Examen 3 – Préparation (solutions)

Solutions aux exercices préparatoires supplémentaires

1. Déterminez la dérivée ou la limite des fonctions suivantes.

a) Calculez la dérivée de la fonction $f(x) = x^7 + 7^x + \sqrt[7]{x} + \arcsin(7x) + \sqrt{\frac{7^{7\pi}}{2e}}$. *À noter que vous n'avez pas besoin de simplifier la fonction $f'(x)$.*

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(x^7 + 7^x + \sqrt[7]{x} + \arcsin(7x) + \sqrt{\frac{7^{7\pi}}{2e}}\right)' \\ &= 7x^6 + \ln(7)\cdot 7^x + \frac{1}{7\sqrt[7]{x^6}} + \frac{7}{\sqrt{1-49x^2}} + 0. \end{aligned}$$

b) Calculez la dérivée de la fonction $g(x) = (x^5 - x)\cdot\ln(x^5 - x)$. *À noter que vous devez factoriser la fonction $g'(x)$ au maximum.*

$$\begin{aligned} g'(x) &= \left((x^5 - x)\cdot\ln(x^5 - x)\right)' \\ &= (x^5 - x)\cdot(\ln(x^5 - x))' + (x^5 - x)'\cdot\ln(x^5 - x) \\ &= (x^5 - x)\cdot\frac{1}{x^5 - x}\cdot(x^5 - x)' + (5x^4 - 1)\cdot\ln(x^5 - x) \\ &= (5x^4 - 1) + (5x^4 - 1)\cdot\ln(x^5 - x) \\ &= (5x^4 - 1)(1 + \ln(x^5 - x)). \end{aligned}$$

c) Soit

$$h(x) = \frac{1 + \cos(x)}{\sin(x) + 1}$$

Calculez $h'(0)$ et dites si la fonction h est croissante ou décroissante en $x = 0$.

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{(\sin(x)+1)(1+\cos(x))' - (1+\cos(x))(\sin(x)+1)'}{(\sin(x)+1)^2} \\ &= \frac{(\sin(x)+1)(-\sin(x)) - (1+\cos(x))(\cos(x))}{(\sin(x)+1)^2} \\ &= \frac{-\sin^2(x) - \sin(x) - \cos(x) - \cos^2(x)}{(\sin(x)+1)^2} \\ &= \frac{-1 - \sin(x) - \cos(x)}{(\sin(x)+1)^2}. \\ h'(0) &= \frac{-1 - \sin(0) - \cos(0)}{(\sin(0)+1)^2} \\ &= \frac{-1 - 0 - 1}{(0+1)^2} \\ &= -2. \end{aligned}$$

d) Calculez la limite suivante :

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2e^x + 3e^{-x}}{4e^{-x} + 5e^x}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{2e^x + 3e^{-x}}{4e^{-x} + 5e^x} &= \lim_{x\to\infty} \frac{e^x(2 + 3e^{-2x})}{e^x(4e^{-2x} + 5)} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{2 + 3e^{-2x}}{4e^{-2x} + 5} \qquad \left(\text{forme}\,\frac{2 + 3 \cdot 0}{4 \cdot 0 + 5}\right) \\
&= \frac{2}{5}.
\end{aligned}$$

2. Estimez $1/\sqrt{99}$ à l'aide d'une approximation linéaire.

Soit
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$
Alors
$$f'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{x^3}}.$$
Ainsi,
$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{99}} &= f(100 - 1) \\
&\approx f(100) + f'(100) \cdot (-1) \\
&= \frac{1}{\sqrt{100}} + \frac{-1}{2\sqrt{100^3}} \cdot (-1) \\
&= \frac{1}{10} + \frac{1}{2\,000} \\
&= \frac{201}{2\,000} \\
&= 0{,}1005.
\end{aligned}$$

3. Soit la fonction

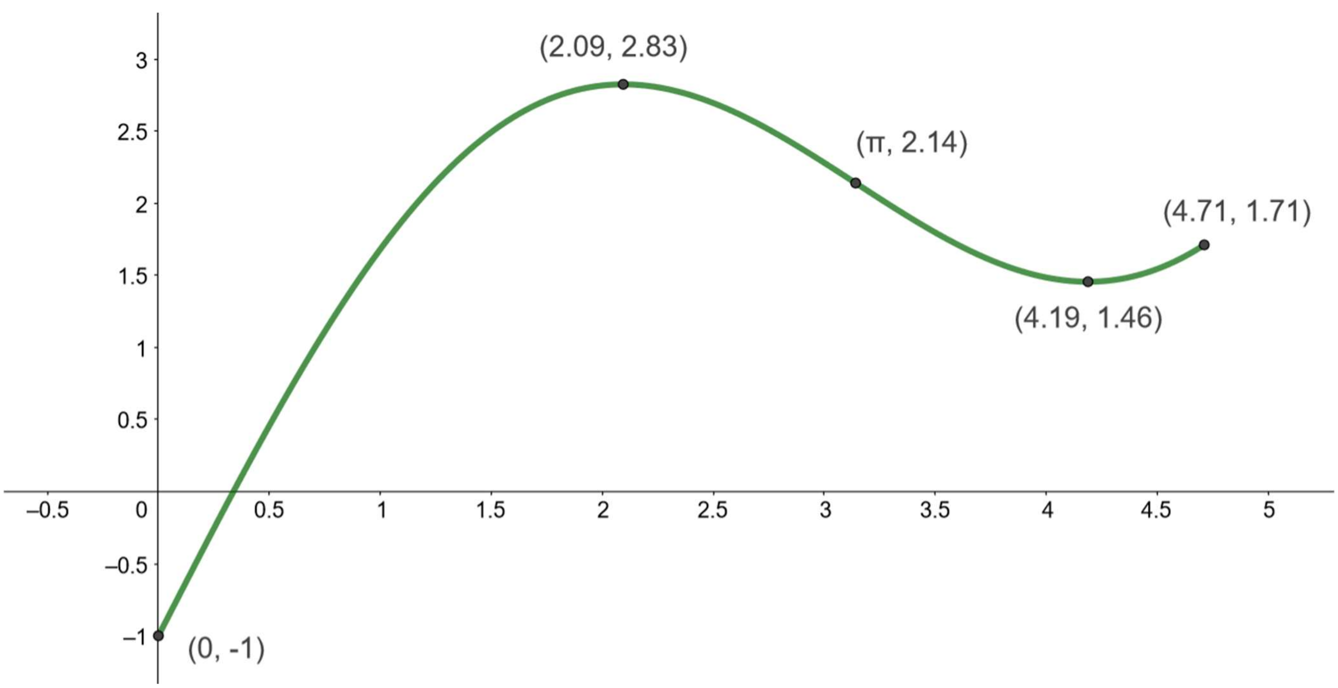
$$f(x) = 2\sin(x) + x - 1$$

définie sur l'intervalle $[0\ ,\ 3\pi/2]$. Identifiez, s'il y en a, les minimums relatifs, les maximums relatifs, les minimums absolus, les maximums absolus et les points d'inflexion de cette fonction sur l'intervalle donnée.

$$f'(x) = 0 \Longrightarrow 2\,cos(x) + 1 = 0$$
$$\Longrightarrow cos(x) = \frac{-1}{2}$$
$$\Longrightarrow x \in \left\{\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right\}.$$

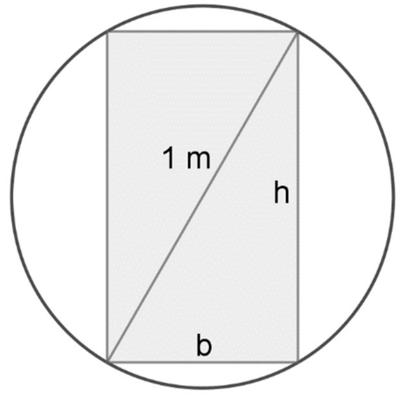
$$f''(x) = 0 \Longrightarrow -2\,sin(x) = 0$$
$$\Longrightarrow sin(x) = 0$$
$$\Longrightarrow x \in \{0, \pi\}.$$

x	0	$\left]0, \frac{2\pi}{3}\right[$	$\frac{2\pi}{3}$	$\left]\frac{2\pi}{3}, \pi\right[$	π	$\left]\pi, \frac{4\pi}{3}\right[$	$\frac{4\pi}{3}$	$\left]\frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}\right[$	$\frac{3\pi}{2}$
$f'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$f''(x)$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	-1		2,83		2,14		1,46		1,71
	min abs		max abs		point d'infl		min rel		max rel



Note : Il n'était pas nécessaire de tracer la courbe.

4. La rigidité R d'une poutre rectangulaire correspond au produit de sa base b par le cube de sa hauteur h. Déterminez les dimensions (soit h et b) de la poutre rectangulaire la plus rigide qu'on peut tirer d'une bille de bois cylindrique dont le diamètre mesure 1 m.



Fonction à maximiser :

$$R = bh^3.$$

Lien entre b et h :

$$b^2 + h^2 = 1 \Longrightarrow b = \sqrt{1-h^2}.$$

Fonction à maximiser :

$$R(h) = \sqrt{1-h^2} \cdot h^3.$$

Domaine :

$$h > 0 \quad \text{et} \quad b > 0 \Longrightarrow \sqrt{(1-h^2)} > 0 \Longrightarrow 1 - h^2 > 0 \Longrightarrow h < 1$$

$$\mathrm{Dom}_R \in \,]0\,,1[.$$

Dérivation :

$$\begin{aligned} R'(h) &= (1-h^2)^{1/2} \cdot 3h^2 + h^3 \cdot \frac{(1-h^2)^{-1/2}}{2} \cdot (-2h) \\ &= (1-h^2)^{-1/2}\big((1-h^2)\cdot 3h^2 - h^4\big) \\ &= (1-h^2)^{-1/2}(3h^2 - 4h^4) \\ &= \frac{h^2(3-4h^2)}{\sqrt{1-h^2}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R'(h) = 0 &\Longrightarrow h^2(3-4h^2) = 0 \\ &\Longrightarrow h = 0 \notin \,]0\,,1[\quad \text{ou} \quad 3 - 4h^2 = 0 \\ &\Longrightarrow h = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}866. \end{aligned}$$

$R'(h)$ est définie sur $]0\,,1[$.

h	$\left]0\,,\frac{\sqrt{3}}{2}\right[$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\left]\frac{\sqrt{3}}{2}\,,1\right[$
$R'(h)$	$+$	0	$-$
$R(h)$	↗	0,325	↘
		max abs	

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}866.$$

$$b = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}.$$

5. Soit la fonction

$$f(x) = \frac{x^2+1}{(x+1)^2}$$

définie sur les réels. Faites l'étude complète de la fonction $f(x)$ en effectuant les six étapes vues en classe et en utilisant une notation appropriée. Esquissez le graphe de $f(x)$ dans l'espace prévu à cet effet à la page 10. À noter que votre réponse doit contenir, s'il y a lieu, l'identification de l'ordonnée à l'origine, des zéros, des asymptotes, des extrémums relatifs et des points d'inflexion. Par ailleurs, la dérivée seconde de $f(x)$ est

$$f''(x) = \frac{-4(x-2)}{(x+1)^4}.$$

1. DÉTERMINATION DU DOMAINE DE $f(x)$, DE SON ORDONNÉE À L'ORIGINE ET DE SES ZÉROS

Domaine

Puisque x^2+1 et $(x+1)^2$ sont définies sur les réels, et puisque $(x+1)^2$ vaut 0 lorsque $x=-1$, alors :

$$\mathrm{Dom}_f = \mathbb{R}\backslash\{-1\}.$$

Ordonnée à l'origine

Directement, $f(0) = \frac{0^2+1}{(0+1)^2} = 1$, donc l'ordonnée à l'origine est 1.

Zéros

Directement,

$$f(x) = 0 \Longrightarrow \frac{x^2+1}{(x+1)^2} = 0 \Longrightarrow x^2+1 = 0.$$

Puisque cette équation n'a pas de solution dans les réels, alors la fonction $f(x)$ n'a aucun zéro.

2. RECHERCHE DES ASYMPTOTES HORIZONTALES ET VERTICALES

Asymptote verticale

On remarque que

$$\lim_{x\to -1^-} \frac{x^2+1}{(x+1)^2} = \lim_{x\to -1^+} \frac{x^2+1}{(x+1)^2} = \infty.$$

Ainsi, la fonction $f(x)$ admet une asymptote verticale en $x=-1$.

Asymptote horizontale

On remarque que

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -\infty} \frac{x^2+1}{(x+1)^2} &= \lim_{x\to -\infty} \frac{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)^2} \\ &= \lim_{x\to -\infty} \frac{1+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}} \\ &= 1.\end{aligned}$$

Similairement,

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{x^2+1}{(x+1)^2} = 1$$

Ainsi, $f(x)$ a pour asymptote horizontale $y=1$.

3. DÉTERMINATION DES VALEURS CRITIQUES DE $f(x)$

Directement,

$$f'(x) = \left(\frac{x^2+1}{(x+1)^2}\right)'$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{(x+1)^2(x^2+1)' - (x^2+1)((x+1)^2)'}{(x+1)^4} \\
&= \frac{(x+1)^2 \cdot 2x - (x^2+1) \cdot 2(x+1)}{(x+1)^4} \\
&= \frac{(x+1) \cdot [2x(x+1) - 2(x^2+1)]}{(x+1)^4} \\
&= \frac{2(x-1)}{(x+1)^3}.
\end{aligned}
$$

On remarque que $f'(x)$ est définie pour tout nombre x sauf en $x = -1$, qui ne fait pas partie du domaine de f.

Par ailleurs,

$$
\begin{aligned}
f'(x) = 0 &\Longrightarrow \frac{2(x-1)}{(x+1)^3} = 0 \\
&\Longrightarrow 2(x-1) = 0 \\
&\Longrightarrow x - 1 = 0 \\
&\Longrightarrow x = 1.
\end{aligned}
$$

Ainsi la valeur critique de $f(x)$ est $x = 1$.

4. DÉTERMINATION DES VALEURS CRITIQUES DE $\boldsymbol{f'(x)}$

On sait que,

$$f''(x) = \frac{-4(x-2)}{(x+1)^4}.$$

On remarque que $f''(x)$ est définie pour tout nombre x sauf en $x = -1$, qui ne fait pas partie du domaine de f'.

Par ailleurs,

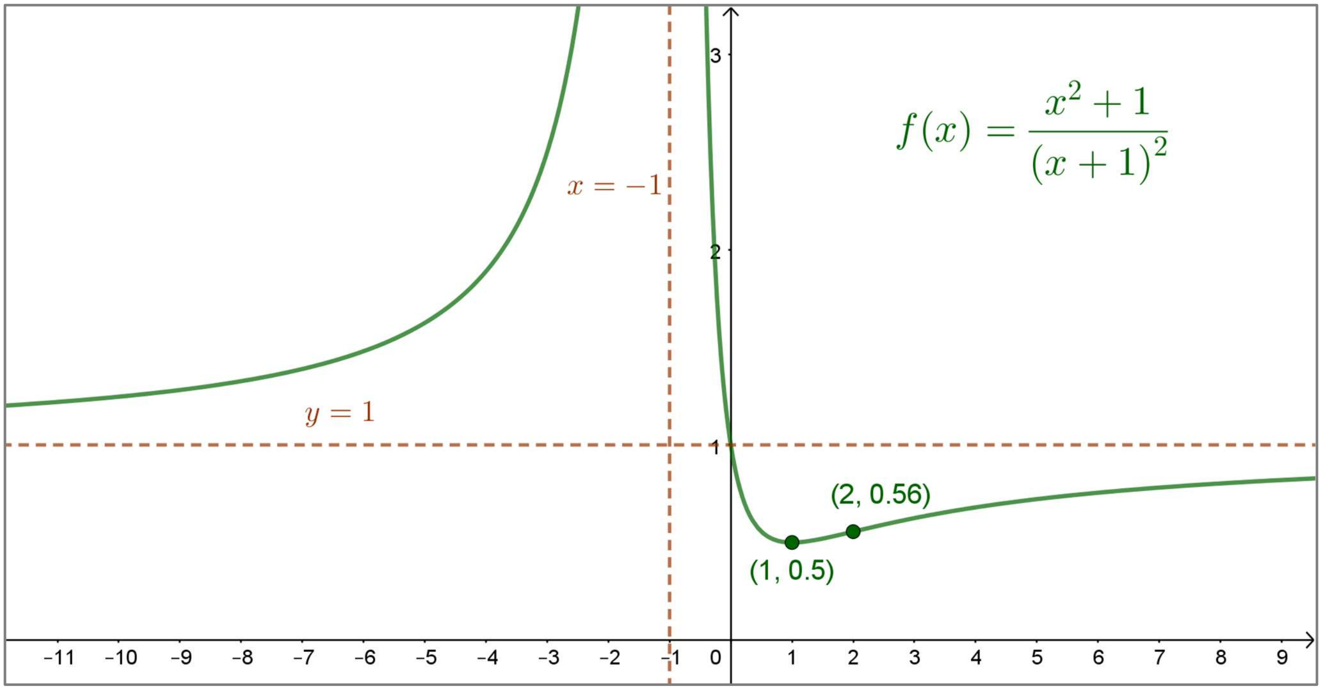
$$
\begin{aligned}
f''(x) = 0 &\Longrightarrow -4(x-2) = 0 \\
&\Longrightarrow x = 2.
\end{aligned}
$$

Ainsi l'unique valeur critique de $f''(x)$ est $x = 2$.

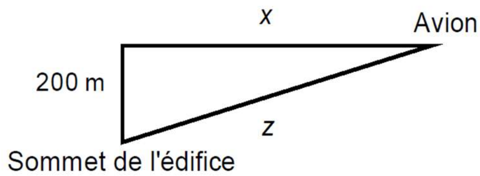
5. CONSTRUCTION DU TABLEAU DES SIGNES

x	$]-\infty, -1[$	-1	$]-1, 1[$	1	$]1, 2[$	2	$]2, \infty[$
$f'(x)$	$+ (\nearrow)$	$\nexists$	$- (\searrow)$	0	$+ (\nearrow)$	$+ (\nearrow)$	$+ (\nearrow)$
$f''(x)$	$+ (\cup)$	$\nexists$	$+ (\cup)$	$+ (\cup)$	$+ (\cup)$	0	$- (\cap)$
$f(x)$	◞	$\nexists$	◟	$1/2 = 0{,}5$ minimum relatif	◞	$5/9 = 0{,}555$ point d'inflexion	◜

6. ESQUISSE DE LA COURBE DÉCRITE PAR $f(x)$



6. Un petit avion dont l'altitude est constante se déplace vers l'est à 50 m/s, et il passe à 200 m au-dessus d'un édifice. À quelle vitesse cet avion s'éloigne-t-il du sommet de l'édifice 30 s après son passage au-dessus de celui-ci ?



Soit

- t le temps (en s) après le passage de l'avion au-dessus du sommet de l'édifice
- $x(t)$ la distance horizontale (en m) entre le sommet de l'édifice et l'avion au temps t
- $z(t)$ la distance (en m) entre le sommet de l'édifice et l'avion au temps t

On cherche

$$\left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=30}$$

Selon l'énoncé, on sait que

$$\frac{dx}{dt} = 50 \text{ m/s}.$$

Par ailleurs, d'après Pythagore, on a

$$x^2 + 200^2 = z^2.$$

En dérivant implicitement cette équation par rapport à t, on obtient

$$\frac{d}{dt}(x^2 + 40\,000) = \frac{d}{dt}(z^2) \Longrightarrow 2x\frac{dx}{dt} = 2z\frac{dz}{dt}$$

$$\Longrightarrow \frac{dz}{dt} = \frac{x}{z} \cdot \frac{dx}{dt}.$$

Maintenant, 30 s après son passage au-dessus de l'édifice, l'avion se retrouve à une distance horizontale de

$$x = 30 \text{ s} \cdot 50 \text{ m/s} = 1\,500 \text{ m}$$

de l'édifice.

Cela signifie que la distance entre le sommet de l'édifice et l'avion est alors

$$\begin{aligned} z &= \sqrt{1\,500^2 + 200^2} \\ &= 100 \cdot \sqrt{229} \\ &\approx 1\,513{,}27 \text{ m}. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=30} &= \frac{x}{z}\cdot\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=30} \\
&= \frac{1\,500}{100\sqrt{229}}\cdot 50 \\
&= \frac{750}{\sqrt{229}} \\
&\approx 49{,}56\ m/s.
\end{aligned}$$

Lorsque le temps écoulé est de 30 s, la distance entre l'avion et le sommet de l'édifice augmente à raison d'environ 49,56 m/s.