Calcul différentiel (201-SN2-RE) – Sylvain Bérubé – Hiver 2025

Minitest 4 — Solutions

Question 1 (30 points)

Soit

$$f(x) = (x^2 + 2\,x - 8)^8$$

Évaluer $f'(x)$ et factoriser au maximum cette fonction.

$$\begin{aligned} f'(x) &= ((x^2 + 2\,x - 8)^8)' \\ &= 8(x^2 + 2\,x - 8)^7 \cdot (x^2 + 2\,x - 8)' \\ &= 8\big((x+4)(x-2)\big)^7 \cdot (2x+2) \\ &= 16(x+4)^7(x-2)^7(x+1) \end{aligned}$$

Question 2 (30 points)

Soit

$$f(x) = \frac{3}{x}$$

Calculer $f'''(x)$.

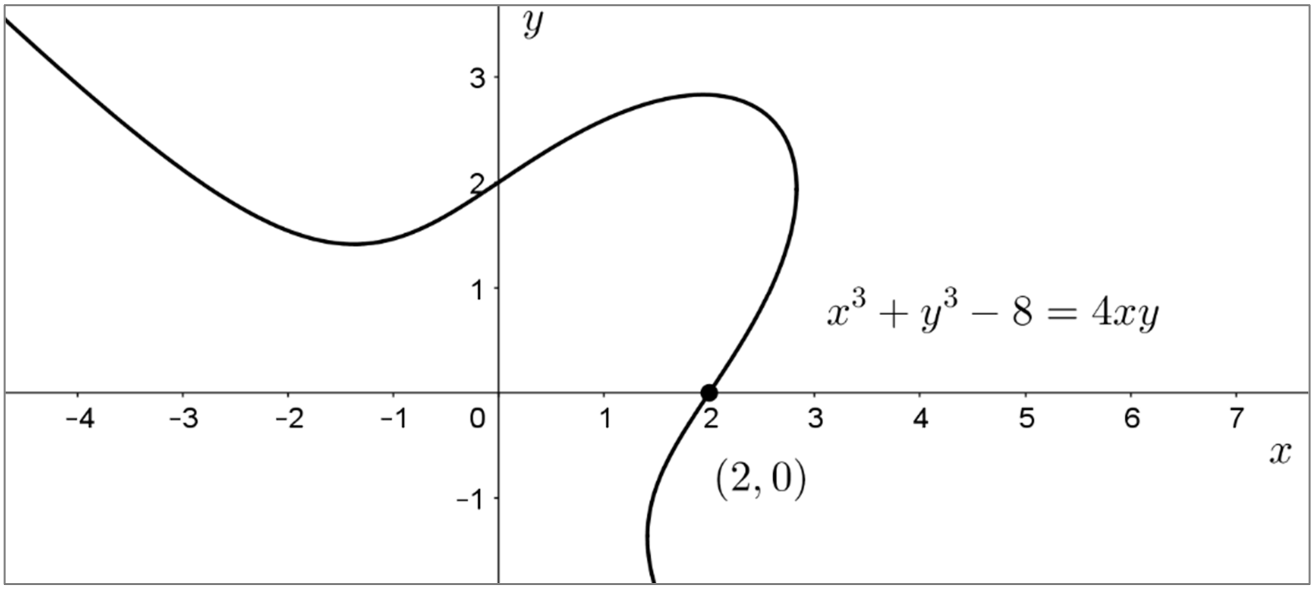
$$f'(x) = (3x^{-1})' = -3\mathrm{x}^{-2}$$

$$f''(x) = (-3\mathrm{x}^{-2})' = (-3) \cdot (-2) \cdot \mathrm{x}^{-3} = 6x^{-3}$$

$$f'''(x) = (6x^{-3})' = (6) \cdot (-3) \cdot \mathrm{x}^{-4} = -18x^{-4} = -\frac{18}{x^4}$$

Question 3 (30 + 10 = 40 points)

Voici la courbe définie par l'équation $x^3 + y^3 - 8 = 4xy$.



a) Démontrer que $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{4y - 3x^2}{3y^2 - 4x}$.

Directement,

$$\frac{d}{dx}(x^3 + y^3 - 8) = \frac{d}{dx}(4xy)$$

$$\Longrightarrow 3x^2 + 3y^2\frac{dy}{dx} = 4x\frac{dy}{dx} + 4y$$

$$\Longrightarrow 3y^2\frac{dy}{dx} - 4x\frac{dy}{dx} = 4y - 3x^2$$

$$\Longrightarrow \frac{dy}{dx}(3y^2 - 4x) = 4y - 3x^2$$

$$\Longrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{4y - 3x^2}{3y^2 - 4x}$$

b) Déterminer l'équation de la droite tangente à cette courbe au point $(2, 0)$.

Soit $T(x) = mx + b$ la droite tangente recherchée. La pente de la droite tangente est

$$m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{\substack{x=2\\y=0}} = \frac{4 \cdot 0 - 3 \cdot 2^2}{3 \cdot 0^2 - 4 \cdot 2} = \frac{-12}{-8} = 3/2.$$

Puisque le point $(2, 0)$ appartient à la droite tangente, alors

$$0 = \frac{3}{2} \cdot 2 + b \Longrightarrow b = -3.$$

Par conséquent, l'équation de la droite tangente est

$$T(x) = \frac{3x}{2} - 3.$$