(\{q^e\})]$ est bien de dimension $(6 \times n_{dofs})$ pour que le produit reste de la dimension d'un scalaire (énergie)

$$\begin{aligned}
 d\{\Psi^e(\{q^e\})\} \{\delta q^e\} &= \{\mathcal{S}(\{\gamma\})\}^T [d\mathbf{B}_{NL}] \{\delta q^e\} \\
 (1 \times 1) &= (1 \times 6) \times (6 \times n_{dofs}) \times (n_{dofs} \times 1) \\
 &= \{\delta q^e\}^T [\mathbf{K}_\sigma^{\mathbf{T},e}] \{dq^e\}
 \end{aligned} \tag{2.30}$$

Pour notre poutre, avec 2 ddls en membrane et 4 ddls en flexion, les dimensions de $[\mathbf{B}_L^e]$ sont (6×6) et (1×4) pour $[\mathbf{B}_{NL}^e]$ (dans le repère local) qui ne concerne qu'un seul effort en produit avec une seule composante du déplacement en rotations modérées définie par 4 ddls. Même après projection dans le repère global, ces 2 matrices des gradients des fonctions de forme ne seront pas de taille identique car le terme non-linéaire est unique et les ddls sont au nombre de 6; $[\mathbf{B}_{NL}^e]$ sera de taille (1×6) .

Remarque sur la présence du terme en y Comme nous l'avons fait remarquer dans la relation 1.16 qui définit la déformation linéaire incluant le terme dépendant de l'altitude " y ", nous intégrons cet effet *via* le comportement de la section de la poutre en flexion (cf Eq. 1.17). De sorte que l'énergie de flexion s'écrive bien : $M^h \delta v^h \equiv ([\mathcal{L}_f^e] \{e_f^e\})^T [\mathbf{B}_{L,f}^e] \{\delta q_f^e\}$

Variation et incrément de déformation discrétisée On déduit très simplement de l'Eq. 2.29 la déformation non-linéaire discrétisée. Rappelons que pour la partie non-linéaire, par symétrie la variation s'écrit assez directement :

$$\underline{\underline{\mu}}(\underline{\underline{u}}) = \frac{1}{2} \underline{\underline{\nabla}}^t \underline{\underline{u}} \cdot \underline{\underline{\nabla}} \underline{\underline{u}} \Rightarrow \delta \underline{\underline{\mu}}(\underline{\underline{u}}) = \underline{\underline{\nabla}}^T \delta \underline{\underline{u}} \cdot \underline{\underline{\nabla}} \underline{\underline{u}}$$

La variation de la déformation discrétisée s'écrit donc, dans notre cas

$$\begin{aligned}
\delta\gamma_x^{h,e}(u^{h'}, v^{h'}, v^{h''}) &= \delta\epsilon_x^{h,e}(u^{h'}, v^{h''}) + \delta\mu^{h,e}(v^{h'}) \\
&= \nabla \langle N^e(x) \rangle \{\delta\mathbf{u}_t^e\} - y^h \nabla^2 \langle \mathcal{N}^e(x) \rangle \{\delta\mathbf{u}_f^e\} + v'^{h,e} \langle \nabla \mathcal{N}^e(x) \rangle \{\delta\mathbf{u}_f^e\} \\
&\downarrow \text{ en intégrant sur l'élément : } \int_{x_1}^{x_2} \square dx^h \\
&= [\mathbf{B}_L^e] \{\delta\mathbf{q}^e\} + [\mathbf{B}_{NL}^e(\{\mathbf{q}_f^e\})] \{\delta\mathbf{q}_f^e\} \\
&= \text{Eq. 2.2 dans le cas général : } \{\delta\gamma^e(\{\mathbf{q}^e\})\} = ([\mathbf{B}_L^e] + [\mathbf{B}_{NL}^e(\{\mathbf{q}^e\})]) \{\delta\mathbf{q}^e\}
\end{aligned} \tag{2.31}$$

2.3 Chargement plus général des poutres

Le problème aux valeurs propres ci-dessus (Eq. 2.24), est en fait un cas particulier de flambage linéarisé, *i.e.* à contrainte constante ($N'(x) = 0$) en ne considérant pas la partie non-linéaire $[\mathbf{K}_{NL}^T(\{\mathbf{q}\})]$. La question qui peut se poser concerne l'introduction des pré-contraintes dans le calcul de la rigidité géométrique de façon plus globale. Essayons d'établir l'équilibre incrémental pour nos poutres en rotations modérées, de la forme :

$$\begin{aligned}
d\{\Psi(\{\mathbf{q}\})\} &\equiv d\left(\int_{\Omega^0} [\overline{\mathbf{B}}(\{\mathbf{q}\})]^T \{\mathcal{S}(\{\gamma\})\} d\Omega^0\right) \\
&= \underbrace{\int_{\Omega^0} [d\mathbf{B}_{NL}]^T \{\mathcal{S}(\{\gamma\})\} d\Omega^0}_{[\mathbf{K}_\sigma^T] \{\mathbf{d}\mathbf{q}\}} + \underbrace{\int_{\Omega^0} [\overline{\mathbf{B}}(\{\mathbf{q}\})]^T \{d\mathcal{S}(\{\gamma\})\} d\Omega^0}_{\left([\mathbf{K}_0^T] + [\mathbf{K}_{NL}^T(\{\mathbf{q}\})]\right)^0 \{\mathbf{d}\mathbf{q}\}} \\
&= \tag{2.32}
\end{aligned}$$

où la rigidité géométrique peut être beaucoup plus générique, contenant des chargements internes (initiaux), car rappelons-nous que sa définition est donnée par l'incrément de déformation qui travaille avec l'état de contrainte à l'intérieur de la poutre (Eq. 2.11). La définition de la variation seconde de l'énergie de déformation (Eq. 2.7) peut être réécrite pour nos poutres

$$\begin{aligned}
\{\delta\mathbf{q}\}_{(l)}^T [\mathbf{K}_\sigma^T]_{(l)} \{\mathbf{d}\mathbf{q}\}_{(l)} &= \{\delta\mathbf{q}\}_{(l)}^T \int_{\Omega^0} [d\mathbf{B}_{NL}]_{(l)}^T \{\mathcal{S}(\{\gamma\})\}_{(l)} d\Omega^0 \{\mathbf{d}\mathbf{q}\}_{(l)} \\
\text{cinématique de poutres} &\Rightarrow \{\delta\mathbf{q}\}_{(l)}^T \int_0^l [d\mathbf{B}_{NL}]_{(l)}^T \{N(\{\gamma^m\}_x(u', v'))\}_{(l)} dx \{\mathbf{d}\mathbf{q}\}_{(l)}
\end{aligned} \tag{2.33}$$

2.3.1 Matrice de rigidité géométrique

On voit que c'est le produit des contraintes initiales par l'incrément de déformation virtuelle dont nous avons besoin pour formuler le problème tangent. Rappelons que, par construction, la matrice $[\mathbf{B}_{NL}^e]$ dépend linéairement des gradients de déplacements, et donc $[d\mathbf{B}_{NL}^e]$

est constante. On note également que $d\left(\delta\mu(\vec{u})\right) = \underline{\nabla}^T \delta\vec{u} \cdot \underline{\nabla} d\vec{u}$, et on rappelle que (Eq. 2.10) : $d\left(\{\delta\mathbf{q}^e\}^T [\overline{\mathbf{B}}(\{\mathbf{q}^e\})]^T\right) = \{\delta\mathbf{q}^e\}^T [d\mathbf{B}_{\text{NL}}(\{\mathbf{q}^e\})]^T$

$$\begin{aligned}
N^e(x^h) d\left(\delta\gamma_x^{h,e}(u', v', v'')\right) &\rightsquigarrow d\left(\delta\{\gamma(\mathbf{q}^e)\}_{(l)}^T\right) \{\mathcal{S}(\{\gamma\})\} \\
&= \{\delta\mathbf{q}^e\}^T [d\mathbf{B}_{\text{NL}}(\{\mathbf{q}^e\})]^T \{\mathcal{S}(\{\gamma\})\} \\
&= N^e(x^h) d\left(\{\delta\mathbf{u}_f^e\}^T < \nabla \mathcal{N}^e(x) >^T v'^{h,e}\right) \\
&= \{\delta\mathbf{u}_f^e\}^T \underbrace{< \nabla \mathcal{N}^e(x) >^T N(x^h) < \nabla \mathcal{N}^e(x) >}_{\int_{x_1}^{x_2} \square dx^h} \{\mathbf{du}_f^e\} \quad (2.34) \\
&\downarrow \text{ en intégrant sur l'élément : } \int_{x_1}^{x_2} \square dx^h \\
\delta v'^{h,e} N(x^h) dv'^{h,e} &= \{\delta\mathbf{u}_f^e\}^T \underbrace{[\mathbf{K}_\sigma^{\text{T,e}}]}_{(4 \times 1) \times (1 \times 1) \times (1 \times 4) \times (4 \times 1)} \{\mathbf{du}_f^e\} \\
\dim(1 \times 1) &= (1 \times 4) \times \underbrace{(4 \times 1) \times (1 \times 1) \times (1 \times 4)}_{\int_{x_1}^{x_2} \square dx^h} \times (4 \times 1)
\end{aligned}$$

On retrouve bien la forme 2.19 ($\int \mathcal{N}'_i \mathcal{N}'_j dx$) qui nous a permis d'établir la rigidité géométrique sécante, avec le produit des dérivées premières des fonctions de forme en flexion.

Pour une expression générique (en 3D), il faudrait définir les dimensions du vecteur contenant les contraintes initiales $\{\mathcal{S}(\{\gamma\})\}$. La rigidité tangente géométrique s'écrirait sous la forme (pas si simple en réalité) :

$$\begin{aligned}
d\left(\delta\{\gamma(\mathbf{q}^e)\}^T\right) \{\mathcal{S}(\{\gamma\})\} &= \{\delta\mathbf{u}_f^e\}^T \underbrace{< \nabla \mathcal{N}^e(x) >^T \{\mathcal{S}(\{\gamma\})\} < \nabla \mathcal{N}^e(x) >}_{[\mathbf{K}_\sigma^{\text{T,e}}]} \{\mathbf{du}_f^e\} \\
&= \{\delta\mathbf{u}_f^e\}^T \underbrace{[\mathbf{K}_\sigma^{\text{T,e}}]}_{[\mathbf{K}_\sigma^{\text{T,e}}]} \{\mathbf{du}_f^e\}
\end{aligned}$$

2.3.2 Expression dans le repère global

Toutes les grandeurs permettant de calculer cette matrice des pré-contraintes (Eq. 2.33) sont exprimées dans le repère local. Nous avons déjà explicité cette raideur géométrique dans le repère global ci-dessus (Eq. 2.23), mais dans le cas simplifié où les efforts normaux étaient unitaires, *i.e.* ils n'apparaissent plus explicitement dans cette matrice des pré-contraintes - cf §2.2.3 Eq.2.19. Il faut introduire ces efforts normaux, ils sont pour l'instant exprimés naturellement dans le repère de la poutre. On peut introduire une approximation des efforts normaux dans le repère global, en supposant une approximation des efforts par exemple. Toutefois, dans notre cas seul l'effort normal est à prendre en compte, il travaille avec les gradients des déplacements transverses, comme nous l'avons établi. Et ce sont bien les approximations de ces déplacements qui permettent de formuler la raideur géométrique dans le repère global.

On peut procéder de la même façon que celle utilisée précédemment (Eq. 2.22) pour exprimer cette matrice tangente. Il faut simplement veiller aux dimensions, pour notre cas de poutre en rotations modérées, car ici seule la partie flexion du déplacement intervient pour la partie non-linéaire. On peut définir la projection dans le repère global limitée aux ddls de

flexion sur la même base que le changement pour tous les ddls (Eq. 1.22) :

$$\begin{aligned} \{\mathbf{u}_f\}_{(g)} &= \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \theta \end{Bmatrix}_{(\vec{e}_1, \vec{e}_2)} = \begin{bmatrix} -S & 0 \\ C & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v \\ \theta \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y})} = [\mathbf{P}_f] \{\mathbf{u}_f\}_{(l)} \\ \text{et } \{\mathbf{u}_f^e\}_{(g)} &= \{\mathbf{q}_f^e\}_{(g)} = \begin{bmatrix} [\mathbf{P}_f] & [0] \\ [0] & [\mathbf{P}_f] \end{bmatrix} \{\mathbf{u}_f^e\}_{(l)} \\ &= [\mathbf{R}_f] \{\mathbf{q}_f^e\}_{(l)} \quad (\text{dimensions : } (6 \times 1) = (6 \times 4)(4 \times 1)) \end{aligned} \quad (2.35)$$

L'expression de la matrice des pré-contraintes dans le repère global devient alors, en utilisant l'expression de $[\mathbf{dB}_{NL}^e]$ établie ci-dessus dans l'Eq. 2.34 :

$$\begin{aligned} &\{\delta \mathbf{q}_f^e\}_{(l)}^T \int_{x_1}^{x_2} \{\mathbf{N}^e\}_{(l)}^T [\mathbf{dB}_{NL}]_{(l)} dx \\ &= \{\delta \mathbf{q}_f^e\}_{(l)}^T \int_{x_1}^{x_2} \nabla \langle \mathcal{N}^e(x) \rangle^T \nabla \langle \mathcal{N}^e(x) \rangle dx \quad \{\mathbf{dq}_f^e\}_{(l)} \\ &= \left([\mathbf{R}_f]^T \{\delta \mathbf{q}_f^e\}_{(g)} \right)^T \int_{x_1}^{x_2} \nabla \langle \mathcal{N}^e(x) \rangle^T \nabla \langle \mathcal{N}^e(x) \rangle dx \quad [\mathbf{R}_f]^T \{\mathbf{dq}_f^e\}_{(g)} \\ &= \{\delta \mathbf{q}_f^e\}_{(g)}^T \underbrace{[\mathbf{R}_f] \{\mathbf{N}^e\}_{(l)}^T \int_{x_1}^{x_2} \nabla \langle \mathcal{N}^e(x) \rangle^T \nabla \langle \mathcal{N}^e(x) \rangle dx [\mathbf{R}_f]^T}_{[\mathbf{K}_\sigma^{\mathbf{T},e}]_{(g)}} \{\mathbf{dq}_f^e\}_{(g)} \\ &= \{\delta \mathbf{q}_f^e\}_{(g)}^T \int_{x_1}^{x_2} \delta v'^{h,e} N(x^h) dv'^{h,e} dx \quad \{\mathbf{dq}_f^e\}_{(g)} \\ &= \{\delta \mathbf{q}_f^e\}_{(g)}^T \underbrace{N^e [\mathbf{R}_f] \int_{x_1}^{x_2} \nabla \langle \mathcal{N}^e(x) \rangle^T \nabla \langle \mathcal{N}^e(x) \rangle dx [\mathbf{R}_f]^T}_{(6 \times 4) \times (4 \times 1) \times (4 \times 6) \times} \{\mathbf{dq}_f^e\}_{(g)} \\ \dim (1 \times 1) &= (1 \times 6) \times (6 \times 4) \times (4 \times 1) \times (4 \times 6) \times (6 \times 1) \quad (2.36) \end{aligned}$$

Ce qui correspond à l'expression de la **rigidité géométrique** établie précédemment (Eq. 2.23), **sans les pré-contraintes**, simplement **pondérée par l'effort normal de pré-contrainte (dans le repère local) qui règne dans chaque élément de poutre**.

2.3.3 Enchaînement des calculs

On voit également que dans le cadre des rotations modérées, seul l'effort normal va contribuer à cette rigidité géométrique. Mais l'ensemble des efforts normaux correspondent à la réponse du système sous l'ensemble des chargements, ils peuvent donc être non-nuls sous des chargements de flexion par exemple. Une des façons d'évaluer cette matrice tangente est donc, par exemple,

1. Imposer un chargement unitaire dans le problème linéarisé (tous les chargements imposés, en supposant une réponse linéaire avant le flambage),

2. en déduire les efforts internes (efforts normaux ici)
3. évaluer la matrice de rigidité géométrique à partir de ces efforts unitaires
4. résoudre le problème aux valeurs propres (Eq. 2.24) pour connaître le coefficient d'amplification de ces chargements unitaires correspondant à l'apparition des charges critiques.

Dans notre cas, le problème étant linéaire, la résolution 'standard' peut-être utilisée dans l'étape 1. Les charges critiques seront alors proportionnelles à ce chargement. Cela évite une inversion du système pour initialiser les efforts normaux pour poser le problème aux valeurs propres Eq. 2.24. Dans le repère global, cette expression devient :

$$\det \left([\mathbf{K}_0]_{(g)} + \lambda^i [\mathbf{K}_\sigma(\{\mathbf{N}\}_{(1)})]_{(g)} \right) = 0 \quad (2.37)$$

2.3.4 Quelques points de détails dans la mise en oeuvre des calculs.

Les conditions de Dirichlet sont prises en comptes classiquement en annulant les contributions ($K_{ij} = 0$) correspondant au ddl i et en mettant à l'unité le terme diagonal correspondant ($K_{ii} = 1$).

Pour la rigidité géométrique, si on procède de cette façon, des valeurs propres égales à l'unité vont polluer le spectre des valeurs propres calculées ; on rappelle que ce sont les plus petites valeurs propres (en amplitude) qui ont un intérêt. Suivant la proposition de https://bleyerj.github.io/comet-fenicsx/tours/eigenvalue_problems/buckling_3d_solid/buckling_3d_solid.html, on annule les composantes diagonales ($K_{\sigma,ii} = 0$). Les valeurs propres correspondantes seront infinies, et donc facilement identifiables dans le spectre qui ne sera pas modifié par ce changement.

3.

Vibrations propres

Les problèmes de vibrations propres de l'élément, *i.e.* les vibrations intrinsèques en l'absence de chargements extérieurs, font intervenir la matrice de masse de l'élément - cf https://www.emse.fr/~drapier/index_fichiers/CoursPDF/Meca-Structu2A/Meca-struct-num-Octobre-2023.pdf. La détermination des calculs de modes et fréquences propres de vibration fait également appel à un calcul aux valeurs propres.

Pour cela, on peut repartir de l'expression de la forme intégrale faible de l'équilibre tel que détaillé initialement dans l'Eq. 1.3 page 2. Dans le cas de tension-flexion en vibrations libres ($\delta P_{ext} \equiv 0$), le PPV s'écrit :

$$\begin{aligned} \delta P_{int}(\delta \vec{u}(\vec{x}, t)) &= \delta P_{acc}(\delta \vec{u}(\vec{x}, t)) \quad , \forall \delta \vec{u}(\vec{x}, t) \text{ C.A.}(0) - \text{C.I.}(0) \\ \int_0^l \{ESu'(x, t) \delta u'(x, t) + EIV''(x, t) \delta v''(x, t)\}' dl - \\ \int_0^l \rho S \{\ddot{u}(x, t) \delta u(x, t) + \ddot{v}(x, t) \delta v(x, t)\} dl &= 0 \quad , \forall (\delta u, \delta v) \text{ C.A.}(0) - \text{C.I.}(0) \end{aligned} \quad (3.1)$$

car la contribution de l'accélération des sections en rotations est négligeable devant les effets dus aux déplacements transverses et longitudinaux

En prenant une solution de la forme $\vec{u}(x, t) = \vec{U}(x)e^{i\omega t}$, *i.e.* où les champs de déplacement ont le même comportement en temps dont la pulsation ω est inconnue (solution C.I.(0)), on peut reformuler le problème à résoudre et le discrétiser pour aboutir à la forme :

$$[\mathbf{K}_0] - \omega^2 [\mathbf{M}] = 0. \quad (3.2)$$

dont la résolution donne les pulsations propres auxquelles on peut associer les modes de vibrations propres. C'est ce que nous allons expliciter en tension, puis en flexion.

3.1 Matrice de masse en tension-flexion dans le repère local de l'élément

3.1.1 Vibrations libres en tension

En considérant uniquement la partie en tension du PPV (Eq. ??) de la poutre, et en recherchant la solution sous la forme $u(x, t) = U(x)e^{i\omega t}$, le problème à résoudre s'écrit :

$$\left(\int_0^l E^e S^e U' \delta U' dl - \omega^2 \int_0^l \rho S^e U \delta U dl \right) e^{2i\omega t} = 0, \forall \delta U \text{ C.A.}(0). \quad (3.3)$$

On utilise ensuite la discrétisation par éléments finis introduite précédemment, telle que $U(x) \vec{x} \simeq \sum^e U^e(x) \vec{x} = \sum^e \langle N(x) \rangle \cdot \{\mathbf{u}_t^e\} \vec{x}$. Ce qui nous conduit aux formes bilinéaires discrètes standard dont on extrait facilement les expressions des matrices de raideur en tension $[\mathbf{K}^e]_t = \int_e [\mathbf{B}_L^e]_t^T [\mathcal{L}_t] [\mathbf{B}_L^e]_t dx^h$ (Eqs. 1.33 à 1.35), et de masse dans le repère local de la poutre :

$$\begin{aligned} M_{ij,t}^e &= \rho^e S^e \int_{x_1}^{x_2} N_j(x) N_i(x) dx \\ &\Downarrow \\ [\mathbf{M}_t^e] &= \frac{\rho^e S^e l_e}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.4)$$

On suppose ici, comme précédemment, que les propriétés sont constantes par éléments, ici la même masse volumique du matériau constitutif et la même section, et donc la masse de l'élément est $\rho^e S^e l_e$.

3.1.2 Vibrations libres en flexion

Pour la partie flexion, le champ est recherché sous la forme $v(x, t) = V(x)e^{i\omega t}$, et on aboutit à

$$\left(\int_0^l E^e I^e V'' \delta V'' dl - \omega^2 \int_0^l \rho S^e V \delta V dl \right) e^{2i\omega t} = 0, \forall \delta V \text{ C.A.}(0). \quad (3.5)$$

dans lequel on introduit la discrétisation d'Hermitte (Eq. 1.6 : $V(x, t) \vec{y} = \sum^e V^e(x) \vec{y} \simeq \sum^e \langle \mathcal{N}(x) \rangle \cdot \{\mathbf{u}_f^e\} \vec{y}$). Les matrices de raideur $[\mathbf{K}^e]_f = \int_e [\mathbf{B}_L^e]_f^T [\mathcal{L}_f] [\mathbf{B}_L^e]_f dx^h$ (Eqs. 1.25 à 1.27) et de masse en flexion s'en déduisent dans le repère local de la poutre :

$$\begin{aligned} M_{ij,f}^e &= \rho^e S^e \int_{x_1}^{x_2} \mathcal{N}_i \mathcal{N}_j dx^h \\ &\Downarrow \\ [\mathbf{M}_f^e] &= \frac{\rho^e S^e l_e}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22l_e & 54 & -13l_e \\ & 4(l_e)^2 & 13l_e & -3(l_e)^2 \\ & & 156 & -22l_e \\ & & & 4(l_e)^2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.6)$$

3.1.3 Matrice de masse en tension-flexion dans le repère global

Comme précédemment (§1.3.2 page 12), l'expression de la matrice de masse en tension-flexion est obtenue en sommant les contributions relatives aux ddl en tension et flexion, et en projetant ces expressions dans le repère global.

La matrice de masse en tension-flexion dans le repère local s'écrit :

$$[\mathbf{M}^e]_{(l)} = \frac{\rho^e S^e l_e}{420} \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & \theta_1 & u_2 & v_2 & \theta_2 \\ 140 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 \\ & 156 & 22l_e & 0 & 54 & -13l_e \\ & & 4l_e^2 & 0 & 13l_e & -3l_e^2 \\ & & & 140 & 0 & 0 \\ & & & & 156 & -22l_e \\ & & & & & 4l_e^2 \end{vmatrix} \begin{matrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{matrix} \quad (3.7)$$

La projection dans le repère global s'exprime facilement en repartant de la forme bilinéaire discrétisée (Eq. 1.41). Ce qui conduit à l'expression finale de la matrice de masse :

$$[\mathbf{M}^e]_{(g)} = \frac{\rho^e S^e l_e}{420} \begin{vmatrix} u_1^1 & u_2^1 & \theta^1 & u_1^2 & u_2^2 & \theta^2 \\ 140C^2 + 156S^2 & -16CS & -22Sl_e & 70C^2 + 54S^2 & 16CS & 13Sl_e \\ & 156C^2 + 140S^2 & 22Cl_e & 16CS & 54C^2 + 70S^2 & -13Cl_e \\ & & 4l_e^2 & -13Sl_e & 13Cl_e & -3le^2 \\ & & & 140C^2 + 156S^2 & -16CS & 22Sl_e \\ & & & & 156C^2 + 140S^2 & -22Cl_e \\ & & & & & 4l_e^2 \end{vmatrix} \begin{matrix} u_1^1 \\ u_2^1 \\ \theta^1 \\ u_1^2 \\ u_2^2 \\ \theta^2 \end{matrix} \quad (3.8)$$