

## Devoir 6 — Solutions

**Question 1** (25 points)

La vitesse d'une particule se déplaçant sur une trajectoire rectiligne est  $v(t) = t^2 e^{-t}$  m/s après  $t$  secondes. Quelle distance la particule parcourt-elle dans les 2 premières secondes ?

On remarque que la fonction  $v(t)$  est toujours positive. Ainsi, la distance  $D$  parcourue par la particule dans les 2 premières secondes est

$$D = \int_0^2 v(t) dt = \int_0^2 (t^2 e^{-t}) dt$$

En posant  $u = t^2 \Rightarrow du = 2t dt$  et  $dv = e^{-t} dt \Rightarrow v = -e^{-t}$ , on a

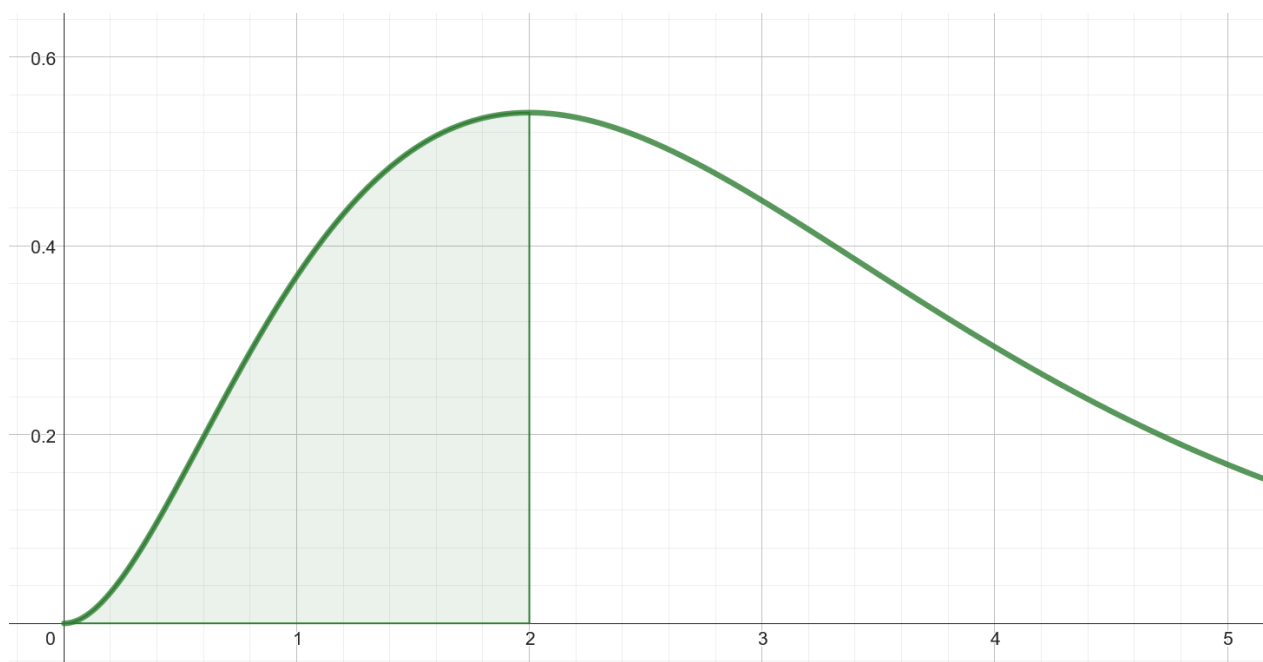
$$\begin{aligned} D &= \int_0^2 (t^2 e^{-t}) dt \\ &= t^2 (-e^{-t}) \Big|_0^2 - \int_0^2 -e^{-t} \cdot 2t dt \\ &= -2^2 e^{-2} + 2 \int_0^2 t e^{-t} dt \end{aligned}$$

Maintenant, en posant  $u = t \Rightarrow du = dt$  et  $dv = e^{-t} dt \Rightarrow v = -e^{-t}$ , on a

$$\begin{aligned} \int_0^2 t e^{-t} dt &= t (-e^{-t}) \Big|_0^2 - \int_0^2 -e^{-t} dt \\ &= -2e^{-2} + \int_0^2 e^{-t} dt \\ &= -\frac{2}{e^2} + (-e^{-t} \Big|_{t=0}^{t=2}) \\ &= -\frac{2}{e^2} - e^{-2} + e^0 \\ &= 1 - \frac{3}{e^2} \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} D &= -2^2 e^{-2} + 2 \int_0^2 t e^{-t} dt \\ &= -\frac{4}{e^2} + 2 \left( 1 - \frac{3}{e^2} \right) \\ &= 2 - \frac{10}{e^2} \approx 0,647 \end{aligned}$$



## Question 2 (25 points)

Quelle est la valeur moyenne de la fonction

$$f(x) = \frac{\sin^2(x) \cos^3(x) \tan(x)}{\sec(x) \operatorname{cosec}(x) \cotan(x)}$$

sur l'intervalle  $[0, \pi]$  ?

Selon une formule vue à la section 2.4, la valeur moyenne de  $f(x)$  sur  $[0, \pi]$  est

$$f_{\text{moy}} = \frac{1}{\pi - 0} \int_0^\pi f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(x) dx$$

On remarque que

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin^2(x) \cdot \cos^3(x) \cdot \tan(x) \cdot \frac{1}{\sec(x)} \cdot \frac{1}{\operatorname{cosec}(x)} \cdot \frac{1}{\cotan(x)} \\ &= \sin^2(x) \cdot \cos^3(x) \cdot \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \cdot \cos(x) \cdot \sin(x) \cdot \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \\ &= \sin^5(x) \cos^2(x) \end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} \sin^5(x) &= \sin^4(x) \sin(x) \\ &= (\sin^2(x))^2 \sin(x) \\ &= (1 - \cos^2(x))^2 \sin(x) \\ &= (1 - 2\cos^2(x) + \cos^4(x)) \sin(x), \end{aligned}$$

d'où

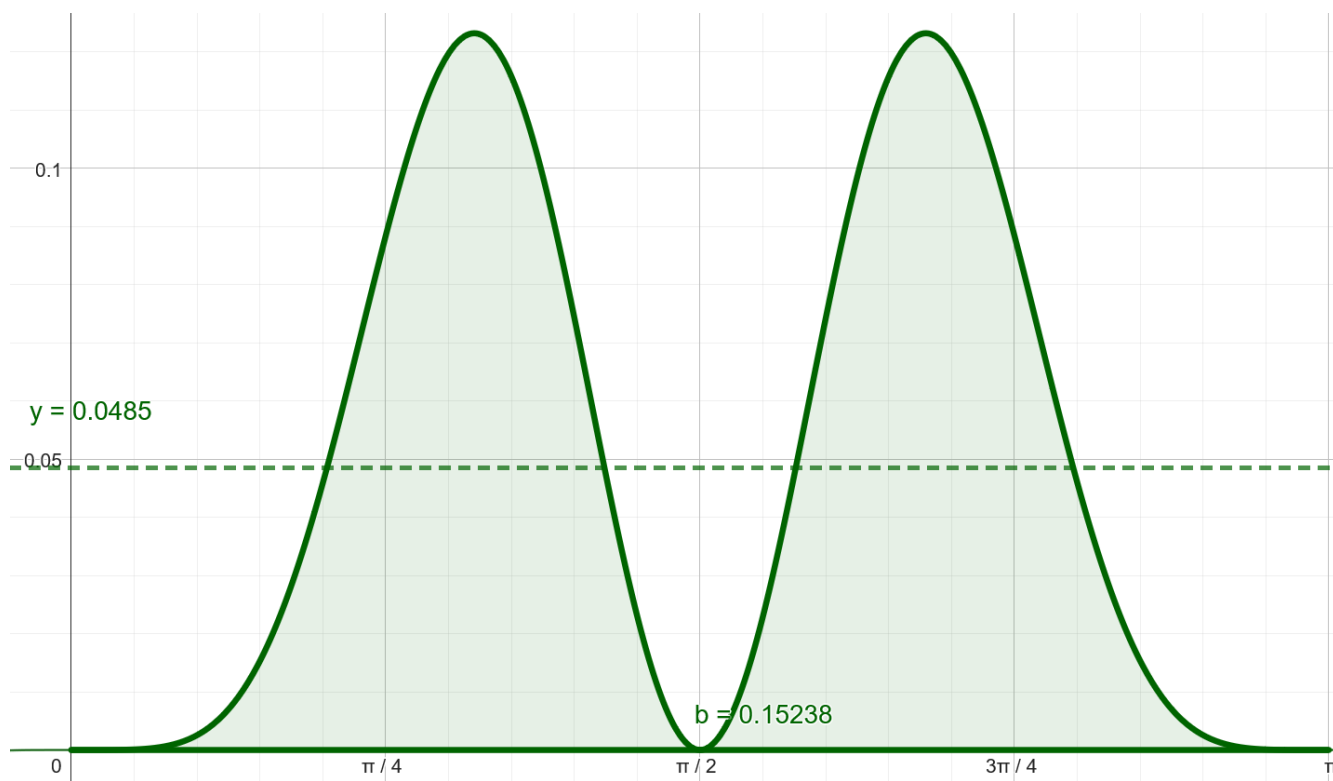
$$\begin{aligned} \sin^5(x) \cos^2(x) &= ((1 - 2\cos^2(x) + \cos^4(x)) \sin(x)) \cos^2(x) \\ &= (\cos^2(x) - 2\cos^4(x) + \cos^6(x)) \sin(x) \end{aligned}$$

Ainsi,

$$f_{\text{moy}} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (\cos^2(x) - 2\cos^4(x) + \cos^6(x)) \sin(x) dx$$

En posant  $u = \cos(x) \Rightarrow du = -\sin(x) dx$ , on a  $x = 0 \Rightarrow u = \cos(0) = 1$  et  $x = \pi \Rightarrow \cos(\pi) = -1$ . Ainsi,

$$\begin{aligned} f_{\text{moy}} &= \frac{1}{\pi} \int_1^{-1} -(u^2 - 2u^4 + u^6) du \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 (u^2 - 2u^4 + u^6) du \\ &= \frac{1}{\pi} \left( \frac{u^3}{3} - \frac{2u^5}{5} + \frac{u^7}{7} \right) \Big|_{u=-1}^{u=1} \\ &= \frac{1}{\pi} \left[ \left( \frac{1}{3} - \frac{2}{5} + \frac{1}{7} \right) - \left( -\frac{1}{3} + \frac{2}{5} - \frac{1}{7} \right) \right] \\ &= \frac{16}{105\pi} \approx 0,0485 \end{aligned}$$



**Question 3** (25 points)

Résoudre l'intégrale

$$\int \cos(x) \ln(\sin(x)) \, dx$$

En posant  $u = \ln(\sin(x)) \Rightarrow du = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} \, dx$  et  $dv = \cos(x) \, dx \Rightarrow v = \sin(x)$ , on a

$$\begin{aligned} \int \cos(x) \ln(\sin(x)) \, dx &= \ln(\sin(x)) \sin(x) - \int \sin(x) \frac{\cos(x)}{\sin(x)} \, dx \\ &= \ln(\sin(x)) \sin(x) - \int \cos(x) \, dx \\ &= \ln(\sin(x)) \sin(x) - \sin(x) + C \end{aligned}$$

**Question 4** (25 points)

Évaluez l'aire de la région délimitée par les courbes

$$y = \frac{\tan^2(x)}{2} \quad \text{et} \quad y = \sin^2(x),$$

où  $x \in [0, \pi/4]$

On remarque que pour  $x \in [0, \pi/4]$ ,  $\sin^2(x) \geq \tan^2(x)/2$ . Ainsi, l'aire cherchée est

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/4} \left( \sin^2(x) - \frac{\tan^2(x)}{2} \right) dx &= \int_0^{\pi/4} \sin^2(x) dx - \int_0^{\pi/4} \left( \frac{\tan^2(x)}{2} \right) dx \\ &= \int_0^{\pi/4} \left( \frac{1 - \cos(2x)}{2} \right) dx - \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} (\sec^2(x) - 1) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} 1 dx - \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} \cos(2x) dx - \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} \sec^2(x) dx + \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} 1 dx \\ &= \int_0^{\pi/4} 1 dx - \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} \cos(2x) dx - \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} \sec^2(x) dx \\ &= \left( x \Big|_{x=0}^{x=\pi/4} \right) - \left( \frac{\sin(2x)}{4} \Big|_{x=0}^{x=\pi/4} \right) - \left( \frac{\tan(x)}{2} \Big|_{x=0}^{x=\pi/4} \right) \\ &= \left( \frac{\pi}{4} - 0 \right) - \left( \frac{\sin(2\pi/4)}{4} - \frac{\sin(0)}{4} \right) - \left( \frac{\tan(\pi/4)}{2} - \frac{\tan(0)}{2} \right) \\ &= \frac{\pi}{4} - 0 - \frac{1}{4} + 0 - \frac{1}{2} + 0 \\ &= \frac{\pi - 3}{4} \approx 0,0354 \end{aligned}$$

