

Applications sur les équations différentielles¹

Exercice 1

Un individu qui a volé une copie d'un film récent le rend disponible sur Internet avant sa sortie en salle. Des spécialistes ont établi que le taux de téléchargements, exprimé en nombre de téléchargements par heure, est proportionnel à la différence entre 5 millions et le nombre de téléchargements effectués depuis que le film est rendu disponible. De plus, ils ont établi que 20 heures après avoir été mis en ligne, 2 millions de téléchargements du film auront déjà été effectués. Soit $N(t)$, le nombre (en millions) de téléchargements effectués depuis que le film a été mis en ligne.

- a) Que valent $N(0)$ et $N(20)$?
- b) Poser l'équation différentielle correspondant à cette situation et trouver $N(t)$.
- c) Combien de téléchargements ont été effectués durant la première heure ?
- d) Combien de temps faut-il pour que 4 millions de téléchargements aient été effectués ?

Exercice 2

Le carbone-14, utilisé pour déterminer l'âge des fossiles, est un élément radioactif dont la demi-vie est approximativement de 5 600 ans. Sachant que le taux de désintégration de la masse Q est proportionnel à celle-ci,

- a) Poser l'équation différentielle correspondant à cette situation et déterminer $Q(t)$.
- b) Quelle sera la quantité restante de carbone-14 au bout de 10 000 ans?
- c) Au bout de combien d'années 90 % de la quantité initiale sera-t-elle désintégrée?

Note : La demi-vie d'un élément radioactif est la durée de temps prise par une substance pour se désintégrer de moitié.

Exercice 3

Une solution contenant 15 % d'acide nitrique coule, avec un débit de 5 L/min, dans un réservoir qui contient initialement 100 litres de solution d'acide nitrique avec une concentration de 0,4 %. La solution dans le réservoir est maintenue uniforme par brassage et s'écoule de celui-ci avec le même débit qu'à l'entrée.

- a) Poser l'équation différentielle et déterminer $Q(t)$ le volume, en litres, d'acide nitrique présent dans le réservoir pour $t \geq 0$.
- b) Quand la concentration d'acide nitrique dans le réservoir atteindra-t-elle 10 % ?

¹ Ces exercices ont été préparés par ma fantastique collègue Julie Tremblay.

Réponses

Exercice 1

- a) $N(0) = 0$ et $N(20) = 2$.
- b) $N' = k(5 - N)$. En solutionnant, on trouve $N(t) = 5(1 - (3/5)^{t/20})$
- c) $N(1) = 0,126\,089$, donc 126 089 téléchargements.
- d) Environ 63,01 heures.

Exercice 2

- a) $Q' = kQ$. En solutionnant, on trouve, $Q(t) = Q_0 \cdot 2^{-t/5600}$, où $Q_0 = Q(0)$.
- b) $Q(10\,000) = Q_0 \cdot 0,2900$. La quantité restante sera de 29 %.
- c) Environ 18 603 années.

Exercice 3

- a) $Q' = 0,75 - \frac{5Q}{100}$. En solutionnant, avec $Q(0) = 0,4$ L, on obtient $Q(t) = 15 - 14,6e^{-t/20}$.
- b) Après environ 21,4 minutes.