Prénom : ______________________________ **Nom :** ______________________________

Groupe : 06111

Cégep de Sherbrooke
Département de mathématiques

Calcul intégral
201-702-RE

Examen 1

Session : Hiver 2024

Enseignant : Sylvain Bérubé

Date : Mardi, 27 février 2024

Heure : 14h30 à 16h20 (110 minutes)

Consignes

- Répondre directement sur le questionnaire. Utiliser au besoin les pages 9 à 11 pour compléter vos calculs. Du papier brouillon peut vous être fourni sur demande.
- Aucune documentation n'est autorisée. Des formules sont fournies à la page 12.
- L'usage de la calculatrice est permis.
- L'examen contient 6 questions, pour un total de 100 points.
- Justifier toutes vos réponses.

Pondération

Cet examen compte pour 25 % de la note finale.

Question 1 : __________ **/ 14**

Question 2 : __________ **/ 24**

Question 3 : __________ **/ 12**

Question 4 : __________ **/ 10**

Question 5 : __________ **/ 30**

Question 6 : __________ **/ 10**

Total : __________ **/ 100**

Note

Cet examen comprend en tout 12 pages et 6 questions. Vérifier si vous avez en main le texte complet avant de commencer à répondre aux questions.

Question 1 **2 + 6 + 6 = 14 points**

Soit la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^{n+1}}{2^{3n}}$

a) Écrivez les 4 premiers termes de cette série.

b) Démontrez que cette série converge.

c) Calculez la valeur de cette série.

Question 2 **8 + 8 + 8 = 24 points**

Déterminez si les séries suivantes convergent ou non. Expliquez clairement votre raisonnement.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n^4 + 7n^7}{9n^9 + 2n^2}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{\sqrt[3]{n}}$

c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n + 5}{5^n}$

Question 3 **6 + 6 = 12 points**

Soit la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$.

a) Démontrez que cette série converge.

b) Utilisez une série de MacLaurin connue pour trouver la somme de cette série.

Question 4 **5 + 5 = 10 points**

Soit la suite $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ et la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Répondez aux questions suivantes en justifiant votre réponse.

a) Un individu affirme que si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 250$, alors nécessairement $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. A-t-il raison ?

b) Un individu affirme que si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, alors nécessairement la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge. Dites pourquoi il se trompe en donnant un contre-exemple.

Question 5 **15 + 10 + 5 = 30 points**

Soit la fonction $f(x) = \frac{1}{x^2}$.

a) Démontrez que la série de Taylor autour de $x = 1$ de la fonction f est

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(-1)^n (x-1)^n = 1 - 2(x-1) + 3(x-1)^2 - 4(x-1)^3 + \cdots$$

Faites la démarche complète.

b) Trouvez l'intervalle de convergence de la série.

c) À partir du polynôme de Taylor d'ordre 2 autour de $x = 1$ de la fonction f, estimez la valeur de $\frac{1}{1{,}1^2}$.

Question 6 **10 points**

Utilisez les séries de MacLaurin de e^x et $\sin(x)$ pour calculer cette limite.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}}{\sin(x) - x - x^3}\right)$$

FORMULES

Séries de MacLaurin	**Intervalle de convergence**
$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1+x+x^2+x^3+\mathrm{x}^4+\cdots$	$]-1,\ 1[$
$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots$	$\mathbb{R}$
$\ln(1+x)=\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-\cdots$	$]-1,\ 1]$
$\sin(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\frac{x^9}{9!}-\cdots$	$\mathbb{R}$
$\cos(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\frac{x^8}{8!}-\cdots$	$\mathbb{R}$
$\arctan(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)}=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\frac{x^9}{9}-\cdots$	$]-1,\ 1]$

Formules de sommation

$$\sum_{k=1}^{n} k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad \sum_{k=1}^{n} k^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$