Minitest 3 — Solutions

Question 1 (10 + 30 + 10 = 50 points)

Soit la fonction $f(x) = x^2 + x$.

a) Quel est le taux de variation moyen de la fonction $f(x)$ sur l'intervalle $[2, 6]$?

$$\begin{aligned}\text{TVM} &= \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(6) - f(2)}{6 - 1} \\ &= \frac{42 - 6}{4} = 9.\end{aligned}$$

b) À l'aide de la définition, démontrer que le taux de variation instantané de la fonction $f(x)$ en $x = 3$ vaut 7.

$$\begin{aligned}\text{TVI} &= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{f(3 + \Delta x) - f(3)}{\Delta x} \right) \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{(3 + \Delta x)^2 + (3 + \Delta x) - 12}{\Delta x} \right) \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{9 + 6 \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 + 3 + \Delta x - 12}{\Delta x} \right) \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{7 \cdot \Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} \right) \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta x (7 + \Delta x)}{\Delta x} \right) \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} (7 + \Delta x) \\ &= 7.\end{aligned}$$

c) Déterminer l'équation de la droite tangente à la courbe de $f(x)$ en $x = 3$.

Soit $T(x) = mx + b$ l'équation de la droite tangente à la courbe $f(x)$ en $x = 3$.

La pente de la droite tangente est

$$m = f'(3) = 7,$$

d'où

$$T(x) = 7x + b.$$

Puisque la droite tangente passe par le point

$$\big(3, f(3)\big) = (3, 12),$$

alors on peut substituer ces coordonnées dans l'équation $T(x)$. Ainsi,

$$12 = 7 \cdot 3 + b \Longrightarrow b = -9$$

L'équation cherchée est donc

$$T(x) = 7x - 9.$$

Question 2 (25 points)

Calculer la dérivée de la fonction $f(x)$. *Note : La réponse ne doit pas contenir d'exposant négatif.*

$$f(x) = x^4 + \frac{1}{x^5} + \sqrt[6]{x} + 7^8$$

Directement,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(x^4 + x^{-5} + x^{1/6} + 7^8\right)' \\ &= 4x^3 - 5x^{-6} + \frac{1}{6}x^{-5/6} \\ &= 4x^3 - \frac{5}{x^6} + \frac{1}{6x^{5/6}} \end{aligned}$$

Question 3 (25 points)

Calculer la dérivée de la fonction

$$g(x) = \frac{2x+2}{x^5+1}$$

pour évaluer $g'(1)$. *Note : Vous n'avez pas besoin de simplifier la fonction $g'(x)$.*

Directement,

$$\begin{aligned} g'(x) &= \left(\frac{2x+2}{x^5+1}\right)' \\ &= \frac{(x^5+1)\cdot(2x+2)' - (2x+2)(x^5+1)'}{(x^5+1)^2} \\ &= \frac{(x^5+1)\cdot 2 - (2x+2)\cdot 5x^4}{(x^5+1)^2} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} g'(1) &= \frac{(1^5+1)\cdot 2 - (2\cdot 1 + 2)\cdot 5 \cdot 1^4}{(1^5+1)^2} \\ &= \frac{2\cdot 2 - 4\cdot 5\cdot 1}{2^2} \\ &= \frac{4-20}{4} \\ &= -4 \end{aligned}$$