Devoir 3 — Solutions

Question 1 (15 points)

Montrez que la primitive la plus générale de la fonction

$$f(x) = 2e^{2\sin(x)}\cos(x) + 3$$

est la fonction

$$F(x) = e^{2\sin(x)} + 3x + C$$

Directement,

$$\begin{aligned} F'(x) &= \left(e^{2\sin(x)} + 3x + C\right)' \\ &= \left(e^{2\sin(x)}\right)' + (3x)' + (C)' \\ &= e^{2\sin(x)} \cdot (2\sin(x))' + 3 \\ &= e^{2\sin(x)} \cdot 2\cos(x) + 3 \end{aligned}$$

Puisque $F'(x) = f(x)$, alors, par définition, $F(x)$ est une primitive de $f(x)$.

Question 2 (30 points)

Déterminez f.

$$f''(x) = x^3 + 1, \quad f(0) = 5, \quad f(10) = 0$$

On a

$$\begin{aligned} f'(x) &= \int f''(x)\,dx \\ &= \int (x^3 + 1)\,dx \\ &= \frac{x^4}{4} + x + C \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} f(x) &= \int f'(x)\,dx \\ &= \int \left(\frac{x^4}{4} + x + C\right) dx \\ &= \frac{x^5}{4 \cdot 5} + \frac{x^2}{2} + Cx + D \\ &= \frac{x^5}{20} + \frac{x^2}{2} + Cx + D \end{aligned}$$

Puisque $f(0) = 5$, alors

$$\begin{aligned} f(0) = 5 &\Longrightarrow \frac{0^5}{20} + \frac{0^2}{2} + C \cdot 0 + D = 5 \\ &\Longrightarrow D = 5 \end{aligned}$$

Similairement, puisque $f(10) = 0$, alors

$$\begin{aligned} f(10) = 0 &\Longrightarrow \frac{10^5}{20} + \frac{10^2}{2} + C \cdot 10 + 5 = 0 \\ &\Longrightarrow 5000 + 50 + 10C + 5 = 0 \\ &\Longrightarrow C = \frac{-5055}{10} = -\frac{1011}{2} \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$f(x) = \frac{x^5}{20} + \frac{x^2}{2} - \frac{1011x}{2} + 5$$

Question 3 (25 points)

Calculez l'intégrale indéfinie générale

$$g(x) = 2^x + 2\cos(x) + \frac{x^4 + x}{x^2} + \frac{1}{1 + x^2} + \frac{\sin(2x)}{\sin(x)}$$

On remarque que

$$\begin{aligned} g(x) &= 2^x + 2\cos(x) + \frac{x^4 + x}{x^2} + \frac{1}{1 + x^2} + \frac{\sin(2x)}{\sin(x)} \\ &= 2^x + 2\cos(x) + x^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{1 + x^2} + \frac{2\cancel{\sin(x)}\cos(x)}{\cancel{\sin(x)}} \\ &= 2^x + 4\cos(x) + x^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{1 + x^2} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\int g(x)\,dx = \int \left(2^x + 4\cos(x) + x^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{1 + x^2}\right) dx$$

$$= \int (2^x)\,dx + \int (4\cos(x))\,dx + \int (x^2)\,dx + \int \left(\frac{1}{x}\right) dx + \int \left(\frac{1}{1 + x^2}\right) dx$$

$$= \frac{2^x}{\ln(2)} + 4\sin(x) + \frac{x^3}{3} + \ln(|x|) + \arctan(x) + C$$

Question 4 (30 points)

Comme une goutte de pluie grossit en tombant, l'aire de sa surface augmente aussi, de sorte que la résistance de l'air augmente. Une goutte de pluie tombant à la verticale a une vitesse initiale de 8 m/s et son accélération vers le bas est

$$a(t) = \begin{cases} 9 - \dfrac{3t}{4} & \text{si} \quad 0 \leq t \leq 12 \\ 0 & \text{si} \quad t > 12 \end{cases}$$

Combien de temps une goutte de pluie se trouvant initialement à 1 000 m au-dessus du sol met-elle à toucher le sol ? *Note : Considérez que la direction vers le haut est positive. Utilisez les fonctions $a_1(t)$, $v_1(t)$ et $s_1(t)$ pour représenter respectivement l'accélération, la vitesse et la hauteur de la goutte de pluie pour les 12 premières secondes.*

Calcul de la hauteur de la goutte de pluie après 12 secondes

Soit $a_1(t)$, $v_1(t)$ et $s_1(t)$ représentant respectivement l'accélération, la vitesse et la hauteur de la goutte de pluie pour les 12 premières secondes. Selon notre repère,

$$a_1(t) = -(9 - 0{,}75t) = 0{,}75t - 9$$

En intégrant l'accélération, on trouve la vitesse au temps $t \in [0, 12]$.

$$v_1(t) = \int a_1(t)\,dt = \int (0{,}75t - 9)\,dt = \frac{0{,}75t^2}{2} - 9t + C = \frac{3t^2}{8} - 9t + C$$

Puisque la vitesse initiale est -8 m/s, alors

$$v_1(0) = -8 \Longrightarrow \frac{3 \cdot 0^2}{8} - 9 \cdot 0 + C = -8 \Longrightarrow C = -8$$

La vitesse au temps $t \in [0, 12]$ est donc

$$v_1(t) = \frac{3t^2}{8} - 9t - 8$$

En intégrant la vitesse, on trouve la hauteur au temps $t \in [0, 12]$.

$$s_1(t) = \int v_1(t)\,dt = \int \left(\frac{3t^2}{8} - 9t - 8\right) dt = \frac{3t^3}{24} - \frac{9t^2}{2} - 8t + D = \frac{t^3}{8} - \frac{9t^2}{2} - 8t + D$$

Puisque la hauteur initiale est 1 000 m, alors

$$s_1(0) = 1\,000 \Longrightarrow \frac{0^3}{8} - \frac{9 \cdot 0^2}{2} - 8 \cdot 0 + D = 1\,000 \Longrightarrow D = 1\,000$$

La hauteur au temps $t \in [0, 12]$ est donc

$$s_1(t) = \frac{t^3}{8} - \frac{9t^2}{2} - 8t + 1\,000$$

Après 12 secondes, la hauteur de la goutte de pluie est donc

$$s_1(12) = \frac{12^3}{8} - \frac{9 \cdot 12^2}{2} - 8 \cdot 12 + 1\,000 = 472 \text{ m}$$

Calcul du temps mis par la goutte de pluie pour atteindre le sol

Après 12 secondes, la vitesse de la goutte de pluie est

$$v_1(12) = \frac{3 \cdot 12^2}{8} - 9 \cdot 12 - 8 = -62 \text{ m/s}$$

Puisque son accélération est nulle pour $t > 12$, alors sa vitesse demeurera constante à 62 m/s. Ainsi, pour parcourir la hauteur restante de 472 m, cela lui prendra

$$\frac{472}{62} = 7{,}61 \text{ s}$$

Le temps total mis pour atteindre le sol est donc

$$12 + 7{,}61 = 19{,}61 \text{ s.}$$