Devoir 1 — Solutions

Question 1 (8 + 8 = 16 points)

Écrivez la somme à l'aide de la notation sigma.

a) $\frac{5}{4}+\frac{8}{8}+\frac{11}{16}+\frac{14}{32}+\frac{17}{64}+\frac{20}{128}$

Directement,

$$\sum_{n=1}^{6} \frac{3n+2}{2^{n+1}}.$$

À noter que d'autres formes sont possibles, par exemple

$$\sum_{n=2}^{7} \frac{3n-1}{2^{n}}, \quad \sum_{n=0}^{5} \frac{3n+5}{2^{n+2}}.$$

b) $1-2x+3x^2-4x^3+5x^4-6x^5+7x^6-8x^7+9x^8-10x^9+11x^{10}$

Directement,

$$\sum_{n=1}^{11} (-1)^{n-1} \cdot nx^{n-1}.$$

Ou encore

$$\sum_{n=1}^{11} n \cdot (-x)^{n-1}, \quad \sum_{n=0}^{10} (n+1) \cdot (-x)^{n}.$$

Question 2 (10 + 4 = 14 points)

a) Calculez la somme $\sum_{i=1}^{n} i(5+i)$

Directement,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} i(5+i) &= \sum_{i=1}^{n} (5i + i^2) \\
&= \sum_{i=1}^{n} 5i + \sum_{i=1}^{n} i^2 \\
&= 5\sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} i^2 \\
&= 5 \cdot \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\
&= \frac{n(n+1)}{6} \cdot (15 + 2n + 1) \\
&= \frac{n(n+1)}{6} \cdot (16 + 2n) \\
&= \frac{n(n+1)(n+8)}{3} \\
&= \frac{n^3 + 9n^2 + 8n}{3}.
\end{aligned}$$

b) Que vaut cette somme lorsque $n = 100$?

Directement,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{100} i(5+i) &= \left.\frac{n(n+1)(n+8)}{3}\right|_{n=100} \\
&= \frac{100 \cdot 101 \cdot 108}{3} \\
&= 363\,600
\end{aligned}$$

Question 3 (10 + 10 = 20 points)

Déterminez si la suite de terme général a_n converge ou diverge. Si elle converge, trouvez sa limite.

a) $a_n = \dfrac{n^3}{n^2 + 2n}$

Directement,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{n^2+2n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{n^2\left(1+\underbrace{\left(\frac{2}{n}\right)}_{\to 0}\right)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{1+0} \\
&= \infty.
\end{aligned}$$

Ainsi, la suite diverge.

b) $a_n = \sqrt[n]{e^{2+3n}}$

Directement,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{e^{2+3n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{e^2 \cdot e^{3n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(e^{2/n} \cdot e^{3n/n}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(e^{\overbrace{2/n}^{\to 0}} \cdot e^3\right) \\
&= e^0 \cdot e^3 \\
&= e^3.
\end{aligned}$$

Ainsi, la suite converge vers $e^3 \approx 20{,}0855$.

Question 4 (10 + 10 + 10 = 30 points)

Déterminez si la série converge ou diverge. Si elle converge, trouvez sa somme.

a) $3+\frac{6}{5}+\frac{12}{25}+\frac{24}{125}+\frac{48}{625}+\frac{96}{3\,125}+\cdots$

Il s'agit d'une série géométrique dont le premier terme est $a=3$ et de raison $r=2/5$. Autrement dit, la série est

$$\sum_{n=1}^{\infty} 3\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}.$$

Puisque $|r|=0{,}4<1$, alors la série converge.

Selon le résultat 6.2.4 (p.316), sa somme est

$$\begin{aligned}\frac{a}{1-r}&=\frac{3}{1-\frac{2}{5}}\\&=\frac{3}{3/5}\\&=5.\end{aligned}$$

b) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\pi+e}{\sqrt{30}}\right)^{n}$

Il s'agit d'une série géométrique de raison $r=\frac{\pi+e}{\sqrt{30}}\approx 1{,}0699$. Puisque $|r|\approx 1{,}0699\geq 1$, alors la série est diverge.

c) $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(\frac{2n}{n+1}\right)$

Selon le théorème 6.1.9,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\ln\left(\frac{2n}{n+1}\right)&=\ln\left(\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{n+1}\right)\\&=\ln\left(\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{n\left(1+\underbrace{\left(\frac{1}{n}\right)}_{\to 0}\right)}\right)\\&=\ln\left(\lim_{n\to\infty}\frac{2}{1+0}\right)\\&=\ln(2)\end{aligned}$$

Puisque $\lim_{n\to\infty}\ln\left(\frac{2n}{n+1}\right)=\ln(2)\approx 0{,}693\neq 0$, alors selon le critère de divergence (p.319), la série diverge.

Question 5 (4 + 8 + 8 = 20 points)

Un patient prend 250 mg d'un médicament tous les jours à la même heure. Juste avant qu'il prenne chaque comprimé, il reste encore 20 % du médicament dans son corps.

Soit Q_n la quantité du médicament présent dans le corps après la prise du n-ième comprimé (en grammes). Juste avant la prise du comprimé au jour $n+1$, la quantité est réduite à 20 % de la concentration du jour précédent, c'est-à-dire $0{,}2 \cdot Q_n$. Avec la prise du comprimé au jour $n+1$, la quantité augmente de 250 mg. Ainsi, on a l'équation de récurrence

$$Q_{n+1} = 250 + 0{,}2 \cdot Q_n.$$

a) Quelle quantité du médicament y a-t-il dans son corps immédiatement après la prise du premier comprimé ? Immédiatement après le second ? Immédiatement après le 3e ?

Directement, $Q_1 = 250$.

Si on pose $n \in \{1, 2\}$ dans l'équation de récurrence, on obtient

$$\begin{aligned} Q_2 &= 250 + 0{,}2 \cdot Q_1 \\ &= 250 + 0{,}2 \cdot 250 \\ &= 300 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} Q_3 &= 250 + 0{,}2 \cdot Q_2 \\ &= 250 + 0{,}2 \cdot (250 + 0{,}2 \cdot 250) \\ &= 250 + 0{,}2 \cdot 250 + 0{,}2^2 \cdot 250 \\ &= 310 \end{aligned}$$

b) Quelle quantité du médicament y a-t-il dans son corps immédiatement après la prise du n-ième comprimé ?

Après la prise du n-ième comprimé, la quantité du médicament dans le corps est

$$Q_n = 250 + 0{,}2 \cdot 250 + 0{,}2^2 \cdot 250 + 0{,}2^3 \cdot 250 + \cdots + 0{,}2^{n-1} \cdot 250$$

Il s'agit de la n-ième somme partielle d'une série géométrique de premier terme $a = 250$ et de raison $r = 0{,}2$. En effet,

$$Q_n = \sum_{i=1}^{n} 250 \cdot 0{,}2^{i-1}.$$

Ainsi, selon la formule 6.2.3 (p.316), sa valeur est

$$\begin{aligned} Q_n &= \frac{250(1 - 0{,}2^n)}{1 - 0{,}2} \\ &= \frac{250 \cdot (1 - 0{,}2^n)}{0{,}8} \\ &= 312{,}5 \cdot (1 - 0{,}2^n). \end{aligned}$$

c) Montrez que si la prise du médicament se prolonge sur une longue durée, la quantité du médicament restant dans son corps à long terme après la prise d'un comprimé se rapproche de 312,5 mg.

On cherche

$$\lim_{n\to\infty} Q_n = \sum_{i=1}^{\infty} 250 \cdot 0{,}2^{i-1}.$$

Il s'agit d'une série géométrique de premier terme $a = 250$ et de raison $r = 0{,}2$. Puisque $|r| = 0{,}2 < 1$, alors cette série converge vers

$$\frac{a}{1-r} = \frac{250}{1-0{,}2} = 312{,}5.$$

En bonus, voici une représentation graphique continue de la quantité de médicament dans le corps, où l'abscisse représente le temps (en jours) et l'ordonnée la quantité de médicament dans le corps (en mg).

Les sauts en pointillés illustrent la prise du médicament (donc +250 mg).

Les segments de courbes représentent la diminution du médicament dans le corps avec le temps. À noter que ces diminutions suivent des fonctions exponentielles de base 0,2.

Par exemple, pour $x \in \,]1, 2[$, la fonction est $f_1(x) = 250 \cdot 0{,}2^{x-1}$.

Pour $x \in \,]2, 3[$, la fonction est $f_2(x) = 300 \cdot 0{,}2^{x-2}$.

De façon générale, pour $x \in \,]n, n+1[$ avec $n \in \mathbb{N}$, la fonction est $f_n(x) = \underbrace{312{,}5 \cdot (1-0{,}2^n)}_{\text{formule trouvée en b)}} \cdot 0{,}2^{x-n}$.