Calcul intégral (201-702-RE) – Sylvain Bérubé – Hiver 2024

Minitest 1 (version β) — Solutions

Question 1 (15 points)

Écrivez la somme à l'aide de la notation sigma.

$$\frac{7}{2}-\frac{10}{4}+\frac{13}{8}-\frac{16}{16}+\frac{19}{32}-\frac{22}{64} = \sum_{n=1}^{6}\frac{(-1)^{n+1}(3n+4)}{2^n}=\sum_{n=0}^{5}\frac{(-1)^n(3n+7)}{2^{n+1}}$$

Question 2 (15 points)

Exprimez la somme des 200 premiers nombres pairs (en débutant à 2) à l'aide de la notation sigma puis évaluez cette somme.

$$\sum_{n=1}^{200}2n=2\sum_{n=1}^{200}n=\left.\frac{2n(n+1)}{2}\right|_{n=200}=\frac{2\cdot 200\cdot 201}{2}=40\,200$$

Question 3 (10 points)

Déterminez si la suite $\{52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, 4, 2, 1, 4, 2, 1, \ldots\}$ converge ou diverge. Si elle converge, trouvez sa limite.

Elle diverge.

Question 4 (12 + 12 + 12 + 12 + 12 = 60 points)

Pour chaque série, déterminez si elle converge ou diverge. Justifiez votre réponse.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-1}{n^4+1}$

On remarque que $\deg(n^4+1) - \deg(n^2-1) = 4 - 2 = 2 > 1$. Ainsi, selon le critère des polynômes, la série converge.

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4}$

On remarque que $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{4} = \infty$. Ainsi, selon le critère de divergence, la série diverge.

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 12 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n$

Il s'agit d'une série géométrique de raison $r = \frac{2}{3}$. Puisque $|r| = \frac{2}{3} < 1$, alors la série converge.

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

Il s'agit d'une série alternée, où $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$.

— Condition i) : Puisque $b_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n+1}} < \frac{1}{\sqrt{n}} = b_n$, alors la série est décroissante.

— Condition ii) : $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$

Ainsi, selon le critère des séries alternées, la série converge.

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7n}{4^n}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{7(n+1)}{4^{n+1}}}{\frac{7n}{4^n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)\left(\frac{4^n}{4^{n+1}}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n}\right)\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4} < 1$$

Ainsi, selon le critère de d'Alembert, la série converge.