

Calcul différentiel (201-SN2-RE) – Sylvain Bérubé – Hiver 2025
Minitest 8 — Solutions

Question 1 (100 points)

Soit la fonction

$$f(x) = \frac{10x + 20}{(x - 3)^2}$$

laquelle a pour dérivée première et pour dérivée seconde les fonctions

$$f'(x) = \frac{-10x - 70}{(x - 3)^3} \quad \text{et} \quad f''(x) = \frac{20x + 240}{(x - 3)^4}.$$

Faites l'étude complète de la fonction $f(x)$ en effectuant les six étapes vues en classe et en utilisant une notation appropriée. L'esquisse de la fonction $f(x)$ doit contenir, s'il y a lieu, l'identification de l'ordonnée à l'origine, des zéros, des asymptotes, des extrémums relatifs et des points d'inflexion.

① Domaine, ordonnée à l'origine et zéros

Domaine

$$(x - 3)^2 = 0 \Rightarrow x = 3$$

$$\text{Dom}_f = \mathbb{R} \setminus \{3\}.$$

Note : C'est ok d'écrire directement $\text{Dom}_f = \mathbb{R} \setminus \{3\}$.

Ordonnée à l'origine

$$f(0) = \frac{10 \cdot 0 + 20}{(0 - 3)^2} = \frac{20}{9} \approx 2,22$$

Zéros de $f(x)$

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ \Rightarrow 10x + 20 &= 0 \\ \Rightarrow x &= -2. \end{aligned}$$

② Asymptotes verticales et horizontales

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{10x + 20}{(x - 3)^2} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x \left(10 + \frac{20}{x} \right)}{x^2 \left(1 - \frac{3}{x} \right)^2} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{10 + \frac{20}{x}}{x \left(1 - \frac{3}{x} \right)^2} \right) \quad \left(\text{forme } \frac{10 + \frac{20}{\infty}}{\infty \left(1 - \frac{3}{\infty} \right)^2} = \frac{10}{\infty} = 0 \right)$$

$$= 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{10x + 20}{(x - 3)^2} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{10 + \frac{20}{x}}{x \left(1 - \frac{3}{x} \right)^2} \right) \quad \left(\text{forme } \frac{10 + \frac{20}{-\infty}}{-\infty \left(1 - \frac{3}{-\infty} \right)^2} = \frac{10}{-\infty} = 0 \right)$$

$$= 0$$

A.H. : $y = 0$.

Note : C'est ok d'écrire directement $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{10x + 20}{(x - 3)^2} \right) = 0$ après avoir calculé la première limite au complet.

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \left(\frac{10x + 20}{(x - 3)^2} \right) = \infty \quad (\text{forme } \frac{50}{0^+})$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \left(\frac{10x + 20}{(x - 3)^2} \right) = \infty \quad (\text{forme } \frac{50}{0^+})$$

A.V. : $x = 3$.

③ Valeurs critiques de $f(x)$

$\text{Dom}_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{3\}$.

$$f'(x) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{-10x - 70}{(x - 3)^3} = 0$$

$$\Rightarrow -10x - 70 = 0$$

$$\Rightarrow x = -7$$

Ainsi, la valeur critique de $f(x)$ est $x = -7$.

④ Valeurs critiques de $f'(x)$

$\text{Dom}_{f''} = \mathbb{R} \setminus \{3\}$.

$$f''(x) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{20x + 240}{(x - 3)^4} = 0$$

$$\Rightarrow 20x + 240 = 0$$

$$\Rightarrow x = -12$$

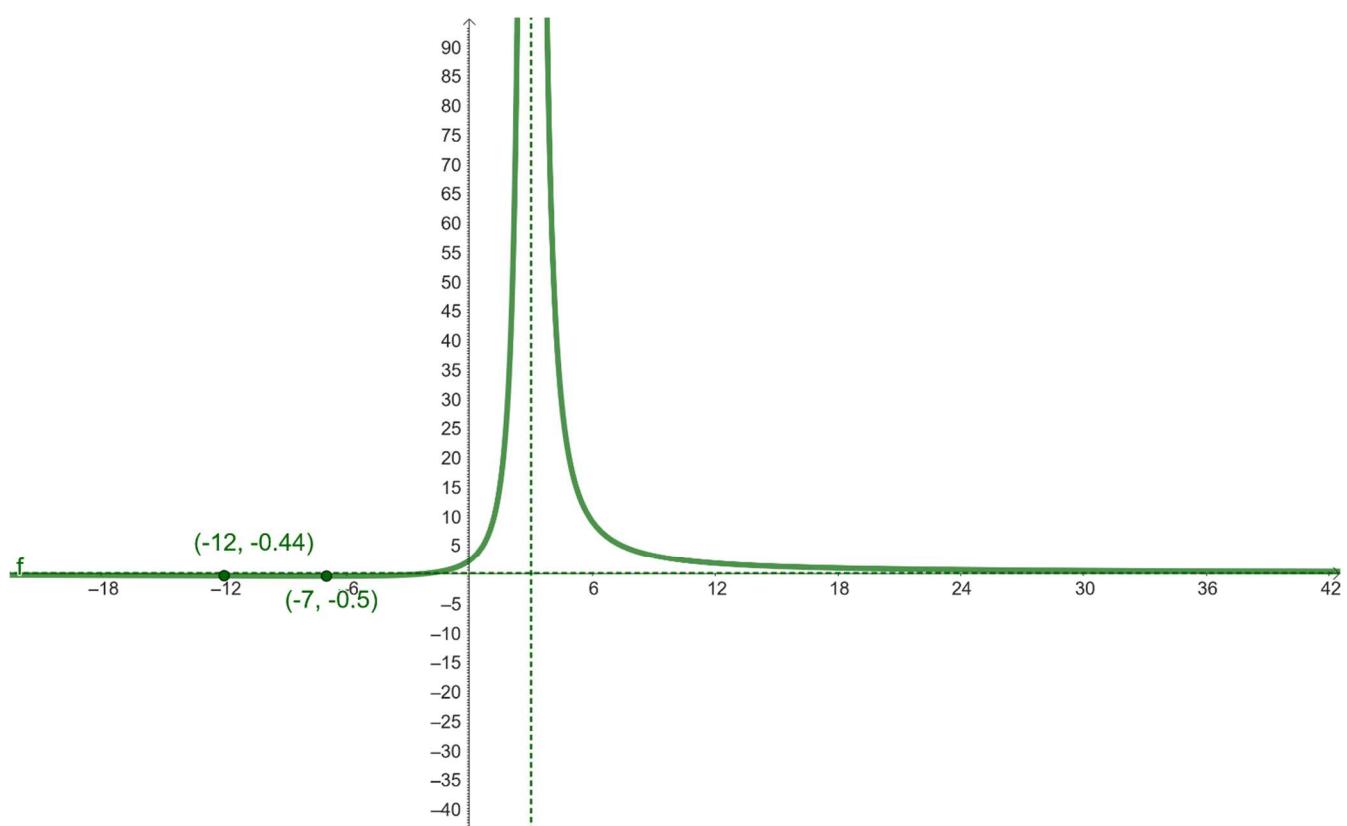
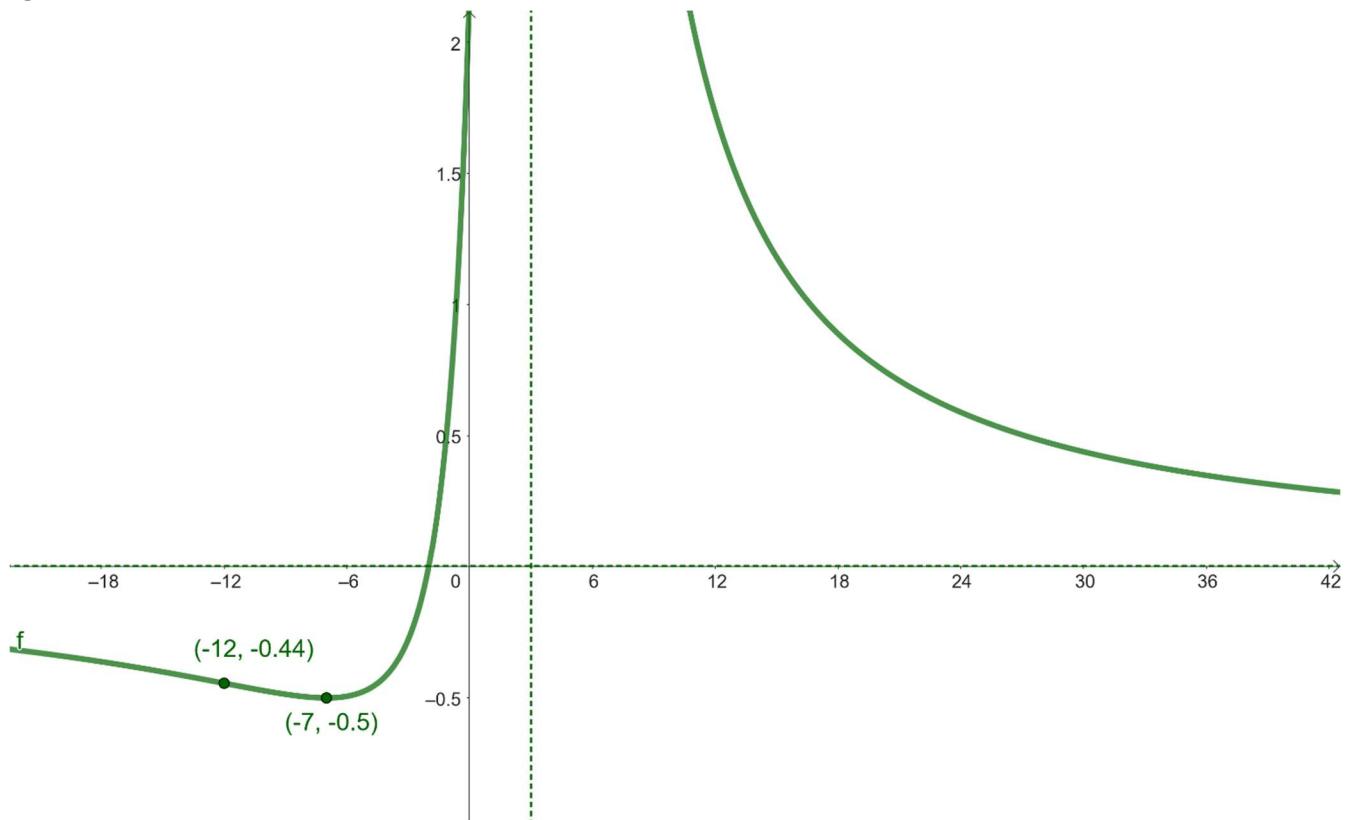
Ainsi, la valeur critique de $f'(x)$ est $x = 12$.

⑤ Tableau de signes

x	$] -\infty, -12[$	-12	$] -12, -7[$	-7	$] -7, 3[$	3	$] 3, \infty[$
$f'(x)$	—	—	—	0	+	↗	—
$f''(x)$	—	0	+	+	+	↗	+
$f(x)$		-0,44		-0,50		↗	
		point d'inflexion		minimum relatif		asymptote verticale	

Note : Calculer les valeurs de $f(x)$ pour les points d'inflexion et les extrema.

⑥ Esquisse



Note : C'est ok de ne produire qu'un seul tableau. Ne pas oublier d'indiquer les points importants !