# Minitest 5 — Solutions

**Question 1** (20 + 20 = 40 points)

Calculer les dérivées suivantes. Les réponses doivent être factorisées au maximum et ne contenir aucun exposant négatif.

**a)** $g(x) = \log_2(x^3 - 3x^2)$

$$\begin{aligned}
g'(x) &= (\log_2(x^3 - 3x^2))' \\
&= \frac{1}{\ln(2) \cdot (x^3 - 3x^2)} \cdot (x^3 - 3x^2)' \\
&= \frac{3x^2 - 6x}{\ln(2) \cdot x^2 \cdot (x-3)} \\
&= \frac{3x(x-2)}{\ln(2) \cdot x^2 \cdot (x-3)} \\
&= \frac{3(x-2)}{\ln(2) \cdot x(x-3)}
\end{aligned}$$

**b)** $h(x) = \sin^3(5x^2 + 1)$

$$\begin{aligned}
h'(x) &= ((\sin(5x^2+1))^3)' \\
&= 3 \cdot (\sin(5x^2+1))^2 \cdot (\sin(5x^2+1))' \\
&= 3 \cdot \sin^2(5x^2+1) \cdot \cos(5x^2+1) \cdot (5x^2+1)' \\
&= 3 \cdot \sin^2(5x^2+1) \cdot \cos(5x^2+1) \cdot 10\mathrm{x} \\
&= 30\mathrm{x} \cdot \sin^2(5x^2+1) \cdot \cos(5x^2+1)
\end{aligned}$$

**Question 2** (20 points)

Soit $y = \arctan(x)$. Démontrer que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\arctan(x)) = \frac{1}{1+x^2}.$$

$y = \arctan(x)$

$\Longrightarrow \tan(y) = x$

$\Longrightarrow \frac{d}{dx}(\tan(y)) = \frac{d}{dx}(x)$

$\Longrightarrow \sec^2(y) \cdot \frac{dy}{dx} = 1$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{\sec^2(y)} \\
&= \frac{1}{\tan^2(y) + 1} \\
&= \frac{1}{x^2 + 1}
\end{aligned}$$

**Question 3** (20 + 20 = 40 points)

La masse d'une colonie de bactéries augmente selon la courbe de croissance logistique décrite par la fonction

$$m(t) = \frac{5}{1+4e^{-0,1t}}$$

où $m(t)$ représente la masse (en grammes) de la colonie au temps $t$ (en heures) mesuré depuis le début de la formation de la colonie.

**a)** Si rien n'est fait pour éliminer la colonie, quelle sera sa masse à long terme ?

$$\lim_{t\to\infty}\big(m(t)\big) = \lim_{t\to\infty}\left(\frac{5}{1+4e^{-0,1t}}\right) \qquad \left(\text{forme } \frac{5}{1+4e^{-0,1\cdot\infty}} = \frac{5}{1+4\underbrace{e^{-\infty}}_{=0}} = \frac{5}{1+4\cdot 0}\right)$$

$= 5$ g.

**b)** Calculer $m'(t)$ puis calculer le taux de croissance de la masse de la colonie au temps $t = 0$.

$$\begin{aligned}
m'(t) &= \left(\frac{5}{1+4e^{-0,1t}}\right)' \\
&= 5\cdot((1+4e^{-0,1t})^{-1})' \\
&= 5\cdot(-1\cdot(1+4e^{-0,1t})^{-2}\cdot(1+4e^{-0,1t})') \\
&= \frac{-5}{(1+4e^{-0,1t})^2}\cdot(4e^{-0,1t}\cdot(-0,1t)') \\
&= \frac{-5}{(1+4e^{-0,1t})^2}\cdot\big(4e^{-0,1t}\cdot(-0,1)\big) \\
&= \frac{2e^{-0,1t}}{(1+4e^{-0,1t})^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m'(0) &= \frac{2e^{-0,1\cdot 0}}{(1+4e^{-0,1\cdot 0})^2} \\
&= \frac{2e^0}{(1+4e^0)^2} \\
&= \frac{2}{(1+4)^2} \\
&= \frac{2}{25} = 0,08 \text{ g/h}
\end{aligned}$$