Minitest 7 — Solutions

Question 1 (40 points)
Déterminez les extremums relatifs et absolus de la fonction

$$f(x) = x \cdot \sqrt[3]{x-32}$$

sur l'intervalle $[0, 40]$. À noter que la dérivée de la fonction $f(x)$ est

$$f'(x) = \frac{4(x-24)}{3 \cdot \sqrt[3]{(x-32)^2}}$$

Zéros de $f'(x)$

$$f'(x) = 0$$

$$\Longrightarrow \frac{4(x-24)}{3 \cdot \sqrt[3]{(x-32)^2}} = 0$$

$$\Longrightarrow 4(x-24) = 0$$

$$\Longrightarrow x = 24$$

Valeurs exclues du domaine de $f'(x)$

$f'(x)$ n'existe pas si $3 \cdot \sqrt[3]{(x-32)^2} = 0 \Longrightarrow x - 32 = 0 \Longrightarrow x = 32$.

Les valeur critiques de $f(x)$ sont donc 24 et 32.

Tableau de signes

x	0	$]0\,,\,24[$	24	$]24\,,\,32[$	32	$]32\,,\,40[$	40
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$\nexists$	$+$	
$f(x)$	0 maximum relatif	$\searrow$	-48 minimum absolu	$\nearrow$	0	$\nearrow$	80 maximum absolu

On remarque que

- $16 \in \,]0\,,\,32[$ et $f'(16) < 0$
- $28 \in \,]24\,,\,32[$ et $f'(28) > 0$
- $36 \in \,]32\,,\,40[$ et $f'(36) > 0$

Par ailleurs,

- $f(0) = 0$
- $f(24) = -48$
- $f(32) = 0$
- $f(40) = 80$

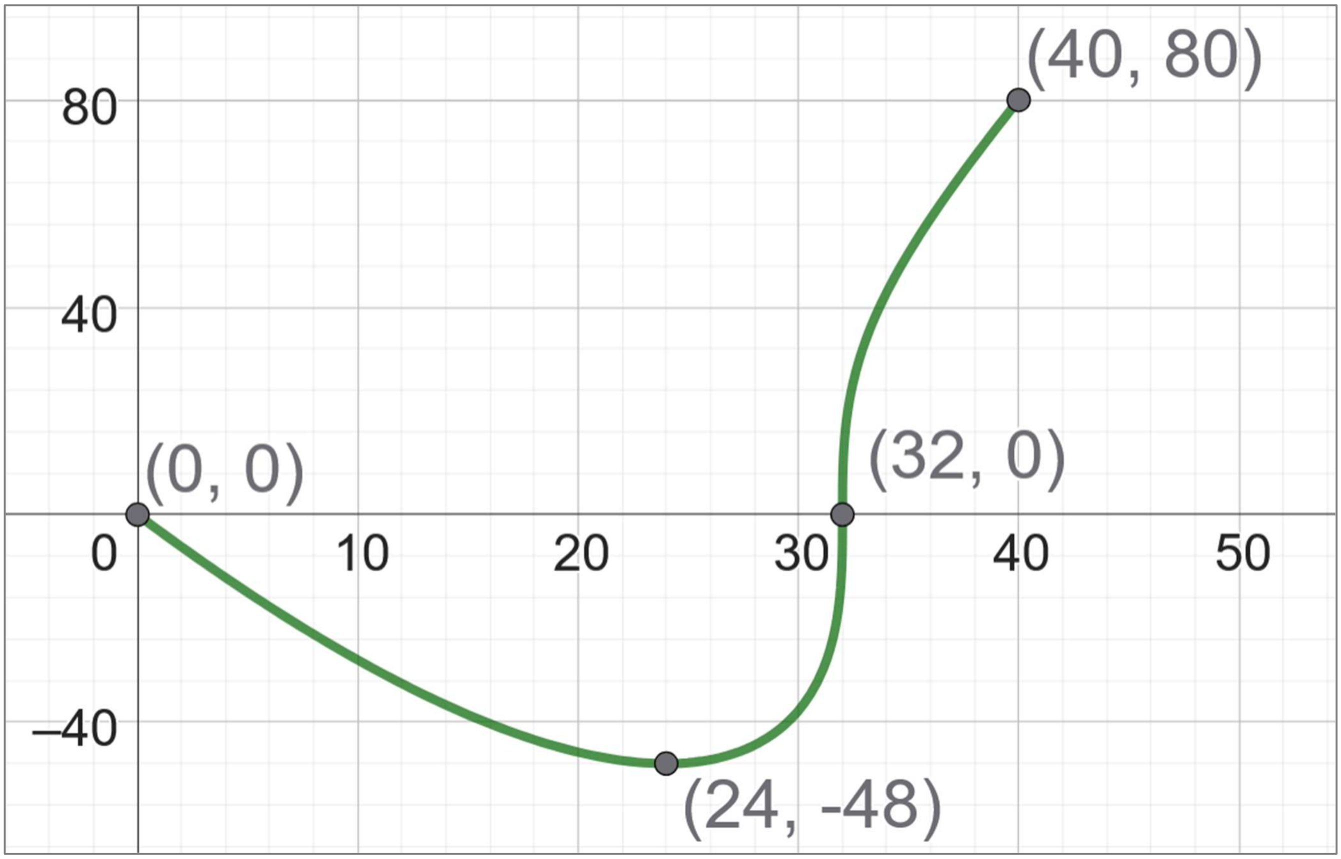
Extremums relatifs et absolus

Minimum relatif de -48 en $x = 24$

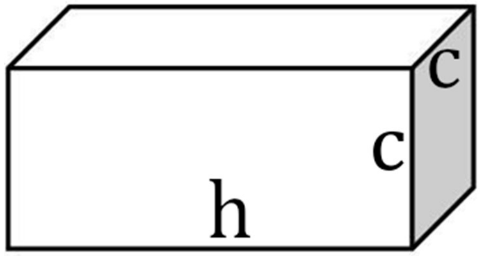
Minimum absolu de -48 en $x = 24$

Maximum relatif de 0 en $x = 0$ et de 80 en $x = 40$

Maximum absolu de 80 en $x = 40$


(40, 80)
80
40
(0, 0)
(32, 0)
0
10
20
30
40
50
–40
(24, -48)

Question 2 (60 points)
Quelles sont les dimensions du prisme droit à base carrée dont le volume est de 1 000 cm³ et qui admet la plus petite aire de la surface totale (c'est-à-dire la somme des aires des 6 faces) ?



Lire

Variables

c : Côté du carré de la base (cm)
h : Hauteur du prisme (cm)
A : Surface (cm²)

Schéma

(Voir ci-dessus)

4. Variable à optimiser

$A = 2c^2 + 4ch$ (minimiser)

5. Exprimer A selon c

Puisque le volume est de 1 000 cm², alors

$$c^2h = 1\ 000 \Rightarrow h = \frac{1\ 000}{c^2}.$$

Ainsi, la surface totale en fonction de c est

$$\begin{aligned} A(c) &= 2c^2 + 4c\left(\frac{1\ 000}{c^2}\right) \\ &= 2c^2 + \frac{4\ 000}{c}. \end{aligned}$$

6. Domaine de $A(c)$

Puisque les dimensions du cube sont positives, alors on a les contraintes suivantes :

$$c > 0$$

$$\begin{aligned} h > 0 &\Rightarrow \frac{1\ 000}{c^2} > 0 \\ &\Rightarrow c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Ainsi, $\mathrm{Dom}_A =]0\ ,\ \infty[$.

7. Dérivation et valeurs critiques

La dérivée de $A(c)$ est

$$A'(c) = \left(2c^2 + \frac{4\ 000}{c}\right)' = 4c - \frac{4\ 000}{c^2},$$

La dérivée s'annule lorsque

$$\begin{aligned} A'(c) = 0 &\Longrightarrow 4c - \frac{4\ 000}{c^2} = 0 \\ &\Longrightarrow 4c = \frac{4\ 000}{c^2} \\ &\Longrightarrow c^3 = 1\ 000 \\ &\Longrightarrow c = 10. \end{aligned}$$

La dérivée n'est pas définie lorsque $c = 0 \notin \mathrm{Dom}_A$.

L'unique valeur critique est $c = 10$.

8. Minimum

$A(10) = 2 \cdot 10^2 + \dfrac{4\ 000}{10} = 600$

$A'(1) = 4 \cdot 1 - \dfrac{4\ 000}{1^2} = -3\ 996 < 0$

$A'(20) = 4 \cdot 20 - \dfrac{4\ 000}{20^2} = 70 > 0$

c	$]0\ ,\ 10[$	10	$]10\ ,\ \infty[$
$A'(c)$	$-$	0	$+$
$A(c)$	↘	600 minimum absolu	↗

9. Réponse

Ainsi, le côté du carré sera $c = 10$ cm et la hauteur sera

$$h = \frac{1\ 000}{10^2} = 10 \text{ cm.}$$

Par conséquent, les dimensions du prisme sont

10 cm × 10 cm × 10 cm

et son aire est

$A(10) = 600$ cm².