Minitest 1 **(version α)** **— Solutions**

Question 1 (15 points)

Écrivez la somme à l'aide de la notation sigma.

$$\frac{2}{5}-\frac{4}{9}+\frac{8}{13}-\frac{16}{17}+\frac{32}{21}-\frac{64}{25}+\frac{128}{29} = \sum_{n=1}^{7}\frac{-(-2)^n}{4n+1}=\sum_{n=1}^{7}\frac{(-1)^{n+1}\cdot(2)^n}{4n+1}=\sum_{n=0}^{6}\frac{(-1)^n\cdot(2)^{n+1}}{4n+5}$$

Question 2 (15 points)

Exprimez la somme des 100 premiers multiples de trois (en débutant à 3) à l'aide de la notation sigma puis évaluez cette somme.

$$\sum_{n=1}^{100}3n=3\sum_{n=1}^{100}n=\left.\frac{3n(n+1)}{2}\right|_{n=100}=\frac{3\cdot 100\cdot 101}{2}=15\,150$$

Question 3 (10 points)

Déterminez si la suite $\{52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, 4, 2, 1, 4, 2, 1, \ldots\}$ converge ou diverge. Si elle converge, trouvez sa limite.

Elle diverge.

Question 4 (12 + 12 + 12 + 12 + 12 = 60 points)

Pour chaque série, déterminez si elle converge ou diverge. Justifiez votre réponse.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n^3+1}$

On remarque que $\deg(n^3+1) - \deg(n-1) = 3 - 1 = 2 > 1$. Ainsi, selon le critère des polynômes, la série converge.

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3}$

On remarque que $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{3} = \infty$. Ainsi, selon le critère de divergence, la série diverge.

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 4 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^n$

Il s'agit d'une série géométrique de raison $r = \frac{1}{5}$. Puisque $|r| = \frac{1}{5} < 1$, alors la série converge.

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

Il s'agit d'une série alternée, où $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$.

- Condition i) : Puisque $b_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n+1}} < \frac{1}{\sqrt{n}} = b_n$, alors la suite $\{b_n\}$ est décroissante.
- Condition ii) : $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$

Ainsi, selon le critère des séries alternées, la série converge.

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10n}{3^n}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{10(n+1)}{3^{n+1}}}{\frac{10n}{3^n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)\left(\frac{3^n}{3^{n+1}}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n}\right)\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} < 1$$

Ainsi, selon le critère de d'Alembert, la série converge.