Examen 1 – Préparation

Concernant l'examen

L'examen a lieu le mardi 26 février.

Il couvre l'ensemble de la matière vue dans la partie 1 du cours.

Il compte pour 25 % de la note finale.

Consignes de l'examen (telles qu'inscrites dans le cahier d'examen)

Répondre directement sur le questionnaire. Utiliser au besoin les pages 9 à 11 pour compléter vos calculs. Du papier brouillon peut vous être fourni sur demande.

Aucune documentation n'est autorisée. Des formules sont fournies à la page 12.

L'usage de la calculatrice est permis.

L'examen contient 6 questions, pour un total de 100 points.

Justifier toutes vos réponses.

Pour votre étude, vous pouvez

Effectuer les exercices prioritaires et supplémentaires identifiés dans les documents de planification de la partie 1 du cours.

Relire et étudier vos notes de cours (théorie et exemples) et les sections du volume couvertes.

Réviser les devoirs 1 et 2 ainsi que le minitest 1 (les solutions sont disponibles sur Léa).

Profiter de la séance de révision du lundi 25 février.

Me poser vos questions sur Mio. Prendre rendez-vous pour une consultation à mon bureau au besoin.

Faire des exercices. Faire des exercices. Faire des exercices. **Faire des exercices !**

Contenus

Préalables

— Connaitre les règles de dérivation de base. Vous avez principalement besoin de savoir dériver les fonctions puissances de la forme x^n.
— Connaitre les propriétés des exposants.
— Maitriser l'arithmétique de l'infini.

Notation sigma

— Maitriser la notation sigma.

Suites et séries numériques

— Connaitre la définition d'une suite et la définition de la convergence/divergence d'une suite.
— Connaitre la définition d'une série et la définition de la convergence/divergence d'une série.
— Reconnaitre une série géométrique. Être en mesure d'identifier son premier terme et sa raison. Utiliser le critère de convergence d'une série géométrique pour déterminer la convergence ou la divergence d'une série. Calculer la somme d'une série géométrique convergente.

- Utiliser le critère de divergence (aussi nommé critère du terme général) pour déterminer la divergence d'une série.
- Reconnaitre une série p. Utiliser le critère de convergence d'une série p pour déterminer la convergence ou la divergence d'une série.
- Utiliser le critère des polynômes pour montrer la convergence ou la divergence d'une série.
- Utiliser le critère de d'Alembert pour montrer la convergence ou la divergence d'une série.
- Utiliser le critère des séries alternées pour montrer la convergence d'une série.

Séries de Taylor et de MacLaurin

- À partir d'une fonction connue f et d'une valeur de départ a, trouver la série de Taylor de f centrée en a ou la série de MacLaurin de f.
- Utiliser le critère de d'Alembert pour trouver l'intervalle de convergence d'une série de Taylor.
- Utiliser les séries de Taylor pour calculer une limite.
- À partir d'une fonction connue f et d'une valeur de départ a, trouver le polynôme $T_n(x)$ de Taylor d'ordre n de f en a ou de MacLaurin d'ordre n de f.
- Utiliser un polynôme de Taylor ou de MacLaurin pour estimer la valeur d'une fonction.
- Utiliser une série de MacLaurin connue pour trouver la somme d'une série.

Formules fournies à l'examen

Séries de MacLaurin	**Intervalle de convergence**
$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots$	$]-1,\ 1[$
$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$	$\mathbb{R}$
$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \cdots$	$]-1,\ 1]$
$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \cdots$	$\mathbb{R}$
$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \cdots$	$\mathbb{R}$
$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \cdots$	$]-1,\ 1]$

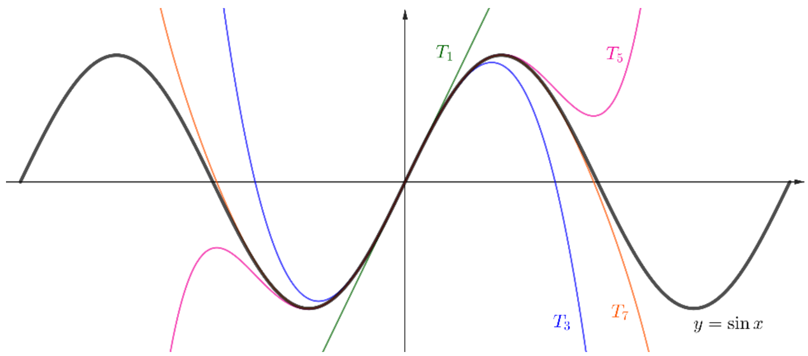
Formules de sommation

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

Exercices préparatoires

Ces exercices n'ont pas la prétention de couvrir toute la matière de l'examen.

1. Que représente la fonction $T_5(x)$ sur ce graphique ?



2. Soit une série de terme général a_k

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

La somme partielle S_n de cette série est

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

Si $\lim_{n\to\infty} S_n = 25$, trouvez la valeur $\lim_{k\to\infty} a_k$. Expliquez votre raisonnement.

3. Utiliser une série de MacLaurin pour trouver la limite suivante.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x) - x + \frac{x^3}{6}}{x^5}$$

4. Soit la série

$$1 - \frac{\pi^2}{2!} + \frac{\pi^4}{4!} - \frac{\pi^6}{6!} + \frac{\pi^8}{8!} - \cdots$$

a) Expliquez pourquoi cette série converge.

b) Utilisez une série de MacLaurin connue pour trouver la somme de cette série.

5. Soit la fonction $f(x) = \frac{1}{x^3}$

a) Trouvez le polynôme de Taylor $T_3(x)$ d'ordre 3 autour de $x = 1$ de la fonction f. Faites la démarche complète de construction du polynôme.

b) Utilisez le polynôme $T_3(x)$ pour trouver la valeur numérique approximative de $\frac{1}{(1{,}2)^3}$.

6. Soit la fonction f telle que $f(x) = \ln(x + 3)$.

a) Trouver la série de Taylor de la fonction f autour de $x = -2$.

b) Trouvez l'intervalle de convergence de la série.

7. Déterminez si les séries suivantes convergent ou non. Expliquez clairement votre raisonnement.

(Ici je n'ajoute pas d'exercices car on en a déjà fait plusieurs dans les devoirs 1 et 2 et dans le minitest 1 et qu'il y a une myriade d'exercices supplémentaires dans le volume, mais comprenez qu'il y aura une telle question à l'examen, et je précise même qu'elle vaudra $3 \times 8 = 24$ *points.)*

Solutions des exercices préparatoires

1. Il s'agit du polynôme de Taylor d'ordre 5 de la fonction $f(x) = \sin(x)$ en 0. Ce polynôme est

$$T_5(x) = 1 - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

2. $\lim_{n\to\infty} S_n$ représente la série $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$. Puisque cette série converge (vers 25), alors nécessairement son terme général converge vers 0. En effet, si le terme général ne converge pas vers 0, le critère de divergence affirme que la série $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ ne peut pas converger.

3. Directement,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x) - x + \frac{x^3}{6}}{x^5} &= \lim_{x\to 0} \frac{\left(1 - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots\right) - x + \frac{x^3}{6}}{x^5} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots}{x^5} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{x^5\left(\frac{1}{5!} - \frac{x^2}{7!} + \cdots\right)}{x^5} \\
&= \frac{1}{5!} = \frac{1}{120} \approx 0{,}0083.
\end{aligned}$$

4. a) La série à l'étude est

$$1 - \frac{\pi^2}{2!} + \frac{\pi^4}{4!} - \frac{\pi^6}{6!} + \frac{\pi^8}{8!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot \pi^{2n}}{(2n)!}$$

On a

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\left(\frac{(-1)^{n+1} \cdot \pi^{2(n+1)}}{\big(2(n+1)\big)!}\right)}{\left(\frac{(-1)^n \cdot \pi^{2n}}{(2n)!}\right)}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(-1)^{n+1}}{(-1)^n} \cdot \frac{\pi^{2n+2}}{\pi^{2n}} \cdot \frac{(2n)!}{(2n+2)!}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left|-\frac{\pi^2}{(2n+1)(2n+2)}\right| = 0 < 1$$

Ainsi, selon le critère de d'Alembert, cette série converge.

b) On sait que

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n}}{(2n)!}$$

En utilisant $x = \pi$, on obtient

$$\cos(\pi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot \pi^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{\pi^2}{2!} + \frac{\pi^4}{4!} - \frac{\pi^6}{6!} + \frac{\pi^8}{8!} - \cdots$$

qui est la série à l'étude. La somme cherchée est donc $\cos(\pi) = -1$.

5. a) Le polynôme de Taylor de $f(x)$ d'ordre 3 autour de $x = 1$ est

$$T_3(x) = \sum_{n=0}^{3} \frac{f^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n$$

On a

$$f^{(0)}(x) = \frac{1}{x^3} \qquad f^{(0)}(1) = \frac{1}{1^3} = 1$$

$$f^{(1)}(x) = \frac{-3}{x^4} \qquad f^{(1)}(1) = \frac{-3}{1^4} = -3$$

$$f^{(2)}(x) = \frac{3 \cdot 4}{x^5} \qquad f^{(2)}(1) = \frac{12}{1^4} = 12$$

$$f^{(3)}(x) = \frac{-3 \cdot 4 \cdot 5}{x^6} \qquad f^{(3)}(1) = \frac{-60}{1^6} = -60$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} T_3(x) &= \frac{1}{0!} - \frac{3}{1!}(x-1) + \frac{12}{2!}(x-1)^2 - \frac{60}{3!}(x-1)^3 \\ &= 1 - 3(x-1) + 6(x-1)^2 - 10(x-1)^3 \end{aligned}$$

b) Directement,

$$\begin{aligned} \frac{1}{1{,}2^3} &= f(1{,}2) \\ &\approx T_3(1{,}2) \\ &= 1 - 3(1{,}2-1) + 6(1{,}2-1)^2 - 10(1{,}2-1)^3 \\ &= 0{,}56 \end{aligned}$$

6. a) La série de Taylor de f autour de $x = -2$ est

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(-2)}{n!}(x+2)^n$$

On a

$$f^{(0)}(x) = \ln(x+3) \qquad f^{(0)}(-2) = \ln(-2+3) = 0$$

$$f^{(1)}(x) = \frac{1}{x+3} \qquad f^{(1)}(-2) = \frac{1}{-2+3} = 1$$

$$f^{(2)}(x) = \frac{-1}{(x+3)^2} \qquad f^{(2)}(-2) = \frac{-1}{(-2+3)^2} = -1$$

$$f^{(3)}(x) = \frac{2}{(x+3)^3} \qquad f^{(3)}(-2) = \frac{2}{(-2+3)^3} = 2$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{-2 \cdot 3}{(x+3)^4} \qquad f^{(3)}(-2) = \frac{-2 \cdot 3}{(-2+3)^4} = -3!$$

$$f^{(5)}(x) = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{(x+3)^5} \qquad f^{(4)}(-2) = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{(-2+3)^5} = 4!$$

De façon générale, pour $n \geq 1$,

$$f^{(n)}(-2) = (-1)^{n-1} \cdot (n-1)!$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(-2)}{n!}(x+2)^n &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \cdot (n-1)!}{n!}(x+2)^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \cdot (x+2)^n}{n}\end{aligned}$$

b) On a

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\left(\frac{(-1)^{n+1-1} \cdot (x+2)^{n+1}}{n+1}\right)}{\left(\frac{(-1)^{n-1} \cdot (x+2)^n}{n}\right)}\right| = |x+2|$$

Selon le critère de d'Alembert, la série converge lorsque

$$|x+2| < 1 \Rightarrow -1 < x+2 < 1 \Rightarrow -3 < x < -1$$

et elle diverge lorsque

$$x < -3 \quad \text{et} \quad x > -1.$$

En $x = -3$, on a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \cdot (-3+2)^n}{n} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$$

Cette série diverge car c'est la série harmonique.

En $x = -1$, on a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \cdot (-1+2)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

Cette série converge car c'est la série harmonique alternée.

Par conséquent, l'intervalle de convergence de la série est $]-3,\ -1]$.