Calcul différentiel (201-SN2-RE) – Sylvain Bérubé – Hiver 2025

Examen 2 – Préparation

Concernant l'examen

— L'examen couvre les chapitres 1 à 3.
— Il compte pour 25 % de la note finale.
— Il est d'une durée de 110 minutes.

Consignes

— Répondre directement sur le questionnaire.
— Aucune documentation n'est autorisée.
— L'usage de la calculatrice n'est pas permis.
— L'examen contient 6 questions, pour un total de 100 points.
— Justifier toutes vos réponses.

Pour votre étude, vous pouvez

— Effectuer les exercices supplémentaires du documentation de planification de la partie 2.
— Relire et étudier vos notes de cours et les sections du volume couvertes dans la partie 2.
— Réviser les minitests 3 à 5 (les solutions sont disponibles sur Léa).
— Profiter pleinement de la séance de révision du mercredi 2 avril.
— Me poser vos questions sur Mio. Prendre rendez-vous pour une consultation à mon bureau au besoin. Aller au centre d'aide en mathématiques.
— Faire des exercices. Faire des exercices. Faire des exercices !

Contenus

— Taux de variation moyen et taux de variation instantané.
— Dérivée en un point et dérivée d'une fonction.
— Dérivabilité d'une fonction.
— Interprétation mathématique (dérivée), physique (taux de variation instantané) et géométrique (pente de la tangente) de $f'(x)$.
— Règles de dérivation de base, dérivée d'une fonction polynomiale ou d'une fonction puissance de la forme $f(x) = x^n$ où n est un réel.
— Règles de dérivation d'un produit et d'un quotient.
— Interprétation géométrique du signe de la dérivée : liens entre la dérivée première et la croissance d'une fonction.
— Mouvement rectiligne, position $s(t)$, vitesse $v(t) = s'(t)$ et accélération $a(t) = s''(t)$.
— Dérivée d'ordre supérieur et applications.
— Règle de dérivation en chaine : $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$ ou encore $\left(f\left(g(x)\right)\right)' = f'\left(g(x)\right) \cdot g'(x)$.
— Dérivation implicite, recherche de $\frac{dy}{dx}$.
— Définition de la fonction exponentielle et de la fonction logarithmique.
— Définition des six fonctions trigonométriques à l'aide du cercle trigonométrique.
— Connaitre les trois identités trigonométriques fondamentales :
  - $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$,
  - $1 + \tan^2(x) = \sec^2(x)$,
  - $\text{cotan}^2(x) + 1 = \text{cosec}^2(x)$.

- Règles de dérivation, limites infinies, asymptotes verticales et continuité des fonctions exponentielles, logarithmiques, trigonométriques et trigonométriques réciproques.
- Règle de L'Hospital.

Exercices préparatoires supplémentaires

Ce document n'a pas la prétention de couvrir toute la matière de l'examen. Entre autres, il ne contient pas de questions sur le taux de variation moyen et le taux de variation instantané, ni sur la dérivation de fonctions trigonométriques réciproques ou la règle de l'Hospital. Vous êtes invités à relire vos notes et à compléter les exercices du volume présentés dans le document de planification.

1. Dérivez les fonctions suivantes en utilisant les formules de dérivation de votre choix. *À noter que votre réponse ne doit pas contenir d'exposants négatifs et doit être simplifiée au maximum.*

a) $f(x) = x^5 + \dfrac{1}{x^5} + \sqrt[5]{x} + \dfrac{1}{\sqrt[5]{x}} + 5^5.$

b) $h(x) = (x-1)^8 \cdot (x+1)^9.$

c) $g(x) = \sqrt[4]{x^2 + 2x + 3}.$

d) $i(x) = \sec(5x) + x(7 + \log_{13}(x)).$

2. a) Soit

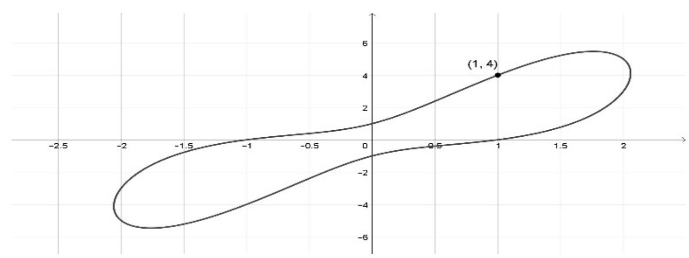
$$f(x) = \frac{5x-2}{x^3+2}$$

Calculer $f'(1)$. *À noter que vous aurez besoin de calculer $f'(x)$, or vous n'avez pas besoin de simplifier cette fonction pour évaluer $f'(1)$.*

b) Soit $f(x) = \sin(x + \cos(x) - 1)$. Calculez $f'(0)$. *À noter que vous aurez besoin de calculer $f'(x)$, or vous n'avez pas besoin de simplifier cette fonction pour évaluer $f'(0)$.*

3. Voici la courbe définie par l'équation

$$x^4 - 4xy + y^2 = 1.$$



a) Démontrez que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y - 2x^3}{y - 2x}$$

b) Déterminez l'équation de la droite tangente à cette courbe au point (1,4).

4. Un objet se déplace sur un axe horizontal pendant 6 secondes. Sa position $s(t)$ par rapport à l'origine en fonction du temps t est donnée par l'expression

$$s(t) = 2t^3 - 21t^2 + 60t - 20.$$

La position est mesurée en mètres et le temps en secondes. *À noter que pour chaque sous-question, lorsque cela est pertinent, indiquez l'unité de mesure dans votre réponse.*

a) Quelle est la position initiale de l'objet ?

b) Que vaut $v(t)$, soit l'expression de la vitesse de l'objet en fonction du temps ?

c) Que vaut $a(t)$, soit l'expression de l'accélération de l'objet en fonction du temps ?

d) Quelle est la vitesse et l'accélération de l'objet de l'objet au temps $t = 3$? À ce moment, l'objet se déplace-t-il vers la gauche ou vers la droite ? Est-il en train d'aller de plus en plus vite ou de ralentir ?

e) Sur quels intervalles de temps l'objet se déplace-t-il vers la droite ?

f) Quelle distance l'objet aura parcouru durant les 6 premières secondes ?

5. Des démographes prévoient que, dans t années, la population d'un pays (en millions d'habitants) sera donnée par la fonction

$$P(t) = \frac{250}{2 + 3e^{-0,05t}}.$$

a) Quelle est la population actuelle de ce pays ?

b) Dans combien de temps la population de ce pays aura-t-elle doublée par rapport à la population actuelle ? Exprimez votre réponse sous la forme $t = A \cdot \ln(B)$, où A et B sont des entiers positifs.

c) Quelle sera la population de ce pays à long terme ?

d) Calculez $P'(t)$.

e) Quelle est le taux de variation de la population au début de l'année 0 ? Expliquez précisément, dans le contexte, ce que signifie cette valeur.

f) Démontrez que la taille de la population de ce pays est croissante.

6. Soit $y = \text{cotan}(x)$. Démontrez que $y' = -\text{cosec}^2(x)$.

À noter que vous pouvez utiliser vos connaissances sur la dérivée des fonctions $\sin(x)$ et $\cos(x)$ dans votre démonstration.

Solutions aux exercices préparatoires supplémentaires

1. a) $$\begin{aligned} f'(x) &= \left(x^5 + x^{-5} + x^{\frac{1}{5}} + x^{-\frac{1}{5}} + 5^5\right)' \\ &= 5x^4 + (-5x^{-6}) + \frac{1}{5}x^{-\frac{4}{5}} + \left(-\frac{1}{5}x^{-\frac{6}{5}}\right) \\ &= 5x^4 - \frac{5}{x^6} + \frac{1}{5x^{4/5}} - \frac{1}{5x^{6/5}}. \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} h'(x) &= ((x-1)^8 \cdot (x+1)^9)' \\ &= (x-1)^8 \cdot ((x+1)^9)' + (x+1)^9 \cdot ((x-1)^8)' \\ &= (x-1)^8 \cdot 9 \cdot (x+1)^8 \cdot (x+1)' + (x+1)^9 \cdot 8 \cdot (x-1)^7 \cdot (x-1)' \\ &= 9 \cdot (x-1)^8 \cdot (x+1)^8 + 8 \cdot (x+1)^9 \cdot (x-1)^7 \\ &= (x-1)^7 \cdot (x+1)^8 \cdot \big(9 \cdot (x-1) + 8 \cdot (x+1)\big) \\ &= (x-1)^7(x+1)^8(17x-1) \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} g'(x) &= \left((x^2 + 2x + 3)^{\frac{1}{4}}\right)' \\ &= \frac{1}{4}(x^2 + 2x + 3)^{-3/4}(x^2 + 2x + 3)' \\ &= \frac{2x + 2}{4(x^2 + 2x + 3)^{3/4}} \\ &= \frac{x + 1}{2 \cdot (x^2 + 2x + 3)^{3/4}} \end{aligned}$$

d) $i'(x) = \big(\sec(5x) + x(7 + \log_{13}(x))\big)'$

$$
\begin{aligned}
&= (\sec(5x))' + \big(x(7 + \log_{13}(x))\big)' \\
&= \sec(5x)\tan(5x)\,(5x)' + x \cdot (7 + \log_{13}(x))' + (7 + \log_{13}(x)) \cdot (x)' \\
&= 5\sec(5x)\tan(5x) + x \cdot \frac{1}{\ln(13)\,x} + (7 + \log_{13}(x)) \\
&= 5\sec(5x)\tan(5x) + \frac{1}{\ln(13)\,x} + 7 + \log_{13}(x)
\end{aligned}
$$

2. a) $f'(x) = \dfrac{(x^3+2)(5x-2)' - (5x-2)(x^3+2)'}{(x^3+2)^2}$

$$
= \frac{(x^3+2)\cdot 5 - (5x-2)\cdot 3x^2}{(x^3+2)^2}
$$

$$
f'(1) = \frac{(1^3+2)\cdot 5 - (5\cdot 1 - 2)\cdot 3\cdot 1^2}{(1^3+2)^2} = \frac{3\cdot 5 - 3\cdot 3\cdot 1}{3^2} = \frac{15-9}{9} = \frac{2}{3}.
$$

b) $f'(x) = (\sin(x + \cos(x) - 1))'$

$$
\begin{aligned}
&= \cos(x + \cos(x) - 1)\cdot(x + \cos(x) - 1)' \\
&= \cos(x + \cos(x) - 1)\cdot(1 - \sin(x))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f'(0) &= \cos(0 + \cos(0) - 1)\cdot(1 - \sin(0)) \\
&= \cos(0 + 1 - 1)\cdot(1) = \cos(0) = 1.
\end{aligned}
$$

3. a) $\dfrac{d}{dx}(x^4 - 4xy + y^2) = \dfrac{d}{dx}(1) \Longrightarrow\ 4x^3 - 4x\dfrac{dy}{dx} - 4y + 2y\dfrac{dy}{dx} = 0$

$$
\begin{aligned}
&\Longrightarrow\ -4x\frac{dy}{dx} + 2y\frac{dy}{dx} = -4x^3 + 4y \\
&\Longrightarrow\ \frac{dy}{dx}(-4x + 2y) = -4x^3 + 4y \\
&\Longrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{4y - 4x^3}{2y - 4x} \\
&\Longrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2y - 2x^3}{y - 2x}
\end{aligned}
$$

b) L'équation de la droite tangente s'écrit sous la forme $y = mx + b$.

La pente de la droite tangente est

$$
m = \frac{dy}{dx}\bigg]_{\substack{x=1\\ y=4}} = \frac{2\cdot 4 - 2\cdot 1^3}{4 - 2\cdot 1} = \frac{6}{2} = 3.
$$

Puisque le point $(1, 4)$ appartient à la droite tangente, alors

$$
4 = 3\cdot 1 + b \Longrightarrow b = 1.
$$

Ainsi, l'équation de la droite tangente est

$$
y = 3x + 1.
$$

4. a) $s(0) = 2\cdot 0^3 - 21\cdot 0^2 + 60\cdot 0 - 20$

$$
= -20.
$$

b) $v(t) = s'(t)$
$= (2t^3 - 21t^2 + 60t - 20)$
$= 6t^2 - 42t + 60.$

c) $a(t) = v'(t)$
$= (6t^2 - 42t + 60)' = 12t - 42.$

d) $v(3) = 6 \cdot 3^2 - 42 \cdot 3 + 60$
$= 54 - 126 + 60$
$= -12.$

$a(3) = 12 \cdot 3 - 42 = -6.$

Puisque $v(3) < 0$ et $a(3) < 0$, l'objet se déplace vers la gauche et est en train d'aller de plus en plus vite dans cette direction.

e) $v(t) = 0 \Longrightarrow 6t^2 - 42t + 60 = 0$
$\Longrightarrow 6 \cdot (t^2 - 7t + 10) = 0$
$\Longrightarrow 6 \cdot (t - 2) \cdot (t - 5) = 0$
$\Longrightarrow t = 2 \quad \text{ou} \quad t = 5.$

$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{[0,2[}$	**2**	$\boldsymbol{]2,5[}$	**5**	$\boldsymbol{]5,6]}$
$v(t)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$v(1) = 6 \cdot (1 - 2) \cdot (1 - 5) = 24 > 0$

$v(3) = -22 < 0$

$v(6) = 6 \cdot (6 - 2) \cdot (6 - 5) = 24 > 0$

L'objet se déplace vers la droite sur les intervalles $[0, 2[$ et $]5, 6]$.

f)

$\boldsymbol{t}$	**0**	**2**	**5**	**6**
$s(t)$	-20	32	5	16

$s(0) = -20$

$s(2) = 2 \cdot 2^3 - 21 \cdot 2^2 + 60 \cdot 2 - 20 = 16 - 84 + 120 - 20 = 32$

$s(5) = 2 \cdot 5^3 - 21 \cdot 5^2 + 60 \cdot 5 - 20 = 250 - 525 + 300 - 20 = 5$

$s(6) = 2 \cdot 6^3 - 21 \cdot 6^2 + 60 \cdot 6 - 20 = 432 - 741 + 360 - 20 = 16$

Ainsi, la distance parcourue est

$$|s(2) - s(0)| + |s(5) - s(2)| + |s(6) - s(5)| = |32 - (-20)| + |5 - 32| + |16 - 5|$$
$$= 52 + 27 + 11 = 90.$$

5. a) $P(0) = \dfrac{250}{2 + 3e^{-0,05 \cdot 0}}$
$= \dfrac{250}{2 + 3 \cdot 1} = \dfrac{250}{5} = 50$ millions.

b) $2 \cdot 50 = P(t) \Longrightarrow 100 = \dfrac{250}{2 + 3e^{-0,05t}}$
$\Longrightarrow 2 + 3e^{-0,05} \;\; = \dfrac{5}{2}$
$\Longrightarrow 3e^{-0,05t} = \dfrac{5}{2} - 2 = \dfrac{1}{2}$
$\Longrightarrow e^{-0,05} \;\; = \dfrac{1}{6}$

$$\Longrightarrow -0{,}05t = \ln\left(\frac{1}{6}\right)$$
$$\Longrightarrow t = -20\ln\left(\frac{1}{6}\right) = 20 \cdot \ln(6)$$

c) $\displaystyle \lim_{t\to\infty} P(t) = \lim_{t\to\infty}\left(\frac{250}{2+3e^{-0{,}05t}}\right) \quad \left(\text{forme } \frac{250}{2+3\cdot e^{-\infty}} = \frac{250}{2+3\cdot 0}\right)$

$$= \frac{250}{2} = 125 \text{ millions.}$$

d) $\displaystyle P'(t) = \left(\frac{250}{2+3e^{-0{,}05t}}\right)'$

$$= \frac{(2+3e^{-0{,}05}\ )(250)' - 250(2+3e^{-0{,}05}\ )'}{(2+3e^{-0{,}05t})^2}$$
$$= \frac{(2+3e^{-0{,}05}\ )\cdot 0 - 250\cdot 3e^{-0{,}05}\ \ \cdot(-0{,}05t)'}{(2+3e^{-0{,}05t})^2}$$
$$= \frac{-250\cdot 3e^{-0{,}05}\ \ \cdot(-0{,}05)}{(2+3e^{-0{,}05t})^2}$$
$$= \frac{75e^{-0{,}05}}{2\cdot(2+3e^{-0{,}05t})^2}$$

e) $\displaystyle P'(0) = \frac{75e^{-0{,}05\cdot 0}}{2\cdot(2+3e^{-0{,}05\cdot 0})^2}$

$$= \frac{75\cdot 1}{2\cdot(2+3\cdot 1)^2}$$
$$= \frac{75}{2\cdot 25}$$
$$= \frac{3}{2}$$

Au début de l'année 0, la population croit à un taux de 1,5 million/année.

f) Dans l'expression

$$\frac{75e^{-0{,}05t}}{2\cdot(2+3e^{-0{,}05t})^2},$$

tous les termes sont positifs. Ainsi, puisque

$$P'(t) = \frac{75e^{-0{,}05t}}{2\cdot(2+3e^{-0{,}05}\ )^2} > 0,$$

alors la population est croissante.

6. Directement,

$$\big(\text{cotan}(x)\big)' = \left(\frac{\cos(x)}{\sin(x)}\right)'$$
$$= \frac{\sin(x)\cdot(\cos(x))' - \cos(x)\cdot(\sin(x))'}{\sin^2(x)}$$
$$= \frac{-\sin^2(x) - \cos^2(x)}{\sin^2(x)}$$
$$= -\frac{1}{\sin^2(x)} = -\text{cosec}^2(x)$$