

Solutions aux exercices prioritaires de la partie 3

3.1 L'intégration par parties (p.135)

4. Posons  $u = y$ ,  $dv = e^{0.2y} dy \Rightarrow du = dy$ ,  $v = \frac{1}{0.2} e^{0.2y}$ . Alors, selon la formule 3.1.3,

$$\int y e^{0.2y} dy = 5 y e^{0.2y} - \int 5 e^{0.2y} dy = 5 y e^{0.2y} - 25 e^{0.2y} + C.$$

7. Tout d'abord, posons  $u = x^2 + 2x$ ,  $dv = \cos x dx \Rightarrow du = (2x + 2) dx$ ,  $v = \sin x$ . Alors, selon la formule 3.1.3,

$$I = \int (x^2 + 2x) \cos x dx = (x^2 + 2x) \sin x - \int (2x + 2) \sin x dx. \text{ Ensuite, posons } U = 2x + 2, dV = \sin x dx \Rightarrow dU = 2 dx,$$

$$V = -\cos x, \text{ donc } \int (2x + 2) \sin x dx = -(2x + 2) \cos x - \int -2 \cos x dx = -(2x + 2) \cos x + 2 \sin x + C.$$

$$\text{Par conséquent, } I = (x^2 + 2x) \sin x + (2x + 2) \cos x - 2 \sin x + C.$$

12. Posons  $u = \arctan 2y$ ,  $dv = dy \Rightarrow du = \frac{2}{1+4y^2} dy$ ,  $v = y$ . Alors, selon la formule 3.1.3,

$$\begin{aligned} \int \arctan 2y dy &= y \arctan 2y - \int \frac{2y}{1+4y^2} dy = y \arctan 2y - \int \frac{1}{t} \left( \frac{1}{4} dt \right) \quad \left[ \begin{array}{l} t = 1 + 4y^2, \\ dt = 8y dy \end{array} \right] \\ &= y \arctan 2y - \frac{1}{4} \ln |t| + C = y \arctan 2y - \frac{1}{4} \ln(1 + 4y^2) + C \end{aligned}$$

17. Tout d'abord, posons  $u = \sin 3\theta$ ,  $dv = e^{2\theta} d\theta \Rightarrow du = 3 \cos 3\theta d\theta$ ,  $v = \frac{1}{2} e^{2\theta}$ . Alors,

$$I = \int e^{2\theta} \sin 3\theta d\theta = \frac{1}{2} e^{2\theta} \sin 3\theta - \frac{3}{2} \int e^{2\theta} \cos 3\theta d\theta. \text{ Ensuite, posons } U = \cos 3\theta, dV = e^{2\theta} d\theta \Rightarrow dU = -3 \sin 3\theta d\theta, V = \frac{1}{2} e^{2\theta}, \text{ ce}$$

qui donne  $\int e^{2\theta} \cos 3\theta d\theta = \frac{1}{2} e^{2\theta} \cos 3\theta + \frac{3}{2} \int e^{2\theta} \sin 3\theta d\theta$ . En substituant ce résultat dans la formule précédente, nous obtenons

$$I = \frac{1}{2} e^{2\theta} \sin 3\theta - \frac{3}{4} e^{2\theta} \cos 3\theta - \frac{9}{4} \int e^{2\theta} \sin 3\theta d\theta = \frac{1}{2} e^{2\theta} \sin 3\theta - \frac{3}{4} e^{2\theta} \cos 3\theta - \frac{9}{4} I \Rightarrow \frac{13}{4} I = \frac{1}{2} e^{2\theta} \sin 3\theta - \frac{3}{4} e^{2\theta} \cos 3\theta + C_1. \text{ Par}$$

conséquent,  $I = \frac{1}{13} e^{2\theta} (2 \sin 3\theta - 3 \cos 3\theta) + C$ , où  $C = \frac{4}{13} C_1$ .

23. Posons  $u = \ln(\sin x)$ ,  $dv = \cos x dx \Rightarrow du = \frac{\cos x}{\sin x} dx$ ,  $v = \sin x$ .

$$\text{Alors, } I = \int \cos x \ln(\sin x) dx = \sin x \ln(\sin x) - \int \cos x dx = \sin x \ln(\sin x) - \sin x + C.$$

*Autre méthode* : Poser  $t = \sin x$ , donc  $dt = \cos x dx$ . Alors,  $I = \int \ln t dt = t \ln t - t + C$  (se référer à l'exemple 3.1.2) et donc,

$$I = \sin x (\ln \sin x - 1) + C.$$

24. Posons  $u = x$ ,  $dv = \cos \pi x dx \Rightarrow du = dx$ ,  $v = \frac{1}{\pi} \sin \pi x$ . Alors,

$$\begin{aligned} \int_0^{1/2} x \cos \pi x dx &= \left[ \frac{1}{\pi} x \sin \pi x \right]_0^{1/2} - \int_0^{1/2} \frac{1}{\pi} \sin \pi x dx = \frac{1}{2\pi} - 0 - \frac{1}{\pi} \left[ -\frac{1}{\pi} \cos \pi x \right]_0^{1/2} \\ &= \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi^2} (0 - 1) = \frac{1}{2\pi} - \frac{1}{\pi^2} \text{ ou } \frac{\pi - 2}{2\pi^2} \end{aligned}$$

27. Posons  $u = \ln w$ ,  $dv = w^2 dw \Rightarrow du = \frac{1}{w} dw$ ,  $v = \frac{1}{3} w^3$ . Alors, selon la formule 3.1.7,

$$\int_1^2 w^2 \ln w dw = \left[ \frac{1}{3} w^3 \ln w \right]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{3} w^2 dw = \frac{8}{3} \ln 2 - 0 - \left[ \frac{1}{9} w^3 \right]_1^2 = \frac{8}{3} \ln 2 - \left( \frac{8}{9} - \frac{1}{9} \right) = \frac{8}{3} \ln 2 - \frac{7}{9}.$$

35. Posons  $u = (\ln x)^2$ ,  $dv = x^4 dx \Rightarrow du = 2 \frac{\ln x}{x} dx$ ,  $v = \frac{x^5}{5}$ . Selon la formule 3.1.7,

$$\int_1^2 x^4 (\ln x)^2 dx = \left[ \frac{x^5}{5} (\ln x)^2 \right]_1^2 - 2 \int_1^2 \frac{x^4}{5} \ln x dx = \frac{32}{5} (\ln 2)^2 - 0 - 2 \int_1^2 \frac{x^4}{5} \ln x dx.$$

$$\text{Soit } U = \ln x, dV = \frac{x^4}{5} dx \Rightarrow dU = \frac{1}{x} dx, V = \frac{x^5}{25}.$$

$$\text{Alors, } \int_1^2 \frac{x^4}{5} \ln x dx = \left[ \frac{x^5}{25} \ln x \right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x^4}{25} dx = \frac{32}{25} \ln 2 - 0 - \left[ \frac{x^5}{125} \right]_1^2 = \frac{32}{25} \ln 2 - \left( \frac{32}{125} - \frac{1}{125} \right).$$

$$\text{Donc, } \int_1^2 x^4 (\ln x)^2 dx = \frac{32}{5} (\ln 2)^2 - 2 \left( \frac{32}{25} \ln 2 - \frac{31}{125} \right) = \frac{32}{5} (\ln 2)^2 - \frac{64}{25} \ln 2 + \frac{62}{125}.$$

39. Posons  $x = \theta^2$ , alors  $dx = 2\theta d\theta$ . Par conséquent,  $\int_{\sqrt{\pi/2}}^{\sqrt{\pi}} \theta^3 \cos(\theta^2) d\theta = \int_{\sqrt{\pi/2}}^{\sqrt{\pi}} \theta^2 \cos(\theta^2) \cdot \frac{1}{2} (2\theta d\theta) = \frac{1}{2} \int_{\pi/2}^{\pi} x \cos x dx$ . Intégrons

maintenant par parties en posant  $u = x$ ,  $dv = \cos x dx$ ,  $du = dx$ ,  $v = \sin x$ , ce qui donnera

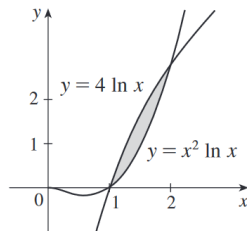
$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\pi/2}^{\pi} x \cos x dx &= \frac{1}{2} \left( [x \sin x]_{\pi/2}^{\pi} - \int_{\pi/2}^{\pi} \sin x dx \right) = \frac{1}{2} [x \sin x + \cos x]_{\pi/2}^{\pi} \\ &= \frac{1}{2} (\pi \sin \pi + \cos \pi) - \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2} + \cos \frac{\pi}{2} \right) = \frac{1}{2} (\pi \cdot 0 - 1) - \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{2} \cdot 1 + 0 \right) = -\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

57. Les courbes  $y = x^2 \ln x$  et  $y = 4 \ln x$  se croisent lorsque  $x^2 \ln x = 4 \ln x \Leftrightarrow x^2 \ln x - 4 \ln x = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 4) \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$  ou  $2$

[puisque  $x > 0$ ]. Pour  $1 < x < 2$ ,  $4 \ln x > x^2 \ln x$ . Par conséquent, aire =  $\int_1^2 (4 \ln x - x^2 \ln x) dx = \int_1^2 [(4 - x^2) \ln x] dx$ . Soit  $u = \ln x$ ,

$$dv = (4 - x^2) dx \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx, v = 4x - \frac{1}{3} x^3. \text{ Alors,}$$

$$\begin{aligned} \text{aire} &= [(\ln x)(4x - \frac{1}{3} x^3)]_1^2 - \int_1^2 \left[ (4x - \frac{1}{3} x^3) \frac{1}{x} \right] dx = (\ln 2) \left( \frac{16}{3} \right) - 0 - \int_1^2 (4 - \frac{1}{3} x^2) dx \\ &= \frac{16}{3} \ln 2 - [4x - \frac{1}{9} x^3]_1^2 = \frac{16}{3} \ln 2 - \left( \frac{64}{9} - \frac{35}{9} \right) = \frac{16}{3} \ln 2 - \frac{29}{9} \end{aligned}$$



68. Puisque  $v(t) > 0$  pour tout  $t$ , la distance recherchée est  $s(t) = \int_0^t v(w)dw = \int_0^t w^2 e^{-w} dw$ .

Tout d'abord, soit  $u = w^2$ ,  $dv = e^{-w} dw \Rightarrow du = 2w dw$ ,  $v = -e^{-w}$ . Alors,  $s(t) = [-w^2 e^{-w}]_0^t + 2 \int_0^t w e^{-w} dw$ .

Ensuite, soit  $U = w$ ,  $dV = e^{-w} dw \Rightarrow dU = dw$ ,  $V = -e^{-w}$ . Alors,

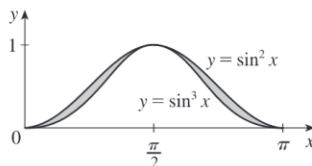
$$\begin{aligned} s(t) &= -t^2 e^{-t} + 2 \left( [-w e^{-w}]_0^t + \int_0^t e^{-w} dw \right) = -t^2 e^{-t} + 2(-t e^{-t} + 0 + [-e^{-w}]_0^t) \\ &= -t^2 e^{-t} + 2(-t e^{-t} - e^{-t} + 1) = -t^2 e^{-t} - 2t e^{-t} - 2e^{-t} + 2 = 2 - e^{-t}(t^2 + 2t + 2) = 2 - \frac{t^2 + 2t + 2}{e^t} \text{ mètres} \end{aligned}$$

### 3.2 Les intégrales de fonctions trigonométriques (p.144)

3. 
$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \sin^7 \theta \cos^5 \theta d\theta &= \int_0^{\pi/2} \sin^7 \theta \cos^4 \theta \cos \theta d\theta = \int_0^{\pi/2} \sin^7 \theta (1 - \sin^2 \theta)^2 \cos \theta d\theta \\ &\stackrel{\sin}{=} \int_0^1 u^7 (1 - u^2)^2 du = \int_0^1 u^7 (1 - 2u^2 + u^4) du = \int_0^1 (u^7 - 2u^9 + u^{11}) du \\ &= \left[ \frac{1}{8} u^8 - \frac{1}{5} u^{10} + \frac{1}{12} u^{12} \right]_0^1 = \left( \frac{1}{8} - \frac{1}{5} + \frac{1}{12} \right) - 0 = \frac{15 - 24 + 10}{120} = \frac{1}{120}\end{aligned}$$
5. 
$$\begin{aligned}\int \sin^5(2t) \cos^2(2t) dt &= \int \sin^4(2t) \cos^2(2t) \sin(2t) dt = \int [1 - \cos^2(2t)]^2 \cos^2(2t) \sin(2t) dt \\ &= \int (1 - u^2)^2 u^2 \left(-\frac{1}{2} du\right) \quad [u = \cos(2t), du = -2 \sin(2t) dt] \\ &= -\frac{1}{2} \int (u^4 - 2u^2 + 1) u^2 du = -\frac{1}{2} \int (u^6 - 2u^4 + u^2) du \\ &= -\frac{1}{2} \left( \frac{1}{7} u^7 - \frac{2}{5} u^5 + \frac{1}{3} u^3 \right) + C = -\frac{1}{14} \cos^7(2t) + \frac{1}{5} \cos^5(2t) - \frac{1}{6} \cos^3(2t) + C\end{aligned}$$
8. 
$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \sin^2\left(\frac{1}{3}\theta\right) d\theta &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} [1 - \cos(2 \cdot \frac{1}{3}\theta)] d\theta \quad [\text{formule de bisection}] \\ &= \frac{1}{2} \left[ \theta - \frac{3}{2} \sin\left(\frac{2}{3}\theta\right) \right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2} \left[ \left( 2\pi - \frac{3}{2} \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right) - 0 \right] = \pi + \frac{3}{8}\sqrt{3}\end{aligned}$$
15. 
$$\begin{aligned}\int \cot x \cos^2 x dx &= \int \frac{\cos x}{\sin x} (1 - \sin^2 x) dx \\ &\stackrel{\sin}{=} \int \frac{1 - u^2}{u} du = \int \left( \frac{1}{u} - u \right) du = \ln|u| - \frac{1}{2} u^2 + C = \ln|\sin x| - \frac{1}{2} \sin^2 x + C\end{aligned}$$
24. 
$$\int (\tan^2 x + \tan^4 x) dx = \int \tan^2 x (1 + \tan^2 x) dx = \int \tan^2 x \sec^2 x dx \stackrel{\tan}{=} \int u^2 du = \frac{1}{3} u^3 + C = \frac{1}{3} \tan^3 x + C$$
30. 
$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/4} \tan^4 t dt &= \int_0^{\pi/4} \tan^2 t (\sec^2 t - 1) dt = \int_0^{\pi/4} \tan^2 t \sec^2 t dt - \int_0^{\pi/4} \tan^2 t dt \\ &\stackrel{\tan}{=} \int_0^1 u^2 du - \int_0^{\pi/4} (\sec^2 t - 1) dt = \left[ \frac{1}{3} u^3 \right]_0^1 - [\tan t - t]_0^{\pi/4} \\ &= \frac{1}{3} - \left[ \left( 1 - \frac{\pi}{4} \right) - 0 \right] = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{3}\end{aligned}$$
38. 
$$\begin{aligned}\int \csc^4 x \cot^6 x dx &= \int \cot^6 x (\cot^2 x + 1) \csc^2 x dx \stackrel{\cot}{=} \int u^6 (u^2 + 1) \cdot (-du) \\ &= \int (-u^8 - u^6) du = -\frac{1}{9} u^9 - \frac{1}{7} u^7 + C = -\frac{1}{9} \cot^9 x - \frac{1}{7} \cot^7 x + C\end{aligned}$$
41. D'après l'identité trigonométrique 3.2.5 a),  

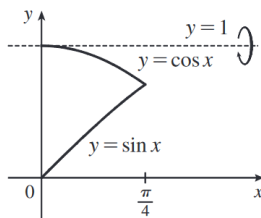
$$\begin{aligned}\int \sin 8x \cos 5x dx &= \int \frac{1}{2} [\sin(8x - 5x) + \sin(8x + 5x)] dx = \frac{1}{2} \int \sin 3x dx + \frac{1}{2} \int \sin 13x dx \\ &= -\frac{1}{6} \cos 3x - \frac{1}{26} \cos 13x + C\end{aligned}$$
49. 
$$\begin{aligned}\int x \tan^2 x dx &= \int x (\sec^2 x - 1) dx = \int x \sec^2 x dx - \int x dx \\ &= x \tan x - \int \tan x dx - \frac{1}{2} x^2 \quad \left[ \begin{array}{l} u = x, \quad dv = \sec^2 x dx \\ du = dx, \quad v = \tan x \end{array} \right] \\ &= x \tan x - \ln|\sec x| - \frac{1}{2} x^2 + C\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 57. \quad A &= \int_0^\pi (\sin^2 x - \sin^3 x) dx = \int_0^\pi \left[ \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) - \sin x (1 - \cos^2 x) \right] dx \\
 &= \int_0^\pi \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x \right) dx + \int_1^{-1} (1 - u^2) du \quad \left[ \begin{array}{l} u = \cos x, \\ du = -\sin x dx \end{array} \right] \\
 &= \left[ \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \sin 2x \right]_0^\pi - \int_{-1}^1 (1 - u^2) du \\
 &= \left( \frac{1}{2}\pi - 0 \right) - (0 - 0) - \left[ u - \frac{1}{3}u^3 \right]_{-1}^1 \\
 &= \frac{1}{2}\pi - \left( \frac{2}{3} - -\frac{2}{3} \right) = \frac{1}{2}\pi - \frac{4}{3}
 \end{aligned}$$



63. En utilisant la méthode des disques troués, nous obtenons

$$\begin{aligned}
 V &= \int_0^{\pi/4} \pi[(1 - \sin x)^2 - (1 - \cos x)^2] dx \\
 &= \pi \int_0^{\pi/4} [(1 - 2\sin x + \sin^2 x) - (1 - 2\cos x + \cos^2 x)] dx \\
 &= \pi \int_0^{\pi/4} (2\cos x - 2\sin x + \sin^2 x - \cos^2 x) dx \\
 &= \pi \int_0^{\pi/4} (2\cos x - 2\sin x - \cos 2x) dx = \pi \left[ 2\sin x + 2\cos x - \frac{1}{2} \sin 2x \right]_0^{\pi/4} \\
 &= \pi \left[ \left( \sqrt{2} + \sqrt{2} - \frac{1}{2} \right) - (0 + 2 - 0) \right] = \pi \left( 2\sqrt{2} - \frac{5}{2} \right)
 \end{aligned}$$



### 3.7 L'intégrale impropre (p.184)

$$7. \int_{-\infty}^0 \frac{1}{3-4x} dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^0 \frac{1}{3-4x} dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \left[ -\frac{1}{4} \ln |3-4x| \right]_t^0 = \lim_{t \rightarrow -\infty} \left[ -\frac{1}{4} \ln 3 + \frac{1}{4} \ln |3-4t| \right] = \infty. \quad \text{Intégrale divergente}$$

$$8. \int_1^{\infty} \frac{1}{(2x+1)^3} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t \frac{1}{(2x+1)^3} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[ -\frac{1}{4(2x+1)^2} \right]_1^t = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[ -\frac{1}{4(2t+1)^2} + \frac{1}{36} \right] = 0 + \frac{1}{36}. \quad \text{Intégrale convergente}$$

$$16. \int_0^{\infty} \sin \theta e^{\cos \theta} d\theta = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \sin \theta e^{\cos \theta} d\theta = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[ -e^{\cos \theta} \right]_0^t = \lim_{t \rightarrow \infty} (-e^{\cos t} + e)$$

Cette limite n'existe pas puisque  $\cos t$  oscille entre  $-1$  et  $1$ , donc  $e^{\cos t}$  oscille

entre  $e^{-1}$  et  $e^1$ . Intégrale divergente

$$20. \int_2^{\infty} y e^{-3y} dy = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_2^t y e^{-3y} dy = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[ -\frac{1}{3} y e^{-3y} - \frac{1}{9} e^{-3y} \right]_2^t \quad \left[ \begin{array}{l} \text{intégration par parties avec} \\ u = y, dv = e^{-3y} dy \end{array} \right]$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \left[ \left( -\frac{1}{3} t e^{-3t} - \frac{1}{9} e^{-3t} \right) - \left( -\frac{2}{3} e^{-6} - \frac{1}{9} e^{-6} \right) \right] = 0 - 0 + \frac{7}{9} e^{-6} \quad [\text{selon la règle de L'Hospital}] = \frac{7}{9} e^{-6}.$$

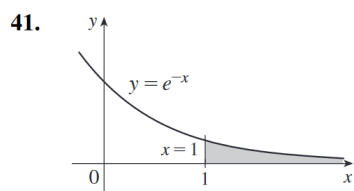
Intégrale convergente

$$31. \int_{-2}^3 \frac{dx}{x^4} = \int_{-2}^0 \frac{dx}{x^4} + \int_0^3 \frac{dx}{x^4}, \text{ mais } \int_{-2}^3 \frac{dx}{x^4} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \left[ -\frac{x^{-3}}{3} \right]_{-2}^t = \lim_{t \rightarrow 0^+} \left[ -\frac{1}{3t^3} - \frac{1}{24} \right] = \infty. \quad \text{Intégrale divergente}$$

$$37. \int_0^1 r \ln r dr = \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_t^1 r \ln r dr = \lim_{t \rightarrow 0^+} \left[ \frac{1}{2} r^2 \ln r - \frac{1}{4} r^2 \right]_t^1 \quad \left[ \begin{array}{l} u = \ln r, \quad dv = r dr \\ du = (1/r) dr, \quad v = \frac{1}{2} r^2 \end{array} \right]$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0^+} \left[ \left( 0 - \frac{1}{4} \right) - \left( \frac{1}{2} t^2 \ln t - \frac{1}{4} t^2 \right) \right] = -\frac{1}{4} - 0 = -\frac{1}{4}$$

$$\text{Car } \lim_{t \rightarrow 0^+} t^2 \ln t = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\ln t}{1/t^2} \stackrel{H}{=} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1/t}{-2/t^3} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \left( -\frac{1}{2} t^2 \right) = 0. \quad \text{Intégrale convergente}$$



$$\text{Aire} = \int_1^{\infty} e^{-x} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t e^{-x} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[ -e^{-x} \right]_1^t$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} (-e^{-t} + e^{-1}) = 0 + e^{-1} = 1/e$$

57. Si  $p = 1$ , alors  $\int_0^1 \frac{dx}{x^p} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_t^1 \frac{dx}{x} = \lim_{t \rightarrow 0^+} [\ln x]_t^1 = \infty$ . Intégrale divergente.

Si  $p \neq 1$ , alors

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dx}{x^p} &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_t^1 \frac{dx}{x^p} \quad [\text{on constate que l'intégrale n'est pas impropre si } p < 0] \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \left[ \frac{x^{-p+1}}{-p+1} \right]_t^1 = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{1-p} \left[ 1 - \frac{1}{t^{p-1}} \right] \end{aligned}$$

Si  $p > 1$ , alors  $p - 1 > 0$ , donc  $\frac{1}{t^{p-1}} \rightarrow \infty$  à mesure que  $t \rightarrow 0^+$  et l'intégrale est divergente.

Si  $p < 1$ , alors  $p - 1 < 0$ , donc  $\frac{1}{t^{p-1}} \rightarrow 0$  à mesure que  $t \rightarrow 0^+$  et  $\int_0^1 \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{1-p} \left[ \lim_{t \rightarrow 0^+} (1 - t^{1-p}) \right] = \frac{1}{1-p}$ . Par conséquent, l'intégrale est

convergente si et seulement si  $p < 1$  et, dans ce cas, sa valeur est  $\frac{1}{1-p}$ .

63.  $\text{Volume} = \int_1^\infty \pi \left( \frac{1}{x} \right)^2 dx = \pi \lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t \frac{dx}{x^2} = \pi \lim_{t \rightarrow \infty} \left[ -\frac{1}{x} \right]_1^t = \pi \lim_{t \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{t} \right) = \pi$ .

## 4.1 La longueur d'un arc de courbe (p.201)

2. Au moyen de la formule de la longueur d'un arc de courbe, avec  $y = \sqrt{2-x^2} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{\sqrt{2-x^2}}$ , nous obtenons

$$\begin{aligned} L &= \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{x^2}{2-x^2}} dx = \int_0^1 \frac{\sqrt{2} dx}{\sqrt{2-x^2}} = \sqrt{2} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(\sqrt{2})^2 - x^2}} \\ &= \sqrt{2} \left[ \arcsin \frac{x}{\sqrt{2}} \right]_0^1 = \sqrt{2} \left[ \arcsin \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right) - \arcsin 0 \right] = \sqrt{2} \left[ \frac{\pi}{4} - 0 \right] = \sqrt{2} \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

La courbe représente un huitième d'un cercle de rayon  $\sqrt{2}$ ; la longueur de l'arc de courbe est donc  $\frac{1}{8}(2\pi \cdot \sqrt{2}) = \sqrt{2} \frac{\pi}{4}$ , soit le résultat obtenu précédemment.

10.  $36y^2 = (x^2 - 4)^3, y \geq 0 \Rightarrow y = \frac{1}{6}(x^2 - 4)^{3/2} \Rightarrow dy/dx = \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{2}(x^2 - 4)^{1/2}(2x) = \frac{1}{2}x(x^2 - 4)^{1/2} \Rightarrow$

$$1 + (dy/dx)^2 = 1 + \frac{1}{4}x^2(x^2 - 4) = \frac{1}{4}x^4 - x^2 + 1 = \frac{1}{4}(x^4 - 4x^2 + 4) = \left[ \frac{1}{2}(x^2 - 2) \right]^2. \text{ Donc,}$$

$$L = \int_2^3 \sqrt{\left[ \frac{1}{2}(x^2 - 2) \right]^2} dx = \int_2^3 \frac{1}{2}(x^2 - 2) dx = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{3}x^3 - 2x \right]_2^3 = \frac{1}{2} \left[ (9 - 6) - \left( \frac{8}{3} - 4 \right) \right] = \frac{1}{2} \left( \frac{13}{3} \right) = \frac{13}{6}.$$

12.  $x = \frac{y^4}{8} + \frac{1}{4y^2} \Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{1}{2}y^3 - \frac{1}{2}y^{-3} \Rightarrow 1 + (dx/dy)^2 = 1 + \frac{1}{4}y^6 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}y^{-6} = \frac{1}{4}y^6 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}y^{-6} = \left( \frac{1}{2}y^3 + \frac{1}{2}y^{-3} \right)^2. \text{ Donc,}$

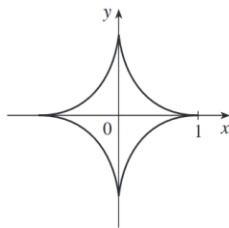
$$\begin{aligned} L &= \int_1^2 \sqrt{\left( \frac{1}{2}y^3 + \frac{1}{2}y^{-3} \right)^2} dy = \int_1^2 \left( \frac{1}{2}y^3 + \frac{1}{2}y^{-3} \right) dy = \left[ \frac{1}{8}y^4 - \frac{1}{4}y^{-2} \right]_1^2 = \left( 2 - \frac{1}{16} \right) - \left( \frac{1}{8} - \frac{1}{4} \right) \\ &= 2 + \frac{1}{16} = \frac{33}{16} \end{aligned}$$

14.  $y = \ln(\cos x) \Rightarrow dy/dx = -\tan x \Rightarrow 1 + (dy/dx)^2 = 1 + \tan^2 x = \sec^2 x. \text{ Donc,}$

$$L = \int_0^{\pi/3} \sqrt{\sec^2 x} dx = \int_0^{\pi/3} |\sec x| dx = \int_0^{\pi/3} \sec x dx = [\ln |\sec x + \tan x|]_0^{\pi/3} = \ln(2 + \sqrt{3}) - \ln(1 + 0) = \ln(2 + \sqrt{3}).$$

29.  $y^{2/3} = 1 - x^{2/3} \Rightarrow y = (1 - x^{2/3})^{3/2} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}(1 - x^{2/3})^{1/2} \left( -\frac{2}{3}x^{-1/3} \right) = -x^{-1/3}(1 - x^{2/3})^{1/2} \Rightarrow \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 = x^{-2/3}(1 - x^{2/3}) = x^{-2/3} - 1. \text{ Par}$

conséquent, étant donné la symétrie de la courbe,  $L = 4 \int_0^1 \sqrt{1 + (x^{-2/3} - 1)} dx = 4 \int_0^1 x^{-1/3} dx = 4 \lim_{t \rightarrow 0^+} \left[ \frac{3}{2} x^{2/3} \right]_t^1 = 6.$



31.  $y = 2x^{3/2} \Rightarrow y' = 3x^{1/2} \Rightarrow 1 + (y')^2 = 1 + 9x. \text{ La fonction longueur d'arc dont le point initial est } P_0(1, 2) \text{ est}$

$$s(x) = \int_1^x \sqrt{1 + 9t} dt = \left[ \frac{2}{27}(1 + 9t)^{3/2} \right]_1^x = \frac{2}{27} \left[ (1 + 9x)^{3/2} - 10\sqrt{10} \right].$$

$$35. \quad f(x) = \frac{1}{4}e^x + e^{-x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{4}e^x - e^{-x} \Rightarrow$$

$$1 + [f'(x)]^2 = 1 + \left(\frac{1}{4}e^x - e^{-x}\right)^2 = 1 + \frac{1}{16}e^{2x} - \frac{1}{2} + e^{-2x} = \frac{1}{16}e^{2x} + \frac{1}{2} + e^{-2x} = \left(\frac{1}{4}e^x + e^{-x}\right)^2 = [f(x)]^2. \text{ La longueur d'arc de la courbe}$$

$y = f(x)$  sur l'intervalle  $[a, b]$  est  $L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx = \int_a^b \sqrt{[f(x)]^2} dx = \int_a^b f(x) dx$ , ce qui est l'aire de la région sous la courbe  $y = f(x)$  sur l'intervalle  $[a, b]$ .

$$36. \quad y = 50 - \frac{1}{10}(x-15)^2 \Rightarrow y' = -\frac{1}{5}(x-15) \Rightarrow 1 + (y')^2 = 1 + \frac{1}{5^2}(x-15)^2.$$

La distance parcourue par le cerf-volant est donc

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{25} \sqrt{1 + \frac{1}{5^2}(x-15)^2} dx = \int_{-3}^2 \sqrt{1+u^2} (5du) \quad \left[ \begin{array}{l} u = \frac{1}{5}(x-15) \\ du = \frac{1}{5}dx \end{array} \right] \\ &= 5 \left[ \frac{1}{2}u\sqrt{1+u^2} + \frac{1}{2}\ln(u + \sqrt{1+u^2}) \right]_{-3}^2 \quad \left[ \begin{array}{l} \text{formule 37 de la table d'intégrales} \\ \text{des pages de référence} \end{array} \right] \\ &= \frac{5}{2} \left[ 2\sqrt{5} + \ln(2 + \sqrt{5}) + 3\sqrt{10} - \ln(-3 + \sqrt{10}) \right] \\ &= 5\sqrt{5} + \frac{15}{2}\sqrt{10} + \frac{5}{2}\ln\left(\frac{2+\sqrt{5}}{-3+\sqrt{10}}\right) \approx 43,1 \text{ m.} \end{aligned}$$

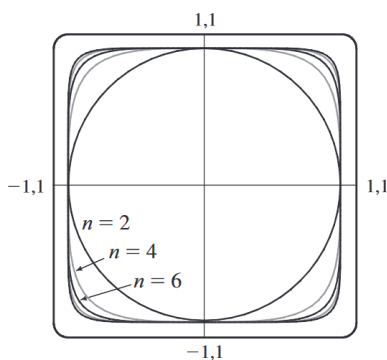
42. Par symétrie, la longueur de la courbe dans chaque quadrant est identique. Nous trouverons donc la longueur dans le premier quadrant et multiplierons le résultat par 4.

$$x^{2k} + y^{2k} = 1 \Rightarrow y^{2k} = 1 - x^{2k} \Rightarrow y = (1 - x^{2k})^{1/(2k)} \text{ (dans le premier quadrant).}$$

Nous utilisons donc la formule de la longueur d'un arc de courbe avec  $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2k}(1 - x^{2k})^{1/(2k)-1}(-2kx^{2k-1}) = -x^{2k-1}(1 - x^{2k})^{1/(2k)-1}$ .

Par conséquent, la longueur totale est

$$L_{2k} = 4 \int_0^1 \sqrt{1 + [-x^{2k-1}(1 - x^{2k})^{1/(2k)-1}]^2} dx = 4 \int_0^1 \sqrt{1 + x^{2(2k-1)}(1 - x^{2k})^{1/k-2}} dx$$



La graphique montre qu'au fur et à mesure que la valeur de  $k$  augmente, les « coins » de ces cercles équarris se rapprochent des points  $(\pm 1, \pm 1)$  et  $(\pm 1, \mp 1)$  et leurs « extrémités » se rapprochent des droites qui relient ces quatre points. Il semble plausible qu'à mesure que  $k \rightarrow \infty$ , la longueur totale du cercle équarri avec  $n = 2k$  se rapprochera de la longueur du périmètre du carré dont les côtés sont de longueur 2. Prenons la limite, à mesure que  $k \rightarrow \infty$ , de l'équation du cercle équarri dans le premier quadrant:

$\lim_{k \rightarrow \infty} (1 - x^{2k})^{1/(2k)} = 1$  pour  $0 \leq x < 1$ , nous trouverons que ceci est bien le cas. Nous supposons donc que  $\lim_{k \rightarrow \infty} L_{2k} = 4 \cdot 2 = 8$ .

## 5.1 La modélisation avec des équations différentielles (p.252)

1.  $y = \frac{2}{3}e^x + e^{-2x} \Rightarrow y' = \frac{2}{3}e^x - 2e^{-2x}$ . Afin de démontrer que  $y$  est une solution de l'équation différentielle, remplaçons  $y$  et  $y'$  par leurs expressions respectives dans le membre gauche de l'équation, puis montrons que le membre de gauche est égal au membre de droite.

$$\begin{aligned}\text{Membre de gauche} &= y' + 2y = \frac{2}{3}e^x - 2e^{-2x} + 2\left(\frac{2}{3}e^x + e^{-2x}\right) = \frac{2}{3}e^x - 2e^{-2x} + \frac{4}{3}e^x + 2e^{-2x} \\ &= \frac{6}{3}e^x = 2e^x = \text{Membre de droite}\end{aligned}$$

4. a)  $y = \cos kt \Rightarrow y' = -k \sin kt \Rightarrow y'' = -k^2 \cos kt$ . En remplaçant les variables originales par leurs expressions respectives dans l'équation différentielle  $4y'' = -25y$ , nous obtenons

$$4(-k^2 \cos kt) = -25(\cos kt) \Rightarrow (25 - 4k^2)\cos kt = 0 \quad [\text{quelque soit } t] \Rightarrow 25 - 4k^2 = 0 \Rightarrow k^2 = \frac{25}{4} \Rightarrow k = \pm \frac{5}{2}.$$

- b)  $y = A \sin kt + B \cos kt \Rightarrow y' = Ak \cos kt - Bk \sin kt \Rightarrow y'' = -Ak^2 \sin kt - Bk^2 \cos kt$ .

L'équation différentielle donnée  $4y'' = -25y$  est équivalente à  $4y'' + 25y = 0$ . Par conséquent,

$$\begin{aligned}\text{Membre de gauche} &= 4y'' + 25y = 4(-Ak^2 \sin kt - Bk^2 \cos kt) + 25(A \sin kt + B \cos kt) \\ &= -4Ak^2 \sin kt - 4Bk^2 \cos kt + 25A \sin kt + 25B \cos kt \\ &= (25 - 4k^2)A \sin kt + (25 - 4k^2)B \cos kt \\ &= 0 \quad \text{puisque } k^2 = \frac{25}{4}.\end{aligned}$$

7. a) Comme la dérivée  $y' = -y^2$  est toujours négative (ou nulle si  $y = 0$ ), la fonction  $y$  doit être décroissante (ou égale à 0) sur tout intervalle sur lequel elle est définie.

b)  $y = \frac{1}{x+C} \Rightarrow y' = -\frac{1}{(x+C)^2}$ . Membre de gauche  $= y' = -\frac{1}{(x+C)^2} = -\left(\frac{1}{x+C}\right)^2 = -y^2 =$  Membre de droite

- c)  $y = 0$  est une solution de  $y' = -y^2$  qui n'est pas un membre de la famille décrite à la sous-question b).

d) Si  $y(x) = \frac{1}{x+C}$ , alors  $y(0) = \frac{1}{0+C} = \frac{1}{C}$ . Puisque  $y(0) = 0,5$ ,  $\frac{1}{C} = \frac{1}{2} \Rightarrow C = 2$ , donc  $y = \frac{1}{x+2}$ .

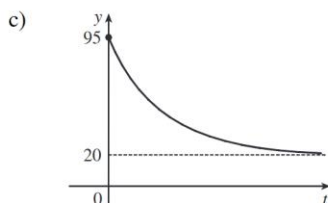
9. a)  $\frac{dP}{dt} = 1,2P\left(1 - \frac{P}{4200}\right)$ . Or,  $\frac{dP}{dt} > 0 \Rightarrow 1 - \frac{P}{4200} > 0$  [en supposant que  $P > 0$ ]  $\Rightarrow \frac{P}{4200} < 1 \Rightarrow P < 4200 \Rightarrow$  la population est croissante pour  $0 < P < 4200$ .

b)  $\frac{dP}{dt} < 0 \Rightarrow P > 4200$

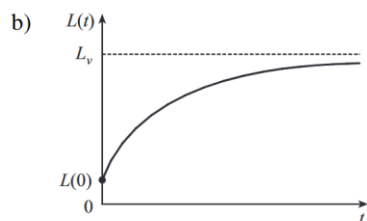
c)  $\frac{dP}{dt} = 0 \Rightarrow P = 4200$  ou  $P = 0$

13. a)  $y' = 1 + x^2 + y^2 \geq 1$  et  $y' \rightarrow \infty$  lorsque  $x \rightarrow \infty$ . La seule courbe satisfaisant à ces conditions est III.
- b)  $y' = xe^{-x^2-y^2} > 0$  si  $x > 0$  et  $y' < 0$  si  $x < 0$ . La seule courbe présentant des pentes de tangente négatives lorsque  $x < 0$  et des pentes de tangente positives lorsque  $x > 0$  est I.
- c)  $y' = \frac{1}{1+e^{x^2+y^2}} > 0$  et  $y' \rightarrow 0$  lorsque  $x \rightarrow \infty$ . La seule courbe satisfaisant à ces conditions est IV.
- d)  $y' = \sin(xy) \cos(xy) = 0$  si  $y = 0$ . Ceci est la courbe II.

14. a) Le café refroidit le plus rapidement dès qu'on l'éloigne de la source de chaleur. Le taux de refroidissement diminue et se rapproche de 0 à mesure que la température du café se rapproche de la température ambiante.
- b)  $\frac{dy}{dt} = k(y - A)$ , où  $k$  est une constante de proportionnalité,  $y$  est la température du café et  $A$  est la température ambiante. La condition initiale est  $y(0) = 95^\circ\text{C}$ . La réponse et le modèle s'accompagnent mutuellement car, lorsque  $y$  se rapproche de  $A$ ,  $dy/dt$  se rapproche de 0. Le modèle semble donc correspondre.

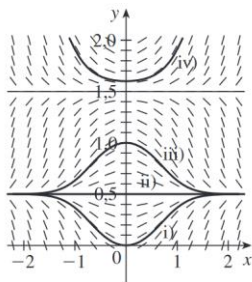


16. a)  $\frac{dL}{dt} = k(L_v - L)$ . En supposant que  $L_v > L$  et sachant que  $k > 0$ , on a que  $dL/dt > 0$  pour tout  $t$ .



## 5.2 Le champ de directions et la méthode d'Euler (p.260)

1. a)



b) Il semble que les fonctions constantes  $y = 0,5$  et  $y = 1,5$  sont des solutions stationnaires. Il est à noter que ces deux valeurs de  $y$  satisfont à l'équation différentielle donnée  $y' = x \cos \pi y$ .

3.  $y' = 2 - y$ . Les pentes sont indépendantes de  $x$  en chaque point; les pentes sont donc identiques le long de chaque droite parallèle à l'axe des  $x$ . Par conséquent, le champ de directions III est le champ approprié pour cette équation. On constate que pour  $y = 2$ ,  $y' = 0$ .

4.  $y' = x(2 - y) = 0$  le long des droites  $x = 0$  et  $y = 2$ . Le champ de directions I satisfait à ces conditions.

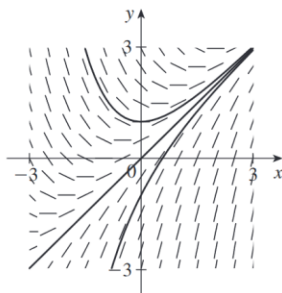
5.  $y' = x + y - 1 = 0$  le long de la droite  $y = -x + 1$ . Le champ de directions IV satisfait à cette condition. On constate également que  $y' = -1$  le long de la droite  $y = -x$ , ce qu'on retrouve dans le champ de directions IV.

6.  $y' = \sin x \sin y = 0$  le long des droites  $x = 0$  et  $y = 0$ , et  $y' > 0$  pour  $0 < x < \pi$ ,  $0 < y < \pi$ . Le champ de directions II satisfait à ces conditions.

10.

$x$	$y$	$y' = x - y + 1$
-1	0	0
-1	-1	1
0	0	1
0	1	0
0	2	-1
0	-1	2
0	-2	3
1	0	2
1	1	1

On constate que  $y' = 0$  pour  $y = x + 1$  et que  $y' = 1$  pour  $y = x$ . Pour toute valeur constante de  $x$ , la valeur de  $y'$  diminue à mesure que la valeur de  $y$  augmente et la valeur de  $y'$  augmente à mesure que la valeur de  $y$  diminue. Les trois courbes intégrales qui ont été tracées passent par les points  $(0, 0)$ ,  $(0, 1)$  et  $(0, -1)$ .



21.  $h = 0,5$ ,  $x_0 = 1$ ,  $y_0 = 0$  et  $F(x, y) = y - 2x$ .

On constate que  $x_1 = x_0 + h = 1 + 0,5 = 1,5$ ,  $x_2 = 2$  et  $x_3 = 2,5$ .

$$y_1 = y_0 + hF(x_0, y_0) = 0 + 0,5F(1, 0) = 0,5[0 - 2(1)] = -1.$$

$$y_2 = y_1 + hF(x_1, y_1) = -1 + 0,5F(1,5, -1) = -1 + 0,5[-1 - 2(1,5)] = -3.$$

$$y_3 = y_2 + hF(x_2, y_2) = -3 + 0,5F(2, -3) = -3 + 0,5[-3 - 2(2)] = -6,5.$$

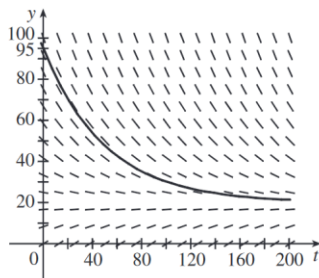
$$y_4 = y_3 + hF(x_3, y_3) = -6,5 + 0,5F(2,5, -6,5) = -6,5 + 0,5[-6,5 - 2(2,5)] = -12,25.$$

28. a) Nous avons vu à l'exercice 14 de la section 5.1 que  $dy/dt = k(y - A)$ . Le problème spécifie que  $A = 20^\circ\text{C}$  et que

$dy/dt = -1^\circ\text{C/min}$  lorsque  $y = 70^\circ\text{C}$ . Par conséquent,  $-1 = k(70 - 20) \Rightarrow k = -\frac{1}{50}$  et l'équation différentielle

devient  $dy/dt = -\frac{1}{50}(y - 20)$ .

b)



La valeur limite de la température est  $20^\circ\text{C}$ , c'est-à-dire la température ambiante.

- c) Nous avons trouvé à la sous-question a) que  $dy/dt = -\frac{1}{50}(y - 20)$ . Avec  $t_0 = 0$ ,  $y_0 = 95$  et  $h = 2$  min, nous obtenons

$$y_1 = y_0 + hF(t_0; y_0) = 95 + 2[-\frac{1}{50}(95 - 20)] = 92$$

$$y_2 = y_1 + hF(t_1; y_1) = 92 + 2[-\frac{1}{50}(92 - 20)] = 89,12$$

$$y_3 = y_2 + hF(t_2; y_2) = 89,12 + 2[-\frac{1}{50}(89,12 - 20)] = 86,3552$$

$$y_4 = y_3 + hF(t_3; y_3) = 86,3552 + 2[-\frac{1}{50}(86,3552 - 20)] = 83,700992$$

$$y_5 = y_4 + hF(t_4; y_4) = 83,700992 + 2[-\frac{1}{50}(83,700992 - 20)] = 81,15295232$$

Par conséquent,  $y(10) \approx 81,15^\circ\text{C}$ .

### 5.3 Les équations différentielles à variables séparables (p.273)

$$1. \quad \frac{dy}{dx} = 3x^2 y^2 \Rightarrow \frac{dy}{y^2} = 3x^2 dx \quad [y \neq 0] \Rightarrow \int y^{-2} dy = \int 3x^2 dx \Rightarrow -y^{-1} = x^3 + C \Rightarrow$$

$$\frac{-1}{y} = x^3 + C \Rightarrow y = \frac{-1}{x^3 + C}. \quad y = 0 \text{ est également une solution.}$$

$$4. \quad (y^2 + xy^2)y' = 1 \Rightarrow y^2(1+x)\frac{dy}{dx} = 1 \Rightarrow y^2 dy = \frac{1}{1+x} dx \Rightarrow \int y^2 dy = \int \frac{1}{1+x} dx \Rightarrow$$

$$\frac{1}{3}y^3 = \ln|1+x| + C \Rightarrow y^3 = 3\ln|1+x| + 3C \Rightarrow y = \sqrt[3]{3\ln|1+x| + K}, \text{ où } K = 3C.$$

$$13. \quad \frac{du}{dt} = \frac{1+t^4}{ut^2 + u^4 t^2} \Rightarrow \frac{du}{dt} = \frac{1+t^4}{t^2(u+u^4)} \Rightarrow (u+u^4) du = \frac{1+t^4}{t^2} dt \Rightarrow \int (u+u^4) du = \int (t^{-2} + t^2) dt \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{5}u^5 = -\frac{1}{t} + \frac{1}{3}t^3 + C. \text{ Il est impossible d'exprimer } u \text{ explicitement.}$$

$$18. \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} \Rightarrow y dy = x dx \Rightarrow \int y dy = \int x dx \Rightarrow \frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2}x^2 + C. \quad y(0) = -3 \Rightarrow \frac{1}{2}(-3)^2 = \frac{1}{2}(0)^2 + C \Rightarrow C = \frac{9}{2}, \text{ donc}$$

$$\frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2}x^2 + \frac{9}{2} \Rightarrow y^2 = x^2 + 9 \Rightarrow y = -\sqrt{x^2 + 9} \text{ puisque } y(0) = -3 < 0.$$

$$28. \quad \frac{dL}{dt} = kL^2 \ln t \Rightarrow \frac{dL}{L^2} = k \ln t dt \Rightarrow \int \frac{dL}{L^2} = \int k \ln t dt \Rightarrow -\frac{1}{L} = kt \ln t - \int k dt$$

$$[\text{intégration par parties avec } u = \ln t \text{ et } dv = k dt] \Rightarrow -\frac{1}{L} = kt \ln t - kt + C \Rightarrow L = \frac{1}{kt - kt \ln t - C}.$$

$$L(1) = -1 \Rightarrow -1 = \frac{1}{k - k \ln 1 - C} \Rightarrow C - k = 1 \Rightarrow C = k + 1. \text{ Par conséquent, } L = \frac{1}{kt - kt \ln t - k - 1}.$$

$$48. \text{ Selon l'exercice 28 de la section 5.2, } \frac{dy}{dt} = -\frac{1}{50}(y-20) \Leftrightarrow \int \frac{dy}{y-20} = \int \left(-\frac{1}{50}\right) dt \Leftrightarrow \ln|y-20| = -\frac{1}{50}t + C \Leftrightarrow$$

$$y-20 = Ke^{-t/50} \Leftrightarrow y(t) = Ke^{-t/50} + 20. \quad y(0) = 95 \Leftrightarrow 95 = K + 20 \Leftrightarrow K = 75 \Leftrightarrow y(t) = 75e^{-t/50} + 20.$$

55. a) Soit  $y(t)$  la quantité de sel (en kg) après  $t$  minutes. Alors,  $y(0) = 15$ . Le volume de liquide dans le réservoir est maintenu constant

à 1000 L, donc la concentration en tout temps  $t$  (en minutes) est  $y(t)/1000$  kg/L et  $\frac{dy}{dt} = -\left[\frac{y(t)}{1000} \frac{\text{kg}}{\text{L}}\right]\left(10\frac{\text{L}}{\text{min}}\right) = -\frac{y(t)}{100} \frac{\text{kg}}{\text{min}}.$

$$\int \frac{dy}{y} = -\frac{1}{100} \int dt \Rightarrow \ln y = -\frac{t}{100} + C; \quad y(0) = 15 \Rightarrow \ln 15 = C, \text{ donc } \ln y = \ln 15 - \frac{t}{100}. \text{ Il s'ensuit}$$

$$\text{que } \ln\left(\frac{y}{15}\right) = -\frac{t}{100} \text{ et } \frac{y}{15} = e^{-t/100}, \text{ donc } y = 15e^{-t/100} \text{ kg.}$$

b) Après 20 minutes,  $y = 15e^{-20/100} = 15e^{-0.2} \approx 12,3$  kg.

57. Soit  $y(t)$  la quantité d'alcool dans la cuve après  $t$  minutes. Alors,  $y(0) = 0,04(2000) = 80$  L. La quantité de bière dans la cuve est maintenue constante à 2000 L, donc le pourcentage d'alcool en tout temps  $t$  (en minutes) est  $y(t)/2\,000 \times 100$  et la variation de la quantité d'alcool par rapport au temps  $t$  est

$$\frac{dy}{dt} = \text{taux entrant} - \text{taux sortant} = 0,06 \left( 5 \frac{\text{L}}{\text{min}} \right) - \frac{y(t)}{2000} \left( 5 \frac{\text{L}}{\text{min}} \right) = 0,3 - \frac{y}{400} = \frac{120 - y}{400} \frac{\text{L}}{\text{min}}. \text{ Par conséquent,}$$

$$\int \frac{dy}{120 - y} = \int \frac{dt}{400} \text{ et } -\ln|120 - y| = \frac{1}{400}t + C. \text{ Puisque } y(0) = 80, \text{ nous obtenons } -\ln 40 = C, \text{ donc}$$

$$-\ln|120 - y| = \frac{1}{400}t - \ln 40 \Rightarrow \ln|120 - y| = -t/400 + \ln 40 \Rightarrow \ln|120 - y| = \ln e^{-t/400} + \ln 40 \Rightarrow$$

$\ln|120 - y| = \ln(40e^{-t/400}) \Rightarrow |120 - y| = 40e^{-t/400}$ . Comme la fonction  $y$  est continue,  $y(0) = 80$  et que le membre de droite de l'équation ne s'annule jamais, nous en déduisons que  $120 - y$  est toujours positive. Donc,

$$120 - y = 40e^{-t/400} \Rightarrow y = 120 - 40e^{-t/400}.$$

Le pourcentage d'alcool est  $p(t) = y(t)/2000 \times 100 = y(t)/20 = 6 - 2e^{-t/400}$ . Le pourcentage d'alcool après une heure est

$$p(60) = 6 - 2e^{-60/400} \approx 4,3.$$

## 5.4 Les modèles de la croissance d'une population (p.286)

1. a) En comparant l'équation donnée,  $\frac{dP}{dt} = 0,04P\left(1 - \frac{P}{1200}\right)$ , à l'équation 5.4.4,  $\frac{dP}{dt} = kP\left(1 - \frac{P}{M}\right)$ , nous pouvons voir que la capacité de charge est  $M = 1200$  et que la valeur de  $k$  est 0,04.  
 b) Selon l'équation 5.4.7, la solution de l'équation est  $P(t) = \frac{M}{1 + Ae^{-kt}}$ , où  $A = \frac{M - P_0}{P_0}$ . Vu que  $P(0) = P_0 = 60$ , nous avons que  $A = \frac{1200 - 60}{60} = 19$  et, par conséquent,  $P(t) = \frac{1200}{1 + 19e^{-0,04t}}$ .  
 c) La population après 10 semaines est  $P(10) = \frac{1200}{1 + 19e^{-0,04(10)}} \approx 87$ .
  
6. a)  $\frac{dP}{dt} = 0,4P - 0,001P^2 = 0,4P(1 - 0,0025P) \left[\frac{0,001}{0,4} = 0,0025\right] = 0,4P\left(1 - \frac{P}{400}\right)$  [ $0,0025^{-1} = 400$ ] Par conséquent, selon l'équation différentielle 5.4.4,  $k = 0,4$  et la capacité de charge est 400.  
 b) En nous fondant sur le fait que  $P(0) = 50$  et la formule pour  $dP/dt$ , nous obtenons  $P'(0) = \frac{dP}{dt}\bigg|_{t=0} = 0,4(50) - 0,001(50)^2 = 20 - 2,5 = 17,5$ .  
 c) Selon l'équation différentielle 5.4.7,  $A = \frac{M - P_0}{P_0} = \frac{400 - 50}{50} = 7$ , donc  $P = \frac{400}{1 + 7e^{-0,4t}}$ . La population atteint 50 % de la capacité de charge, 200, lorsque  $200 = \frac{400}{1 + 7e^{-0,4t}} \Rightarrow 1 + 7e^{-0,4t} = 2 \Rightarrow e^{-0,4t} = \frac{1}{7} \Rightarrow -0,4t = \ln \frac{1}{7} \Rightarrow t = (\ln \frac{1}{7})/(-0,4) \approx 4,86$  ans.
  
9. a) Nous allons présumer que la différence entre les taux de mortalité et de natalité est de 20 millions par année (en prenant la moyenne entre la différence maximum =  $40 - 15 = 25$  et la différence minimum =  $35 - 20 = 15$ ). Posons que  $t = 0$  correspond à l'année 2000. Par conséquent,  
 $k \approx \frac{1}{P} \frac{dP}{dt} = \frac{1}{6,1 \text{ milliards}} \left( \frac{20 \text{ millions}}{\text{année}} \right) = \frac{1}{305}$ , et  $\frac{dP}{dt} = kP\left(1 - \frac{P}{M}\right) = \frac{1}{305}P\left(1 - \frac{P}{20}\right)$ , où  $P$  est en milliards.  
 b)  $A = \frac{M - P_0}{P_0} = \frac{20 - 6,1}{6,1} = \frac{139}{61} \approx 2,2787$ .  $P(t) = \frac{M}{1 + Ae^{-kt}} = \frac{20}{1 + \frac{139}{61}e^{-t/305}}$ , donc  
 $P(10) = \frac{20}{1 + \frac{139}{61}e^{-10/305}} \approx 6,24$  milliards, ce qui sous-estime la taille réelle de la population en 2010, qui était de 6,9 milliards.  
 c) Les années 2100 et 2500 correspondent à  $t = 100$  et  $t = 500$ , respectivement.  $P(100) = \frac{20}{1 + \frac{139}{61}e^{-100/305}} \approx 7,57$  milliards  
 et  $P(500) = \frac{20}{1 + \frac{139}{61}e^{-500/305}} \approx 13,87$  milliards.

12. a)  $P(0) = P_0 = 400$ ,  $P(1) = 1200$  et  $M = 10\,000$ . À partir de la solution de l'équation différentielle logistique

$$P(t) = \frac{P_0 M}{P_0 + (M - P_0)e^{-kt}}, \text{ nous obtenons } P = \frac{400(10\,000)}{400 + (9600)e^{-kt}} = \frac{10\,000}{1 + 24e^{-kt}}.$$

$$P(1) = 1200 \Rightarrow 1 + 24e^{-k} = \frac{100}{12} \Rightarrow e^k = \frac{288}{88} \Rightarrow k = \ln \frac{36}{11}. \text{ Donc, } P = \frac{10\,000}{1 + 24e^{-t \ln(36/11)}} = \frac{10\,000}{1 + 24 \cdot (11/36)^t}.$$

$$\text{b) } 5000 = \frac{10\,000}{1 + 24(11/36)^t} \Rightarrow 24\left(\frac{11}{36}\right)^t = 1 \Rightarrow t \ln \frac{11}{36} = \ln \frac{1}{24} \Rightarrow t \approx 2,68 \text{ années.}$$

17. a)  $\frac{dP}{dt} = kP - m = k\left(P - \frac{m}{k}\right)$ . Soit  $y = P - \frac{m}{k}$ , donc  $\frac{dy}{dt} = \frac{dP}{dt}$  et l'équation différentielle devient  $\frac{dy}{dt} = ky$ . La solution

$$\text{est } y = y_0 e^{kt} \Rightarrow P - \frac{m}{k} = \left(P_0 - \frac{m}{k}\right) e^{kt} \Rightarrow P(t) = \frac{m}{k} + \left(P_0 - \frac{m}{k}\right) e^{kt}.$$

$$\text{b) } \text{Puisque } k > 0, \text{ il y aura une croissance exponentielle } \Leftrightarrow P_0 - \frac{m}{k} > 0 \Leftrightarrow m < kP_0.$$

$$\text{c) } \text{La population demeurera constante si } P_0 - \frac{m}{k} = 0 \Leftrightarrow m = kP_0. \text{ Elle diminuera si } P_0 - \frac{m}{k} < 0 \Leftrightarrow m > kP_0.$$

$$\text{d) } P_0 = 8\,000\,000, k = \alpha - \beta = 0,016, m = 210\,000 \Rightarrow m > kP_0 (= 128\,000), \text{ donc, selon la sous-question c), la population était en décroissance.}$$