Devoir 4 — Solutions

Question 1 (20 points)

Évaluez l'intégrale en appliquant la définition de l'intégrale sous la forme donnée dans le théorème 1.3.9 (voir p.35).

$$\int_0^2 (2x + 3x^2)\, dx$$

On a $a = 0$ et $b = 2$, d'où

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{2}{n} \quad \text{et} \quad x_i = a + i\Delta x = \frac{2i}{n}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\int_0^2 (2x + 3x^2)\, dx &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\, \Delta x \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (2x_i + 3x_i^2) \cdot \frac{2}{n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(2\left(\frac{2i}{n}\right) + 3\left(\frac{2i}{n}\right)^2\right) \cdot \frac{2}{n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{8i}{n^2} + \frac{24i^2}{n^3}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{8}{n^2} \sum_{i=1}^{n} i + \frac{24}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i^2\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{8}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} + \frac{24}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{4(n^2+n)}{n^2} + \frac{4(2n^3+3n^2+n)}{n^3}\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{4n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n^2} + \frac{4n^3\left(2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}{n^3}\right] \\
&= 4 + 8 = 12
\end{aligned}$$

Question 2 (20 points)

Évaluez l'intégrale en l'interprétant comme une aire (ou comme une somme d'aires).

$$\int_1^5 \left(12 + 3|x-2| + \sqrt{4-(x-3)^2}\right) dx$$

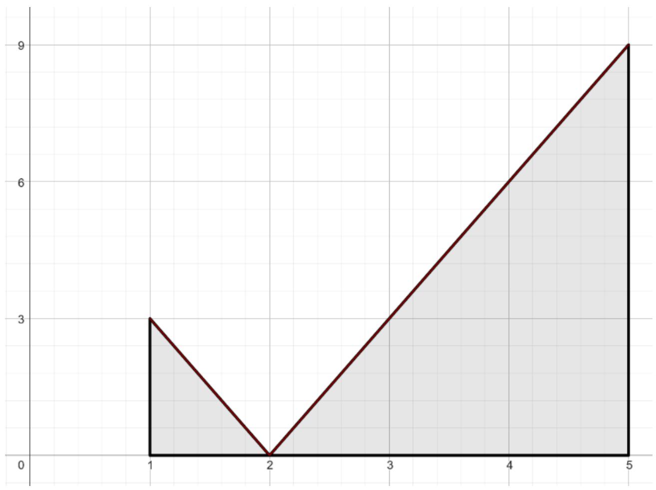
On a

$$\int_1^5 \left(12 + 3|x-2| + \sqrt{4-(x-3)^2}\right)\, dx = \int_1^5 12\, dx + \int_1^5 (3|x-2|)\, dx + \int_1^5 \left(\sqrt{4-(x-3)^2}\right)\, dx$$

La première intégrale s'interprète comme étant un rectangle de hauteur 12 et de largeur 4. Ainsi,

$$\int_1^5 12\, dx = 12 \cdot 4 = 48.$$

La seconde intégrale représente l'aire de la région illustrée ci-dessous.



Il s'agit de deux triangles. Ainsi,

$$\int_1^5 (3|x-2|)\, dx = \frac{1 \cdot 3}{2} + \frac{3 \cdot 9}{2} = 15.$$

La troisième intégrale représente l'aire d'un demi-cercle de rayon 2. En effet, l'équation

$$y = \sqrt{4-(x-3)^2} \Leftrightarrow y^2 + (x-3)^2 = 2^2 \;\; (\text{où } y \geq 0)$$

représente un demi-cercle de rayon 2 centré en $(3, 0)$, donc ayant pour domaine l'intervalle $[1, 5]$. Ainsi,

$$\int_1^5 \left(\sqrt{4-(x-3)^2}\right) = \frac{\pi \cdot 2^2}{2} = 2\pi.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}\int_1^5 \left(12 + 3|x-2| + \sqrt{4-(x-3)^2}\right) dx &= 48 + 15 + 2\pi \\ &= 63 + 2\pi \approx 69{,}283.\end{aligned}$$

Question 3 (15 + 15 = 30 points)

a) $\int_1^4 \left(\frac{x^3 - 2x^2 + 3}{\sqrt{x}}\right) dx$

Directement,

$$\begin{aligned}
\int_1^4 \left(\frac{x^3 - 2x^2 + 3}{\sqrt{x}}\right) dx &= \int_1^4 \left(x^{5/2} - 2x^{3/2} + 3x^{-1/2}\right) dx \\
&= \frac{x^{7/2}}{7/2} - \frac{2x^{5/2}}{5/2} + \frac{3x^{1/2}}{1/2}\Bigg|_{x=1}^{x=4} \\
&= \frac{2x^{7/2}}{7} - \frac{4x^{5/2}}{5} + 6x^{1/2}\Bigg|_{x=1}^{x=4} \\
&= \left(\frac{2 \cdot 4^{7/2}}{7} - \frac{4 \cdot 4^{5/2}}{5} + 6 \cdot 4^{\frac{1}{2}}\right) - \left(\frac{2 \cdot 1^{7/2}}{7} - \frac{4 \cdot 1^{5/2}}{5} + 6 \cdot 1^{1/2}\right) \\
&= \left(\frac{256}{7} - \frac{128}{5} + 12\right) - \left(\frac{2}{7} - \frac{4}{5} + 6\right) \\
&= \frac{804 - 192}{35} = \frac{612}{35} \approx 17{,}486
\end{aligned}$$

b) $\int_0^1 (e^x + 2^x + \cos(x))\, dx$

Directement,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (e^x + 2^x + \cos(x))\, dx &= \int_0^1 (e^x)\, dx + \int_0^1 (2^x)\, dx + \int_0^1 (\cos(x))\, dx \\
&= \left(e^x\big|_{x=0}^{x=1}\right) + \left(\frac{2^x}{\ln(2)}\Bigg|_{x=0}^{x=1}\right) + \left(\sin(x)\big|_{x=0}^{x=1}\right) \\
&= (e^1 - e^0) + \frac{2^1 - 2^0}{\ln(2)} + \sin(1) - \sin(0) \\
&= e - 1 + \frac{1}{\ln(2)} + \sin(1) \approx 4{,}002
\end{aligned}$$

Question 4 (10 points)

Si $r(t)$ désigne le taux, en litres par minute, auquel du pétrole s'échappe d'un réservoir au temps t, que représente

$$\int_{60}^{180} r(t)\,dt \ ?$$

Cette intégrale représente le nombre de litres de pétrole s'étant échappés du réservoir entre la 60^{e} et la 180^{e} minute.

Question 5 (20 points)

La fonction donnée est l'accélération (en m/s²) d'une particule suivant une trajectoire rectiligne pour laquelle on donne la vitesse initiale.

$$a(t) = t - 9{,}8 \quad \text{et} \quad v(0) = -4, \quad \text{où } 0 \le t \le 32$$

Calculez la distance que parcourt la particule durant l'intervalle de temps donné à l'aide de l'intégrale suivante :

$$\text{Distance parcourue} = \int_0^{32} |v(t)|\,dt$$

La vitesse de la particule est

$$v(t) = \int a(t)\,dt = \int (t - 9{,}8)\,dt = \frac{t^2}{2} - 9{,}8t + C$$

Puisque $v(0) = -4$, alors $C = -4$. La vitesse au temps t est donc

$$v(t) = \frac{t^2}{2} - 9{,}8t - 4$$

Ainsi, la distance parcourue par la particule pendant les 32 premières secondes est

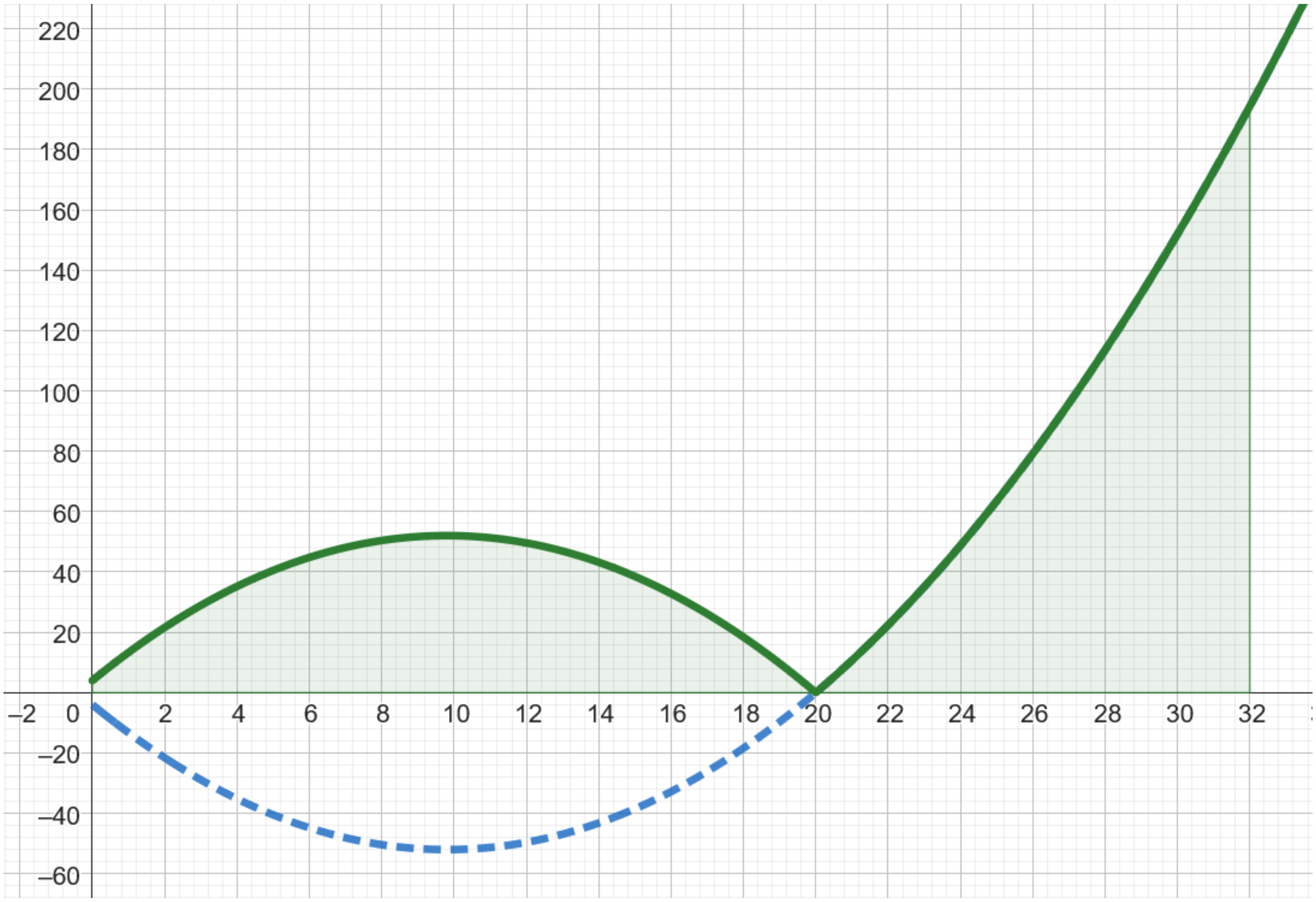
$$\int_0^{32} |v(t)|\,dt = \int_0^{32} \left|\frac{t^2}{2} - 9{,}8t - 4\right| dt$$

On remarque que la vitesse est nulle lorsque

$$\begin{aligned}
\frac{t^2}{2} - 9{,}8t - 4 = 0 &\Leftrightarrow t^2 - 19{,}6t - 8 = 0 \\
&\Leftrightarrow t = \frac{19{,}6 \pm \sqrt{(-19{,}6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8)}}{2} \\
&\Leftrightarrow t = \frac{19{,}6 \pm 20{,}4}{2} \\
&\Leftrightarrow t = -0{,}4 \quad \text{ou} \quad t = 20
\end{aligned}$$

Ainsi, la vitesse est négative pendant les 20 premières secondes et est positive par la suite. On a donc

$$\begin{aligned}
&\int_0^{32} \left|\frac{t^2}{2} - 9{,}8t - 4\right| dt \\
&= \int_0^{20} \left(\frac{-t^2}{2} + 9{,}8t + 4\right) dt + \int_{20}^{32} \left(\frac{t^2}{2} - 9{,}8t - 4\right) dt \\
&= \left(-\frac{t^3}{6} + 4{,}9t^2 + 4t\Big|_{t=0}^{t=20}\right) + \left(\frac{t^3}{6} - 4{,}9t^2 - 4t\Big|_{t=20}^{t=32}\right) \\
&= \left(-\frac{20^3}{6} + 4{,}9 \cdot 20^2 + 4 \cdot 20\right) - 0 + \left(\frac{32^3}{6} - 4{,}9 \cdot 32^2 - 4 \cdot 32\right) - \left(\frac{20^3}{6} - 4{,}9 \cdot 20^2 - 4 \cdot 20\right) \\
&= \frac{25\,936}{15} \approx 1\,729{,}067 \text{ m}
\end{aligned}$$


220
200
180
160
140
120
100
80
60
40
20
–20
–40
–60
–2
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20
22
24
26
28
30
32