Devoir 8 — Solutions

Question 1 (10 points)

Vérifier que la fonction

$$y = x\cos(x)$$

est une solution de l'équation différentielle

$$y'' + y = -2\sin(x).$$

On a

$$\begin{aligned} y' &= (x\cos(x))' \\ &= -x\sin(x) + \cos(x) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} y'' &= (-x\sin(x) + \cos(x))' \\ &= -x\cos(x) - \sin(x) - \sin(x) \\ &= -x\cos(x) - 2\sin(x). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} y'' + y &= -x\cos(x) - 2\sin(x) + x\cos(x) \\ &= -2\sin(x), \end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer.

Question 2 (15 + 5 = 20 points)

a) Vérifier que chaque membre de la famille de fonction

$$y = \frac{1}{\sqrt{c - x^2}}$$

est une solution de l'équation différentielle

$$y' = xy^3.$$

Directement,

$$\begin{aligned} y' &= \left(\frac{1}{\sqrt{c - x^2}}\right)' \\ &= \left((c - x^2)^{-1/2}\right)' \\ &= -2x \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)(c - x^2)^{-3/2} \\ &= \frac{x}{(c - x^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} xy^3 &= x\left(\frac{1}{\sqrt{c - x^2}}\right)^3 \\ &= \frac{x}{(c - x^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

Ainsi, on a bien l'égalité

$$y' = xy^3.$$

b) Déterminer la solution particulière du problème de Cauchy $y' = xy^3$ avec $y(0) = 3$.

On sait que

$$y = \frac{1}{\sqrt{c - x^2}}$$

est une solution générale à l'équation différentielle $y' = xy^3$. Puisque $y(0) = 3$, alors

$$\begin{aligned} &3 = \frac{1}{\sqrt{c - 0^2}} \\ &\Longrightarrow \sqrt{c} = \frac{1}{3} \\ &\Longrightarrow x = \frac{1}{9} \end{aligned}$$

Ainsi, la solution particulière recherchée est

$$y = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{9} - x^2}} = \frac{3}{\sqrt{1 - 9x^2}}$$

Question 3 (30 points)

À l'aide de la méthode d'Euler, calculer, en prenant comme pas 0,25, la valeur approchée de $y(1)$ dans le cas où $y(x)$ est la solution du problème de Cauchy $y' = xy - x^2$, $y(0) = 1$. Garder 4 décimales à chaque étape.

Les valeurs initiales sont $x_0 = 0, y_0 = 1$.

Avec la méthode d'Euler, les valeurs approchées de la solution en $x_n = x_{n+1} + h$ sont

$$y_n = y_{n-1} + h\,F(x_{n-1}, y_{n-1}),$$

où

$$h = 0{,}25, \quad x_0 = 0, \quad y_0 = 1, \quad F(x,y) = xy - x^2.$$

On a donc

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 0{,}25, \quad x_2 = 0{,}50, \quad x_3 = 0{,}75, \quad x_4 = 1.$$

Par ailleurs,

$$y_0 = 1$$

$$y_1 = y_0 + h\,F(x_0, y_0) = 1 + 0{,}25F(0,1) = 1 + 0{,}25 \cdot (0 \cdot 1 - 0^2) = 1$$

$$y_2 = y_1 + h\,F(x_1, y_1) = 1 + 0{,}25F(0{,}25, 1) = 1 + 0{,}25 \cdot (0{,}25 \cdot 1 - 0{,}25^2) = 1{,}0469$$

$$y_3 = y_2 + h\,F(x_2, y_2) = 1 + 0{,}25F(0{,}50, 1{,}0469) = 1 + 0{,}25 \cdot (0{,}50 \cdot 1{,}0469 - 0{,}50^2) = 1{,}1152$$

$$y_4 = y_3 + h\,F(x_3, y_3) = 1 + 0{,}25F(0{,}75, 1{,}1152) = 1 + 0{,}25 \cdot (0{,}75 \cdot 1{,}1152 - 0{,}75^2) = 1{,}1837$$

Ainsi, $y(1) \approx 1{,}1837$.

Méthode alternative

n	x_n	y_n	$F(x_n, y_n)$
0	0,00	1,0000	0,0000
1	0,25	1,0000	0,1875
2	0,50	1,0469	0,2734
3	0,75	1,1152	0,1837
4	1,00	**1,1837**	—

Question 4 (10 + 30 = 40 points)

La loi de refroidissement de Newton stipule que la température d'un objet varie à un taux qui est proportionnel à l'écart de température entre l'objet et le milieu ambiant.

a) Si t représente le temps, $T(t)$ la température d'un objet au temps t et T_A la température ambiante et T_0 la température initiale, poser l'équation différentielle modélisant la loi de refroidissement de newton.

Puisque la température d'un objet varie à un taux qui est proportionnel à l'écart de température entre l'objet et le milieu ambiant, alors

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_A).$$

En solutionnant cette équation différentielle, on obtient

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_A)$$

$$\Longrightarrow \frac{dT}{T - T_A} = kdt$$

$$\Longrightarrow \ln|T - T_A| = kt + C$$

$$\Longrightarrow T - T_A = e^{kt+C}$$

$$\Longrightarrow T = Ae^{kt} + T_A$$

Puisque $T(0) = T_0$, alors

$$T_0 = Ae^{k \cdot 0} + T_A$$

$$\Longrightarrow T_0 = A + T_A$$

$$\Longrightarrow A = T_0 - T_A$$

On a donc

$$T(t) = (T_0 - T_A)e^{kt} + T_A$$

b) Un corps est découvert, sans vie, tôt le matin dans son bureau du centre-ville. Le concierge qui a fait la macabre découverte affirme aux policiers que le système de climatisation a bien fonctionné toute la nuit et que la température de la pièce est restée constante à 20°C. Le coroner, arrivé sur les lieux à 6h30, prend immédiatement la température du cadavre et obtient une valeur de 30°C. Une heure plus tard, le cadavre, toujours étendu par terre sur les lieux du crime, est à 28°C. En supposant qu'au moment du meurtre, la victime avait une température corporelle normale, à savoir 37,5°C, déterminer à quelle heure l'individu a été tué.

Soit t le temps écoulé depuis le meurtre (en heures) et soit a le nombre d'heures écoulées entre le moment du crime et l'arrivée du coroner. Selon l'énoncé,

$$T(a) = 30 \quad \text{et} \quad T(a+1) = 28.$$

Par ailleurs, $T(0) = T_0 = 37{,}5$ et $T_A = 20$. Ainsi,

$$T(t) = (37{,}5 - 20)e^{kt} + 20 = 20 + 17{,}5e^{kt}.$$

Puisque $T(a) = 30$ et $T(a+1) = 28$, alors

$$30 = 20 + 17{,}5e^{ka} \Longrightarrow e^{ka} = \frac{10}{17{,}5} = \frac{4}{7}$$

et

$$28 = 20 + 17{,}5e^{k(a+1)}$$

$$\Longrightarrow \frac{8}{17{,}5} = e^{ka}e^{k} = \frac{4}{7}e^{k}$$

$$\Longrightarrow e^{k} = \frac{4}{5}$$

$$\Longrightarrow k = \ln\left(\frac{4}{5}\right)$$

On a donc

$$T(t) = 20 + 17{,}5e^{\ln(4/5)t} = 20 + 17{,}5 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{t}$$

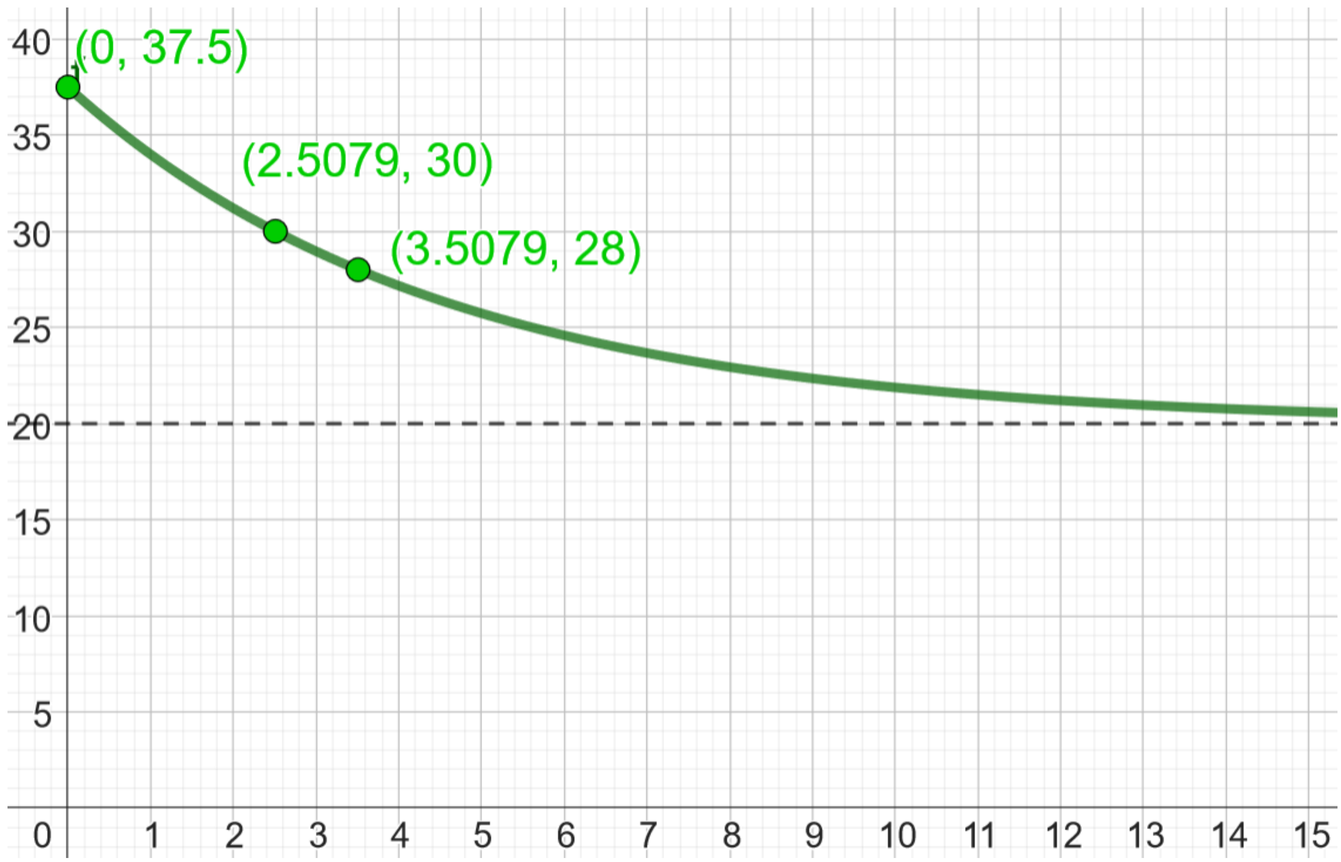
En revenant à $T(a) = 30$, on trouve

$$30 = 20 + 17{,}5 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{a}$$

$$\Longrightarrow \frac{4}{7} = \left(\frac{4}{5}\right)^{a}$$

$$\Longrightarrow a = \log_{4/5}(4/7) \approx 2{,}5079$$

Ainsi, le meurtre a eu lieu à environ 4h.



(0, 37.5)
(2.5079, 30)
(3.5079, 28)
40
35
30
25
20
15
10
5
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15