Devoir 2 — Solutions

Question 1 (12 + 12 + 12 + 12 = 48 points)

Pour chacune des séries, déterminez si elle converge ou diverge. Justifiez votre réponse en identifiant le critère s'appliquant (série géométrique, critère de divergence, série p, critère des polynômes, critère de d'Alembert, critère des séries alternées) et en vérifiant rigoureusement son application. S'il s'agit d'une série géométrique convergente, calculez sa somme.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^7 + n^5 + n^3 + n}{n^8 + n^6 + n^4 + n^2}$

On remarque que $\deg(n^8 + n^6 + n^4 + n^2) - \deg(n^7 + n^5 + n^3 + n) = 8 - 7 = 1 \leq 1$. Ainsi, selon le critère des polynômes, la série diverge.

(Solution alternative 1) À long terme, la série se comporte comme la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^7}{n^8} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

laquelle est la série harmonique. Puisque la série harmonique diverge, alors la série à l'étude diverge également.

(Solution alternative 2) La série à l'étude est précisément la série harmonique (qui diverge) ! En effet,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^7 + n^5 + n^3 + n}{n^8 + n^6 + n^4 + n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n^6 + n^4 + n^2 + 1)}{n^2(n^6 + n^4 + n^2 + 1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n}{n^2+n+1}$

Il s'agit d'une série alternée, où $b_n = \frac{n}{n^2+n+1}$.

Condition i) : Soit $f(x) = \frac{x}{x^2+x+1}$. On remarque que $f(n) = b_n$. Par ailleurs, $f'(x) = \frac{1-x^2}{(x^2+x+1)^2}$. Ainsi, pour $x > 1$, $1 - x^2 < 0 \Longrightarrow f'(x) < 0$, ce qui démontre que $f(x)$ est décroissante pour $x \geq 1$ et par conséquent que la suite $\{b_n\}$ l'est également.

Condition i) (démarche alternative) : On a

$$\begin{aligned}
b_{n+1} < b_n &\Leftrightarrow \frac{n+1}{(n+1)^2+(n+1)+1} < \frac{n}{n^2+n+1} \\
&\Leftrightarrow \frac{n+1}{n^2+3n+3} < \frac{n}{n^2+n+1} \\
&\Leftrightarrow (n+1)(n^2+n+1) < n(n^2+3n+3) \\
&\Leftrightarrow n^3+2n^2+2n+1 < n^3+3n^2+3n \\
&\Leftrightarrow 1 < n^2+n
\end{aligned}$$

qui est vraie pour tout $n \geq 1$, donc la suite $\{b_n\}$ est décroissante.

Condition ii) : $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n^2+n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n^2\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

Ainsi, selon le critère des séries alternées, la série converge.

c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n+7}+1}{2^{2n+3}}$

Directement,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n+7}+1}{2^{2n+3}} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^7 \cdot 3^n + 1}{2^3 \cdot 4^n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^7 \cdot 3^n}{2^3 \cdot 4^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^3 \cdot 4^n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3^7}{2^3}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^3}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^n
\end{aligned}$$

Cette première série est une série géométrique de premier terme $\frac{3^7}{2^3}$ et de raison $\frac{3}{4} \in \,]-1,1[$. Cette seconde série est une série géométrique de premier terme $\frac{1}{2^3}$ et de raison $\frac{1}{4} \in \,]-1,1[$. Ainsi, les deux séries converges.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3^7}{2^3}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^3}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^n &= \frac{3^7}{2^3\left(1-\frac{3}{4}\right)} + \frac{1}{2^3\left(1-\frac{1}{4}\right)} \\
&= \frac{3^7}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2\,187}{2} + \frac{1}{6} \\
&= \frac{3\,281}{3} \approx 1\,093{,}67.
\end{aligned}$$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10}{n^{10}}$

Directement,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10}{n^{10}} = 10 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{10}}$$

Il s'agit d'une série p où $p = 10 > 1$. Ainsi, la série converge.

Question 2 (20 + 20 + 12 = 52 points)

Pour chacune des séries de puissances, déterminez son centre, son rayon de convergence et son intervalle de convergence.

a) $\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)x^n$

On a

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+2)x^{n+1}}{(n+1)x^n}\right| \\ &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n\left(1+\frac{2}{n}\right)}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}x\right| \\ &= |x|\end{aligned}$$

Ainsi, selon le critère de d'Alembert, la série converge pour

$$|x| < 1 \Longrightarrow -1 < x < 1,$$

et elle diverge pour

$$|x| > 1 \Longrightarrow x < -1 \text{ ou } x > 1$$

Maintenant, pour $x = 1$, on a

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n+1) = 2 + 3 + 4 + 5 + \cdots.$$

Puisque $\lim_{n\to\infty} n+1 = \infty$, alors cette série diverge selon le critère de divergence.

Puis pour $x = -1$, on a

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)(-1)^n = -2 + 3 - 4 + 5 - \cdots$$

Puisque $\lim_{n\to\infty}(n+1)(-1)^n$ n'existe pas, alors cette série diverge selon le critère de divergence.

Par conséquent, on a les valeurs suivantes sur la série :

— Intervalle de convergence : $]-1, 1[$

— Rayon de convergence : $\frac{1-(-1)}{2} = 1$

— Centre : 0

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x-1)^n}{5^n \cdot \sqrt{n}}$

On a

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(3x-1)^{n+1}}{5^{n+1}\cdot\sqrt{n+1}}}{\frac{(3x-1)^n}{5^n\cdot\sqrt{n}}}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty}\left|\left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}\right)\left(\frac{3x-1}{5}\right)\right| \\
&= \lim_{n\to\infty}\left|\left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}}\right)\left(\frac{3x-1}{5}\right)\right| \\
&= \left|\frac{3x-1}{5}\right|
\end{aligned}$$

Ainsi, selon le critère de d'Alembert, la série converge pour

$$\begin{aligned}
\left|\frac{3x-1}{5}\right| < 1 &\Rightarrow -1 < \frac{3x-1}{5} < 1 \\
&\Rightarrow -5 < 3x-1 < 5 \\
&\Rightarrow -4 < 3x < 6 \\
&\Rightarrow -\frac{4}{3} < x < 2,
\end{aligned}$$

et elle diverge pour

$$\left|\frac{3x-1}{5}\right| > 1 \Rightarrow x < -\frac{4}{3} \quad \text{ou} \quad x > 2$$

Maintenant, pour $x = 2$, on a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3\cdot 2-1)^n}{5^n\cdot\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Il s'agit d'une série p où $p = \frac{1}{2} < 1$, donc la série diverge.

Puis pour $x = -\frac{4}{3}$, on a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(3\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)-1\right)^n}{5^n\cdot\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

Il s'agit d'une série alternée où $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$, qui est une suite décroissante convergeant vers 0 (voir minitest 1). Ainsi, selon le critère des séries alternées, cette série converge.

Par conséquent, on a les valeurs suivantes sur la série :

— Intervalle de convergence : $\left[-\frac{4}{3},\ 2\right[$

— Rayon de convergence : $\frac{2-(-4/3)}{2} = \frac{5}{3}$

— Centre : $2 - \frac{5}{3} = \frac{1}{3}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n}}{n!}$

On a

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{x^{3(n+1)}}{(n+1)!}}{\frac{x^{3n}}{n!}}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty}\left|\left(\frac{n!}{(n+1)!}\right)\left(\frac{x^{3n+3}}{x^{3n}}\right)\right| \\
&= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^3}{n+1}\right| \qquad \left(\text{forme}\,\frac{x^3}{\infty}\right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Ainsi, selon le critère de d'Alembert, la série converge pour toute valeur de x.

Par conséquent, on a les valeurs suivantes sur la série :

— Intervalle de convergence: $\mathbb{R} =]-\infty,\ \infty[$
— Rayon de convergence : ∞
— Centre : 0