Calcul intégral (201-702-RE) – Sylvain Bérubé – Hiver 2024

Minitest 1 (pratique) — Solutions

Consignes : Répondre directement sur le questionnaire. Au besoin, me demander une feuille supplémentaire pour vos brouillons ou pour compléter un calcul. Aucune documentation n'est autorisée. L'usage de la calculatrice est autorisé. Justifier toutes vos réponses. Utiliser les notations appropriées.

Question 1 (15 points)

Écrivez la somme à l'aide de la notation sigma.

$$\frac{3}{8}-\frac{9}{14}+\frac{27}{20}-\frac{81}{26}+\frac{243}{32} = \sum_{n=1}^{5}\frac{(-1)^{n+1}\cdot(3)^n}{6n+2}$$

Question 2 (15 points)

Exprimez la somme des 75 premiers multiples de cinq (en débutant à 5) à l'aide de la notation sigma puis évaluez cette somme.

$$\sum_{n=1}^{75}5n = 5\sum_{n=1}^{75}n = \frac{5\cdot 75\cdot 76}{2} = 14\,250$$

Question 3 (10 points)

Déterminez si la suite $\{52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, 4, 2, 1, 4, 2, 1, \ldots\}$ converge ou diverge. Si elle converge, trouvez sa limite.

Elle diverge.

Question 4 (12 + 12 + 12 + 12 + 12 = 60 points)

Pour chaque série, déterminez si elle converge ou diverge. Justifiez votre réponse.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{23n}{5^n}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{23(n+1)}{5^{n+1}}}{\frac{23n}{5^n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)\left(\frac{5^n}{5^{n+1}}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n}\right)\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{1}{5} < 1$$

Selon le critère de d'Alembert, la série converge.

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

Série alternée, où $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$.

— Condition i) : Puisque $b_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n+1}} < \frac{1}{\sqrt{n}} = b_n$, alors la suite $\{b_n\}$ est décroissante.

— Condition ii) : $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$

Selon le critère des séries alternées, la série converge.

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{7}$

On remarque que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{7} = \infty$. Ainsi, selon le critère de divergence, la série diverge.

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 34 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n$

Série géométrique de raison $r = \frac{3}{4}$. Puisque $|r| = \frac{3}{4} < 1$, alors la série converge.

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5 - n^3}{n^8 + n^2 + 1}$

On remarque que $\deg(n^8 + n^2 + 1) - \deg(n^5 - n^3) = 8 - 5 = 3 > 1$. Ainsi, selon le critère des polynômes, la série converge.