Prénom : ______________________________ **Nom :** ______________________________

Cégep de Sherbrooke
Département de mathématiques

Calcul différentiel
201-SN2-RE

Examen 2

Session : Hiver 2025

Enseignant : Sylvain Bérubé

Date : Vendredi, 4 avril 2025

Heure : 8h30 à 10h20 (110 minutes)

Consignes

- Répondre directement sur le questionnaire. Utiliser au besoin la page 12 pour compléter vos calculs.
- Aucune documentation n'est autorisée.
- L'usage de la calculatrice n'est pas permis.
- L'examen contient 7 questions, pour un total de 100 points.
- Justifier toutes vos réponses.

Pondération

Cet examen compte pour 25 % de la note finale.

Question 1 : __________ **/ 22** **Question 4 :** __________ **/ 10** **Question 6 :** __________ **/ 18**

Question 2 : __________ **/ 06** **Question 5 :** __________ **/ 12** **Question 7 :** __________ **/ 16**

Question 3 : __________ **/ 16** **Total :** __________ **/ 100**

Note

Cet examen comprend en tout 12 pages et 7 questions. Vérifier si vous avez en main le texte complet avant de commencer à répondre aux questions.

Question 1 **4 + 6 + 6 + 6 = 22 points**

Dériver les fonctions suivantes en utilisant les formules de dérivation de votre choix. *À noter que votre réponse ne doit pas contenir d'exposant négatif. Elle doit être simplifiée et factorisée au maximum.*

a) $f(x) = x^{20} + \frac{1}{x^{10}} + \sqrt[5]{x} + 123e^{\sin(4\pi+5)}$

b) $h(x) = x^5 \cdot e^{5x}$

c) $g(x) = (x^7 + 7x^3 + 7)^7$.

d) $i(x) = 10^x + \log_3(x) + \tan(x) + \arctan(x)$.

Question 2 **6 points**

Soit $f(x) = \sin(x + \sin(x))$. Calculer $f'(0)$. *À noter que vous avez besoin de calculer $f'(x)$, or vous n'avez pas besoin de simplifier cette fonction pour évaluer $f'(0)$.*

Question 3 **10 + 6 = 16 points**

Soit la fonction

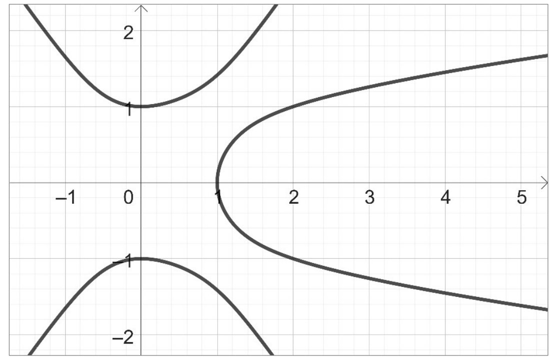
$$f(x) = \sqrt{x + 4}.$$

a) À l'aide de la définition de la dérivée, calculer la dérivée de la fonction $f(x)$.

b) Déterminer l'équation de la droite tangente à la courbe de $f(x)$ en $x = 5$.

Question 4 **8 + 2 = 10 points**

Voici la courbe définie par l'équation $x^3 + y^4 = 1 + 2x^2y^2$.



a) Vérifier que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x(3x - 4y^2)}{4y(x - y)(x + y)}$$

b) Déterminer le taux de variation instantané au point $(2, 1)$.

Question 5 **1 + 2 + 2 + 4 + 3 = 12 points**

Un objet se déplace sur un axe horizontal gauche-droite (les nombres positifs sont à droite). Sa position $s(t)$ par rapport à l'origine en fonction du temps t est donnée par l'expression

$$s(t) = \frac{t^3}{3} - \frac{7t^2}{2} + 10t + 4,$$

où $\mathrm{Dom}_s = [0, 20]$. La position est mesurée en mètres et le temps en secondes. *À noter que pour chaque sous-question, lorsque cela est pertinent, indiquez l'unité de mesure dans votre réponse.*

a) Quelle est la position initiale de l'objet ?

b) Que vaut $v(t)$, soit l'expression de la vitesse de l'objet en fonction du temps ?

c) Que vaut $a(t)$, soit l'expression de l'accélération de l'objet en fonction du temps ?

d) Quelle est la vitesse et l'accélération de l'objet au temps $t = 3$? À ce moment, l'objet se déplace-t-il vers la gauche ou vers la droite ? Est-il en train d'aller de plus en plus vite ou de ralentir ?

e) Sur quels intervalles de temps l'objet se déplace-t-il vers la gauche ?

Question 6 **2 + 4 + 6 + 4 + 2 = 18 points**

La hauteur $h(t)$ en mètre d'une plante t mois après avoir été mise en vente chez un fleuriste est donnée par la fonction

$$h(t) = \frac{4}{1 + 8e^{-0{,}25t}}.$$

a) Dans combien de temps après sa mise en vente la plante mesurera-t-elle 2 mètres ? Exprimer votre réponse sous la forme $t = A \cdot \ln(B)$, où A et B sont des entiers positifs.

b) Quelle sera la hauteur de la plante à long terme ?

c) Démontrer que

$$h'(t) = \frac{8e^{-0,25t}}{(1 + 8e^{-0,25t})^2}.$$

d) Quelle est le taux de variation de la hauteur de la plante au moment de sa mise en vente ? Expliquer précisément, dans le contexte, ce que signifie cette valeur. Exprimer votre réponse sous forme d'une fraction.

e) Démontrer que la hauteur de la plante est toujours croissante.

Question 7 **4 + 4 + 4 + 4 = 16 points**

a) Soit $f(x) = \sin(3x)$. Calculer $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$ et $f^{(4)}(x)$.

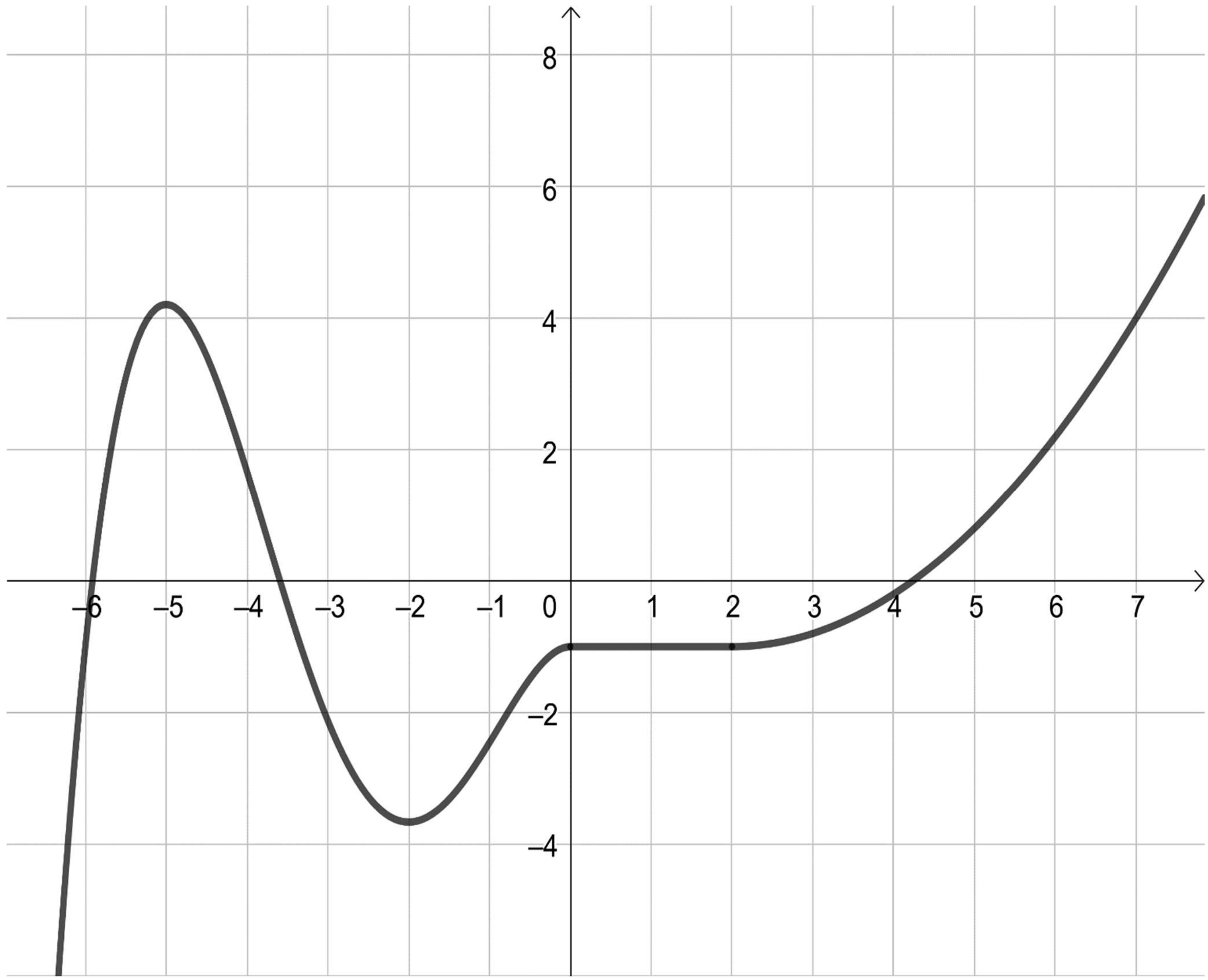
b) À l'aide de la règle de l'Hospital, évaluer

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5e^{x}+4x+2}{3e^{2x}+1}\right)$$

c) Évaluer

$$\lim_{x\to\pi/4}\left(\frac{\sin(x)-\cos(x)-\tan^2(x)}{\sec^2(x)-1+\mathrm{cotan}(x)}\right)$$

d) Le graphique suivant représente la fonction $g(x)$. Sur ce même graphique, esquisser $g'(x)$.



Identités trigonométriques

$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) \mp \sin(\alpha)\sin(\beta)$

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) \pm \cos(\alpha)\sin(\beta)$

$$\cos(\alpha)\cos(\beta) = \frac{\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)}{2}$$

$$\sin(\alpha)\sin(\beta) = \frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2}$$

$$\sin(\alpha)\cos(\beta) = \frac{\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)}{2}$$

$\cos(2\theta) = 1 - 2\sin^2(\theta)$

$\cos(2\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1$

$\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)$

$\sin(2\theta) = 2\sin(\theta)\cos(\theta)$

$$\sin^2(\theta) = \frac{1-\cos(2\theta)}{2}$$

$$\cos^2(\theta) = \frac{1+\cos(2\theta)}{2}$$

FIN DE L'EXAMEN