Calcul intégral (201-702-RE) – Sylvain Bérubé – Hiver 2024

Examen 3 – Préparation

Concernant l'examen

L'examen a lieu le mardi 28 mai.

Il couvre l'ensemble de la matière vue dans la partie 3 du cours.

Il compte pour 35 % de la note finale.

Consignes de l'examen (telles qu'inscrites dans le cahier d'examen)

Répondre directement sur le questionnaire. Utiliser au besoin la page 11 et le haut de la page 12 pour compléter vos calculs. Du papier brouillon peut vous être fourni sur demande.

Aucune documentation n'est autorisée. Des formules sont fournies à la page 12.

L'usage de la calculatrice est permis.

L'examen contient 7 questions, pour un total de 100 points.

Justifier toutes vos réponses.

Pour votre étude, vous pouvez

Effectuer les exercices prioritaires et supplémentaires identifiés dans les documents de planification de la partie 3 du cours.

Relire et étudier vos notes de cours (théorie et exemples) et les sections du volume couvertes.

Réviser les devoirs 6, 7 et 8 (les solutions sont disponibles sur Léa).

Profiter de la séance de révision du lundi 27 mai.

Me poser vos questions sur Mio. Prendre rendez-vous pour une consultation à mon bureau au besoin.

Faire des exercices. Faire des exercices. Faire des exercices. **Faire des exercices !**

Contenus

Préalables

- Connaitre les règles de dérivation de base (somme de fonctions, différence de fonctions, produit de fonctions, quotient de fonctions, dérivation en chaine, fonctions puissances, fonctions trigonométriques, fonctions exponentielles, fonctions logarithmiques).
- Connaitre les fonctions de base : polynomiales, exponentielles, logarithmiques, trigonométriques.
- Connaitre le cercle trigonométrique, les propriétés des exposants et des logarithmes, les propriétés trigonométriques de base.
- Utiliser le concept de limite et utiliser la règle de l'Hospital au besoin.

Les intégrales

- Calculer l'intégrale indéfinie de fonctions de base (voir tableau 1.1.6, p.7).
- Évaluer une intégrale définie pour des fonctions de base.
- Calculer l'aire sous la courbe d'une fonction de façon exacte (voir définition 1.3.2, p.28).
- Connaitre les propriétés de l'intégrale définie (voir tableau 1.3.11, p.39).
- Appliquer le théorème fondamental du calcul différentiel et intégral, partie 2.

Les méthodes d'intégration

- Maitriser la règle du changement de variable dans l'intégrale indéfinie et dans l'intégrale définie.
- Maitriser l'intégration par parties dans l'intégrale indéfinie et dans l'intégrale définie.

- Utiliser des identités trigonométriques au besoin pour intégrer des puissances de sinus, de cosinus, de sécante et de tangente.
- Reconnaitre une intégrale impropre par discontinuité ou par borne infini et l'évaluer adéquatement à l'aide de l'utilisation d'une limite appropriée. Déterminer si une intégrale impropre converge ou diverge.

Les applications de l'intégrale

- Calculer l'aire de la région entre deux courbes.
- Connaitre la formule pour calculer la longueur d'un arc de courbe et l'appliquer.

Les équations différentielles

- Vérifier si une fonction est une solution d'une équation différentielle.
- À partir d'une solution générale d'une équation différentielle, trouver une solution particulière satisfaisant à une condition initiale. Résoudre un problème de Cauchy.
- Interpréter un champ de directions.
- Maitriser la méthode d'Euler pour calculer des approximations numériques de solutions d'une équation différentielle.
- Reconnaitre et résoudre une équation différentielle à variables séparables.
- À partir d'une situation et d'une relation sur un taux de variation, modéliser la situation par une équation différentielle. Distinguer les variables, les constantes et les conditions initiales du contexte. Maitriser des modèles courants : problèmes des mélanges, taux de variation proportionnel à une fonction, etc.

Formules fournies à l'examen

Identités trigonométriques

$$\cos^2(a) = \frac{1+\cos(2a)}{2} \qquad \sin^2(a) = \frac{1-\cos(2a)}{2}$$

$$\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a) \qquad \cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a)$$

$$\sin(a \pm b) = \sin(a)\cos(b) \pm \cos(a)\sin(b) \qquad \cos(a \pm b) = \cos(a)\cos(b) \mp \sin(a)\sin(b)$$

$$\sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\sin(a-b) + \sin(a+b)) \qquad \sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b))$$

$$\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\cos(a-b) + \cos(a+b))$$

Quelques intégrales

$$\int \sec(x)\,dx = \ln|\sec(x) + \tan(x)| + C \qquad \int \operatorname{cosec}(x)\,dx = \ln|\operatorname{cosec}(x) - \operatorname{cotan}(x)| + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin(x) + C \qquad \int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan(x) + C$$

$$\int \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}\,dx = \operatorname{arcsec}(x) + C$$

Exercices préparatoires

Ces exercices vous permettent de réviser la matière, mais ne prétendent pas être un reflet exact de l'examen.

1. Résoudre les intégrales.

a) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\sin^3(x)}{\sec^2(x)}\,dx$

b) $\displaystyle\int x^3 e^x\,dx$

c) $\displaystyle\int \frac{\ln(2x)}{x^6}\,dx$

d) $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{1}{(2x+1)^3}\,dx$

e) $\displaystyle\int_{-1}^{2} \frac{1}{(2x+1)^3}\,dx$

2. Évaluer l'aire de la région délimitée par les courbes $y = \sin(x)$, $y = \sin^2(x)$, $x = 0$, $x = \pi$.

3. Calculer la longueur de la courbe dont l'équation est $y = 4(x-1)^{3/2}$, où $1 \leq x \leq 4$.

4. a) À l'aide de la méthode d'Euler, calculer, en prenant 0,25 comme pas, la valeur approchée de $y(5)$ dans le cas où $y(x)$ est la solution du problème de Cauchy $y' = 2xy$, avec $y(4) = 1$.

b) Trouver une solution générale à l'équation différentielle $y' = 2xy$.

c) Déterminer la solution particulière du problème de Cauchy $y' = 2xy$, avec $y(4) = 1$.

d) La réponse obtenue en a) est-elle une surestimation ou une sous-estimation ?

5. Une solution contenant 15 % d'acide nitrique coule, avec un débit de 5 L/min, dans un réservoir qui contient initialement 100 litres de solution d'acide nitrique avec une concentration de 0,4 %. La solution dans le réservoir est maintenue uniforme par brassage et s'écoule de celui-ci avec le même débit qu'à l'entrée.

a) Poser l'équation différentielle modélisant cette situation, en incluant la condition initiale.

b) Déterminer $Q(t)$ le volume, en litres, d'acide nitrique présent dans le réservoir pour $t \geq 0$.

c) À quel moment la concentration d'acide nitrique dans le réservoir atteindra-t-elle 10 % ?

d) À long terme, quel sera la concentration d'acide nitrique dans le réservoir ?

Solutions

1. a) On a

$$\frac{\sin^3(x)}{\sec^2(x)} = \sin^2(x)\cos^2(x)\sin(x) = (1-\cos^2(x))\cos^2(x)\sin(x) = (\cos^2(x) - \cos^4(x))\sin(x).$$

Ainsi, en posant $u = \cos(x)$, on a $du = -\sin(x)\,dx$ et $x = 0 \Longrightarrow u = 1$, $x = \pi/4 \Longrightarrow u = \sqrt{2}/2$, et

$$\int_1^{\pi/4} \frac{\sin^3(x)}{\sec^2(x)}\,dx = \int_1^{\pi/4} (\cos^2(x) - \cos^4(x))\sin(x)\,dx = \int_1^{\sqrt{2}/2} -(u^2 - u^4)\,du = -\frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5}\bigg|_{u=1}^{u=\sqrt{2}/2}$$

$$= \left(-\frac{\left(\sqrt{2}/2\right)^3}{3} + \frac{\left(\sqrt{2}/2\right)^5}{5}\right) - \left(-\frac{(1)^3}{3} + \frac{(1)^5}{5}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{12} + \frac{\sqrt{2}}{40} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} \approx 0{,}0508.$$

b) En posant $u = x^3 \Longrightarrow du = 3x^2 dx$ et $dv = e^x dx \Longrightarrow v = e^x$, on a

$$\int x^3 e^x dx = x^3 e^x - \int 3x^2 e^x dx = x^3 e^x - 3\int x^2 e^x dx$$

En posant $u = x^2 \Longrightarrow du = 2x dx$ et $dv = e^x dx \Longrightarrow v = e^x$, on a

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - \int 2x e^x dx = x^2 e^x - 2\int x e^x dx$$

En posant $u = x \Longrightarrow du = dx$ et $dv = e^x dx \Longrightarrow v = e^x$, on a

$$\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + D$$

Ainsi,

$$\int x^3 e^x dx = x^3 e^x - 3\big(x^2 e^x - 2(x e^x - e^x)\big) = x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6x e^x - 6e^x + C$$

c) En posant $u = \ln(2x) \Longrightarrow du = \frac{1}{x} dx$ et $dv = \frac{1}{x^6} dx \Longrightarrow v = -\frac{1}{5x^5}$, on a

$$\int \frac{\ln(2x)}{x^6} dx = -\frac{\ln(2x)}{5x^5} - \int \frac{-1}{5x^6} dx = -\frac{\ln(2x)}{5x^5} - \left(-\frac{1}{5}\right)\left(-\frac{1}{5x^5}\right) + C = -\frac{\ln(2x)}{5x^5} - \frac{1}{25x^5} + C$$

$$= \frac{-5\ln(2x) - 1}{25x^5} + C$$

d) En posant $u = 2x + 1$, $du = 2\, dx$, on a

$$\int \frac{1}{(2x+1)^3} dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u^3} du = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{-2u^2}\right) + C = \frac{-1}{4(2x+1)^2} + C$$

Ainsi,

$$\int_2^\infty \frac{1}{(2x+1)^3} dx = \lim_{t\to\infty} \int_2^t \frac{1}{(2x+1)^3} dx = \lim_{t\to\infty} \left(\frac{-1}{4(2x+1)^2}\right)\Bigg|_{x=2}^{x=t}$$

$$= \lim_{t\to\infty} \left(\underbrace{\frac{-1}{4(2t+1)^2}}_{-\frac{1}{\infty}=0}\right) - \left(\frac{-1}{4(2\cdot 2+1)^2}\right) = \frac{1}{100}$$

e) On remarque une discontinuité en $x = -0{,}5$. Ainsi,

$$\int_{-1}^{2} \frac{1}{(2x+1)^3} dx = \int_{-1}^{-0,5} \frac{1}{(2x+1)^3} dx + \int_{-0,5}^{2} \frac{1}{(2x+1)^3} dx$$

La seconde intégrale est

$$\int_{-0,5}^{2} \frac{1}{(2x+1)^3} dx = \lim_{t\to -0,5^-} \int_t^2 \frac{1}{(2x+1)^3} dx = \lim_{t\to -0,5^-} \left(\frac{-1}{4(2x+1)^2}\right)\Bigg|_{x=t}^{x=2}$$

$$= \lim_{t\to -0,5^-} \left(\frac{-1}{4(2\cdot 2+1)^2}\right) - \left(\underbrace{\frac{-1}{4(2t+1)^2}}_{-\frac{1}{0^+}=-\infty}\right) = \infty$$

Ainsi, l'intégrale $\int_{-1}^{2} \frac{1}{(2x+1)^3} dx$ diverge.

2. Sur l'intervalle $[0,\pi]$, la fonction $y = \sin(x)$ est supérieure à $y = \sin^2(x)$. L'aire cherchée est

$$\int_0^\pi (\sin(x) - \sin^2(x))dx = \int_0^\pi \sin(x)\,dx - \int_0^\pi \sin^2(x)\,dx = (-\cos(x))|_{x=0}^{x=\pi} - \int_0^\pi \left(\frac{1-\cos(2x)}{2}\right)dx$$

$$= (-\cos(\pi)) - (-\cos(0)) - \int_0^\pi \frac{1}{2}dx + \frac{1}{2}\int_0^\pi \cos(2x)\,dx = 2 - \frac{\pi}{2} + \left(\frac{\sin(2x)}{4}\right)\Bigg|_{x=0}^{x=\pi}$$

$$= 2 - \frac{\pi}{2} + \frac{\sin(2\pi)}{4} - \frac{\sin(0)}{4} = 2 - \frac{\pi}{2} \approx 0{,}4292$$

3. La dérivée de la fonction est

$$\left(4(x-1)^{3/2}\right)' = 4 \cdot \frac{3}{2} \cdot (x-1)^{1/2} = 6(x-1)^{1/2}$$

Ainsi, la longueur de la courbe est,

$$L = \int_1^4 \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}dx = \int_1^4 \sqrt{1 + (6(x-1)^{1/2})^2}dx = \int_1^4 \sqrt{1 + 36(x-1)}dx$$

$$= \int_1^4 \sqrt{36x - 35}dx$$

En posant $u = 36x - 35$, on a $du = 36dx$, puis $x = 1 \Rightarrow u = 1$ et $x = 4 \Rightarrow u = 109$. Ainsi

$$L = \frac{1}{36}\int_1^{109} \sqrt{u}du = \frac{1}{36}\left(\frac{2u^{3/2}}{3}\right)\Bigg|_{u=1}^{u=109} = \frac{1}{54}\left(109^{3/2} - 1^{3/2}\right) \approx 21{,}0554.$$

4. a) On a $F(x,y) = 2xy$. Les équations de récurrence sont

$$x_{n+1} = x_n + h = x_n + 0{,}25$$

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot F(x_n, y_n) = y_n + 0{,}25 \cdot 2x_n y_n = y_n + \frac{x_n y_n}{2}.$$

Avec la condition initiale $y(4) = 1$, on a

$$x_0 = 4 \qquad y_0 = 1$$

$$x_1 = 4 + 0{,}25 = 4 + 0{,}25 = 4{,}25 \qquad y_1 = 1 + \frac{4 \cdot 1}{2} = 3$$

$$x_2 = 4{,}25 + 0{,}25 = 4{,}5 \qquad y_2 = 3 + \frac{4{,}25 \cdot 3}{2} = 9{,}375$$

$$x_3 = 4{,}5 + 0{,}25 = 4{,}75 \qquad y_3 = 9{,}75 + \frac{4{,}5 \cdot 9{,}75}{2} = 30{,}4688$$

$$x_4 = 4{,}75 + 0{,}25 = 5 \qquad y_4 = 31{,}6875 + \frac{4{,}75 \cdot 31{,}6875}{2} = 102{,}8320$$

Ainsi, $y(5) \approx 102{,}8320$.

b) Directement,

$$\frac{dy}{dx} = 2xy \Rightarrow \frac{dy}{y} = 2x\,dx \Rightarrow \int \frac{1}{y}dy = \int 2x\,dx = \ln|y| = x^2 + C \Rightarrow |A| = e^{x^2+c} = e^{x^2}\underbrace{e^C}_{A_1 \in \mathbb{R}^+}$$

$$\Rightarrow y = Ae^{x^2}, \quad \text{où } A \in \mathbb{R}$$

c) La solution générale à l'équation différentielle donnée est $y = Ae^{x^2}$. Avec $y(4) = 1$, on a

$$1 = Ae^{4^2} \Rightarrow A = e^{-16}$$

La solution particulière est donc

$$y = e^{-16}e^{x^2} = e^{x^2-16}$$

d) En $x = 5$, la solution exacte est $y(5) = e^{5^2-16} = e^9 \approx 8\,103{,}08$. Ainsi, la solution obtenue est a), soit 102,8320, est une (forte !) sous-estimation.

5. a) Soit

t : Temps (minutes) depuis le début de l'écoulement de la solution

$Q(t)$: Le volume (L) d'acide citrique présent dans le réservoir au temps t.

On sait que

$$\frac{dQ}{dt} = (\text{Taux d'entrée d'acide citrique}) - (\text{Taux d'entrée d'acide citrique}) = 0{,}15 \cdot 5 - \frac{Q(t)}{100} \cdot 5$$

$$\Rightarrow \frac{dQ}{dt} = 0{,}75 - \frac{Q}{20} = \frac{15 - Q}{20}$$

La condition initiale est $Q(0) = 0{,}004 \cdot 100 = 0{,}4$.

b) Directement,

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{15 - Q}{20} \Rightarrow \frac{20}{15 - Q} dQ = dt \Rightarrow 20 \int \frac{1}{15 - Q} dQ = \int dt \Rightarrow 20(-\ln|15 - Q|) = t + C$$

$$\Rightarrow \ln|15 - Q| = -\frac{t}{20} + \left(\underbrace{-\frac{C}{20}}_{D}\right) \Rightarrow |15 - Q| = e^{-t/20 + D} = e^{-t/20} \underbrace{e^D}_{A_1 \in \mathbb{R}^+}$$

$$\Rightarrow 15 - Q = Ae^{-t/20} \Rightarrow Q = 15 - Ae^{-t/20}$$

Avec la condition initiale $Q(0) = 0{,}4$, on trouve

$$0{,}4 = 15 - Ae^{-0/20} \Rightarrow A = 15 - 0{,}4 = 14{,}6$$

Par conséquent,

$$Q(t) = 15 - 14{,}6e^{-t/20}.$$

c) On cherche t tel que $Q(t)/100 = 0{,}1$. Ainsi,

$$\frac{Q(t)}{100} = 0{,}1 \Rightarrow 15 - 14{,}6e^{-t/20} = 10 \Rightarrow e^{-t/20} = \frac{5}{14{,}6} \Rightarrow -\frac{t}{20} = \ln\left(\frac{5}{14{,}6}\right)$$

$$\Rightarrow t = -20 \cdot \ln\left(\frac{5}{14{,}6}\right) \approx 21{,}43 \text{ minutes}$$

d) À long terme, la concentration sera

$$\lim_{t\to\infty} \frac{Q(t)}{100} = \lim_{t\to\infty} \frac{15 - 14{,}6\,\overbrace{e^{-t/20}}^{e^{-\infty}=0}}{100} = 0{,}15 = 15\ \%.$$