Prénom : ______________________________ **Nom :** ______________________________

Groupe : 06110

Cégep de Sherbrooke
Département de mathématiques

Calcul intégral
201-702-RE

Examen 2

Session : Hiver 2024

Date : Mardi, 16 avril 2024

Enseignant : Sylvain Bérubé

Heure : 12h30 à 14h20 (110 minutes)

Consignes

- Répondre directement sur le questionnaire. Utiliser au besoin la page 11 et le haut de la page 12 pour compléter vos calculs. Du papier brouillon peut vous être fourni sur demande.
- Aucune documentation n'est autorisée. Des formules sont fournies à la page 12.
- L'usage de la calculatrice est permis.
- L'examen contient 7 questions, pour un total de 100 points.
- Justifier toutes vos réponses.

Pondération

Cet examen compte pour 25 % de la note finale.

Question 1 : ________ **/ 20**	**Question 4 :** ________ **/ 24**	**Question 7 :** ________ **/ 12**
Question 2 : ________ **/ 08**	**Question 5 :** ________ **/ 14**	
Question 3 : ________ **/ 08**	**Question 6 :** ________ **/ 14**	**Total :** ________ **/ 100**

Note

Cet examen comprend en tout 12 pages et 7 questions. Vérifier si vous avez en main le texte complet avant de commencer à répondre aux questions.

Question 1 **10 + 5 + 5 = 20 points**

Soit la fonction $f(x) = xe^x$.

a) Estimer $\int_0^1 xe^x dx$ en utilisant 3 rectangles comme approximations et les extrémités droites des sous-intervalles. Autrement dit, approximer l'intégrale à l'aide d'une somme de Riemann avec $n = 3$. Arrondir sa réponse au dixième près.

b) Montrer que $F(x) = (x-1)e^x$ est une primitive de la fonction $f(x)$.

c) À l'aide du résultat énoncé en b), calculer la valeur exacte de $\int_0^1 xe^x dx$.

Question 2 **4 + 4 = 8 points**

Soit $f(x)$ et $g(x)$ deux fonctions telles que

$$\int_2^5 f(x)\,dx = 7, \quad \int_2^{10} f(x)\,dx = 4, \quad \int_2^{10} g(x)\,dx = 8$$

En utilisant des propriétés de l'intégrale, déduire les valeurs suivantes.

a) $\displaystyle\int_2^{10} \big(5f(x) - 2g(x)\big)\,dx$

b) $\displaystyle\int_5^{10} f(x)\,dx$

Question 3 **8 points**

Trouver une fonction $f(x)$ telle que $f'(x) = 3x^2 + x + 2$ et $f(2) = 16$.

Question 4 **6 + 6 + 6 + 6 = 24 points**

Évaluer les intégrales suivantes.

a) $\int \left(3^x + x^3 + \sec^2(x) + \frac{1}{1+x^2}\right) dx$

b) $\int \frac{3x^5}{x^3+1}\, dx$

c) $\int \sin^5(x)\cos(x)\ dx$

d) $\int_1^3 \frac{1}{(2x-1)^2}\ dx$

Question 5 **14 points**

Calculer l’aire de la région délimitée par les courbes $y = x^2$ et $y = 4x - x^2$.

Question 6 **14 points**

Calculer le volume du solide résultant de la rotation autour de la droite $y = -1$ de la région délimitée par les courbes

$$y = x^2 + 1, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 1.$$

Note : Il est conseillé de représenter graphiquement la région et le solide.

Question 7 **12 points**

Calculer la valeur moyenne de la fonction $f(x) = 5\cos(x)$ sur l'intervalle $[0, \pi/2]$.

FORMULES

Identités trigonométriques

$$\cos^2(a) = \frac{1 + \cos(2a)}{2}$$

$$\sin^2(a) = \frac{1 - \cos(2a)}{2}$$

$$\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$$

$$\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a)$$

$$\sin(a \pm b) = \sin(a)\cos(b) \pm \cos(a)\sin(b)$$

$$\cos(a \pm b) = \cos(a)\cos(b) \mp \sin(a)\sin(b)$$

Quelques intégrales

$$\int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\,dx = \arcsin(x) + C$$

$$\int \frac{1}{1 + x^2}\,dx = \arctan(x) + C$$

$$\int \frac{1}{|x|\sqrt{x^2 - 1}}\,dx = \operatorname{arcsec}(x) + C$$

Formules de sommation

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$