Solutions aux exercices prioritaires de la partie 2

Section 1.1 (p.11)

6. $f(x)=x(2-x)^2=x(4-4x+x^2)=4x-4x^2+x^3 \quad\Rightarrow\quad F(x)=4(\frac{1}{2}x^2)-4(\frac{1}{3}x^3)+\frac{1}{4}x^4+C=2x^2-\frac{4}{3}x^3+\frac{1}{4}x^4+C$

16. $r(\theta)=\sec\theta\tan\theta-2e^{\theta} \quad\Rightarrow\quad R(\theta)=\sec\theta-2e^{\theta}+C_n$ sur l'intervalle $]n\pi-\frac{\pi}{2},n\pi+\frac{\pi}{2}[$.

29. $f'(x)=1+3\sqrt{x} \quad\Rightarrow\quad f(x)=x+3\left(\frac{2}{3}x^{3/2}\right)+C=x+2x^{3/2}+C$. $f(4)=4+2(8)+C$. Or, $f(4)=25 \quad\Rightarrow\quad 20+C=25 \quad\Rightarrow\quad C=5$,

donc $f(x)=x+2x^{3/2}+5$.

37. $f''(x)=-2+12x-12x^2 \quad\Rightarrow\quad f'(x)=-2x+6x^2-4x^3+C$. $f'(0)=C$. Or, $f'(0)=12 \quad\Rightarrow\quad C=12$, donc

$f'(x)=-2x+6x^2-4x^3+12$ et, par conséquent, $f(x)=-x^2+2x^3-x^4+12x+D$ $f(0)=D$. Or, $f(0)=4 \quad\Rightarrow\quad D=4$, donc

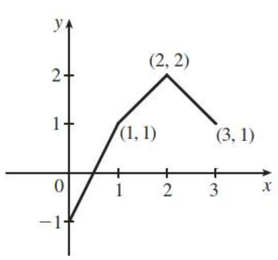
$f(x)=-x^2+2x^3-x^4+12x+4$.

42. $f''(x)=2+\cos x \quad\Rightarrow\quad f'(x)=2x+\sin x+C \quad\Rightarrow\quad f(x)=x^2-\cos x+Cx+D$. $f(0)=-1+D$. Or, $f(0)=-1 \quad\Rightarrow\quad D=0$.

$f(\frac{\pi}{2})=\pi^2/4+(\frac{\pi}{2})C$. Or, $f(\frac{\pi}{2})=0 \quad\Rightarrow\quad (\frac{\pi}{2})C=-\pi^2/4 \quad\Rightarrow\quad C=-\frac{\pi}{2}$, donc $f(x)=x^2-\cos x-(\frac{\pi}{2})x$.

48. b est une primitive de f. Pour une petite valeur de x, la valeur de f est négative, ce qui signifie que la courbe d'une primitive doit être décroissante. Or, a et c augmentent toutes deux pour une petite valeur de x, donc seule b peut être une primitive de f. De plus, la valeur de f est positive là où b augmente, ce qui appuie cette conclusion.

52. $f'(x)=\begin{cases}2 & \text{si} \quad 0\le x<1\\ 1 & \text{si} \quad 1<x<2\\ -1 & \text{si} \quad 2<x\le 3\end{cases} \quad\Rightarrow\quad f(x)=\begin{cases}2x+C & \text{si} \quad 0\le x<1\\ x+D & \text{si} \quad 1<x<2\\ -x+E & \text{si} \quad 2<x\le 3\end{cases}$



$f(0)=-1 \quad\Rightarrow\quad 2(0)+C=-1 \quad\Rightarrow\quad C=-1$.

En prenant comme point de départ le point $(0, -1)$ et en se déplaçant vers la droite sur une ligne dont la pente est égale à 2, on arrive au point $(1, 1)$. La pente de $1<x<2$ est égale à 1; on arrive donc au point $(2, 2)$. On se fonde ici sur le fait que f est continue. On peut inclure le point $x=1$ dans la première ou la seconde partie de f. La ligne reliant $(1, 1)$ à $(2, 2)$ est $y=x$, donc $D=0$. La pente de $2<x\le 3$ est égale à -1, et on arrive donc au point $(3, 1)$. $f(3)=1 \quad\Rightarrow\quad -3+E=1 \quad\Rightarrow\quad E=4$. Par conséquent,

$$f(x)=\begin{cases}2x-1 & \text{si} \quad 0\le x\le 1\\ x & \text{si} \quad 1<x<2\\ -x+4 & \text{si} \quad 2\le x\le 3\end{cases}$$

58. $a(t) = v'(t) = 2t + 1 \;\Rightarrow\; v(t) = t^2 + t + C$. $v(0) = C$. Or, $v(0) = -2 \;\Rightarrow\; C = -2$, donc $v(t) = t^2 + t - 2$ et $s(t) = \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2 - 2t + D$.

$s(0) = D$. Or, $s(0) = 3 \;\Rightarrow\; D = 3$, donc $s(t) = \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2 - 2t + 3$.

72. $\displaystyle\int \frac{x^3 - 2\sqrt{x}}{x}\,dx = \int\left(\frac{x^3}{x} - \frac{2x^{1/2}}{x}\right)dx = \int (x^2 - 2x^{-1/2})\,dx = \frac{x^3}{3} - 2\frac{x^{1/2}}{1/2} + C = \tfrac{1}{3}x^3 - 4\sqrt{x} + C$

79. $\displaystyle\int \frac{\sin 2x}{\sin x}dx = \int \frac{2\sin x \cos x}{\sin x}dx = \int 2\cos x\,dx = 2\sin x + C$

82. a) Puisque la pierre tombe d'une hauteur de 450 m, on déduit d'abord que $v(0) = 0$ et $s(0) = 450$.

$v'(t) = a(t) = -9{,}8 \;\Rightarrow\; v(t) = -9{,}8t + C$. Or, $v(0) = 0 \;\Rightarrow\; C = 0$, donc $v(t) = -9{,}8t \;\Rightarrow\; s(t) = -4{,}9t^2 + D$. Enfin,

$s(0) = 450 \;\Rightarrow\; D = 450 \;\Rightarrow\; s(t) = 450 - 4{,}9t^2$.

b) La pierre touche le sol quand $s(t) = 0$. $450 - 4{,}9t^2 = 0 \;\Rightarrow\; t^2 = 450/4{,}9 \;\Rightarrow\; t_1 = \sqrt{450/4{,}9} \approx 9{,}58$ s .

c) La vitesse de la pierre lorsqu'elle touche le sol est $v(t_1) = -9{,}8\sqrt{450/4{,}9} \approx -93{,}9$ m/s .

d) Il s'agit simplement de reprendre les parties a) et b) et d'employer $v(0) = -5$. Si on utilise $v(t) = -9{,}8t + C$,

$v(0) = -5 \;\Rightarrow\; 0 + C = -5 \;\Rightarrow\; v(t) = -9{,}8t - 5$. Donc, $s(t) = -4{,}9t^2 - 5t + D$ et

$s(0) = 450 \;\Rightarrow\; D = 450 \;\Rightarrow\; s(t) = -4{,}9t^2 - 5t + 450$. En appliquant la formule quadratique pour résoudre l'équation

$s(t) = 0$, on obtient $t = \left(5 \pm \sqrt{8845}\right)/(-9{,}8) \;\Rightarrow\; t_1 \approx 9{,}09$ s .

92. $a(t) = k$, la vitesse initiale est 50 km/h $= 50 \cdot \frac{1000}{3600} = \frac{125}{9}$ m/s , et la vitesse finale (après 5 secondes) est 80 km/h $= 80 \cdot \frac{1000}{3600} = \frac{200}{9}$ m/s .

Donc, $v(t) = kt + C$ et $v(0) = \frac{125}{9} \;\Rightarrow\; C = \frac{125}{9}$. Par conséquent, $v(t) = kt + \frac{125}{9} \;\Rightarrow\; v(5) = 5k + \frac{125}{9}$. Toutefois, $v(5) = \frac{200}{9}$, donc

$5k + \frac{125}{9} = \frac{200}{9} \;\Rightarrow\; 5k = \frac{75}{9} \;\Rightarrow\; k = \frac{5}{3} \approx 1{,}67$ m/s^2 .

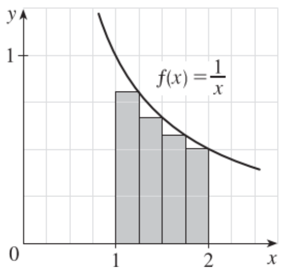
Section 1.3 (p.42)

3. a) $D_4=\sum_{i=1}^{4} f(x_i)\Delta x \quad \left[\Delta x=\frac{2-1}{4}=\frac{1}{4}\right]=\left[\sum_{i=1}^{4} f(x_i)\right]\Delta x$

$=[f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+f(x_4)]\Delta x$

$=\left[\frac{1}{5/4}+\frac{1}{6/4}+\frac{1}{7/4}+\frac{1}{8/4}\right]\frac{1}{4}=\left[\frac{4}{5}+\frac{2}{3}+\frac{4}{7}+\frac{1}{2}\right]\frac{1}{4}\approx 0{,}6345$

Puisque f est décroissante sur [1, 2], on obtient une approximation *par défaut* avec les extrémités droites des sous-intervalles.

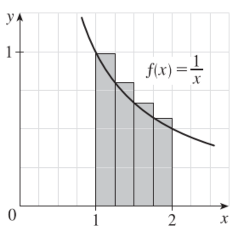


b) $G_4=\sum_{i=1}^{4} f(x_{i-1})\Delta x=\left[\sum_{i=1}^{4} f(x_{i-1})\right]\Delta x$

$=[f(x_0)+f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)]\Delta x$

$=\left[\frac{1}{1}+\frac{1}{5/4}+\frac{1}{6/4}+\frac{1}{7/4}\right]\frac{1}{4}=\left[1+\frac{4}{5}+\frac{2}{3}+\frac{4}{7}\right]\frac{1}{4}\approx 0{,}7595$

G_4 est une approximation par excès. D'une autre façon, on pourrait additionner à D_4 l'aire du premier rectangle supérieur et soustraire l'aire du dernier rectangle inférieur : $G_4 = D_4 + f(1)\cdot\frac{1}{4} - f(2)\cdot\frac{1}{4}$.



15. Approximation par défaut de la fuite de pétrole: D_5 = (7,6+ 6,8+ 6,2+ 5,7 + 5,3)(2) = (31,6)(2) = 63,2 L.

Approximation par excès de la fuite de pétrole: G_5 = (8,7 + 7,6 +6,8 +6,2 +5,7)(2) = (35)(2) = 70 L.

21. $f(x)=x^2+\sqrt{1+2x}$, $4\le x\le 7$. $\Delta x = (7-4)/n = 3/n$ et $x_i = 4 + i\,\Delta x = 4 + 3i/n$.

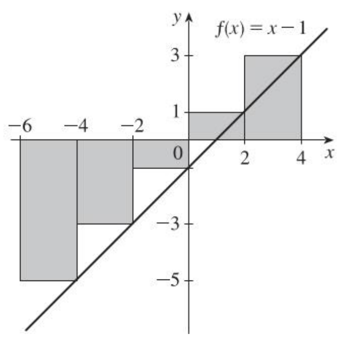
$$A=\lim_{n\to\infty} D_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left[(4+3i/n)^2+\sqrt{1+2(4+3i/n)}\right]\cdot\frac{3}{n}.$$

32. On a $f(x) = x - 1, -6 \le x \le 4$ et $\Delta x = \dfrac{b-a}{n} = \dfrac{4-(-6)}{5} = 2$.

Puisqu'on utilise les extrémités droites des sous-intervalles, on a $x_i^* = x_i$.

$$\begin{aligned} D_5 &= \sum_{i=1}^{5} f(x_i)\Delta x \\ &= (\Delta x)[f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+f(x_4)+f(x_5)+f(x_6)] \\ &= 2[f(-4)+f(-2)+f(0)+f(2)+f(4)] \\ &= 2[-5+(-3)+(-1)+1+3] \\ &= 2(-5) = -10 \end{aligned}$$

Cette somme de Riemann représente l'aire totale des deux rectangles au-dessus de l'axe des *x* moins l'aire totale des trois rectangles en dessous de l'axe des *x*, c'est-à-dire l'aire totale *nette* des cinq rectangles.



42. Comme $\Delta x = (2-0)/5 = \frac{2}{5}$, les extrémités des sous-intervalles sont 0, $\frac{2}{5}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{6}{5}$, $\frac{8}{5}$ et 2, et les milieux des sous-intervalles sont $\frac{1}{5}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{5}{5}$, $\frac{7}{5}$ et $\frac{9}{5}$. La méthode des milieux des sous-intervalles donne

$$\int_0^2 \frac{x}{x+1}dx \approx \sum_{i=1}^{5} f(\bar{x}_i)\,\Delta x = \frac{2}{5}\left(\frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{5}+1}+\frac{\frac{3}{5}}{\frac{3}{5}+1}+\frac{\frac{5}{5}}{\frac{5}{5}+1}+\frac{\frac{7}{5}}{\frac{7}{5}+1}+\frac{\frac{9}{5}}{\frac{9}{5}+1}\right) = \frac{2}{5}\left(\frac{127}{56}\right) = \frac{127}{140} \approx 0{,}907\,1.$$

53. Il faut noter que $\Delta x = \dfrac{4-1}{n} = \dfrac{3}{n}$ et que $x_i = 1 + i\Delta x = 1 + \dfrac{3i}{n}$.

$$\begin{aligned} \int_1^4 (x^2-4x+2)dx &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f\left(1+\frac{3i}{n}\right)\frac{3}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[\left(1+\frac{3i}{n}\right)^2 - 4\left(1+\frac{3i}{n}\right)+2\right] \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[1+\frac{6i}{n}+\frac{9i^2}{n^2}-4-\frac{12i}{n}+2\right] = \lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{9i^2}{n^2}-\frac{6i}{n}-1\right] \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}\left[\frac{9}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i^2 - \frac{6}{n}\sum_{i=1}^{n} i - \sum_{i=1}^{n} 1\right] \\ &= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{27}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{18}{n^2}\frac{n(n+1)}{2} - \frac{3}{n}\cdot n(1)\right] \\ &= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{9}{2}\frac{(n+1)(2n+1)}{n^2} - 9\frac{n+1}{n} - 3\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{9}{2}\frac{n+1}{n}\frac{2n+1}{n} - 9\left(1+\frac{1}{n}\right)-3\right] \\ &= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{9}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right) - 9\left(1+\frac{1}{n}\right) - 3\right] = \frac{9}{2}(1)(2) - 9(1) - 3 = -3 \end{aligned}$$

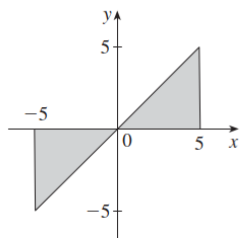
65. a) $\int_0^2 g(x)dx = \frac{1}{2}\cdot 4\cdot 2 = 4$ [aire d'un triangle]

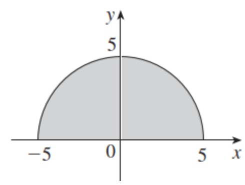
b) $\int_2^6 g(x)dx = -\frac{1}{2}\pi(2)^2 = -2\pi$ [aire, affectée du signe moins, d'un demi-cercle]

c) $\int_6^7 g(x)dx = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1 = \frac{1}{2}$ [aire d'un triangle]

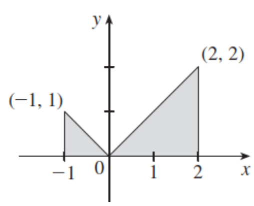
$$\int_0^7 g(x)dx = \int_0^2 g(x)dx + \int_2^6 g(x)dx + \int_6^7 g(x)dx = 4 - 2\pi + \tfrac{1}{2} = 4{,}5 - 2\pi$$

69. $\int_{-5}^{5}\left(x-\sqrt{25-x^2}\right)dx = \int_{-5}^{5} x\,dx - \int_{-5}^{5}\sqrt{25-x^2}\,dx$. En raison de la symétrie, la valeur de la première intégrale est 0 puisque l'aire ombrée au-dessus de l'axe des x est égale à l'aire ombrée sous l'axe des x. On peut interpréter la deuxième intégrale comme étant la moitié de l'aire d'un cercle de rayon 5, c'est-à-dire, $\frac{1}{2}\pi(5)^2 = \frac{25}{2}\pi$. Il s'ensuit que la valeur de l'intégrale originale est $0 - \frac{25}{2}\pi = -\frac{25}{2}\pi$.





70. On peut interpréter $\int_{-1}^{2}|x|\,dx$ comme étant la somme des aires des deux triangles ombrés, c'est-à-dire, $\frac{1}{2}(1)(1) + \frac{1}{2}(2)(2) = \frac{1}{2} + \frac{4}{2} = \frac{5}{2}$.



74. $\int_0^1 (5-6x^2)dx = \int_0^1 5dx - 6\int_0^1 x^2 dx = 5(1-0) - 6(\frac{1}{3}) = 5 - 2 = 3$

82. Il est clair que la valeur de $\int_0^3 f(x)dx$ est inférieure à –1 et que cette valeur est la plus petite. La pente de la tangente de la fonction f lorsque $x = 1$, $f'(1)$, a une valeur qui se situe entre –1 et 0; cette valeur est donc la deuxième plus petite. La valeur la plus grande est celle de $\int_3^8 f(x)dx$, suivie par celle de $\int_4^8 f(x)dx$, qui est inférieure d'environ 1 unité à celle de $\int_3^8 f(x)dx$. $\int_0^8 f(x)dx$ est également positive, mais sa valeur est plus petite que celle de $\int_4^8 f(x)dx$. Si nous classons ces valeurs par ordre croissant, nous obtenons

$$\int_0^3 f(x)dx < f'(1) < \int_0^8 f(x)dx < \int_4^8 f(x)dx < \int_3^8 f(x)dx \text{ ou } B < E < A < D < C$$

88. Si $-1 \le x \le 1$, alors $0 \le x^2 \le 1$ et $1 \le 1 + x^2 \le 2$, donc $1 \le \sqrt{1+x^2} \le \sqrt{2}$ et $1[1-(-1)] \le \int_{-1}^{1}\sqrt{1+x^2}\,dx \le \sqrt{2}\,[1-(-1)]$ [propriété 11], c'est-à-dire, $2 \le \int_{-1}^{1}\sqrt{1+x^2}\,dx \le 2\sqrt{2}$.

Section 1.4 (p.61)

22. $\int_0^1 (1+\frac{1}{2}u^4-\frac{2}{5}u^9)du=[u+\frac{1}{10}u^5-\frac{1}{25}u^{10}]_0^1=(1+\frac{1}{10}-\frac{1}{25})-0=\frac{53}{50}$

34. $\int_0^3 (2\sin x-e^x)dx-[-2\cos x-e^x]_0^3=(-2\cos 3-e^3)-(-2-1)=3-2\cos 3-e^3$

39. $\int_1^3 \frac{y^3-2y^2-y}{y^2}dy=\int_1^3\left(y-2-\frac{1}{y}\right)dy=\left[\frac{1}{2}y^2-2y-\ln|y|\right]_1^3=\left(\frac{9}{2}-6-\ln 3\right)-\left(\frac{1}{2}-2-0\right)=-\ln 3$

50. $\int_0^\pi (5e^x+3\sin x)\,dx=[5e^x-3\cos x]_0^\pi=[5e^\pi-3(-1)]-[5(1)-3(1)]=5e^\pi+1$

62. $\int_0^{\pi/4}\frac{1+\cos^2\theta}{\cos^2\theta}=\int_0^{\pi/4}\left(\frac{1}{\cos^2\theta}+\frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta}\right)d\theta=\int_0^{\pi/4}(\sec^2\theta+1)\,d\theta$

$=[\tan\theta+\theta]_0^{\pi/4}=(\tan\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4})-(0+0)=1+\frac{\pi}{4}$

65. $\int_{-10}^{10}\frac{2}{\sin^2 x+\cos^2 x}\,dx=\int_{-10}^{10}\frac{2}{1}\,dx=\int_{-10}^{10}2\,dx=[2x]_{-10}^{10}=20-(-20)=40$

68. $\int_0^{1/\sqrt{3}}\frac{t^2-1}{t^4-1}\,dt=\int_0^{1/\sqrt{3}}\frac{t^2-1}{(t^2+1)(t^2-1)}dt=\int_0^{1/\sqrt{3}}\frac{1}{t^2+1}dt=[\arctan t]_0^{1/\sqrt{3}}=\arctan\left(1/\sqrt{3}\right)-\arctan 0$

$=\frac{\pi}{6}-0=\frac{\pi}{6}$

71. $\int_0^{3\pi/2}|\sin x|\,dx=\int_0^{\pi}\sin x\,dx+\int_\pi^{3\pi/2}(-\sin x)\,dx=[-\cos x]_0^\pi+[\cos x]_\pi^{3\pi/2}=[1-(-1)]+[0-(-1)]=2+1=3$

118. Si $w'(t)$ est le taux de croissance en kilogrammes par année, alors $w(t)$ représente le poids en kilogrammes de l'enfant à l'âge t. Selon le théorème de la variation nette, nous savons que $\int_5^{10}w'(t)\,dt=w(10)-w(5)$. L'intégrale représente donc l'augmentation du poids de l'enfant (en kilogrammes) de l'âge de 5 ans à l'âge de 10 ans.

121. Selon le théorème de la variation nette, $\int_0^{15}n'(t)\,dt=n(15)-n(0)=n(15)-100$ représente l'augmentation de la population d'abeilles en 15 semaines. Donc, $100+\int_0^{15}n'(t)\,dt=n(15)$ représente la population d'abeilles totale après 15 semaines.

129. a) $v'(t)=a(t)=2t+3 \;\Rightarrow\; v(t)=t^2+3t+C \;\Rightarrow\; v(0)=C=-4 \;\Rightarrow\; v(t)=t^2+3t-4$

b) Distance parcourue $=\int_0^3|t^2+3t-4|\,dt=\int_0^3|(t+4)(t-1)|\,dt=\int_0^1(-t^2-3t+4)\,dt+\int_1^3(t^2+3t-4)\,dt$

$=[-\frac{1}{3}t^3-\frac{3}{2}t^2+4t]_0^1+[\frac{1}{3}t^3+\frac{3}{2}t^2-4t]_1^3$

$=(-\frac{1}{3}-\frac{3}{2}+4)+(9+\frac{27}{2}-12)-(\frac{1}{3}+\frac{3}{2}-4)=\frac{89}{6}$ m

136. Soit $P(t)$ la population de bactéries au temps t (en heures). Selon le théorème de la variation nette,

$P(1)-P(0)=\int_0^1 P'(t)dt=\int_0^1(1000\cdot 2^t)\,dt=\left[1000\frac{2^t}{\ln 2}\right]_0^1=\frac{1000}{\ln 2}(2^1-2^0)=\frac{1000}{\ln 2}\approx 1443$. Il s'ensuit que la population après une heure est 4000 + 1443 = 5443 bactéries.

Section 1.5 (p.72)

4. Soit $u = \sin\theta$. Alors, $du = \cos\theta\, d\theta$, donc $\int \sin^2\theta \cos\theta\, d\theta = \int u^2\, du = \frac{1}{3}u^3 + C = \frac{1}{3}\sin^3\theta + C$.

8. Soit $u = x^3$. Alors, $du = 3x^2\, dx$ et $x^2 dx = \frac{1}{3}du$, donc $\int x^2 e^{x^3} dx = \int e^u (\frac{1}{3}du) = \frac{1}{3}e^u + C = \frac{1}{3}e^{x^3} + C$.

13. Soit $u = 5 - 3x$. Alors, $du = -3\, dx$ et $dx = -\frac{1}{3}du$, donc $\int \frac{dx}{5-3x} = \int \frac{1}{u}(-\frac{1}{3}du) = -\frac{1}{3}\ln|u| + C = -\frac{1}{3}\ln|5-3x| + C$.

23. Soit $u = \tan\theta$. Alors, $du = \sec^2\theta\, d\theta$, donc $\int \sec^2\theta \tan^3\theta d\theta = \int u^3 du = \frac{1}{4}u^4 + C = \frac{1}{4}\tan^4\theta + C$.

29. Soit $u = 5^t$. Alors, $du = 5^t \ln 5\, dt$ et $5^t dt = \frac{1}{\ln 5}du$, donc $\int 5^t \sin(5^t)dt = \int \sin u\left(\frac{1}{\ln 5}du\right) = -\frac{1}{\ln 5}\cos u + C = -\frac{1}{\ln 5}\cos(5^t) + C$.

45. Soit $u = 1 + x^2$. Alors, $du = 2x\, dx$, donc $\int \frac{1+x}{1+x^2}dx = \int \frac{1}{1+x^2}dx + \int \frac{x}{1+x^2}dx = \arctan x + \int \frac{\frac{1}{2}du}{u} = \arctan x + \frac{1}{2}\ln|u| + C$

$= \arctan x + \frac{1}{2}\ln|1+x^2| + C = \arctan x + \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$ [puisque $1 + x^2 > 0$].

48. Soit $u = x^2 + 1$ [donc, $x^2 = u - 1$]. Alors, $du = 2x\, dx$ et $x\, dx = \frac{1}{2}du$, donc

$$\int x^3\sqrt{x^2+1}\, dx = \int x^2\sqrt{x^2+1}\, xdx = \int (u-1)\sqrt{u}(\tfrac{1}{2}du) = \tfrac{1}{2}\int (u^{3/2} - u^{1/2})du$$
$$= \tfrac{1}{2}(\tfrac{2}{5}u^{5/2} - \tfrac{2}{3}u^{3/2}) + C = \tfrac{1}{5}(x^2+1)^{5/2} - \tfrac{1}{3}(x^2+1)^{3/2} + C.$$

Ou : Soit $u = \sqrt{x^2+1}$. Alors, $u^2 = x^2 + 1 \;\Rightarrow\; 2u\, du = 2x\, dx \;\Rightarrow\; u\, du = x\, dx$, donc

$$\int x^3\sqrt{x^2+1}\, dx = \int x^2\sqrt{x^2+1}\, xdx = \int (u^2-1)u \cdot u\, du = \int (u^4 - u^2)du$$
$$= \tfrac{1}{5}u^5 - \tfrac{1}{3}u^3 + C = \tfrac{1}{5}(x^2+1)^{5/2} - \tfrac{1}{3}(x^2+1)^{3/2} + C.$$

54. Soit $u = 3t - 1$, donc $du = 3dt$. Lorsque $t = 0$, $u = -1$; lorsque $t = 1$, $u = 2$. Il s'ensuit que

$$\int_0^1 (3t-1)^{50} dt = \int_{-1}^2 u^{50}(\tfrac{1}{3}du) = \tfrac{1}{3}[\tfrac{1}{51}u^{51}]_{-1}^2 = \tfrac{1}{153}[2^{51} - (-1)^{51}] = \tfrac{1}{153}(2^{51}+1)$$

59. Soit $u = 1/x$, donc $du = -1/x^2\, dx$. Lorsque $x = 1$, $u = 1$; lorsque $x = 2$, $u = \frac{1}{2}$. Il s'ensuit

que $\int_1^2 \frac{e^{1/x}}{x^2}dx = \int_1^{1/2} e^u(-du) = -[e^u]_1^{1/2} = -(e^{1/2} - e) = e - \sqrt{e}$.

71. Soit $u = e^z + z$, donc $du = (e^z + 1)\, dz$. Lorsque $z = 0$, $u = 1$; lorsque $z = 1$, $u = e + 1$. Il s'ensuit

que $\int_0^1 \frac{e^z+1}{e^z+z}dz = \int_1^{e+1} \frac{1}{u}du = [\ln|u|]_1^{e+1} = \ln|e+1| - \ln|1| = \ln(e+1)$.

77. Exprimez d'abord l'intégrale sous la forme d'une somme de deux intégrales:

Selon le théorème 7 b), $I = \int_{-2}^2 (x+3)\sqrt{4-x^2}dx = I_1 + I_2 = \int_{-2}^2 x\sqrt{4-x^2}dx + \int_{-2}^2 3\sqrt{4-x^2}dx$. $I_1 = 0$ puisque $f(x) = x\sqrt{4-x^2}$ est une fonction impaire et que nous intégrons de $x = -2$ à $x = 2$. Nous interprétons I_2 comme étant trois fois l'aire d'un demi-cercle de rayon 2, donc $I = 0 + 3\cdot\frac{1}{2}(\pi\cdot 2^2) = 6\pi$.

82. Soit $r(t) = ae^{bt}$ avec $a = 450\,268$, $b = 1{,}125\,67$ et $n(t)$ = la population après t heures. Comme $r(t) = n'(t)$, $\int_0^3 r(t)dt = n(3) - n(0)$ est la variation totale de la population après trois heures. Puisque la population initiale compte 400 bactéries, la population sera

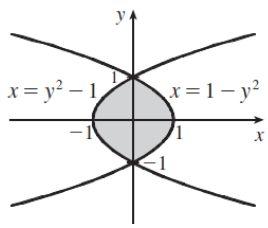
$$n(3) = 400 + \int_0^3 r(t)dt = 400 + \int_0^3 ae^{bt}dt = 400 + \frac{a}{b}[e^{bt}]_0^3 = 400 + \frac{a}{b}(e^{3b} - 1)$$
$$\approx 400 + 11\,313 = 11\,713 \text{ bactéries}$$

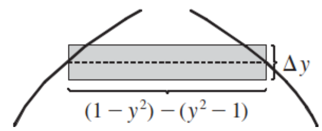
Section 2.1 (p.91)

2. $A=\int_0^1\left(e^x-xe^{x^2}\right)dx=\left[e^x-\tfrac{1}{2}e^{x^2}\right]_0^1=\left(e-\tfrac{1}{2}e\right)-\left(1-\tfrac{1}{2}\right)=\tfrac{1}{2}e-\tfrac{1}{2}=\tfrac{1}{2}(e-1)$

11. Les courbes se croisent lorsque $1-y^2=y^2-1 \quad\Leftrightarrow\quad 2=2y^2 \quad\Leftrightarrow\quad y^2=1 \quad\Leftrightarrow\quad y=\pm 1$.

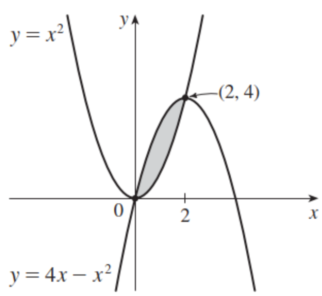
$$\begin{aligned}A&=\int_{-1}^1[(1-y^2)-(y^2-1)]dy\\&=\int_{-1}^1 2(1-y^2)dy\\&=2\cdot 2\int_0^1(1-y^2)dy\\&=4[y-\tfrac{1}{3}y^3]_0^1=4(1-\tfrac{1}{3})=\tfrac{8}{3}\end{aligned}$$





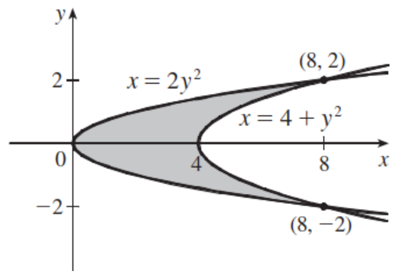
14. $x^2=4x-x^2 \quad\Leftrightarrow\quad 2x^2-4x=0 \quad\Leftrightarrow\quad 2x(x-2)=0 \quad\Leftrightarrow\quad x=0$ ou 2, donc

$$\begin{aligned}A&=\int_0^2[(4x-x^2)-x^2]dx\\&=\int_0^2(4x-2x^2)dx\\&=[2x^2-\tfrac{2}{3}x^3]_0^2\\&=8-\tfrac{16}{3}=\tfrac{8}{3}\end{aligned}$$



17. $2y^2 = 4 + y^2 \iff y^2 = 4 \iff y = \pm 2$, donc

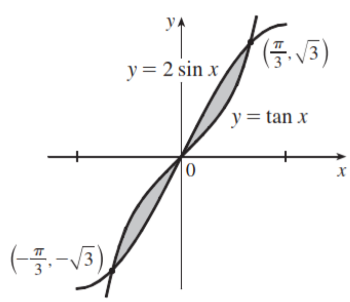
$$\begin{aligned}A &= \int_{-2}^{2} [(4+y^2) - 2y^2]\,dy \\ &= 2\int_0^2 (4-y^2)\,dy \quad \text{[par symétrie]} \\ &= 2\left[4y - \tfrac{1}{3}y^3\right]_0^2 = 2\left(8 - \tfrac{8}{3}\right) = \tfrac{32}{3}\end{aligned}$$



21. Les courbes se croisent lorsque $\tan x = 2\sin x$ (sur l'intervalle $[-\pi/3, \pi/3]$)

$\iff \sin x = 2\sin x\cos x \iff 2\sin x\cos x - \sin x = 0 \iff \sin x(2\cos x - 1) = 0 \iff$ $\sin x = 0$ ou $\cos x = \frac{1}{2} \iff x = 0$ ou $x = \pm\frac{\pi}{3}$

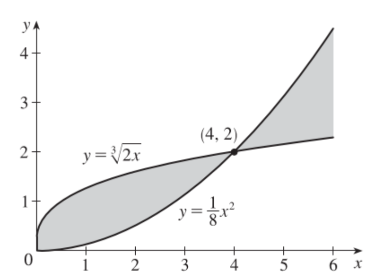
$$\begin{aligned}A &= 2\int_0^{\pi/3} (2\sin x - \tan x)\,dx \quad \text{[par symétrie]} \\ &= 2\left[-2\cos x - \ln|\sec x|\right]_0^{\pi/3} \\ &= 2[(-1 - \ln 2) - (-2 - 0)] \\ &= 2(1 - \ln 2) = 2 - 2\ln 2\end{aligned}$$



23. Les courbes se croisent quand $\sqrt[3]{2x} = \frac{1}{8}x^2 \iff 2x = \dfrac{1}{(2^3)^3}x^6 \iff 2^{10}x = x^6 \iff x^6 - 2^{10}x = 0 \iff$

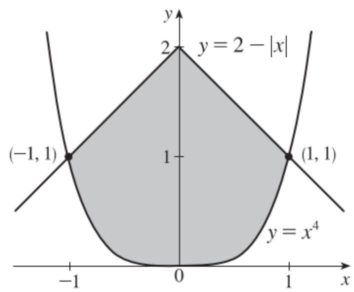
$x(x^5 - 2^{10}) = 0 \iff x = 0$ ou $x^5 = 2^{10} \iff x = 0$ ou $x = 2^2 = 4$, donc pour $0 \le x \le 6$,

$$\begin{aligned}A &= \int_0^4 \left(\sqrt[3]{2x} - \tfrac{1}{8}x^2\right)dx + \int_4^6 \left(\tfrac{1}{8}x^2 - \sqrt[3]{2x}\right)dx = \left[\tfrac{3}{4}\sqrt[3]{2}\,x^{4/3} - \tfrac{1}{24}x^3\right]_0^4 + \left[\tfrac{1}{24}x^3 - \tfrac{3}{4}\sqrt[3]{2}\,x^{4/3}\right]_4^6 \\ &= \left(\tfrac{3}{4}\sqrt[3]{2}\cdot 4\sqrt[3]{4} - \tfrac{64}{24}\right) - (0-0) + \left(\tfrac{216}{24} - \tfrac{3}{4}\sqrt[3]{2}\cdot 6\sqrt[3]{6}\right) - \left(\tfrac{64}{24} - \tfrac{3}{4}\sqrt[3]{2}\cdot 4\sqrt[3]{4}\right) \\ &= 6 - \tfrac{8}{3} + 9 - \tfrac{9}{2}\sqrt[3]{12} - \tfrac{8}{3} + 6 = \tfrac{47}{3} - \tfrac{9}{2}\sqrt[3]{12}\end{aligned}$$



26. On peut observer que les courbes se croisent en $x = \pm 1$ et que, vu que la figure est symétrique, l'aire de la région entre les courbes pour $-1 \le x \le 1$ est le double de l'aire de la région entre les courbes pour $0 \le x \le 1$. Sur ce dernier intervalle, $|x| = x$, donc l'aire cherchée peut se calculer ainsi :

$$
\begin{aligned}
A &= 2\int_0^1 \left[(2-|x|)-x^4\right] dx = 2\int_0^1 \left[(2-x)-x^4\right] dx = 2\left[2x - \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{5}x^5\right]_0^1 \\
&= 2\left[\left(2-\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{5}\right)-0\right] = 2\left(\tfrac{13}{10}\right) = \tfrac{13}{5}
\end{aligned}
$$



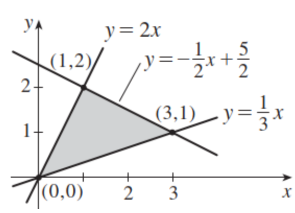
29. a) Aire totale = 12 + 27 = 39

b) $f(x) \le g(x)$ quand $0 \le x \le 2$ et $f(x) \ge g(x)$ quand $2 \le x \le 5$, donc

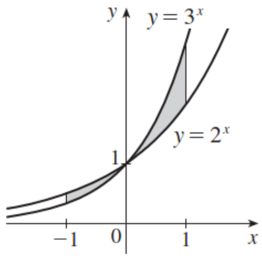
$$
\begin{aligned}
\int_0^5 [f(x)-g(x)]\,dx &= \int_0^2 [f(x)-g(x)]\,dx + \int_2^5 [f(x)-g(x)]\,dx = -\int_0^2 [g(x)-f(x)]\,dx + \int_2^5 [f(x)-g(x)]\,dx \\
&= -(12) + 27 = 15
\end{aligned}
$$

33. L'équation de la droite passant par les points (0, 0) et (3, 1) est $y = \frac{1}{3}x$; celle de la droite passant par les points (0, 0) et (1, 2) est $y = 2x$; celle de la droite passant par les points (3, 1) et (1, 2) est $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$.

$$
\begin{aligned}
A &= \int_0^1 (2x - \tfrac{1}{3}x)dx + \int_1^3 [(-\tfrac{1}{2}x + \tfrac{5}{2}) - \tfrac{1}{3}x]dx \\
&= \int_0^1 \tfrac{5}{3}x\,dx + \int_1^3 (-\tfrac{5}{6}x + \tfrac{5}{2})dx \\
&= [\tfrac{5}{6}x^2]_0^1 + [-\tfrac{5}{12}x^2 + \tfrac{5}{2}x]_1^3 \\
&= \tfrac{5}{6} + (-\tfrac{15}{4} + \tfrac{15}{2}) - (-\tfrac{5}{12} + \tfrac{5}{2}) = \tfrac{5}{2}
\end{aligned}
$$



36.
$$
\begin{aligned}
A &= \int_{-1}^1 |3^x - 2^x| dx = \int_{-1}^0 (2^x - 3^x)dx + \int_0^1 (3^x - 2^x)dx \\
&= \left[\frac{2^x}{\ln^2} - \frac{3^x}{\ln^3}\right]_{-1}^0 + \left[\frac{3^x}{\ln 3} - \frac{2^x}{\ln 2}\right]_0^1 \\
&= \left(\frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 3}\right) - \left(\frac{1}{2\ln 2} - \frac{1}{3\ln 3}\right) + \left(\frac{3}{\ln 3} - \frac{2}{\ln 2}\right) - \left(\frac{1}{\ln 3} - \frac{1}{\ln 2}\right) \\
&= \frac{2-1-4+2}{2\ln 2} + \frac{-3+1+9-3}{3\ln 3} = \frac{4}{3\ln 3} - \frac{1}{2\ln 2}
\end{aligned}
$$



50. Pour $0 \le t \le 10$, $b(t) > d(t)$, donc l'aire entre les courbes est donnée par

$$\int_0^{10}[b(t)-d(t)]dt = \int_0^{10}(2200e^{0,024t} - 1460e^{0,018t})dt = \left[\frac{2200}{0,024}e^{0,024t} - \frac{1460}{0,018}e^{0,018t}\right]_0^{10}$$

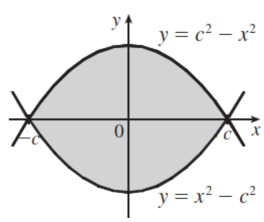
$$= \left(\frac{275\,000}{3}e^{0,24} - \frac{730\,000}{9}e^{0,18}\right) - \left(\frac{275\,000}{3} - \frac{730\,000}{9}\right) \approx 8868 \text{ individus}$$

Cette aire A représente l'augmentation de la population durant une période de dix ans.

59. Supposons tout d'abord que $c > 0$, puisque b peut être remplacé par $-c$ dans les deux équations sans changer les courbes et parce que, si $c = 0$, les courbes ne délimitent pas une région. Le graphique montre que l'aire délimitée A se situe entre $x = -c$ et $x = c$ et, par symétrie, elle est égale à quatre fois l'aire située dans le premier quadrant. L'aire délimitée

est $A = 4\int_0^c (c^2 - x^2)dx = 4[c^2x - \frac{1}{3}x^3]_0^c = 4(c^3 - \frac{1}{3}c^3) = 4(\frac{2}{3}c^3) = \frac{8}{3}c^3$. Donc,

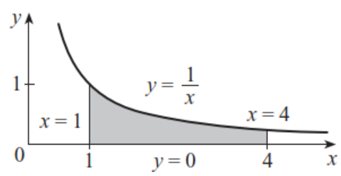
$A = 576 \iff \frac{8}{3}c^3 = 576 \iff c^3 = 216 \iff c = \sqrt[3]{216} = 6$. Il est à remarquer que $c = -6$ est une autre solution, puisque les courbes sont les mêmes.

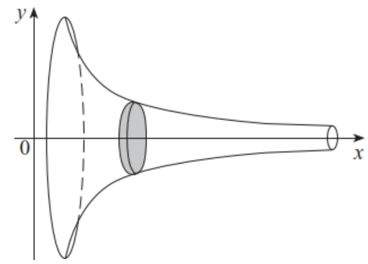


Section 2.2 (p.105)

2. Selon un découpage vertical, la section transversale est un disque de rayon $\frac{1}{x}$, son aire est donc $A(x) = \pi\left(\frac{1}{x}\right)^2 = \pi x^{-2}$.

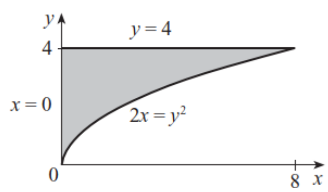
$$\begin{aligned} V &= \int_1^4 A(x)\,dx = \int_1^4 \pi x^{-2}\,dx \\ &= \pi\left[-x^{-1}\right]_1^4 = \pi\left(-\tfrac{1}{4}+1\right) \\ &= \tfrac{3\pi}{4} \end{aligned}$$

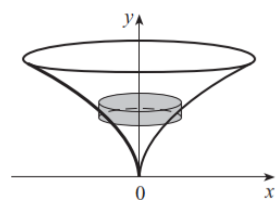




6. Selon un découpage horizontal, la section transversale est un disque de rayon $\frac{1}{2}y^2$, son aire est donc $A(y) = \pi\left(\frac{1}{2}y^2\right)^2 = \frac{1}{4}\pi y^4$.

$$\begin{aligned} V &= \int_0^4 A(y)\,dy = \int_0^4 \pi\left(\tfrac{1}{4}y^4\right)dy \\ &= \tfrac{\pi}{4}\left[\tfrac{1}{5}y^5\right]_0^4 = \tfrac{\pi}{20}(4^5) \\ &= \tfrac{256\pi}{5} \end{aligned}$$

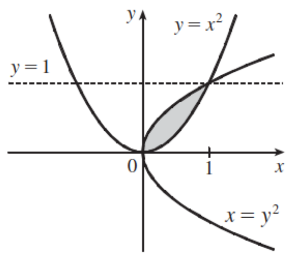


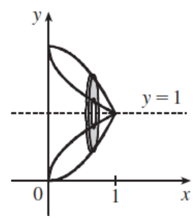


11. Selon un découpage vertical, la section transversale est un disque troué dont le rayon interne est $1-\sqrt{x}$ et le rayon externe $1 - x^2$; son aire est donc

$$\begin{aligned} A(x) &= \pi\left[(1-x^2)^2-(1-\sqrt{x})^2\right] \\ &= \pi\left[(1-2x^2+x^4)-(1-2\sqrt{x}+x)\right] \\ &= \pi\left(x^4-2x^2+2\sqrt{x}-x\right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 A(x)dx = \int_0^1 \pi(x^4-2x^2+2x^{1/2}-x)\ dx \\ &= \pi\left[\tfrac{1}{5}x^5-\tfrac{2}{3}x^3+\tfrac{4}{3}x^{3/2}-\tfrac{1}{2}x^2\right]_0^1 \\ &= \pi\left(\tfrac{1}{5}-\tfrac{2}{3}+\tfrac{4}{3}-\tfrac{1}{2}\right)=\tfrac{11}{30}\pi \end{aligned}$$

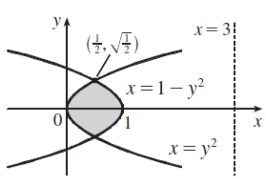


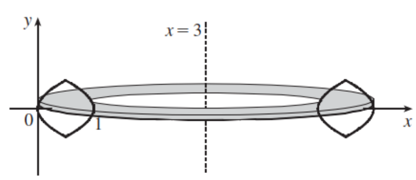


17. Comme les courbes sont symétriques, nous pouvons voir qu'elles se croisent en $x=\frac{1}{2}$; donc, $y^2=\frac{1}{2} \quad\Leftrightarrow\quad y=\pm\sqrt{\frac{1}{2}}$. Selon un découpage horizontal, la section transversale est un disque troué dont le rayon interne est $3 - (1 - y^2)$ et le rayon externe $3 - y^2$; son aire est donc

$$\begin{aligned} A(y) &= \pi\left[(3-y^2)^2-(2+y^2)^2\right] \\ &= \pi\left[(9-6y^2+y^4)-(4+4y^2+y^4)\right] \\ &= \pi(5-10y^2). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V &= \int_{-\sqrt{1/2}}^{\sqrt{1/2}} A(y)\ dy \\ &= 2\int_0^{\sqrt{1/2}} 5\pi(1-2y^2)\ dy \quad \text{[par symétrie]} \\ &= 10\pi\left[y-\tfrac{2}{3}y^3\right]_0^{\sqrt{2}/2} = 10\pi\left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}-\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ &= 10\pi\left(\tfrac{\sqrt{2}}{3}\right)=\tfrac{10}{3}\sqrt{2}\pi \end{aligned}$$





21. $\mathscr{R}_1$ autour de AB (la droite $x = 1$) :

$$V=\int_0^1 A(y)\ dy=\int_0^1 \pi(1-y)^2\ dy=\pi\int_0^1(1-2y+y^2)\ dy=\pi\left[y-y^2+\tfrac{1}{3}y^3\right]_0^1=\tfrac{1}{3}\pi$$

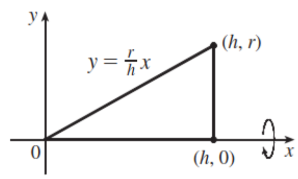
28. $\mathscr{R}_3$ autour de OC (la droite $x = 0$) :

$$V=\int_0^1 A(y)\ dy=\int_0^1 \pi[y^2-(y^4)^2]\ dy=\pi\int_0^1(y^2-y^8)dy=\pi\left[\tfrac{1}{3}y^3-\tfrac{1}{9}y^9\right]_0^1=\pi\left(\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{9}\right)=\tfrac{2}{9}\pi$$

39. L'intégrale $\pi\int_0^\pi \sin x dx = \pi\int_0^\pi \left(\sqrt{\sin x}\right)^2 dx$ décrit le volume du solide résultant de la rotation autour de l'axe des x de la région $\mathscr{R} = \left\{(x, y) \mid 0 \le x \le \pi, 0 \le y \le \sqrt{\sin x}\right\}$ du plan xy.

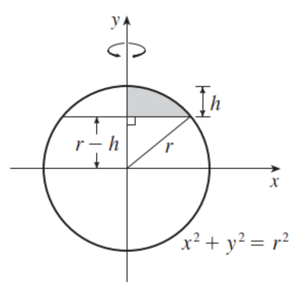
47. Formons un cône droit dont la hauteur est h et dont le rayon de la base est r en effectuant une rotation autour de l'axe des x de la droite $y = \frac{r}{h}x$.

$$\begin{aligned} V &= \pi\int_0^h \left(\frac{r}{h}x\right)^2 dx = \pi\int_0^h \frac{r^2}{h^2}x^2 dx = \pi\frac{r^2}{h^2}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^h \\ &= \pi\frac{r^2}{h^2}\left(\frac{1}{3}h^3\right) = \frac{1}{3}\pi r^2 h \end{aligned}$$



49. $x^2 + y^2 = r^2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = r^2 - y^2$

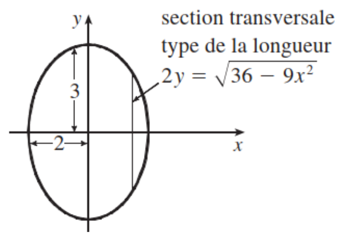
$$\begin{aligned} V &= \pi\int_{r-h}^{r} (r^2 - y^2)dy = \pi\left[r^2 y - \frac{y^3}{3}\right]_{r-h}^{r} = \pi\left\{\left[r^3 - \frac{r^3}{3}\right] - \left[r^2(r-h) - \frac{(r-h)^3}{3}\right]\right\} \\ &= \pi\left\{\tfrac{2}{3}r^3 - \tfrac{1}{3}(r-h)\left[3r^2 - (r-h)^2\right]\right\} \\ &= \tfrac{1}{3}\pi\{2r^3 - (r-h)[3r^2 - (r^2 - 2rh + h^2)]\} \\ &= \tfrac{1}{3}\pi\{2r^3 - (r-h)[2r^2 + 2rh - h^2]\} \\ &= \tfrac{1}{3}\pi(2r^3 - 2r^3 - 2r^2h + rh^2 + 2r^2h + 2rh^2 - h^3) \\ &= \tfrac{1}{3}\pi(3rh^2 - h^3) = \tfrac{1}{3}\pi h^2(3r - h) = \pi h^2\left(r - \frac{h}{3}\right) \end{aligned}$$



55. Soit l la longueur d'une cathète du triangle rectangle isocèle et soit $2y$ l'hypoténuse,

alors $l^2 + l^2 = (2y)^2 \quad \Rightarrow \quad 2l^2 = 4y^2 \quad \Rightarrow \quad l^2 = 2y^2$.

$$V = \int_{-2}^{2} A(x)dx = 2\int_0^2 A(x)dx = 2\int_0^2 \tfrac{1}{2}(l)(l)dx = 2\int_0^2 y^2 dx$$
$$= 2\int_0^2 \tfrac{1}{4}(36 - 9x^2)dx = \tfrac{9}{2}\int_0^2 (4 - x^2)dx$$
$$= \tfrac{9}{2}\left[4x - \tfrac{1}{3}x^3\right]_0^2 = \tfrac{9}{2}\left(8 - \tfrac{8}{3}\right) = 24$$



Section 2.4 (p.117)

2. $f_{moy} = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \dfrac{1}{4-0}\int_0^4 \sqrt{x}\,dx = \dfrac{1}{4}\left[\dfrac{2}{3}x^{3/2}\right]_0^4 = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{2}{3}\cdot 8\right) = \dfrac{4}{3}$

7. $h_{moy} = \frac{1}{\pi-0}\displaystyle\int_0^{\pi}\cos^4 x\,\sin x\,dx = \frac{1}{\pi}\int_1^{-1} u^4(-du)\ [u = \cos x,\ du = -\sin x\,dx]$

$= \frac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-1}^{1} u^4 du = \frac{1}{\pi}\cdot 2\int_0^1 u^4 du$ [selon le théorème 1.7.7 a)] $= \frac{2}{\pi}[\frac{1}{5}u^5]_0^1 = \frac{2}{5\pi}$

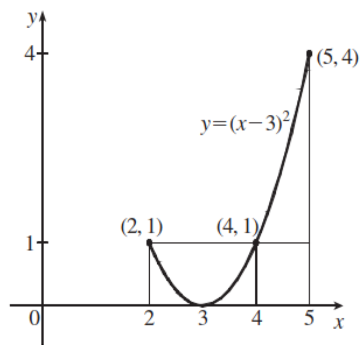
9. a) $f_{moy} = \dfrac{1}{5-2}\displaystyle\int_2^5 (x-3)^2 dx = \dfrac{1}{3}\left[\dfrac{1}{3}(x-3)^3\right]_2^5$

$= \frac{1}{9}\left[2^3 - (-1)^3\right] = \frac{1}{9}(8+1) = 1$

b) $f(c) = f_{moy} \iff (c-3)^2 = 1 \iff$

$c - 3 = \pm 1 \iff c = 2$ ou 4

c)

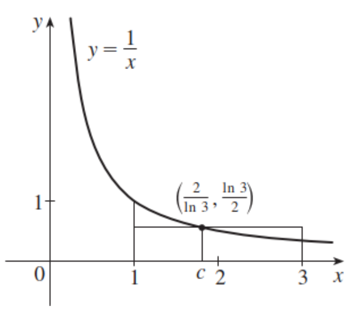


10. a) $f_{moy} = \dfrac{1}{3-1}\displaystyle\int_1^3 \dfrac{1}{x}dx = \frac{1}{2}[\ln|x|]_1^3$

$= \frac{1}{2}(\ln 3 - \ln 1) = \frac{1}{2}\ln 3$

b) $f(c) = f_{moy} \iff \frac{1}{c} = \frac{1}{2}\ln 3 \iff c = 2/\ln 3 \approx 1{,}820$

c)



14. Il est nécessaire que $\dfrac{1}{b-0}\displaystyle\int_0^b f(x)dx = 3$. Le membre de gauche de cette équation est égal à

$\frac{1}{b}\displaystyle\int_0^b (2+6x-3x^2)dx = \frac{1}{b}[2x+3x^2-x^3]_0^b = 2+3b-b^2$; nous devons donc résoudre l'équation

$2+3b-b^2 = 3 \iff b^2 - 3b + 1 = 0 \quad b = \dfrac{3 \pm\sqrt{(-3)^2 - 4\cdot 1\cdot 1}}{2\cdot 1} = \dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$. Les deux racines sont à retenir puisqu'elles sont toutes

deux positives.

15. À l'aide d'interprétations géométriques, évaluez la valeur des intégrales.

$$\int_0^8 f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx + \int_2^3 f(x)dx + \int_3^4 f(x)dx + \int_4^6 f(x)dx + \int_6^7 f(x)dx + \int_7^8 f(x)dx$$
$$= -\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} + 1 + 4 + \tfrac{3}{2} + 2 = 9$$

Il s'ensuit que la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle [0, 8] = $f_{moy} = \frac{1}{8-0}\int_0^8 f(x)dx = \frac{1}{8}(9) = \frac{9}{8}$

17. Posons $t = 0$ et $t = 12$ correspondant respectivement à 9 h et 21 h.

$$T_{moy} = \tfrac{1}{12-0}\int_0^{12}[10 + 8\sin \tfrac{1}{12}\pi t]dt = \tfrac{1}{12}[10t - 8\cdot\tfrac{12}{\pi}\cos \tfrac{1}{12}\pi t]_0^{12}$$
$$= \tfrac{1}{12}[10\cdot 12 + 8\cdot\tfrac{12}{\pi} + 8\cdot\tfrac{12}{\pi}] = \left(10 + \tfrac{16}{\pi}\right)°C \approx 15{,}1°C$$

20. $T_{moy} = \frac{1}{30-0}\int_0^{30} T(t)dt = \frac{1}{30}\int_0^{30}(20 + 75e^{-kt})dt = \frac{1}{30}[20t - \frac{75}{k}e^{-kt}]_0^{30} = \frac{1}{30}[600 - \frac{75}{k}e^{-30k}) - (0 - \frac{75}{k})]$

$= \frac{1}{30}(600 - \frac{75}{k}\cdot\frac{41}{75} + \frac{75}{k}) = \frac{1}{30}(600 + \frac{34}{k}) = 20 + \frac{34}{30k} \approx 76{,}7°C$