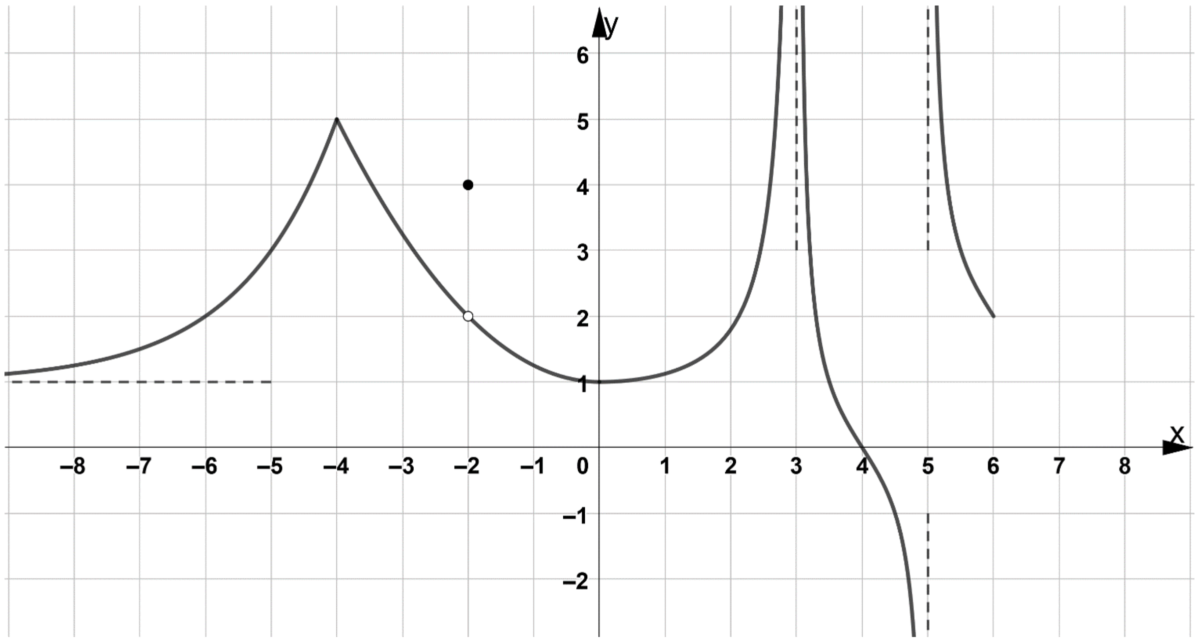
Calcul différentiel (201-SN2-RE) – Sylvain Bérubé – Hiver 2025

Examen 1 – Exercices préparatoires supplémentaires (Solutions)

1. Soit la fonction $f(x)$ représentée par la courbe ci-dessous.



a) Quelle est l'ordonnée à l'origine de la fonction $f(x)$?

$f(0) = 1$.

b) Combien de zéros la fonction $f(x)$ a-t-elle ? Identifiez-les, s'il y en a, directement sur la courbe de la fonction.

Nombre de zéros : 1 ($x = 4$).

c) Indiquez, s'il y en a, les valeurs $x \in]-\infty, 6]$ pour lesquelles la fonction $f(x)$ n'est pas continue.

La fonction est discontinue en $x \in \{-2, 3, 5\}$.

d) Quelle est l'image de la fonction $f(x)$?

$\text{Im}_f = \mathbb{R}$.

e) Évaluez, si elles existent, les limites suivantes en vous basant sur le tracé de la courbe. Si la limite n'existe pas, indiquez-le à l'aide de la notation « ∄ ».

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$	$\lim_{x\to-2} f(x) = 2$	$\lim_{x\to5^-} f(x) = -\infty$
$\lim_{x\to-5} f(x) = 3$	$\lim_{x\to3} f(x) = \infty$	$\lim_{x\to5} f(x) = \nexists$
$\lim_{x\to-4} f(x) = 5$	$\lim_{x\to5^+} f(x) = \infty$	$\lim_{x\to\infty} f(x) = \nexists$

f) Donnez, s'il y en a, les équations des asymptotes horizontales et des asymptotes verticales de $f(x)$.

AH : $y = 1$. AV : $x = 3$ et $x = 5$.

2. Évaluez la limite si elle existe, sinon dites pourquoi elle n'existe pas. Présentez une solution complète.

a) $\lim_{x\to 1} \frac{x^3-6x^2-1}{x^2+x}$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1} \frac{x^3-6x^2-1}{x^2+x} &= \frac{\lim_{x\to 1} x^3-6x^2-1}{\lim_{x\to 1} x^2+x} \\ &= \frac{1^3-6\cdot 1^2-1}{1^2+1} \\ &= -3.\end{aligned}$$

b) $\lim_{x\to 5} \frac{x-6}{(5-x)^2}$

$$\lim_{x\to 5} \frac{x-6}{(5-x)^2} \quad \left(\text{forme}\,\frac{-1}{0^+}\right)$$
$$= -\infty.$$

c) $\lim_{x\to 3} \frac{6-2x}{\sqrt{2x+3}-3}$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 3} \frac{6-2x}{\sqrt{2x+3}-3} &= \lim_{x\to 3} \left(\frac{6-2x}{\sqrt{2x+3}-3}\right)\left(\frac{\sqrt{2x+3}+3}{\sqrt{2x+3}+3}\right) \\ &= \lim_{x\to 3} \frac{(6-2x)\left(\sqrt{2x+3}+3\right)}{2x+3-9} \\ &= \lim_{x\to 3} \frac{(6-2x)\left(\sqrt{2x+3}+3\right)}{2x-6} \\ &= \lim_{x\to 3} -\left(\sqrt{2x+3}+3\right) \\ &= -6.\end{aligned}$$

d) $\lim_{x\to -1} \frac{x^3+1}{x^3+x^2}$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -1} \frac{x^3+1}{x^3+x^2} &= \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x^2(x+1)} \\ &= \lim_{x\to -1} \frac{x^2-x+1}{x^2} \\ &= \frac{(-1)^2-(-1)+1}{(-1)^2} \\ &= 3.\end{aligned}$$

3. Soit la fonction

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 5 & \text{si } x < -2, \\ x & \text{si } -2 \leq x \leq 1, \\ x^3 + kx - 2 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

a) Déterminez si la fonction f est continue en $x = -2$.

Puisque la limite à gauche est

$$\begin{aligned} \lim_{x \to -2^-} f(x) &= \lim_{x \to 2^-} x^2 - 5 \\ &= (-2)^2 - 5 \\ &= -1 \end{aligned}$$

et que la limite à droite est

$$\begin{aligned} \lim_{x \to -2^+} f(x) &= \lim_{x \to -2^+} x \\ &= -2, \end{aligned}$$

alors $\lim_{x \to 2} f(x)$ n'existe pas. Par conséquent, la fonction n'est pas continue en $x = -2$.

b) Déterminez, si possible, la valeur de k afin que la fonction f soit continue en $x = 1$.

On a $f(1) = 1$. Par ailleurs,

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 1^-} f(x) &= \lim_{x \to 1^-} x \\ &= 1 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 1^+} f(x) &= \lim_{x \to 1^+} x^3 + kx - 2 \\ &= 1^3 + k \cdot 1 - 2 \\ &= k - 1. \end{aligned}$$

Ainsi, $\lim_{x \to 1} f(x)$ existe si et seulement si

$$1 = k - 1 \Longrightarrow k = 2.$$

Dans ce cas, on a $\lim_{x \to 1} f(x) = 1 = f(1)$, donc la fonction est bien continue en $x = 1$ lorsque $k = 2$.

4. Depuis 2015, des biologistes ont effectué des relevés de la taille d'une population animale sur un territoire donné. À partir de ces relevés, ils ont établi que la taille $N(t)$ de cette population est donnée par

$$N(t) = \frac{8\,000t^2 + 10\,000}{2t^2 + 10},$$

où le temps t est mesuré en années depuis 2015. Par exemple, la population animale en 2015 est de $N(0) = 1\,000$ animaux et elle est de $N(1) = 1\,500$ animaux en 2016.

a) Évaluez $\lim_{t\to\infty} N(t)$.

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} N(t) &= \lim_{t\to\infty} \frac{8\,000t^2 + 10\,000}{2t^2 + 10} \\
&= \lim_{t\to\infty} \frac{t^2\left(8\,000 + \frac{10\,000}{t^2}\right)}{t^2\left(2 + \frac{10}{t^2}\right)} \\
&= \lim_{t\to\infty} \frac{8\,000 + \frac{10\,000}{t^2}}{2 + \frac{10}{t^2}} \qquad \left(\text{forme} \frac{8\,000 + \frac{10\,000}{\infty}}{2 + \frac{10}{\infty}}\right) \\
&= 4\,000.
\end{aligned}$$

b) Expliquez dans le contexte la réponse obtenue en a). *Note : Si vous n'avez pas été en mesure d'obtenir la réponse en a), supposez que la réponse à cette question est 5 000.*

À long terme, la population animale va se stabiliser à 4 000.