

Prénom : _____

Nom : _____

Cégep de Sherbrooke
Département de mathématiques

Calcul différentiel
201-SN2-RE

Examen 1

Session : Hiver 2025

Date : Vendredi, 14 février 2025

Enseignant : Sylvain Bérubé

Heure : 8h30 à 10h20 (110 minutes)

Consignes

- Répondre directement sur le questionnaire. Utiliser au besoin les pages 10 à 12 pour compléter vos calculs.
- Aucune documentation n'est autorisée.
- L'usage de la calculatrice n'est pas permis.
- L'examen contient 6 questions, pour un total de 100 points.
- Justifier toutes vos réponses.

Pondération

Cet examen compte pour 20 % de la note finale.

Question 1 : _____ / 16

Question 3 : _____ / 08

Question 5 : _____ / 20

Question 2 : _____ / 24

Question 4 : _____ / 14

Question 6 : _____ / 18

Total : _____ / 100

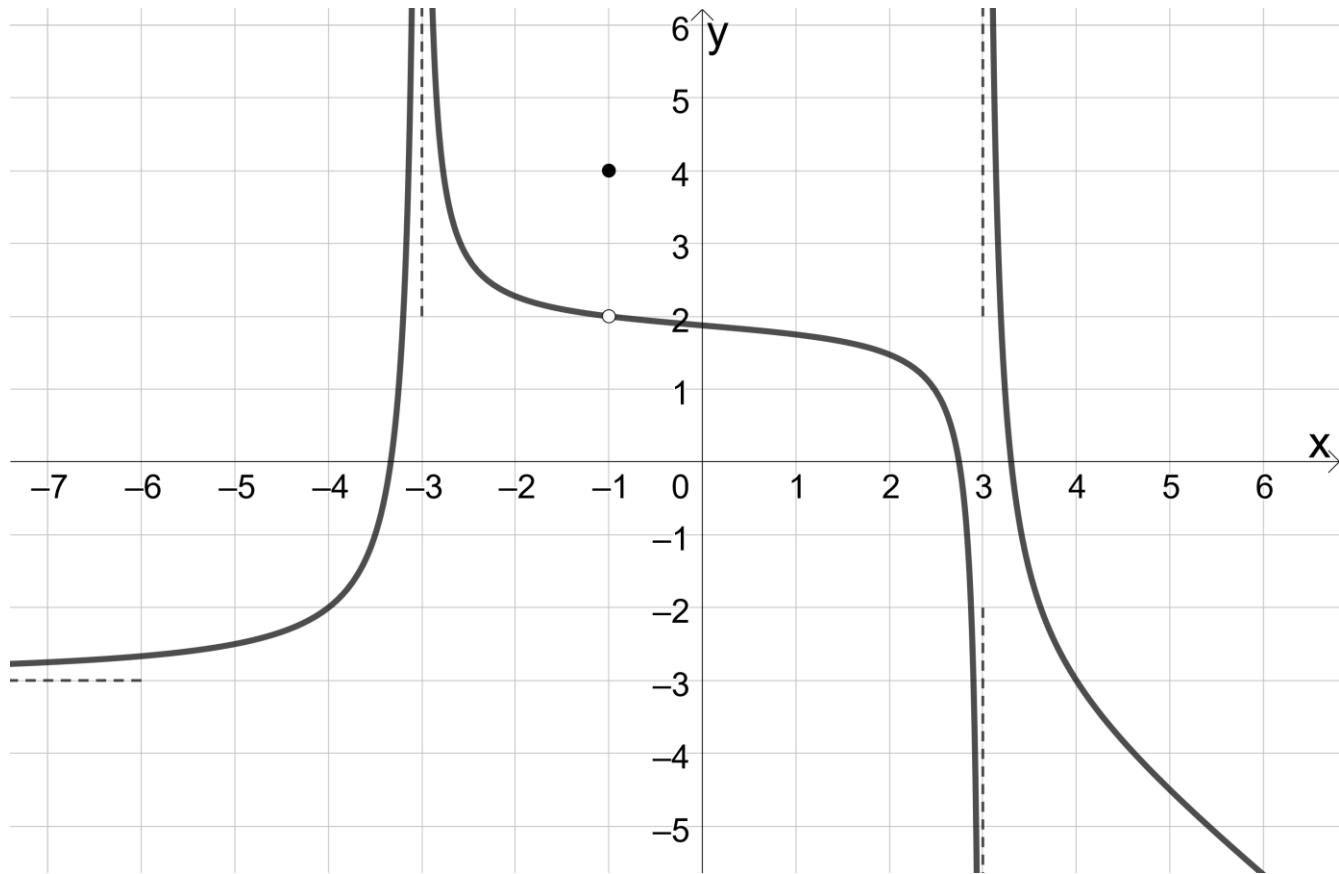
Note

Cet examen comprend en tout 12 pages et 6 questions. Vérifier si vous avez en main le texte complet avant de commencer à répondre aux questions.

Question 1**1 + 1 + 2 + 1 + 8 + 3 = 16 points**

Pour l'ensemble de cette question, aucune justification n'est requise sauf en c).

Soit la fonction $f(x)$ représentée par la courbe ci-dessous.



a) Quelle est approximativement l'ordonnée à l'origine de la fonction $f(x)$?

b) Combien de zéros la fonction $f(x)$ a-t-elle ? Identifiez-les, s'il y en a, directement sur la courbe de la fonction.

Nombre de zéros : _____.

c) Dire pourquoi la fonction $f(x)$ n'est pas continue en $x = -1$.

d) Quel est le domaine de la fonction $f(x)$?

e) Évaluez approximativement, si elles existent, les limites suivantes en vous basant sur le tracé de la courbe. Si la limite n'existe pas, indiquez-le à l'aide de la notation « \nexists ».

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow -3} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow -4} f(x)$$

f) Donnez, s'il y en a, les équations des asymptotes horizontales et des asymptotes verticales de $f(x)$.

AH :

AV :

Question 2**5 + 7 + 5 + 7 = 24 points**

Évaluez la limite si elle existe, sinon dites pourquoi elle n'existe pas. Présentez une solution complète.

a) $\lim_{x \rightarrow 9} \left(\frac{\sqrt{x} + x}{x - 6} \right)$

b) $\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\frac{1}{3+h} - \frac{1}{3}}{h} \right)$

c) $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{2x - 10}{(3 - x)^4} \right)$

d) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^4 + 2x^3 - 3}{x^3 - x^2} \right)$

Question 3**6 + 2 = 8 points**

Un réservoir contient 4 500 L d'eau pure. De la saumure renfermant 100 g de sel par litre d'eau est versée dans le réservoir à raison de 40 L/min. La concentration de sel (en grammes par litre) après t minutes est donnée par la fonction

$$C(t) = \frac{4000t}{4500 + 40t}$$

- a) Évaluez $\lim_{t \rightarrow \infty} C(t)$.

- b) Expliquez dans le contexte ce que votre réponse représente.

Question 4**8 + 6 = 14 points**

Soit la fonction

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + x + 6}{x + 3} & \text{si } x \leq 1, \\ \frac{6}{4 - x^2} & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

a) Démontrez que la fonction f est continue en $x = 1$. *Note : Vous devez vérifier les 3 conditions.***b)** Déterminez les valeurs réelles de x pour lesquelles la fonction est discontinue en x .

Question 5**6 + 7 + 7 = 20 points**

Soit la fonction

$$f(x) = \frac{3x^2 - 4}{x^2 - 4x + 4}$$

a) Trouver le domaine de f .

b) Trouvez les asymptotes verticales de f . Justifiez votre réponse.

c) Trouvez les asymptotes horizontales de f . Justifiez votre réponse.

Question 6**6 + (3 + 3) + 6 = 18 points**

a) Soit la fonction $f(x) = \begin{cases} ax + b & \text{si } x < 1 \\ x^2 + c & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

Trouvez les valeurs de a , b et c sachant que :

- $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$
- $f(0) = 4$

b) Traduisez la phrase suivante sous la forme d'un énoncé écrit avec le symboliste mathématique approprié. *Note : Aucun calcul requis.*

i) « La valeur de la fonction $f(x) = x^3 + \sqrt{x} + 17$ devient aussi proche que l'on veut de 83 lorsque x est suffisamment proche de 4. »

ii) « Lorsque x devient de plus en plus grand, la fonction $g(x) = \frac{x^3+x^2+1}{200x^2}$ devient de plus en plus grande. »

c) Une personne affirme que si $f(x)$ est une fonction discontinue en $x = 2$, alors nécessairement $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ n'existe pas. À l'aide d'un contre-exemple, démontrez que cette personne se trompe.

