Prénom : ______________________________ **Nom :** ______________________________

Groupe : 06110

Cégep de Sherbrooke
Département de mathématiques

Calcul intégral
201-702-RE

Examen 1

Session : Hiver 2024

Enseignant : Sylvain Bérubé

Date : Mardi, 27 février 2024

Heure : 12h30 à 14h20 (110 minutes)

Consignes

- Répondre directement sur le questionnaire. Utiliser au besoin les pages 9 à 11 pour compléter vos calculs. Du papier brouillon peut vous être fourni sur demande.
- Aucune documentation n'est autorisée. Des formules sont fournies à la page 12.
- L'usage de la calculatrice est permis.
- L'examen contient 6 questions, pour un total de 100 points.
- Justifier toutes vos réponses.

Pondération

Cet examen compte pour 25 % de la note finale.

Question 1 : ________ / 14	**Question 3 : ________ / 12**	**Question 5 : ________ / 30**
Question 2 : ________ / 24	**Question 4 : ________ / 10**	**Question 6 : ________ / 10**

Total : ________ / 100

Note

Cet examen comprend en tout 12 pages et 6 questions. Vérifier si vous avez en main le texte complet avant de commencer à répondre aux questions.

Question 1 **2 + 6 + 6 = 14 points**

Soit la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}}{2^{2n}}$

a) Écrivez les 4 premiers termes de cette série.

b) Démontrez que cette série converge.

c) Calculez la valeur de cette série.

Question 2 **8 + 8 + 8 = 24 points**

Déterminez si les séries suivantes convergent ou non. Expliquez clairement votre raisonnement.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2 + 5n^5}{8n^8 + 3n^3}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{\sqrt[3]{n}}$

c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n + 4}{4^n}$

Question 3 **6 + 6 = 12 points**

Soit la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$.

a) Démontrez que cette série converge.

b) Utilisez une série de MacLaurin connue pour trouver la somme de cette série.

Question 4 **5 + 5 = 10 points**

Soit la suite $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ et la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Répondez aux questions suivantes en justifiant votre réponse.

a) Un individu affirme que si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 125$, alors nécessairement $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. A-t-il raison ?

b) Un individu affirme que si $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, alors nécessairement la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge. Dites pourquoi il se trompe en donnant un contre-exemple.

Question 5 **15 + 10 + 5 = 30 points**

Soit la fonction $f(x) = \frac{1}{x^2}$.

a) Démontrez que la série de Taylor autour de $x = 1$ de la fonction f est

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(-1)^n(x-1)^n = 1 - 2(x-1) + 3(x-1)^2 - 4(x-1)^3 + \cdots$$

Faites la démarche complète.

b) Trouvez l'intervalle de convergence de la série.

c) À partir du polynôme de Taylor d'ordre 2 autour de $x = 1$ de la fonction f, estimez la valeur de $\frac{1}{1,1^2}$.

Question 6 **10 points**

Utilisez les séries de MacLaurin de e^x et $\cos(x)$ pour calculer cette limite.

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{e^x - 1 - x}{\cos(x) - 1 - x^2} \right)$$

FORMULES

Séries de MacLaurin	**Intervalle de convergence**
$\dfrac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \mathrm{x}^4 + \cdots$	$]-1,\ 1[$
$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!} = 1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^4}{4!} + \cdots$	$\mathbb{R}$
$\ln(1+x) = \sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}x^n}{n} = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \dfrac{x^5}{5} - \cdots$	$]-1,\ 1]$
$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} + \dfrac{x^9}{9!} - \cdots$	$\mathbb{R}$
$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^6}{6!} + \dfrac{x^8}{8!} - \cdots$	$\mathbb{R}$
$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)} = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{x^7}{7} + \dfrac{x^9}{9} - \cdots$	$]-1,\ 1]$

Formules de sommation

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$