Devoir 7 — Solutions

Question 1 (25 points)

Soit $f(x) = 1/x^r$, où $r \in \mathbb{R}$. Déterminer les valeurs de n pour lesquelles l'intégrale

$$\int_1^\infty f(x)\,dx$$

diverge.

Si $r = 1$, alors

$$\begin{aligned}\int_1^\infty f(x)\,dx &= \int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx \\ &= \lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{1}{x}\,dx \\ &= \lim_{t\to\infty} \left(\ln(x)\Big|_{x=1}^{x=t}\right) \\ &= \lim_{t\to\infty} (\ln(t) - \ln(1)) \\ &= \lim_{t\to\infty} (\ln(t)) \\ &= \infty\end{aligned}$$

Si $r \neq 1$, alors

$$\int_1^\infty f(x)\,dx = \int_1^\infty \frac{1}{x^r}\,dx$$

$$= \lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{1}{x^r}\,dx$$

$$= \lim_{t\to\infty} \left(\frac{x^{-r+1}}{-r+1}\Bigg|_{x=1}^{x=t}\right)$$

$$= \lim_{t\to\infty} \left(\frac{t^{-r+1}}{1-r} - \frac{1^{-r+1}}{1-r}\right)$$

$$= \lim_{t\to\infty} \left(\frac{t^{-r+1}}{1-r} - \frac{1}{1-r}\right)$$

$$= \frac{1}{1-r} \cdot \lim_{t\to\infty} (t^{-r+1}) + \frac{1}{r-1}$$

Or,

$$\lim_{t\to\infty} (t^{-r+1}) = \begin{cases} 0 & \text{si } r > 1 \quad \left(\text{car forme } \infty^{\text{nombre positif}}\right) \\ \infty & \text{si } r < 1 \quad \left(\text{car forme } \infty^{\text{nombre négatif}}\right) \end{cases}$$

Donc,

$$\int_1^\infty f(x)\,dx = \begin{cases} \dfrac{1}{r-1} & \text{si } r > 1 \\ \infty & \text{si } r < 1 \end{cases}$$

Par conséquent, l'intégrale diverge lorsque $r \leq 1$.

Note : Il y a un lien entre la divergence de cette intégrale et la divergence d'une série-p.

Question 2 (25 points)

La durée de vie moyenne M d'un atome d'une substance radioactive, en années, est donnée par

$$M = -k\int_0^\infty xe^{kx}\,dx,$$

où k est une constante négative. Dans le cas de l'isotope radioactif de carbone 14, ${}^{14}C$, qu'on emploie pour la datation par le radiocarbone, la valeur de k est $-0{,}000\,121$. Déterminez la durée de vie moyenne d'une atome de ${}^{14}C$.

Pour commencer, on va calculer

$$\int_0^\infty xe^{kx}\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_0^t xe^{kx}\,dx$$

En posant $u = x \Longrightarrow du = dx$ et $dv = e^{kx}\,dt \Longrightarrow v = e^{kx}/k$, on a

$$\begin{aligned}\int_0^t xe^{kx}\,dx &= \left.\frac{xe^{kx}}{k}\right|_{x=0}^{x=t} - \int_0^t \frac{e^{kx}}{k}\,dx \\ &= \left(\frac{te^{kt}}{k}\right) - \left(\frac{0\cdot e^{k\cdot 0}}{k}\right) - \left.\frac{e^{kx}}{k^2}\right|_{x=0}^{x=t} \\ &= \frac{te^{kt}}{k} - \left(\frac{e^{kt}}{k^2} - \frac{e^{k\cdot 0}}{k^2}\right) \\ &= \frac{te^{kt}}{k} - \frac{e^{kt}}{k^2} + \frac{1}{k^2}\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\int_0^\infty xe^{kx}\,dx &= \lim_{t\to\infty}\left(\frac{te^{kt}}{k} - \frac{e^{kt}}{k^2} + \frac{1}{k^2}\right) \\ &= \frac{1}{k}\cdot\lim_{t\to\infty}\left(te^{kt}\right) - \frac{1}{k^2}\cdot\lim_{t\to\infty}\left(e^{kt}\right) + \frac{1}{k^2}\end{aligned}$$

La limite $\lim_{t\to\infty}\left(e^{kt}\right)$ est de la forme $e^{-\infty}$, donc elle tend vers 0.

Pour évaluer $\lim_{t\to\infty}\left(te^{kt}\right)$, on utilise la règle de L'Hospital :

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty}\left(te^{kt}\right) &= \lim_{t\to\infty}\left(\frac{t}{e^{-kt}}\right) \\ &= \lim_{t\to\infty}\left(\frac{(t)'}{(e^{-kt})'}\right) \\ &= \lim_{t\to\infty}\left(\frac{1}{-ke^{-kt}}\right) \\ &= -\frac{1}{k}\cdot\lim_{t\to\infty}\left(e^{kt}\right) \\ &= 0\end{aligned}$$

On a donc

$$\int_0^\infty xe^{kx}\,dx = \frac{1}{k^2}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
M &= -k\int_0^{\infty} xe^{kx}\,dx \\
&= -\frac{k}{k^2} \\
&= -\frac{1}{k} \\
&= -\frac{1}{-0{,}000\,121} \\
&\approx 8\,264{,}46 \text{ années}
\end{aligned}$$

Question 3 (25 points)

Évaluer la longueur exacte de la courbe

$$f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

sur l'intervalle $[0, 2]$.

On cherche

$$L = \int_0^2 \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\, dx$$

On a

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' \\ &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} 1 + \left(f'(x)\right)^2 &= 1 + \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 \\ &= 1 + \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} \\ &= \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} \\ &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} L &= \int_0^2 \sqrt{\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2}\, dx \\ &= \int_0^2 \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) dx \\ &= \frac{e^x - e^{-x}}{2}\bigg|_{x=0}^{x=2} \\ &= \left(\frac{e^2 - e^{-2}}{2}\right) - \left(\frac{e^0 - e^{-0}}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(e^2 - \frac{1}{e^2}\right) \approx 3{,}627 \end{aligned}$$

Question 4 (25 points)

Un oiseau volant à 20 m/s à une altitude de 180 m échappe accidentellement sa proie. La trajectoire parabolique de la proie est décrite par

$$f(x) = 180 - \frac{x^2}{45}$$

jusqu'à ce qu'elle touche le sol, x représentant la distance horizontale parcourue et $f(x)$ la hauteur de la proie par rapport au sol, en mètres. Évaluer la distance parcourue par la proie depuis l'instant où l'aigle l'échappe jusqu'à ce qu'elle touche le sol. Exprimer votre réponse au dixième près.

La proie atteint le sol lorsque

$$f(x) = 0 \Longrightarrow 180 - \frac{x^2}{45} = 0 \Longrightarrow x^2 = 180 \cdot 45 = 8\,100 \Longrightarrow x = 90$$

Ainsi, on cherche

$$L = \int_0^{90} \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\, dx$$

Puisque

$$f'(x) = \left(180 - \frac{x^2}{45}\right)' = -\frac{2x}{45},$$

alors

$$1 + \left(f'(x)\right)^2 = 1 + \left(-\frac{2x}{45}\right)^2 = 1 + \left(\frac{2x}{45}\right)^2$$

Ainsi,

$$L = \int_0^{90} \sqrt{1 + \left(\frac{2x}{45}\right)^2}\, dx$$

En posant $u = \frac{2x}{45} \Longrightarrow du = \frac{2}{45}dx \Longrightarrow dx = \frac{45}{2}du$, on a le changement de variable $x = 0 \Longrightarrow u = 0$ et $x = 90 \Longrightarrow u = 4$, puis l'intégrale devient

$$L = \frac{45}{2}\int_0^4 \sqrt{1 + u^2}\, du$$

En se référant à la formule 37 de la table d'intégrales (pages de référence 6), on trouve

$$\begin{aligned}\int_0^4 \sqrt{1 + u^2}\, du &= \frac{u}{2}\sqrt{1 + u^2} + \frac{1}{2}\ln\left(u + \sqrt{1 + u^2}\right)\Big|_{u=0}^{u=4} \\ &= \left(\frac{4}{2}\sqrt{1 + 4^2} + \frac{1}{2}\ln\left(4 + \sqrt{1 + 4^2}\right)\right) - \left(\frac{0}{2}\sqrt{1 + 0^2} + \frac{1}{2}\ln\left(0 + \sqrt{1 + 0^2}\right)\right) \\ &= \frac{4}{2}\sqrt{17} + \frac{1}{2}\ln\left(4 + \sqrt{17}\right)\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} L &= \frac{45}{2}\int_0^4 \sqrt{1+u^2}\,du \\ &= \frac{45}{2}\left(\frac{4}{2}\sqrt{17}+\frac{1}{2}\ln\left(4+\sqrt{17}\right)\right) \\ &= 45\sqrt{17}+\frac{45}{4}\ln\left(4+\sqrt{17}\right) \approx 209{,}105 \text{ mètres} \end{aligned}$$