Université de Sherbrooke

Processus stochastiques

MQG222

Notes de cours élaborées par

Sylvain Bérubé

Été 2024

Table des matières

Mise en marche (stochastique)

À titre introductif, voici trois exercices servant à la fois à réviser certains concepts préalables sur les probabilités et à présenter certaines idées que nous allons aborder dans ce cours.

Exercice 1 (Concours AMQ[1] collégial 1997, question 4)

Un pion est déplacé au hasard sur les 9 cases d'un échiquier 3×3. Les cases sont numérotées selon l'illustration ci-dessous.

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Au temps 0, le pion est sur la case 1 puis, à chaque unité de temps, le pion est déplacé au hasard vers une des 2, 3 ou 4 cases voisines de celle où il était placé (avec des probabilités égales : 1/2, 1/3 ou 1/4 selon le cas). Les mouvements diagonaux sont interdits. Le pion s'arrête lorsqu'il atteint la case 3 ou la case 9.

a) Quelle est la probabilité que le pion s'arrête sur la case 3 ? Et sur la case 9 ?

b) Quel est le plus petit temps d'arrêt possible ? Et le plus grand ?

c) Quelle est l'espérance du temps d'arrêt d'un pion ? Et l'écart-type ?

---

[1] L'Association mathématique du Québec (AMQ) a entre autres pour mission de susciter un intérêt plus grand pour les mathématiques. Chaque année elle organise des concours mathématiques au niveau secondaire et collégial.

Exercice 2 (Mega Millions)

Pour jouer à la loterie Mega Millions, il faut acheter un billet à 1 $, pour lequel on choisit cinq numéros différents de 1 à 56 (boules blanches) et un numéro de 1 à 46 (le nombre Mega Ball, une boule de couleur or). Afin de déterminer les numéros gagnants d'un tirage, Mega Millions utilise deux bouliers distincts, le premier sélectionnant cinq boules blanches parmi 56, et le second une boule or parmi 46. La distribution des lots est présentée à la page suivante.

a) Le 30 mars 2012, la loterie américaine Mega Millions a fracassé le record du monde[2] du plus grand jackpot, lequel s'est élevé à 474 millions de dollars. Sachant que 640 millions de billets ont été vendus pour ce tirage, quelle était l'espérance de gain pour un billet ? Et la variance ?

b) C'est bien connu, les jeux de hasard sont une « taxe mathématique » pour les gens ayant des lacunes en calculs probabilistes. Or, vu la taille du jackpot du tirage du 30 mars 2012, certains estimaient que pour cette fois, le jeu en valait la chandelle. Que pensez-vous de cette affirmation ?

c) Si une personne avait décidé d'acheter les 175 711 536 différentes combinaisons pour ce tirage du 30 mars 2012, quelle aurait été la probabilité que ce pari lui soit profitable ? Quelle aurait été la probabilité qu'elle perde plus de 25 millions de dollars ?

d) Lors d'un tirage, quel est le nombre minimum de billets qu'il faut acheter pour être certain de gagner au moins 2 dollars ?

e) Lors d'un tirage, quel est le nombre minimum de billets qu'il faut acheter pour être certain de gagner au moins 3 dollars ?

f) Lors d'un tirage, quel est le nombre minimum de billets qu'il faut acheter pour être certain d'avoir au moins trois bons appariements de boules blanches sur au moins un billet ?

---

[2] Ce record a possiblement été battu depuis : mon intérêt actuel pour les jeux de loterie, après avoir atteint un sommet entre mes 14 et 18 ans, est présentement trop faible pour me motiver à actualiser cette information.

Appariements		Prix	Nombre de combinaisons	Probabilité
Boules blanches	Boule or			
5	1	Jackpot	$\binom{5}{5}\binom{51}{0}\binom{1}{1}\binom{45}{0} = 1$	1 sur 175 711 536
5	0	250 000 $	$\binom{5}{5}\binom{51}{0}\binom{1}{0}\binom{45}{1} = 45$	1 sur 3 904 701
4	1	10 000 $	$\binom{5}{4}\binom{51}{1}\binom{1}{1}\binom{45}{0} = 255$	1 sur 689 065
4	0	150 $	$\binom{5}{4}\binom{51}{1}\binom{1}{0}\binom{45}{1} = 11\,475$	1 sur 15 313
3	1	150 $	$\binom{5}{3}\binom{51}{2}\binom{1}{1}\binom{45}{0} = 12\,750$	1 sur 13 781
3	0	7 $	$\binom{5}{3}\binom{51}{2}\binom{1}{0}\binom{45}{1} = 573\,750$	1 sur 306 (0,3 %)
2	1	10 $	$\binom{5}{2}\binom{51}{3}\binom{1}{1}\binom{45}{0} = 208\,250$	1 sur 844 (0,1 %)
2	0	0 $	$\binom{5}{2}\binom{51}{3}\binom{1}{0}\binom{45}{1} = 9\,371\,250$	1 sur 19 (5,3 %)
1	1	3 $	$\binom{5}{1}\binom{51}{4}\binom{1}{1}\binom{45}{0} = 1\,249\,500$	1 sur 141 (0,7 %)
1	0	0 $	$\binom{5}{1}\binom{51}{4}\binom{1}{0}\binom{45}{1} = 56\,227\,500$	1 sur 3,1 (32,0 %)
0	1	2 $	$\binom{5}{0}\binom{51}{5}\binom{1}{1}\binom{45}{0} = 2\,349\,060$	1 sur 75 (1,3 %)
0	0	0 $	$\binom{5}{0}\binom{51}{5}\binom{1}{0}\binom{45}{1} = 105\,707\,700$	1 sur 1,7 (60,2 %)
Total			$\binom{56}{5}\binom{46}{1} = 175\,711\,536$	100 %

Exercice 3 (Serpents et échelles)

Dans le jeu Serpents et échelles, un joueur dispose d'un pion placé sur l'espace imaginaire à côté de la case « 1 » de la grille. À chaque tour, il lance un dé à six faces et avance d'autant de cases que de points sur le dé en suivant l'ordre des cases. S'il tombe sur une case dans laquelle il y a le pied d'une échelle, il monte le long de celle-ci jusqu'en haut. S'il tombe sur une case dans laquelle il y a la tête d'un serpent, il doit redescendre jusqu'à sa queue. Le jeu prend fin lorsqu'il atteint la dernière case.

Considérons la grille à la page suivante.

a) Quel est le nombre minimal de coups requis pour compléter une partie? Quelle est la probabilité de compléter une partie en ce nombre minimal de coups ?

b) Quel est le nombre maximal de coups requis pour compléter une partie ?

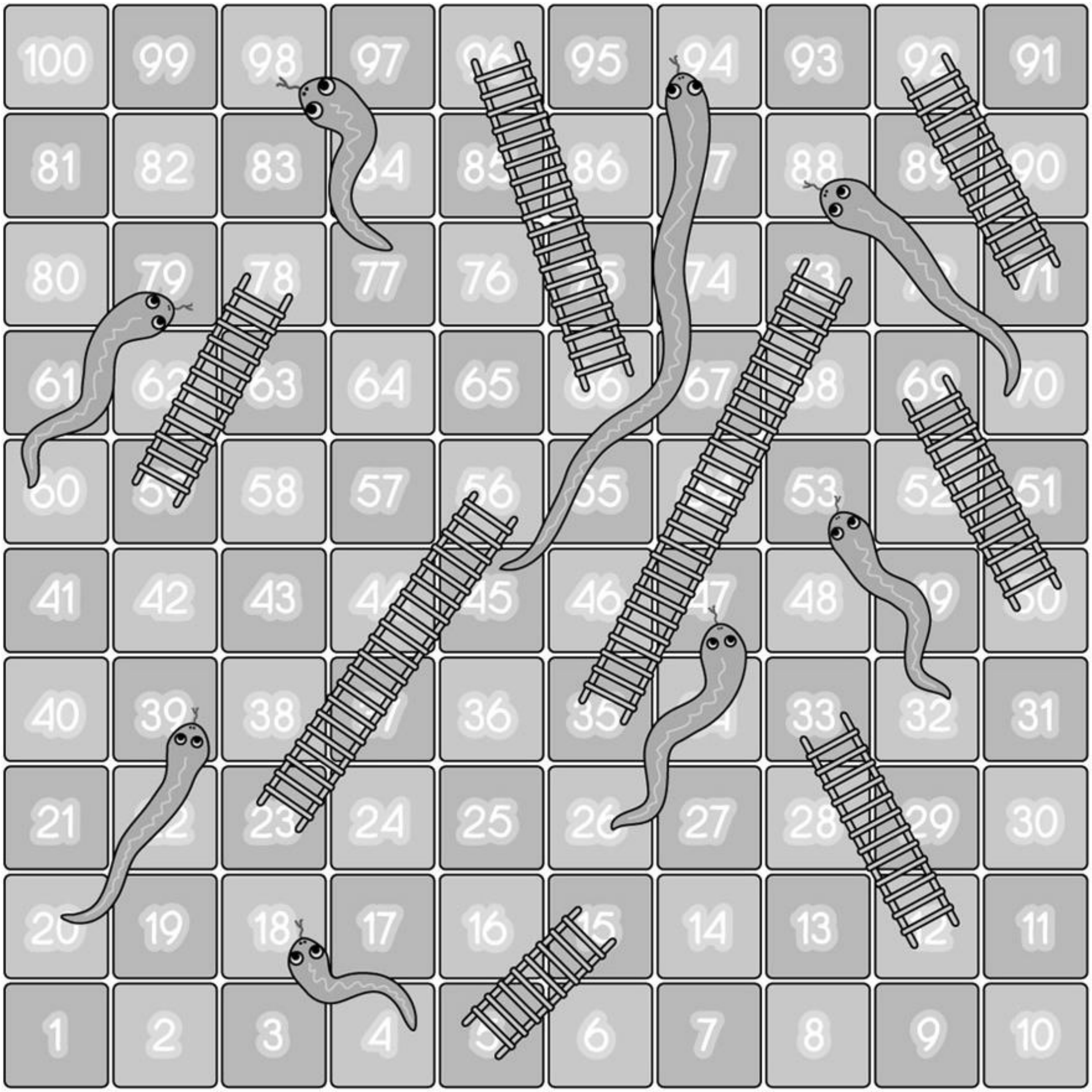
c) Quel est le nombre moyen de coups requis pour compléter une partie ?

d) Lors d'une partie, quelle case a la plus forte probabilité d'être visités par le pion ? Et la deuxième ? De façon générale, quelle est la probabilité d'atteindre la case i ?

e) (Variante n° 1 de fin de partie) Le jeu prend fin lorsque le joueur atteint exactement la case finale. Si son jet de dé le mène au-delà de la case finale, il passe son tour sans avancer. Sous cette variante, quel est le nombre moyen de coups requis pour compléter une partie ?

f) (Variante n° 2 de fin de partie) Le jeu prend fin lorsque le joueur atteint exactement la case finale. Si son jet de dé est supérieur à la case finale, il positionne son pion à la case $200 - a - b$, où a est le numéro de la case où le pion est situé au moment du jet du dé et b est le nombre obtenu sur le dé. Sous cette variante, quel est le nombre moyen de coups requis pour compléter une partie ?

g) (Variante compétitive) Le jeu Serpents et échelles peut se jouer de façon compétitive à n joueurs. Les joueurs jouent à tour de rôle et le gagnant est le premier à atteindre la case finale. Si deux joueurs s'affrontent, quelle est la probabilité que le deuxième joueur l'emporte ? Cette probabilité sera-t-elle la même si la partie est jouée avec la variante n° 1 de fin de partie ? Avec la variante n° 2 ?


100 99 98 97 95 94 93 91
81 82 83 86 88
80 79 78 77 76 74
61 64 65 67
58 57 56 55 53 51
41 42 43 45 46 47 48
40 39 38 36 33 32 31
21 24 25 27 29 30
19 18 17 16 14 13 11
1 2 3 4 6 7 8 9 10

0. Concepts préalables sur les probabilités

Le cours **STT290 — Probabilités** étant un préalable à notre cours, son contenu nous est considéré comme acquis. À titre de rappel, en voici ses objectifs et son contenu.

Objectifs

- Connaitre les résultats fondamentaux et les méthodes de base du calcul des probabilités.
- Savoir quand et comment appliquer ces méthodes en situation de modélisation.

Contenu

- Espace de probabilité, probabilité conditionnelle, indépendance, formule de Bayes.
- Variables aléatoires discrètes et continues classiques : lois binomiale, de Poisson, binomiale négative, hypergéométrique, uniforme, normale, gamma, bêta et autres.
- Vecteurs aléatoires et densités conjointes.
- Moments : espérance, variance, covariance, corrélation, fonction génératrice.
- Transformations de variables aléatoires.
- Distributions et espérances conditionnelles.
- Loi des grands nombres et théorème de la limite centrale.
- Génération de nombres pseudoaléatoires.

Vous êtes encouragés à réviser vos notes de ce cours. Dans le présent chapitre, nous allons réviser certains concepts préalables sur les probabilités importants pour notre cours.

0.1 Probabilités, indépendance

Définition 0.1 Une **expérience aléatoire** est une expérience dont le **résultat** dépend du hasard, c'est-à-dire dont on peut déterminer parfaitement, par avance, tous les résultats possibles, mais dont on ne peut pas prévoir lequel de ces résultats sera réalisé. L'**espace échantillonnal** d'une expérience aléatoire, noté S (ou Ω), est l'ensemble de tous les résultats possibles de l'expérience. Un **évènement** est un sous-ensemble de l'espace échantillonnal. Un **évènement élémentaire** (ou **singleton**) est un évènement ayant un seul résultat.

Remarque Puisque les évènements sont des ensembles, il est possible d’effectuer les opérations usuelles de la théorie des ensembles sur les évènements, à savoir l’**union** ($\cup$), l’**intersection** ($\cap$) et le **complément** (^{c}) par rapport à l’espace échantillonnal S.

Définition 0.2 Soit A et B deux évènements d’une expérience aléatoire. Si $A \cap B = \emptyset$, alors A et B sont dits **disjoints** (ou **incompatibles**, **mutuellement exclusifs**). Si A et B sont disjoints et si $A \cup B = S$, alors A et B sont dits **complémentaires** (ou **contraires**). Par ailleurs, on appelle **système complet d'évènements** (ou **partition d’évènements**) tout ensemble $\{A_i\}_{i\in I}$ fini ou dénombrable d'évènements incompatibles deux à deux dont $\bigcup_{i\in I} A_i = S$.

Exemple résolu 0.3 On lance une pièce de monnaie non biaisée à trois reprises et on note les résultats, à savoir la suite de piles (p) et de faces (f) obtenue. L'espace échantillonnal de cette expérience aléatoire est composé des $2^3 = 8$ résultats suivants :

$$S = \{\text{ppp, ppf, pfp, pff, fpp, fpf, ffp, fff}\}.$$

Sur cette expérience aléatoire, on définit les évènements suivants :

— A : Obtenir exactement 2 piles.
— B : Obtenir pile au lancé 2 et face au lancé 3.
— C : Obtenir 0, 1 ou 3 piles.

Les résultats compris dans ces évènements sont

$$A = \{\text{ppf, pfp, fpp}\}, \quad B = \{\text{ppf, fpf}\} \quad \text{et} \quad C = \{\text{ppp, pff, fpf, ffp, fff}\}.$$

On remarque que

$$A \cup B = \{\text{ppf, pfp, fpp, fpf}\}, \quad A \cap B = \{\text{ppf}\} \quad \text{et} \quad A^c = \{\text{ppp, pff, fpf, ffp, fff}\}.$$

Par ailleurs, $A \cap C = \emptyset$, donc A et C sont disjoints, et $A \cup C = S$, donc ils sont également complémentaires. De fait, $\{A, C\}$ représente un système complet d'évènements.

Définition 0.4 Une **probabilité** est une application $P: S \to \mathbb{R}$ satisfaisant aux trois axiomes suivants :

— Axiome 1 : Pour tout ensemble A, $0 \leq P(A) \leq 1$.
— Axiome 2 : $P(S) = 1$.
— Axiome 3 : Pour toute suite finie ou infinie d'évènements disjoints, $P(\bigcup_i A_i) = \sum_i P(A_i)$.

Proposition 0.5 Soit A, B et C des évènements d'une expérience aléatoire.

— Propriété 1 : $P(A) = 1 - P(A^c)$.
— Propriété 2 : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
— Propriété 3 : Si $S = \{1, \ldots, n\}$ et $P(\{i\}) = p_i$, alors $P(A) = \sum_{i \in A} p_i$. Par ailleurs, si $p_i = 1/n$, alors les évènements élémentaires sont dits **équiprobables** et dans ce cas, $P(A) = |A|/|S|$.

Définition 0.6 Soit A et B deux évènements d'une expérience aléatoire. Si $P(B) > 0$, alors la **probabilité conditionnelle** de A étant donné la réalisation de B, notée $P(A \mid B)$, est

$$P(A \mid B) = P(A \cap B)/P(B).$$

Proposition 0.7 (règle de multiplication) On déduit de cette définition les équations suivantes :

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(B) \cdot P(A \mid B) \\ &= P(A) \cdot P(B \mid A). \end{aligned}$$

Définition 0.8 Soit A et B deux évènements d'une expérience aléatoire. Ces évènements sont dits **indépendants** si $P(A \mid B) = P(A)$. Dans le cas contraire, les évènements sont dits **dépendants**. Par ailleurs, les évènements $\{A_i\}_{i \in I}$ sont dits :

— **indépendants deux à deux** si, pour tous $i, j \in I$ avec $i \neq j$, on a $P(A_i \cap A_j) = P(A_i) \cdot P(A_j)$,
— **mutuellement indépendants** si, pour tout $J \subset I$, on a $P\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) = \prod_{j \in J} P(A_j)$.

Exemple résolu 0.9 On lance une pièce de monnaie non biaisée à n reprises et on note les résultats, à savoir la suite de piles (p) et de faces (f) obtenue. Sur cette expérience aléatoire on définit les évènements suivants :

— A_i : Obtenir pile au lancé i.

Les évènements A_i sont mutuellement indépendants car $P(A_i) = 1/2$ et, pour tout choix d'indices $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$, on a

$$P\left(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}\right) = (1/2)^k = P\left(A_{i_1}\right) \cdot \cdots \cdot P\left(A_{i_k}\right).$$

Exemple résolu 0.10 On lance une pièce de monnaie non biaisée à trois reprises et on note les résultats, à savoir la suite de piles (p) et de faces (f) obtenue. Sur cette expérience aléatoire, on définit les évènements suivants :

— A : Obtenir le même résultat aux lancers 1 et 2.

— B : Obtenir le même résultat aux lancers 1 et 3.

— C : Obtenir le même résultat aux lancers 2 et 3.

Les probabilités de ces évènements sont $P(A) = P(B) = P(C) = 1/2$. Les résultats compris dans les intersections deux à deux de ces évènements sont $A \cap B = A \cap C = B \cap C = \{\text{ppp}, \text{fff}\}$, ce qui représente un évènement de probabilité $1/4$.

Ainsi, les évènements A, B, C sont indépendants deux à deux car

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B), \quad P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C) \quad \text{et} \quad P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C).$$

Cependant, ils ne sont pas mutuellement indépendants car $A \cap B \cap C = \{\text{ppp}, \text{fff}\}$, d'où

$$P(A \cap B \cap C) = 1/4 \neq 1/8 = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C).$$

Proposition 0.11 Soit A et B deux évènements d'une expérience aléatoire. A et B sont indépendants si et seulement si $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Proposition 0.12 (loi des probabilités totales) Soit A et B deux évènements d'une expérience aléatoire, où $P(B) > 0$. Alors

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap B) + P(A \cap B^c) \\ &= P(B) \cdot P(A \mid B) + P(B^c) \cdot P(A \mid B^c). \end{aligned}$$

De façon générale, si $\{B_i\}_{i \in I}$ est un système complet d'évènements fini ou dénombrable où $P(B_i) > 0$ pour tout i, alors

$$\begin{aligned} P(A) &= \sum_{i \in I} P(A \cap B_i) \\ &= \sum_{i \in I} P(B_i) \cdot P(A \mid B_i). \end{aligned}$$

Par ailleurs, si C est un évènement, alors

$$\begin{aligned} P(A \mid C) &= \sum_{i \in I} P(A \cap B_i \mid C) \\ &= \sum_{i \in I} P(B_i \mid C) \cdot P(A \mid C \cap B_i). \end{aligned}$$

Théorème 0.13 (théorème de Bayes) Soit A et B deux évènements d'une expérience aléatoire, où $P(B) > 0$ et $P(A) > 0$. Alors

$$\begin{aligned} P(B \mid A) &= \frac{P(B) \cdot P(A \mid B)}{P(A)} \\ &= \frac{P(B) \cdot P(A \mid B)}{P(B) \cdot P(A \mid B) + P(B^c) \cdot P(A \mid B^c)}. \end{aligned}$$

De façon générale, si $\{B_i\}_{i \in I}$ est un système complet d'évènements fini ou dénombrable où $P(B_i) > 0$ pour tout i, alors

$$\begin{aligned} P\left(B_j \mid A\right) &= \frac{P\left(B_j\right) \cdot P\left(A \mid B_j\right)}{P(A)} \\ &= \frac{P\left(B_j\right) \cdot P\left(A \mid B_j\right)}{\sum_{i \in I} P(B_i) \cdot P(A \mid B_i)}. \end{aligned}$$

0.2 Variables aléatoires et distributions

Définition 0.14 Soit une expérience aléatoire ayant S comme espace échantillonnal. Une **variable aléatoire** X associée à cette expérience aléatoire est une fonction $X : S \longrightarrow \mathbb{R}$ qui associe à chaque résultat de l'espace échantillonnal S une valeur réelle. L'ensemble des nombres réels que la variable aléatoire peut prendre s'appelle le **support** de X et on le note S_X. Une variable aléatoire est dite **discrète** si son support est un ensemble fini ou dénombrable de nombres réels. Une variable aléatoire est dite **continue** si son support est un intervalle de l'ensemble des nombres réels.

0.2.1 Variables aléatoires discrètes

Définition 0.15 Soit X une variable aléatoire discrète de support S_X. La **fonction de masse** (ou **loi de probabilité**, **fonction de masse marginale**) de X est la fonction $p_X : \mathbb{R} \longrightarrow [0,\ 1]$ telle que

$$p_X(x) = \mathrm{P}(X = x).$$

La **fonction de répartition** (ou **fonction de répartition marginale**) de X est la fonction $F_X : \mathbb{R} \longrightarrow [0,\ 1]$ telle que

$$\begin{aligned} F_X(x) &= P(X \leq x) \\ &= \sum_{a \leq x} p_X(a). \end{aligned}$$

Proposition 0.16 Une fonction $p : \mathbb{R} \longrightarrow [0,\ 1]$ est possiblement une fonction de masse d'une variable aléatoire discrète si et seulement si

$$\sum_{x \in \mathbb{R}} p(x) = 1.$$

Définition 0.17 Soit X une variable aléatoire discrète de support S_X. L'**espérance mathématique** (ou **moyenne**) de X est

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{x\in\mathbb{R}} x \cdot p_X(x) \\ &= \sum_{x\in\mathbb{R}} x \cdot P(X = x), \end{aligned}$$

sa **variance** est

$$\begin{aligned} Var(X) &= E\left(\left(X - E(X)\right)^2\right) \\ &= \sum_{x\in\mathbb{R}} \left(x - E(X)\right)^2 \cdot p_X(x) \\ &= \sum_{x\in\mathbb{R}} \left(x - E(X)\right)^2 \cdot P(X = x) \end{aligned}$$

et son **écart-type** est

$$\sigma(X) = \sqrt{Var(X)}.$$

Par ailleurs, son **moment d'ordre n** est

$$\begin{aligned} E(X^n) &= \sum_{x\in\mathbb{R}} x^n \cdot p_X(x) \\ &= \sum_{x\in\mathbb{R}} x^n \cdot P(X = x). \end{aligned}$$

Définition 0.18 Une variable aléatoire discrète X suit une **loi uniforme discrète** de paramètre $a, b \in \mathbb{Z}$ avec $a < b$, notée $X \sim \text{Unif}(a, b)$, si

$$p_X(x) = \begin{cases} 1/n & \text{si } x \in \{a, a+1, \dots, b-1, b\} \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où $n = b - a + 1$. Dans ce cas,

$$E(X) = (a + b)/2 \quad \text{et} \quad Var(X) = (n^2 - 1)/12.$$

La fonction de répartition de X est

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a, \\ (x - a + 1)/n & \text{si } x \in \{a, \dots, b\}, \\ 1 & \text{si } x > b. \end{cases}$$

Définition 0.19 Une variable aléatoire discrète X suit une **loi de Bernoulli** de paramètre $p \in [0,\ 1]$, notée $X \sim \text{Bern}(p)$, si

$$p_X(x) = \begin{cases} p & \text{si } x = 1, \\ q & \text{si } x = 0, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où $q = 1 - p$. Dans ce cas,

$$E(X) = p \quad \text{et} \quad Var(X) = pq.$$

La fonction de répartition de X est

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ q & \text{si } 0 \le x < 1, \\ 1 & \text{si } x \ge 1. \end{cases}$$

Définition 0.20 Une variable aléatoire discrète X suit une **loi binomiale** de paramètres $n \in \mathbb{N}$ et $p \in [0,\ 1]$, notée $X \sim \mathrm{Bin}(n, p)$, si

$$p_X(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x q^{n-x} & \text{si } x \in \{0, \dots, n\}, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où $q = 1 - p$. Dans ce cas,

$$E(X) = np \quad \text{et} \quad Var(X) = npq.$$

Définition 0.21 Une variable aléatoire discrète X suit une **loi de Poisson** de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, notée $X \sim \mathrm{Poisson}(\lambda)$, si

$$p_X(x) = \begin{cases} \lambda^x e^{-\lambda}/x! & \text{si } x \in \mathbb{N}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Dans ce cas,

$$E(X) = \lambda \quad \text{et} \quad Var(X) = \lambda.$$

Définition 0.22 Une variable aléatoire discrète X suit une **loi géométrique** de paramètre $p \in [0,\ 1]$, notée $X \sim \mathrm{Geom}(p)$, si

$$p_X(x) = \begin{cases} q^{x-1} p & \text{si } x \in \mathbb{N}^*, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où $q = 1 - p$. Dans ce cas,

$$E(X) = 1/p \quad \text{et} \quad Var(X) = q/p^2.$$

La fonction de répartition de X est

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0, \\ 1 - q^k & \text{si } x \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

Définition 0.23 Une variable aléatoire discrète X suit une **loi binomiale négative** de paramètre $r \in \mathbb{N}^*$, notée $X \sim \mathrm{Binneg}(r)$, si

$$p_X(x) = \begin{cases} \binom{x-1}{r-1} q^{x-r} p^r & \text{si } x \in \{r, r+1, \dots\}, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où $q = 1 - p$. Dans ce cas,

$$E(X) = r/p \quad \text{et} \quad Var(X) = rq/p^2.$$

Définition 0.24 Une variable aléatoire discrète X suit une **loi hypergéométrique** de paramètre $n, N_1, N_2 \in \mathbb{N}^*$, notée $X \sim \mathrm{Hypergeom}(n, N_1, N_2)$, si

$$p_X(x) = \begin{cases} \dfrac{\binom{N_1}{x}\binom{N_2}{n-x}}{\binom{N}{n}} & \text{si } x \in \{0,\ 1, \dots, \min\{n, N_1, N_2\}\}, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où $N = N_1 + N_2$. Dans ce cas,

$$E(X) = np \quad \text{et} \quad Var(X) = npq\left(\frac{N-n}{N-1}\right),$$

où $p = N_1/N$ et $q = N_2/N$.

0.2.2 Variables aléatoires continues

Définition 0.25 Soit X une variable aléatoire continue de support S_X. La **fonction de densité** (ou **loi de probabilité**, **densité de probabilité**, **fonction de densité marginale**) de X est la fonction $f_X : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ telle que

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x)\, dx.$$

La **fonction de répartition** de X est la fonction $F_X : \mathbb{R} \longrightarrow [0,\ 1]$ telle que

$$\begin{aligned} F_X(x) &= P(X \leq x) \\ &= \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt. \end{aligned}$$

Remarque La fonction de densité de X se retrouve à partir de sa fonction de répartition via la formule

$$f_X(x) = \frac{d}{dx}\big(F_X(x)\big).$$

Remarque À noter que

$$P(x \leq X \leq x + dx) \approx f_X(x) \cdot dx.$$

Proposition 0.26 (formule des probabilités totales) Soit A un évènement. Alors

$$P(A) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) \cdot P(A \mid X = x)\ dx.$$

Proposition 0.27 Une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est possiblement une fonction de masse d'une variable aléatoire discrète de support S_X si et seulement si

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1.$$

Définition 0.28 Soit X une variable aléatoire continue de support S_X. L'**espérance mathématique** (ou **moyenne**) de X est la quantité

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\, dx,$$

sa **variance** est

$$\begin{aligned} Var(X) &= E\left(\big(X - E(X)\big)^2\right) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \big(x - E(X)\big)^2 f_X(x)\, dx, \end{aligned}$$

et son **écart-type** est

$$\sigma(X) = \sqrt{Var(X)}.$$

Par ailleurs, son **moment d'ordre n** est

$$E(X^n) = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f_X(x)\, dx.$$

Définition 0.29 Une variable aléatoire continue X suit une **loi uniforme continue** de paramètre $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$, notée $X \sim \mathrm{Unif}(a, b)$, si

$$f_X(x) = \begin{cases} 1/(b-a) & \text{si } x \in [a, b], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Dans ce cas,

$$E(X) = (a+b)/2 \quad \text{et} \quad Var(X) = (b-a)^2/12.$$

La fonction de répartition de X est

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a, \\ (x-a)/(b-a) & \text{si } a \leq x < b, \\ 1 & \text{si } x \geq b. \end{cases}$$

Définition 0.30 Une variable aléatoire continue X suit une **loi normale** de paramètre $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma^2 \in \mathbb{R}_+^*$, notée $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$, si

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}.$$

Dans ce cas,

$$E(X) = \mu \quad \text{et} \quad Var(X) = \sigma^2.$$

Définition 0.31 Une variable aléatoire continue X suit une **loi exponentielle** de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, notée $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$, si

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \in \mathbb{R}_+^*. \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Dans ce cas,

$$E(X) = 1/\lambda \quad \text{et} \quad Var(X) = 1/\lambda^2.$$

La fonction de répartition de X est

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

Définition 0.32 Une variable aléatoire continue X suit une **loi gamma** de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, notée $X \sim \Gamma(k, \theta)$, si

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{k-1} e^{-x/\theta}}{\Gamma(k)\theta^k} & \text{si } x \in \mathbb{R}_+^*. \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où $\Gamma(k)$ est la fonction gamma. Dans ce cas,

$$E(X) = k\theta \quad \text{et} \quad Var(X) = k\theta^2.$$

0.2.3 Généralités

Définition 0.33 La fonction **indicatrice** (ou **caractéristique**) d'un sous-ensemble F d'un ensemble E est la fonction $I_F : E \longrightarrow \{0,\ 1\}$ telle que

$$I_F(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in F \\ 0 & \text{si } x \notin F \end{cases}.$$

Proposition 0.34 Soit $a, b \in \mathbb{R}$ et X, Y deux variables aléatoires telles que $Y = aX + b$. Alors

$$E(Y) = a \cdot E(X) + b \quad \text{et} \quad Var(Y) = a^2 \cdot Var(X).$$

L'espérance est donc une fonction linéaire. Par ailleurs, soit n variables aléatoires discrètes indépendantes $X_1, \dots, X_n$ et leur somme $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Alors

$$E(S) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) \quad \text{et} \quad Var(S) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i).$$

De façon générale, si l'on considère la fonction $g(X)$, alors

$$E\big(g(X)\big) = \sum_{x \in \mathbb{R}} g(x) \cdot p_X(x).$$

Proposition 0.35 La variance est la différence entre l'espérance des carrés et le carré de l'espérance :

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2.$$

Remarque L'espérance mathématique d'une variable aléatoire est son moment d'ordre 1 tandis que sa variance est le moment d'ordre 2 de l'écart entre la variable et son espérance.

Proposition 0.36 Soit $X \sim \text{Bin}(n, p)$. Si $n \geq 30$, $np \geq 5$ et $nq \geq 5$, où $q = 1 - p$, alors X suit approximativement une loi normale d'espérance np et de variance npq.

Proposition 0.37 Soit $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$. Si $\lambda \geq 5$, alors X suit approximativement une loi normale d'espérance λ et de variance λ.

1. Probabilités conditionnelles

Une notion très utile dans l'étude de la théorie des probabilités est celle de la probabilité conditionnelle. Elle permet de tenir compte d'une information complémentaire lors de l'estimation probabiliste de la réalisation d'un évènement. Puisque cette estimation est conditionnée par la réalisation d'un autre évènement, elle est dite conditionnelle.

1.1 Variable aléatoire discrète

Dans cette section, X et Y représentent des variables aléatoires discrètes.

Définition 1.1 La **fonction de masse conjointe** (ou **loi de probabilité conjointe**) de X et Y est

$$p_{X,Y}(x,y) = P(X = x, Y = y).$$

La **fonction de répartition conjointe** est

$$F_{X,Y}(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y).$$

Remarque On peut retrouver la **fonction de masse marginale** de X à partir de la fonction de masse conjointe de X et Y via l'équation

$$p_X(x) = \sum_{y \in \mathbb{R}} p_{X,Y}(x,y).$$

Similairement, on retrouve la **fonction de répartition marginale** de X à partir de la fonction de masse conjointe de X et Y via l'équation

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \sum_{a \leq x} \sum_{y \in \mathbb{R}} p_{X,Y}(a,y) \\ &= F_{X,Y}(x, \infty). \end{aligned}$$

Définition 1.2 La **fonction de masse conditionnelle** (ou **loi de probabilité conditionnelle**) de X sachant que $Y = y$, où $p_Y(y) \neq 0$, est

$$\begin{aligned} p_{X|Y=y}(x) &= p_{X|Y}(x \mid y) = p_X(x \mid \mathrm{Y} = y) \\ &= P(X = x \mid Y = y) = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(Y = y)} \\ &= \frac{p_{X,Y}(x,y)}{p_Y(y)}. \end{aligned}$$

La **fonction de répartition conditionnelle** de X sachant que $Y = y$, où $p_Y(y) \neq 0$, est

$$\begin{aligned} F_{X|Y=y}(x) &= F_{X|Y}(x \mid y) = F_X(x \mid Y = y) \\ &= P(X \leq x \mid Y = y) = \sum_{a \leq x} P(X = a \mid Y = y) \\ &= \sum_{a \leq x} p_{X|Y=y}(a). \end{aligned}$$

Définition 1.3 L'**espérance conditionnelle** de X sachant que $Y = y$, où $p_Y(y) \neq 0$, est

$$\begin{aligned} E(X \mid Y = y) &= \sum_{x \in \mathbb{R}} x \cdot p_{X|Y=y}(x) \\ &= \sum_{x \in \mathbb{R}} x \cdot P(X = x \mid Y = y). \end{aligned}$$

La **variance conditionnelle** de X sachant que $Y = y$, où $p_Y(y) \neq 0$, est

$$\begin{aligned} Var(X \mid Y = y) &= E\left(\left(X - E(X \mid Y = y)\right)^2 \mid Y = y\right) \\ &= E(X^2 \mid Y = y) - \left(E(X \mid Y = y)\right)^2. \end{aligned}$$

L'**écart-type conditionnel** de X sachant que $Y = y$, où $p_Y(y) \neq 0$, est

$$\sigma(X \mid Y = y) = \sqrt{Var(X \mid Y = y)}.$$

Définition 1.4 X et Y sont dites **indépendantes** si

$$p_{X,Y}(x, y) = p_X(x) \cdot p_Y(y) \quad \text{pour tout } x, y \in \mathbb{R}.$$

Par ailleurs, elles sont **identiquement distribuées** si elles ont la même loi, c'est-à-dire si

$$p_X(x) = p_Y(x) \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Proposition 1.5 Si X et Y sont indépendantes, alors

$$p_{X|Y=y}(x) = p_X(x).$$

Exemple 1.6 Soient X et Y deux variables aléatoires de loi conjointe

		Y		
	$p_{X,Y}(x,y)$	1	2	Total
	1	0,20	0,10	0,30
X	2	0,15	0,05	0,20
	3	0,30	0,20	0,50
	Total	0,65	0,35	1

a) Trouver la fonction de masse marginale de X.

b) Trouver la fonction de masse conditionnelle de X sachant que $Y = 1$.

c) Trouver la fonction de masse conditionnelle de Y sachant que $X = 2$.

d) Calculer $F_{X|Y=1}(2)$.

e) Calculer $E(X \mid Y = 1)$.

Exemple 1.7 Supposons $X \sim \text{Poisson}(\lambda_1)$ et $Y \sim \text{Poisson}(\lambda_2)$, où $\lambda_1, \lambda_1 \in \mathbb{R}_+^*$, avec X et Y indépendantes. Déterminer l'espérance de X sachant que $X + Y = n$.

Exemple 1.8 On réalise $n + m$ épreuves de Bernoulli indépendantes ayant chacune p probabilité de succès. Déterminer l'espérance du nombre de succès dans les n premières épreuves sachant qu'il y a k succès en tout.

1.2 Variable aléatoire continue

Dans cette section, X et Y représentent des variables aléatoires continues.

Définition 1.9 La **fonction de densité conjointe** (ou **loi de probabilité conjointe**) de X et Y est la fonction $f_{X,Y}(x,y)$ telle que

$$P\big((x,y) \in D\big) = \iint_D f_{X,Y}(x,y)\, dA$$

pour tout $D \subset \mathbb{R}^2$.

Remarque On peut retrouver la fonction de densité conjointe de X et Y à partir de la fonction la fonction de répartition conjointe de X et Y via l'équation

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x\, \partial y} F_{X,Y}(x,y).$$

Remarque À noter que

$$P(x \leq X \leq x + dx,\ y \leq Y \leq y + dy) \approx f_{X,Y}(x,y) \cdot dx \cdot dy.$$

Remarque On peut retrouver la **fonction de densité marginale** de X à partir de la fonction de densité conjointe de X et Y via l'équation

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\ dy.$$

Similairement, on retrouve la **fonction de répartition marginale** de X à partir de la fonction de densité conjointe de X et Y via l'équation

$$\begin{aligned} F_X(x) &= F_{X,Y}(x,\infty) \\ &= \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(t,y)\, dydt. \end{aligned}$$

Définition 1.10 X et Y sont dites **indépendantes** si

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) \quad \text{pour tout } x, y \in \mathbb{R}.$$

Par ailleurs, elles sont **identiquement distribuées** si elles ont la même loi, c'est-à-dire si

$$f_X(x) = f_Y(x) \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Définition 1.11 La **fonction de densité conditionnelle** (ou **loi de probabilité conditionnelle**) de X sachant que $Y = y$, où $f_Y(y) \neq 0$, est

$$\begin{aligned} f_{X|Y=y}(x) &= f_{X|Y}(x \mid y) \\ &= f_X(x \mid Y = y) \\ &= \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}. \end{aligned}$$

La **fonction de répartition conditionnelle** de X sachant que $Y = y$, où $p_Y(y) \neq 0$, est

$$\begin{aligned} F_{X|Y=y}(x) &= F_{X|Y}(x \mid y) \\ &= F_X(x \mid Y = y) \\ &= P(X \leq x \mid Y = y) \\ &= \int_{-\infty}^{x} f_{X|Y=y}(t)\, dt. \end{aligned}$$

Définition 1.12 L'**espérance conditionnelle** de X sachant que $Y = y$, où $f_Y(y) \neq 0$, est

$$E(X \mid Y = y) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_{X|Y=y}(x)\, dx.$$

La **variance conditionnelle** de X sachant que $Y = y$, où $p_Y(y) \neq 0$, est

$$\begin{aligned} Var(X \mid Y = y) &= E\left(\left(X - E(X \mid Y = y)\right)^2 \mid Y = y\right) \\ &= E(X^2 \mid Y = y) - \left(E(X \mid Y = y)\right)^2. \end{aligned}$$

L'**écart-type conditionnel** de X sachant que $Y = y$, où $p_Y(y) \neq 0$, est

$$\sigma(X \mid Y = y) = \sqrt{Var(X \mid Y = y)}.$$

Remarque À noter que

$$P(x \leq X \leq x + dx \mid y \leq Y \leq y + dy) \approx f_{X|Y=y}(x) \cdot dx.$$

Définition 1.13 X et Y sont dites **indépendantes** si

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y).$$

Par ailleurs, elles sont **identiquement distribuées** si elles ont la même loi, c'est-à-dire si

$$f_X(x) = f_Y(x) \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Proposition 1.14 Si X et Y sont indépendantes, alors

$$f_{X|Y=y}(x) = f_X(x).$$

Exemple 1.15 Supposons que

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 6xy(2 - x - y) & \text{si } x, y \in [0,\ 1], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Déterminer l'espérance conditionnelle de X sachant que $Y = y$, où $y \in [0,1]$.

Exemple 1.16 Supposons que

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{ye^{-xy}}{2} & \text{si } x \in \mathbb{R}_+, y \in [0,\ 2], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Calculer $E\left(e^{X/2} \mid Y = 1\right)$.

1.3 Calcul d'espérances et de variances par conditionnement

Pour calculer une espérance ou une variance, il est parfois utile de conditionner sur une variable aléatoire appropriée. Cela demande toutefois un peu d'ingéniosité à l'occasion.

Exemple 1.17 On lance un équilibré. Si le résultat est n, alors on lance n pièces de monnaie et on compte le nombre de « faces » obtenu. On souhaite calculer le nombre de « faces » moyen espéré.

a) Quelle est la probabilité que le résultat du dé soit 5 ?

b) Sachant que le résultat du dé est 5, quelle est la probabilité d'obtenir 3 « faces » ?

c) Sachant que le résultat du dé est 5, quel est le nombre de « faces » espéré ?

d) Quelle est la probabilité que le résultat du dé soit 5 et d'obtenir 3 « faces » ?

e) Quelle est la probabilité d'obtenir 3 « faces » ?

f) Quel est le nombre de « faces » espéré ?

Remarque On peut voir $E(X \mid Y)$ comme une variable aléatoire :

$$\begin{aligned} E(X \mid Y) :\ & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & y \longmapsto E(X \mid Y = y) \end{aligned}$$

De façon similaire, on peut voir $Var(X \mid Y)$ comme une variable aléatoire :

$$\begin{aligned} Var(X \mid Y) :\ & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & y \longmapsto Var(X \mid Y = y) \end{aligned}$$

Proposition 1.18 (formule de l'espérance totale) Pour toutes variables aléatoires X et Y,

$$E(X) = E\big(E(X \mid Y)\big).$$

Proposition 1.19 (formule de la variance totale) Pour toutes variables aléatoires X et Y,

$$Var(X) = E\big(Var(X \mid Y)\big) + Var\big(E(X \mid Y)\big).$$

Remarques

Si Y est une variable aléatoire discrète ayant pour fonction de masse $p_Y(y)$, alors

$$E(X) = \sum_{y \in \mathbb{R}} E(X \mid Y = y) \cdot p_Y(y).$$

Si Y est une variable aléatoire continue ayant pour fonction de densité $f_Y(y)$, alors

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} E(X \mid Y = y) \cdot f_Y(y)\, dy.$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} Var(X) &= E(X^2) - E(X)^2 \\ &= E\big(E(X^2 \mid Y)\big) - E\big(E(X \mid Y)\big)^2. \end{aligned}$$

Exemple 1.20 On lance une pièce de monnaie qui donne « face » avec une probabilité p. Quel est le nombre moyen de lancers à effectuer avant d'obtenir une première fois « face » ?

Exemple 1.21 Le nombre moyen d'accidents de travail dans une semaine dans une industrie donnée est de 4. Supposons que les nombres de blessés à chaque accident sont des variables aléatoires indépendantes de moyenne 2. Supposons que le nombre de blessés est indépendant du nombre d'accidents. Quel est le nombre moyen de blessés durant une semaine ?

Exemple 1.22 Des épreuves indépendantes, chacune ayant p probabilité de succès, sont réalisées jusqu'à ce qu'il y ait k succès consécutif. Quel est le nombre moyen d'épreuves nécessaire ?

1.4 Calcul de probabilités par conditionnement

Il est également possible de calculer une probabilité en conditionnant sur une variable aléatoire appropriée.

Proposition 1.23 Soit E un évènement et Y une variable aléatoire. Si Y est discrète, alors

$$P(E) = \sum_{y=-\infty}^{\infty} P(E \mid Y = y) \cdot p_Y(y).$$

Si Y est continue, alors

$$P(E) = \int_{-\infty}^{\infty} P(E \mid Y = y) \cdot f_Y(y)\, dy.$$

Exemple 1.24 Supposons X et Y indépendantes et continues. Quelle est la fonction de répartition de $X + Y$?

Exemple 1.25 Le nombre de clients entrant dans un magasin suit une loi de Poisson de paramètre λ. Chaque client achète un produit avec une probabilité p. Quelle est la probabilité de ne rien vendre ? Quelle est la loi de probabilité du nombre de ventes ?

Exemple 1.26 (Problème des votes) En 2018, la CAQ a gagné $n = 74$ sièges à l'Assemblée nationale alors que les autres partis réunis en ont eu $m = 51$. En supposant que tous les ordonnancements sont équiprobables, montrer que la probabilité que la CAQ ait toujours été en avance lors de la soirée électorale est $(n - m)/(n + m)$.

Exemple 1.27 On a n éléments qui sont ordonnés $e_1, \dots, e_n$. On choisit, chaque seconde, un élément e_i (avec probabilité p_i) et on le place en tête de liste. Quelle est la position moyenne de l'élément choisi après une longue période d'opération ?

Définition 1.28 Un **graphe** G est une paire $G = (V, E)$ avec $V = \{1, \dots, n\}$ et $E \subset V \times V$. Soit $i, j \in V$ tels que $i \neq j$. On dit qu'il existe un **chemin** de i vers j s'il existe une suite

$$(i, i_1), (i_1, i_2), (i_2, i_3), \dots, (i_k, j)$$

d'éléments de E. Un graphe est **connexe** s'il existe un chemin entre chacune des paires de sommets.

Exemple 1.29 Un **graphe aléatoire** $G = (V, E)$ est tel que $V = \{1, \dots, n\}$ et

$$E = \{(i, X(i)) \mid i \in V\},$$

où $X(i)$ sont des variables aléatoires indépendantes telles que

$$P(X(i) = j) = \frac{1}{n}$$

pour tout $j \in V$. Quelle est la probabilité qu'un graphe aléatoire G soit connexe ?

Exemple 1.30 (Modèle des urnes de Polya) On choisit un nombre p de façon aléatoire (uniforme) sur l'intervalle unitaire. On réalise n épreuves indépendantes qui produisent un succès avec une probabilité p. Soit X le nombre de succès obtenus. Quelle est la loi de probabilité de X ?

1.5 Exercices supplémentaires

Exercice 1.1 Soient $X \sim \mathrm{Bin}(n, p)$ et $Y \sim \mathrm{Bin}(n, p)$ deux variables aléatoires indépendantes. Déterminer la fonction de masse conditionnelle de X sachant que $X + Y = m$. De quelle loi s'agit-il ?

Exercice 1.2 Soient X et Y deux variables aléatoires continues de densité conjointe

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 4y(x - y)e^{-(x+y)} & \text{si } 0 < x < \infty \quad \text{et} \quad 0 \leq y \leq x, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Calculer $E(X \mid Y = y)$.

Exercice 1.3 Dans un magasin, on observe deux types de clients. Le premier va acheter quelque chose alors que le deuxième type se contente de reluquer la marchandise. Sachant que le nombre de clients observés en une heure de chacun de ces deux types suit une loi de Poisson, que le nombre moyen d'acheteurs à l'heure est de 9 et que le nombre moyen de flâneurs est de 21, déterminer la loi du nombre d'acheteurs si on sait qu'il y a eu 25 clients dans une heure. Déterminer en plus l'espérance du nombre d'acheteurs sous cette même hypothèse.

Exercice 1.4 Soient X et Y deux variables aléatoires de loi de probabilité conjointe

	$P_{X,Y}(x,y)$	Y = 0	Y = 1
	0	0,2	0,1
X	1	0,4	0,2
	2	0,1	0,0

a) Déterminer la fonction de masse de X, $E(X)$ et $Var(X)$.

b) Déterminer la fonction de masse de $X \mid Y = 1$ puis calculer $E(X \mid Y = 1)$ et $Var(X \mid Y = 1)$.

c) Déterminer la fonction de masse de $X \mid Y = 0$ puis calculer $E(X \mid Y = 0)$ et $Var(X \mid Y = 0)$.

Exercice 1.5 Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes. Montrer que

$$\sum_{x\in\mathbb{R}} p_{X|Y=y}(x) = 1$$

pour toute valeur y telle que $p_Y(y) \neq 0$.

Exercice 1.6 Une urne contient trois boules blanches, six boules rouges et cinq boules noires. On tire au hasard et simultanément six boules de l'urne. Soient X et Y les nombres de boules blanches et noires tirées respectivement.

a) Déterminer la fonction de masse de X sachant que $Y = 3$.

b) Calculer $E(X \mid Y = 1)$ et $Var(X \mid Y = 1)$.

Exercice 1.7 Soit X une variable aléatoire uniforme sur l'intervalle $[0,\ 1]$. Déterminer $E(X \mid X < 0{,}5)$.

Exercice 1.8 On lance une pièce de monnaie qui donne « face » avec probabilité p. Déterminer la variance du nombre moyen de lancers à effectuer avant d'obtenir une première fois « face » en conditionnant par la variable

$$Y = \begin{cases} 1 & \text{si le } 1^{\text{er}} \text{ lancer est « face »,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exercice 1.9 Une souris est au centre d'un labyrinthe comportant trois chemins. Un seul de ces chemins mène à un morceau de fromage après deux minutes de marche. Les deux autres chemins reviennent au milieu après trois et cinq minutes de marche respectivement (les trajets sont en demi-cercle et la souris poursuit toujours son chemin droit devant elle). Sous l'hypothèse que la souris est incapable de se rappeler de ne pas prendre le même chemin lorsqu'elle revient, et que les choix de chemins sont faits au hasard avec probabilités égales, déterminer l'espérance et la variance de X, où X est le nombre de minutes nécessaires pour atteindre le fromage.

Exercice 1.10 (théorème de la variance totale) Soient X et Y deux variables aléatoires. Montrer que

$$Var(X) = E\big(Var(X \mid Y)\big) + Var\big(E(X \mid Y)\big).$$

Exercice 1.11 On choisit au hasard un nombre Y selon une loi uniforme sur l'intervalle $[0,\ 1]$. Ensuite, on choisit un nombre X selon une loi uniforme sur l'intervalle $[Y, 1]$.

a) Déterminer $E(X)$.

b) Déterminer $Var(X)$.

c) Déterminer les fonctions de masse de $Y \mid X = x$ et de X.

Exercice 1.12 Soient $X_1, X_2, \ldots$ une suite de variables aléatoires telles que $E(X_i) = \mu$ pour tout i. Soit N une variable aléatoire à valeurs entières. Supposons que les variables $N, X_1, X_2, \ldots$ soient mutuellement indépendantes. Montrer que

$$E\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right) = E(N) \cdot \mu.$$

C'est l'**identité de Wald**, du nom du mathématicien hongrois Abraham Wald (1902–1950).

Exercice 1.13 Soient $X_1, X_2, \dots$ une suite de variable aléatoires telles que $E(X_i) = \mu$ et $Var(X_i) = \sigma^2$ pour tout i. Soit N une variable aléatoire à valeurs entières. Supposons que les variables $N, X_1, X_2, \dots$ soient mutuellement indépendantes. Montrer que

$$Var\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right) = E(N) \cdot \sigma^2 + \mu^2 \cdot Var(N).$$

Exercice 1.14 Le nombre de retraits bancaires durant une heure à un guichet automatique suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 120$. Sachant que les montants retirés sont des variables aléatoires indépendantes d'espérance 55 \$ et de variance 900 \$^{2}, déterminer le montant total moyen retiré en une heure à ce guichet automatique et la variance de ce montant total.

Exercice 1.15 La loi de probabilité conjointe de X et Y est donnée par

			Y	
	$p_{X,Y}(x,y)$	1	2	3
	1	1/12	1/12	0
X	2	1/2	0	1/10
	3	1/10	1/10	1/30

Calculer $E(X \mid Y = i)$ pour $i \in \{1,\ 2,\ 3\}$.

Exercice 1.16 Un dé équilibré est lancé successivement. Soit X et Y représentant, respectivement, le nombre de lancés nécessaire pour obtenir un six et un cinq.

a) Trouver $E(X)$.

b) Trouver $E(X \mid Y = 1)$.

c) Trouver $E(X \mid Y = 5)$.

Exercice 1.17 La fonction de densité conjointe de X et Y est

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{e^{-y}(y^2 - x^2)}{8} & \text{si } 0 < y < \infty \quad \text{et} \quad -y \leq x \leq y, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que $E(X \mid Y = y) = 0$.

Exercice 1.18 Montrer que si X et Y sont continues, alors

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} E(X \mid Y = y) \cdot f_Y(y)\, dy.$$

Exercice 1.19 Un parieur remporte chaque partie avec une probabilité p. Dans les deux cas suivants, déterminer le nombre moyen de victoires.

a) Le parieur jouera n parties. S'il remporte X de ces parties, alors il jouera X parties additionnelles avant d'arrêter.

b) Le parieur jouera jusqu'à ce qu'il remporte une partie. Si ça lui prend Y parties pour obtenir cette victoire, alors il jouera Y parties additionnelles avant d'arrêter.

Exercice 1.20 Chaque élément d'une suite de données binaires est soit 1 avec une probabilité p ou 0 avec une probabilité $1 - p$. Une sous-suite maximale de données consécutives ayant la même valeur est appelée une série. Par exemple, pour la suite 1, 1, 0, 1, 1, 1, 0, la première série est de longueur 2, la deuxième est de longueur 1, la troisième est de longueur 3 et la quatrième est de longueur 1.

a) Trouver la longueur moyenne de la première série.

b) Trouver la longueur moyenne de la deuxième série.

Exercice 1.21 Alice et Bob jouent une série de parties, au cours de laquelle Alice a une probabilité p de remporter chaque partie. Le gagnant est le premier joueur à remporter deux parties de plus que son adversaire.

a) Trouver la probabilité que Alice soit la vainqueur.

b) Trouver le nombre moyen de parties jouées.

Exercice 1.22 Une étude démontre que les jours de pluie, le nombre d'accidents de la route à Sherbrooke suit une loi de Poisson de moyenne 6, alors qu'il suit une loi de Poisson de moyenne 2 les autres jours. Les prévisions météorologiques nous indiquent que la probabilité d'avoir de la pluie demain est de 60 %. Posons X le nombre d'accidents de la route qui se produiront demain.

a) Calculer $E(X)$.

b) Calculer $p_X(0)$.

c) Calculer $Var(X)$.

Exercice 1.23 Albert et Bob s'affrontent à la finale de tennis du US Open. Albert remporte chaque échange avec une probabilité p lorsqu'il effectue le service, et avec une probabilité q lorsque c'est son adversaire qui effectue le service. Si Albert a le service lors du premier échange, quelle est la probabilité qu'il remporte le tournoi ?

Exercice 1.24 Soient X et Y deux variables discrètes indépendantes. Démontrer que

$$E(X \mid Y = y) = E(X)$$

pour tout y.

Exercice 1.25 Une souris est au centre d'un labyrinthe comportant $n + 1$ chemins. Un seul de ces chemins, le chemin $n + 1$, mène à un morceau de fromage après a_{n+1} minutes de marche. Les chemins $1, \dots, n$ reviennent au centre du labyrinthe après respectivement $a_1, \dots, a_n$ minutes de marche (les trajets sont en demi-cercle et la souris poursuit toujours son chemin droit devant elle). Sous l'hypothèse que la souris est incapable de se rappeler de ne pas prendre le même chemin lorsqu'elle revient au centre du labyrinthe, et que les choix de chemins sont faits au hasard avec probabilités égales, déterminer l'espérance de X, où X est le nombre de minutes nécessaires pour atteindre le fromage.

Exercice 1.26 Le nombre d'orages se produisant au cours du prochain mois, noté X, est distribué selon une loi de Poisson ayant comme paramètre une valeur uniformément distribuée sur l'intervalle $[0,\ 3]$. Autrement dit, λ suit une loi uniforme sur $[0,\ 3]$, et X suit une loi de Poisson de paramètre λ. Calculer la probabilité qu'il n'y ait aucun orage au cours du prochain mois.

Exercice 1.27 Un pion est promené au hasard sur les 12 cases d'un échiquier 3×4. Les cases sont numérotées selon l'illustration ci-dessous.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12

Au temps 0, le pion est sur la case 1. Puis, à chaque unité de temps, le pion est déplacé au hasard vers une des 2, 3 ou 4 cases voisines de celle où il était placé (avec des probabilités égales : 1/2, 1/3 ou 1/4 selon le cas). Les mouvements diagonaux sont interdits. Évaluez la probabilité que la case 4 soit visitée avant la case 12.

2. Chaines de Markov

Comme nous le verrons dans cette section, de nombreux processus vérifient la propriété de Markov. Pour ces processus sans mémoire, la bonne prédiction du futur dépend seulement du présent. Autrement dit, si l'on souhaite prédire le futur et que l'on connait le présent, la connaissance du passé n'apporte pas d'informations supplémentaires.

Les exercices 1 et 3 de la section –1 sont des exemples de processus stochastiques vérifiant la propriété markovienne.

2.1 Définitions

Définition 2.1 Un **processus stochastique** est une collection $\{X_t\}_{t\in T}$ de variables aléatoires. Si t représente le temps, on dit que X_t est l'**état** du processus au temps t. Si l'ensemble T est discret, on dit que le processus est à **temps discret** et si T est un intervalle réel, on dit que le processus est à **temps continu**.

Exemple 2.2 Soit X_n représentant le profit réalisé au poker après n parties. Alors $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est un processus stochastique à temps discret.

Exemple 2.3 Soit X_t représentant le nombre de clients qui sont entrés dans un magasin jusqu'au temps t. Alors $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ est un processus stochastique à temps continu.

Définition 2.4 Soit $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires prenant des valeurs dans un ensemble E discret, nommé l'**espace d'états**. On dit que le processus $\{X_n\}_{n\in N}$ est une **chaine de Markov à temps discret** (ou **possède la propriété markovienne**) lorsque pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour toute suite d'états $(i_0, \dots, i_{n-1}, i, j) \in E^{n+2}$ telle que

$$P(X_0 = i_0, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i) > 0,$$

on a

$$P(X_{n+1} = j \mid X_0 = i_0, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i) = P(X_{n+1} = j \mid X_n = i).$$

Ainsi, la distribution de probabilité conditionnelle des états futurs du processus ne dépend que de l'état présent, et non pas de l'ensemble de la séquence des évènements qui l'ont précédé. Autrement dit, le futur est conditionnellement indépendant du passé si on connaît le présent. En ce sens, un tel processus est considéré sans mémoire ou non héréditaire.

Définition 2.5 Une chaine de Markov $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est dite **homogène** (ou **stationnaire**) si, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tous états $i, j \in E$,

$$P(X_{n+1} = j \mid X_n = i) = P(X_n = j \mid X_{n-1} = i).$$

Autrement dit, $P(X_{n+1} = j \mid X_n = i)$ ne dépend pas de n.

Remarque Dans la suite de ce chapitre, on ne considère que des chaines de Markov homogènes.

Exemple 2.6 (Andreï Andreïevitch Markov) En 1913, Markov (1856–1922) donne les résultats d'une analyse des suites de lettres dans l'oeuvre « Eugène Onéguine » qui est un roman en vers d'Alexandre Sergueïevitch Pouchkine (1799–1837). Sur 20 000 lettres, il estime ainsi la succession des voyelles et des consonnes :

	voyelle	consonne
voyelle	0,128	0,872
consonne	0,663	0,337

Markov a suggéré que pour prédire la prochaine lettre X_{n+1}, il est aussi efficace de ne tenir compte que de X_n, que de prendre $X_n, X_{n-1}, \dots, X_0$.

Définition 2.7 Soit $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une chaine de Markov d'espace d'états E. Posons $p_{i,j} = P(X_{n+1} = j \mid X_n = i)$, la **probabilité de transition** de l'état i à l'état j. La matrice $P = [p_{i,j}]_{i,j\in E}$ de dimension $(|E|, |E|)$ est la **matrice de transition** (ou **noyau de transition**, **opérateur de transition**) de la chaine de Markov.

Remarque Soit P la matrice de transition d'une chaine de Markov. Alors

$$0 \leq p_{i,j} \leq 1 \text{ pour tout } i, j \in E \quad \text{et} \quad \sum_{j\in E} p_{i,j} = 1 \text{ pour tout } i \in E.$$

Une matrice carrée ayant ces propriétés est appelée **matrice stochastique** (ou **matrice de Markov**). Par ailleurs, une **matrice bistochastique** est une matrice stochastique dont la somme des éléments des colonnes vaut également 1, c'est-à-dire une matrice stochastique telle que

$$\sum_{i\in E} p_{i,j} = 1 \text{ pour tout } j \in E$$

Exemple 2.8 (Prédiction météo 1) Supposons que la probabilité d'avoir de la pluie demain dépend seulement de la météo d'aujourd'hui. Considérons $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, où

$$X_n = \begin{cases} 0 & \text{s'il pleut à la journée } n, \\ 1 & \text{s'il ne pleut pas à la journée } n. \end{cases}$$

Des données collectées dans une certaine région donnent la matrice de transition

$$P = \begin{bmatrix} 0{,}60 & 0{,}40 \\ 0{,}25 & 0{,}75 \end{bmatrix}.$$

Exemple 2.9 (Prédiction météo 2) Supposons que la probabilité d'avoir de la pluie demain dépend seulement de la météo d'hier et d'aujourd'hui. Plus spécifiquement, supposons que

— s'il a plu les deux derniers jours, il pleuvra demain avec une probabilité de 70 %,
— s'il a plu aujourd'hui mais pas hier, il pleuvra demain avec une probabilité de 50 %,
— s'il a plu hier mais pas aujourd'hui, il pleuvra demain avec une probabilité de 40 %,
— s'il n'a pas plu les deux derniers jours, il pleuvra demain avec une probabilité de 20 %.

Est-il possible de modéliser ce processus à l'aide d'une chaine de Markov ?

Exemple 2.10 (Promenade sur les entiers) Une chaine de Markov $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ayant $\mathbb{Z}$ comme espace d'états est une **promenade aléatoire** si, pour une certaine probabilité $p \in [0, 1]$,

$$p_{i,i+1} = p \quad \text{et} \quad p_{i,i-1} = 1 - p \quad \text{pour tout } i \in \mathbb{Z}.$$

Exemple 2.11 (Problème de la ruine du joueur) Un joueur compulsif joue à un jeu de hasard. À chaque partie, il a une probabilité p de gagner 1 \$ et une probabilité $q = 1 - p$ de perdre 1 \$. Le joueur étant compulsif joue jusqu'à sa propre ruine ou jusqu'à ce qu'il ait N \$.

2.2 Équations de Chapman-Kolmogorov

Définition 2.12 Soit $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une chaine de Markov. Posons

$$p_{i,j}^{(n)} = P(X_{k+n} = j \mid X_k = i),$$

la probabilité de passer de l'état i à l'état j en n transitions. La matrice

$$P^{(n)} = \left[p_{i,j}^{(n)}\right]_{i,j\in E}$$

est la **matrice des n-transitions**.

Remarque Soit P la matrice de transition de la chaine de Markov $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Alors

$$P(X_{n+2} = j, X_{n+1} = k \mid X_n = i) = p_{i,k} \cdot p_{k,j}.$$

Théorème 2.13 (Équation de Chapman-Kolmogorov) Soit P la matrice de transition de la chaine de Markov $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Alors, pour tout $n, m \geq 0$ et pour tout $i, j \in E$,

$$p_{i,j}^{(n+m)} = \sum_{k\in E} p_{i,k}^{(n)} \cdot p_{k,j}^{(m)}.$$

Corollaire 2.14 Soit P la matrice de transition de la chaine de Markov $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Alors

$$P^{(n+m)} = P^{(n)} \cdot P^{(m)}.$$

Corollaire 2.15 Soit P la matrice de transition de la chaine de Markov $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Alors

$$P^{(n+m)} = P^{n+m}.$$

Corollaire 2.16 Soit P la matrice de transition de la chaine de Markov $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Alors

$$P^{(n+1)} = \sum_{k\in E} P_{i,k}^{(n)} \cdot P_{k,j}.$$

Exemple 2.17 Reprenons l'exemple 2.8 (prédiction météo 1) et supposons qu'il a plu aujourd'hui.

a) Quelle est la probabilité qu'il pleuve demain ?

b) Quelle est la probabilité qu'il pleuve après-demain ?

c) Quelle est la probabilité qu'il pleuve dans dix jours ?

d) Quelle est la probabilité qu'il pleuve dans cent-mille jours ?

2.3 Classification des états

Pour l'ensemble de cette section, on considère une chaine de Markov $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ d'espace d'états E et de matrice de transition P.

Définition 2.18 Un état j est dit **accessible** d'un autre état i (ou i **mène** à j) s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $p_{i,j}^{(n)} > 0$, auquel cas on note $j \leftarrow i$ ou $i \rightarrow j$,

Proposition 2.19 L'état j est accessible depuis l'état i si et seulement si en commençant en i, il est possible que le processus entre en j.

Proposition 2.20 La propriété d'accessibilité est réflexive et transitive, mais n'est pas nécessairement symétrique.

Définition 2.21 Deux états i et j **communiquent** s'ils sont accessibles l'un de l'autre, autrement dit si $i \rightarrow j$ et $j \rightarrow i$, auquel cas on note $i \leftrightarrow j$.

Proposition 2.22 La relation $\leftrightarrow$ est une relation d'équivalence.

Définition 2.23 Une chaine de Markov est dite **irréductible** si elle n'a qu'une seule classe d'équivalence pour $\leftrightarrow$.

Exemple 2.24 La chaine de Markov définie par la matrice de transition

$$P = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$$

est irréductible.

Exemple 2.25 Soit la chaine de Markov définie par la matrice de transition

$$P = \begin{bmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 2/3 & 1/3 \\ a & 0 & 1/2 - a & 1/2 \end{bmatrix},$$

où $a \in [0, 1/2]$. Pour quelles valeurs de a la chaine de Markov est-elle irréductible ?

Notation 2.26 On note f_i la probabilité qu'en débutant en l'état i, on retourne éventuellement à l'état i. Ainsi,

$$f_i = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{X_n = i\} \mid X_0 = i\right).$$

On note $f_{i,j}$ la probabilité qu'en débutant en l'état i, on atteigne éventuellement à l'état j. Ainsi,

$$f_{i,j} = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{X_n = j\} \mid X_0 = i\right).$$

On note N_i le nombre de fois où le processus est dans l'état i si $X_0 = i$. Ainsi, si

$$Y_n = \begin{cases} 1 & \text{si } X_n = i, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

alors

$$N_i = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n.$$

Définition 2.27 Un état i est dit **récurrent** si $f_i = 1$. Il est dit **transitoire** (ou **transient**) si $f_i < 1$.

Remarque

— Si l'état i est récurrent, alors, en débutant à cet état, on y retournera infiniment souvent, et l'espérance du nombre de fois où le processus sera en i est infinie.

— Si l'état i est transitoire, alors, en débutant à cet état, le nombre de fois que le processus sera dans l'état i suit une loi géométrique de paramètre $1 - f_i$.

Proposition 2.28 Un état i est récurrent si et seulement si

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{i,i}^{(n)} = \infty.$$

Il est transitoire si et seulement si

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{i,i}^{(n)} < \infty.$$

Proposition 2.29 Si l'état i est récurrent et $i \leftrightarrow j$, alors l'état j est récurrent.

Remarque Les propriétés « récurrent » et « transitoire » sont invariantes sous $\leftrightarrow$.

Exemple 2.30 Considérons la chaine de Markov ayant pour espace d'états $E = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ et pour matrice de transition

$$P = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

Quels sont les états récurrents et les états transitoires ?

Exemple 2.31 Dans l'exemple 2.10 (Promenade aléatoire sur les entiers), quels sont les états récurrents et les états transitoires ?

Exemple 2.32 (Les classes sociales) Considérons trois classes sociales A, B et C. Les probabilités que les individus de la génération suivante passent d'une classe sociale à l'autre sont

$$P = \begin{bmatrix} 3/5 & 1/5 & 1/5 \\ 1/6 & 4/6 & 1/6 \\ 3/8 & 3/8 & 2/8 \end{bmatrix}.$$

Sachant que la population est présentement formée de 20 % de A, de 30 % de B et de 50 % de C, quelle sera cette répartition dans plusieurs (un très grand nombre) générations ?

Définition 2.33 Un état i est un **état de retour** s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $p_{i,i}^{(n)} > 0$. Il est un **état de non-retour** si $p_{i,i}^{(n)} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Définition 2.35 Si i est un état de retour, on définit la **période** de i, notée $d(i)$, par

$$d(i) = \text{pgcd}\left\{n \in \mathbb{N}^* \mid P_{i,i}^{(n)} > 0\right\}.$$

Si i est un état de non-retour, on pose $d(i) = \infty$.

Exemple 2.36 Considérons la chaine de Markov $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ayant pour espace d'états $E = \{0, 1\}$ et pour matrice de transition

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Déterminez si 0 et 1 sont des états de retour ou de non-retour et indiquez leur période.

Définition 2.37 Un état de période 1 est dit **apériodique**, alors qu'un état i de période supérieure à 1 est dit **périodique** de longueur $d(i)$.

Proposition 2.38 Si les états i et j communiquent, alors ils ont la même période.

Exemple 2.39 Considérons la chaine de Markov $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ayant pour espace d'états $E = \{0, 1, 2\}$ et pour matrice de transition

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ p & 0 & 1-p \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

où $p \in]0, 1[$. Quelles sont les périodes des états ?

Exemple 2.40 Considérons la chaine de Markov $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ayant pour espace d'états $E = \{0, 1, 2, 3\}$ et pour matrice de transition

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Quelles sont les périodes des états ?

Définition 2.41 Soient $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une chaine de Markov et i un état récurrent. Le **temps du premier retour** à l'état i est

$$T_i = \min\{n \in \mathbb{N}^* \mid X_n = i, X_0 = i\}.$$

On dit que i est **récurrent positif** si $E(T_i) < \infty$ et que i est **récurrent nul** lorsque $E(T_i) = \infty$.

Proposition 2.42 La récurrence positive est stable sous $\leftrightarrow$.

Remarque Si une chaine irréductible a un nombre fini d'états, tous les états sont nécessairement récurrents positifs.

Définition 2.43 Un état i est dit **ergodique** s'il est apériodique et récurrent positif.

Théorème 2.44 Soit $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une chaine de Markov irréductible où tous les états sont ergodiques. Alors $\lim_{n\to\infty} p_{i,j}^{(n)}$ existe et est indépendante de i. De plus, si $\pi_j = \lim_{n\to\infty} p_{i,j}^{(n)}$, alors π_j est l'unique solution non négative du système d'équations

$$\pi_j = \sum_{i\in E} \pi_i \cdot P_{i,j} \text{ pour tout } j \in E \quad \text{et} \quad \sum_{j\in E} \pi_j.$$

Remarque La valeur π_j correspond dans la pratique à la proportion du temps que la chaine passe dans l'état j.

Exemple 2.45 Pour la chaine de Markov de l'exemple 2.32 (Les classes sociales), démontrez que tous les états sont ergodiques et trouvez les valeurs π_A, π_B, π_C.

Exemple 2.46 Considérons la chaine de Markov ayant pour espace d'états $E = \{0, 1\}$ et pour matrice de transition

$$P = \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 \end{bmatrix}.$$

Quelles sont les valeurs de π_0 et de π_1 ?

Proposition 2.47 Soit P une matrice de transition d'une chaine de Markov $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Si P est bistochastique, alors $\pi_i = 1/|E|$ pour tout $i \in E$.

2.4 Applications

Exemple 2.48 (Collectionneur de cartes de basketball) Un collectionneur souhaite accumuler les N cartes d'une collection de cartes de basketball. Pour y arriver, il achète des paquets contenant une carte. Chaque carte a autant de chance de se retrouver dans un paquet (distribution uniforme). Si chaque paquet coûte 1 \$, combien d'argent devra-t-il débourser en moyenne pour compléter sa collection ?

Exemple 2.49 (Problème de la ruine du joueur) Un joueur compulsif disposant de i \$ joue à un jeu de hasard. À chaque partie, il a une probabilité p de gagner 1 \$ et une probabilité $q = 1 - p$ de perdre 1 \$. Le joueur étant compulsif joue jusqu'à sa propre ruine ou jusqu'à ce qu'il ait N \$.

a) Quelle est la probabilité qu'il termine le jeu avec N \$?

b) Quelle est la durée moyenne du jeu ?

c) Qu'en est-il des réponses en a) et b) si N est une somme très importante ?

Exemple 2.49 (Génétique et loi de Hardy-Weinberg) Chaque individu d'une population est porteur de deux gènes, chacun prenant la valeur A ou a. Initialement, les proportions des paires de gènes AA, aa ou Aa sont respectivement p_0, q_0 et r_0, avec $p_0 + q_0 + r_0 = 1$. Lors de la reproduction, chaque parent transmet un de ses gènes aléatoirement (uniforme). Quelle sera la répartition des paires de gènes dans plusieurs générations? Et celle des gènes eux-mêmes ?

2.5 Temps moyen passé dans les états transitoires

Proposition 2.50 Soit $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une chaine de Markov ayant un nombre fini d'états et supposons que les états sont numérotés de sorte que $T = \{1, 2, \dots, t\}$ désigne l'ensemble des états transitoires. Soit

$$P_T = \begin{bmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & \cdots & p_{1,t} \\ p_{2,1} & p_{2,1} & \cdots & p_{2,t} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{t,1} & p_{t,2} & \cdots & p_{t,t} \end{bmatrix},$$

La matrice de transition des états transitoires. Pour les états transitoires i et j, posons $s_{i,j}$ pour représenter l'espérance du nombre de périodes où la chaine de Markov est dans l'état j, étant donné qu'elle commence à l'état i. Si

$$S = \begin{bmatrix} s_{1,1} & s_{1,2} & \cdots & s_{1,t} \\ s_{2,1} & s_{2,1} & \cdots & s_{2,t} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{t,1} & s_{t,2} & \cdots & s_{t,t} \end{bmatrix}.$$

alors $S = (I - P_T)^{-1}$. Par ailleurs,

$$f_{i,j} = \frac{s_{i,j} - \delta_{i,j}}{s_{j,j}},$$

où

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

2.6 Processus de branchement

Exemple 2.51 On a une population formée d'individus qui peuvent engendrer des individus de même type. Chaque individu produit dans sa vie j individus avec probabilité p_j, indépendamment les uns des autres. Quelle est la probabilité que cette population s'éteigne ?

2.7 Exercices supplémentaires

Exercice 2.1 Soit P la matrice de transition d'une chaine de Markov $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Montrer que P^k est une matrice de transition pour la chaine de Markov $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, où $Y_n = X_{kn}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 2.2 Soit P est une matrice de transition d'une chaine de Markov $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Montrer que P^k est stochastique pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 2.3 Soit $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une chaine de Markov. Supposons que $X_0 = i$ pour un état i. Soit N_i le nombre de fois où le processus va retourner en l'état i après l'avoir quitté pour la première fois. Déterminer $E(N_i)$.

Exercice 2.4 Soit i un état transitoire d'une chaine de Markov $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ et soit N_i le nombre de fois où le processus est dans l'état i si $X_0 = i$.

a) Déterminer $E(N_i)$.

b) Déterminer $P(N_i > k)$ pour $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 2.5 Considérons la chaine de Markov ayant pour espace d'états $E = \{0, 1, 2, 3\}$ et pour matrice de transition

$$P = \begin{bmatrix} 0{,}25 & 0{,}25 & 0{,}25 & 0{,}25 \\ 0{,}10 & 0{,}50 & 0 & 0{,}40 \\ 0 & 0 & 0{,}60 & 0{,}40 \\ 0 & 0 & 0{,}50 & 0{,}50 \end{bmatrix}.$$

a) Identifier les états récurrents et les états transitoires.

b) Déterminer $P(N_i \geq n)$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $E(N_i)$ pour toute valeur $i \in \{0, 1, 2, 3\}$.

Exercice 2.6 Montrer que dans une chaine de Markov ayant un nombre fini d'états, les états ne peuvent pas tous être transitoires.

Exercice 2.7 Une compagnie d'assurance classe les niveaux de bonus-malus de ses clients suivant les entiers naturels : 0, 1, 2, ... Le niveau 0 est le plus avantageux pour l'assuré. Soient $i, j \in \mathbb{N}$ tels que $0 \leq i \leq j$. Notons le niveau de bonus-malus d'un assuré à l'année n par X_n, où $n \in \mathbb{N}$. Si ce niveau est i à l'année n, l'assureur le dévaluera au niveau j l'année suivante si, entre temps, l'assuré a eu $j - i$ accidents. Supposons que le nombre d'accidents subis par l'assuré suit une loi de Poisson de paramètre λ.

a) Donner les états de la ch chaine de Markov $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

b) Donner la matrice de transition de cette chaine.

c) Déterminer les classes d'équivalence pour la relation de communication.

d) Déterminer si les états sont récurrents ou transitoires.

Exercice 2.8 Considérons la marche aléatoire symétrique dans $\mathbb{Z}^m$ avec probabilité $1/m$ de se déplacer vers une des directions canoniques d'une valeur à la fois. Soit 0 l'état correspondant à l'origine du repère. On peut montrer que $P_{0,0}^{(n)} \approx k \cdot n^{-m/2}$ pour une constante k. Déterminer si les marches aléatoires symétriques dans $\mathbb{Z}^m$ sont récurrentes ou transitoires.

Exercice 2.9 Chaque citoyen adulte d'une ville travaille dans l'une des trois professions: A, B ou C. De père en fils, les professions des pères sont retenues avec probabilités respectives de $3/5$, $2/3$ et $1/4$. Par ailleurs, si un fils ne retient pas la profession du père, il accède avec probabilités égales à l'une des deux autres professions. Supposons que la répartition des professions pour la génération actuelle est de 20 % pour la profession A, 30 % pour la profession B et de 50 % pour la profession C.

a) Déterminer la distribution des citoyens mâles par profession pour la prochaine génération.

b) Déterminer la distribution des citoyens mâles par profession dans deux générations.

c) Déterminer la distribution limite des citoyens mâles par profession pour la $n^{\text{ième}}$ génération future lorsque $n \to \infty$.

Exercice 2.10 Soient i et j deux états d'une chaine de Markov $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de périodes finies. Montrer que si i communique avec j, alors i et j ont la même période.

Exercice 2.11 Soit $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une chaine de Markov irréductible d'espace d'états fini E où tous les états sont ergodiques. Supposons que la matrice de transition de cette chaine soit bistochastique. Montrer que $\pi_j = 1/|E|$ pour $j \in E$ est la distribution stationnaire de cette chaine de Markov.

Exercice 2.12 Considérons la chaine de Markov $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ayant pour espace états $E = \mathbb{N}$ et où les probabilités de transition sont

$$p_{i,i+1} = \frac{i}{i+1} \quad \text{et} \quad p_{i,0} = \frac{1}{i+1}.$$

Posons $T_i = \min\{n \geq 1 \mid X_0 = i, X_n = i\}$ et Posons $f_{i,i}^{(n)} = P(T_i = n \mid X_0 = i)$.

a) Calculer $f_{0,0}^{(1)}$, puis $f_{0,0}^{(2)}, f_{0,0}^{(3)}, f_{0,0}^{(4)}$ et $f_{0,0}^{(5)}$, puis en déduire une formule pour $f_{0,0}^{(n)}$ avec $n \geq 2$.

b) En déduire que 0 est un état récurrent.

c) Montrer que 0 est un état récurrent nul.

Exercice 2.13 Soit $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une chaine de Markov. Posons $T_i = \min\{n \geq 1 \mid X_0 = i, X_n = i\}$ et posons $f_{i,j}^{(n)} = P(T_j = n \mid X_0 = i)$.

a) Expliquer intuitivement pourquoi, pour tout entier $n \geq 1$, on a

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=0}^{\infty} f_{i,j}^{(k)} \cdot p_{j,j}^{(n-k)}.$$

b) En déduire une formule de récurrence pour les $f_{i,j}^{(n)}$.

Exercice 2.14 Montrer que tout état de non-retour est transitoire et que tout état absorbant est récurrent.

Exercice 2.15 Un joueur joue à un jeu de roulette. La roulette est formée de 38 cases : 18 rouges, 18 noires, une case marquée 0 et une case marquée 00. Le joueur gagne si la bille s'arrête sur une case rouge. Le joueur possède une fortune initiale de 10 \$. S'il gagne, il remporte un dollars et s'il perd, il le débourse. Le joueur se fixe comme but de doubler sa mise initiale.

a) Déterminer la probabilité que le joueur atteigne sa cible.

b) Déterminer le profit (ou la perte) espérée.

c) Reprendre l'exercice b) en supposant cette fois que le joueur ne fait qu'un seul paris de 10 \$. Déterminer la stratégie optimale.

Exercice 2.16 L'humeur d'un individu peut être considérée comme une chaine de Markov à trois états. Supposons que la matrice de transition est donnée par

$$P = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}4 & 0{,}1 \\ 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}5 \end{bmatrix}.$$

Déterminer la proportion, à long terme, du temps que passe l'individu dans chacun des états.

Exercice 2.17 Une chaine de montage comporte plusieurs machines. Si certaines d'entre elles ne sont pas en opération, la chaine peut quand même continuer à avancer alors que d'autres sont critiques et que la chaine doit arrêter si une d'elles fait défaillance. On peut modéliser la chaine par un processus de Markov où chaque état représente une configuration (marche/marche pas) des différentes machines. Soit P la matrice de transition. Soient A l'ensemble des états qui permettent à la chaine d'avancer et A^c l'ensemble des états où la chaine arrête. Soit π_k la proportion du temps où la chaine est dans l'état k pour $k = 1, \dots, n$.

a) Soient $i \in A$ et $j \in A^c$. Déterminer la proportion du temps où le processus passe de l'état i à l'état j.

b) Déterminer la proportion du temps où le processus passe d'un état où la chaine avance à l'état j.

c) Déterminer la proportion du temps où le processus tombe en panne.

d) Soient F le temps moyen où la chaine de montage demeure en fonction après une remise en service et D le temps moyen où la chaine de montage demeure en défaillance après une panne. Déterminer la proportion du temps où le processus tombe en panne en fonction de F et de D.

e) Expliquer, dans le contexte du problème, pourquoi

$$\frac{F}{F+D} = \sum_{i \in A} \pi_i.$$

f) Déterminer les valeurs de F et de D.

g) Supposons que P est donnée par la matrice

$$P = \begin{bmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{bmatrix}.$$

On admettra que la chaine avance si elle est dans les états 1 et 2 et qu'elle s'arrête dans les états 3 et 4. Déterminer les proportions du temps que le système passe dans chacun des quatre états, puis déterminer le taux de panne, la durée moyenne de celles-ci puis la durée de fonctionnement moyenne entre deux pannes.

Exercice 2.18 On considère une population où chaque individu est porteur de deux gènes qui peuvent chacun être du type A ou a. Un individu sera porteur de la caractéristique a si et seulement s'il est porteur de la paire aa. On dit alors que le gène A est dominant et que le gène a est récessif. Supposons que les pourcentages de gens de la population ayant les paires de gènes AA, aa et aA se sont stabilisées et prennent les valeurs p, q et r respectivement. On dira qu'un individu est dominant s'il possède au moins un gène dominant et qu'il est récessif sinon.

a) Soit S_{11} la probabilité qu'un enfant d'un couple de dominants soit récessif. Déterminer S_{11}.

b) Soit S_{10} la probabilité qu'un enfant d'un couple formé d'un parent dominant et d'un parent récessif soit récessif. Déterminer S_{10}.

c) En déduire que $S_{11} = S_{10}^2$.

En génétique ces rapports sont appelés **ratio de Snyder**.

Exercice 2.19 Reprenons le problème de la ruine du joueur (voir exemple 2.11) où le jeu s'arrête lorsque le joueur a soit tout perdu ou soit tout gagné les N dollars. Soit M_i le nombre moyen de parties qui doivent être complétées pour que le jeu se termine si le joueur possède au départ i dollars. Montrer que

$$M_0 = M_N = 0 \quad \text{et} \quad M_i = 1 + pM_{i+1} + qM_{i-1}$$

pour $i \in \{1, \dots, N-1\}$.

Exercice 2.20 Quatre balles blanches et quatre balles noires sont distribuées dans deux urnes de sorte que chaque urne contient quatre balles. On dit que le système est dans l'état i, $i \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, si la première urne contient i balles blanches. À chaque étape, on prend une balle de chaque urne et on les interchange. Soit X_n l'état du système après l'étape n, c'est-à-dire après n interchangements de balles. Expliquez pourquoi $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaine de Markov et calculez sa matrice de transition.

Exercice 2.21 Une chaine de Markov $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ayant pour espace d'états $E = \{0, 1, 2\}$ a pour matrice de transition

$$P = \begin{bmatrix} 3/6 & 2/6 & 1/6 \\ 0 & 2/6 & 4/6 \\ 3/6 & 0 & 3/6 \end{bmatrix}.$$

Si

$$P(X_0 = 0) = \frac{1}{4}, \quad P(X_0 = 1) = \frac{1}{4}, \quad P(X_0 = 2) = \frac{2}{4},$$

calculez $E(X_3)$.

Exercice 2.22 On considère le problème de la ruine du joueur (voir exemple 2.11) avec $M = 6$ et $p = 0{,}60$. On suppose que le joueur débute la partie avec 3 $.

a) Quelle est la probabilité que le joueur ait 4 $ après 3 parties ?

b) Sachant que le joueur a 3 $ après 12 parties, quelle est la probabilité qu'il ait 4 $ après 15 parties ?

c) Quelle est la probabilité que le jeu se termine en 5 parties ou moins ?

d) Si le joueur a entre 1 $ et 5$ après 10 parties, quelle est la probabilité qu'à ce moment, le joueur ait 3 $?

Exercice 2.23 Montrer que dans une chaine de Markov irréductible avec un nombre fini d'états, tous les états sont récurrents.

Exercice 2.24 Six enfants (Alice, Bob, Carl, Diane, Ève, Franck) jouent à se lancer une balle.

- Si Alice a la balle, elle a autant de chance de la lancer à Bob, Diane, Ève et Franck.
- Si Bob a la balle, il a autant de chance de la lancer à Alice, Carl, Ève et Franck.
- Si Ève a la balle, elle a autant de chance de la lancer à Alice, Bob, Diane et Franck.
- Si Carl ou Franck ont la balle, ils vont se la lancer à répétition.
- Si Diane a la balle, elle s'enfuit avec.

a) Modéliser ce jeu à l'aide d'une chaine de Markov et trouver la matrice de transition de cette chaine de Markov.

b) Identifier ses états récurrents et ses états transitoires.

Exercice 2.25 Soit une chaine de Markov $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ayant un nombre fini d'états. Montrez que si l'état j est accessible depuis l'état i, alors il peut l'être en $|E| - 1$ étapes ou moins.

Exercice 2.26 Soit une chaine de Markov $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Montrez que si un état i est récurrent et que l'état i ne communique pas avec l'état j, alors $p_{i,j} = 0$.

Note : Ce résultat implique que lorsqu'un processus entre dans une classe d'états récurrents, elle ne peut jamais en sortir. Pour cette raison, une classe récurrente est aussi appelée une classe fermée.

Exercice 2.27 Des épreuves sont performées en série. Si les deux dernières épreuves sont des succès, alors la prochaine épreuve sera un succès avec une probabilité de 0,8. Sinon, la prochaine épreuve sera un succès avec une probabilité de 0,5. À long terme (c'est-à-dire après plusieurs épreuves), quelle sera la proportion d'épreuves étant des succès ?

Exercice 2.28 Soit une chaine de Markov $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Considérons A un ensemble d'états, et A^c les états restant.

a) Quelle est l'interprétation de

$$\sum_{i\in A}\sum_{j\in A^c}\pi_i P_{i,j}\ ?$$

b) Quelle est l'interprétation de

$$\sum_{i\in A^c}\sum_{j\in A}\pi_i P_{i,j}\ ?$$

c) Expliquez l'identité

$$\sum_{i\in A}\sum_{j\in A^c}\pi_i P_{i,j}=\sum_{i\in A^c}\sum_{j\in A}\pi_i P_{i,j}.$$

Exercice 2.29 Anna, Billie, Claire, David et Enzo se rendent au casino et jouent à la roulette en misant à chaque tour sur une couleur, ce qui leur donne chacun une probabilité $p=18/38$ de doubler leur mise et $q=20/38$ de la perdre.

a) Anna dispose de 190 $. Elle parie 1 $ à chaque tour. Elle quittera la table de jeu lorsqu'elle aura 200 $ ou lorsqu'elle sera fauchée. Quelle est la probabilité qu'Anna quitte la table de jeu avec 200 $?

b) Billie dispose de 10 $. Elle parie 10 $ à chaque tour. Elle quittera la table de jeu lorsqu'elle aura 200 $ ou lorsqu'elle sera fauchée. Quelle est la probabilité que Billie quitte le casino avec 200 $?

c) Claire dispose de 3,125 $ (pourquoi pas !). Elle parie tout son argent à chaque tour. Elle quittera la table de jeu lorsqu'elle aura 200 $ ou lorsqu'elle sera fauchée. Quelle est la probabilité que Claire quitte la table de jeu avec 200 $?

d) David dispose de 180 $. Il parie 2 $ à chaque tour. Il quittera la table de jeu lorsqu'il aura 200 $ ou lorsqu'il sera fauché. Quelle est la probabilité que David quitte la table de jeu avec 200 $?

e) Enzo dispose de 20 $. Il s'achète une limonade, et, pour passer le temps, décide de calculer le temps que passeront chacun de ses amis (Anna, Billie, Claire et David) à la table de jeu avant de la quitter. Sachant qu'un tour de roulette dure une minute, à quels résultats arrivera-t-elle ?

Exercice 2.30 Soit $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une chaine de Markov ayant pour ensemble d'états $E = \{0, \dots, 9\}$ et pour matrice de transition

$$P = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}.$$

a) Démontrer que les états 0, 1 et 2 forment une classe d'équivalence pour la relation $\leftrightarrow$ (communication entre deux états).

b) Quelle est la période de l'état 3 ?

c) Prouver que l'état 0 est récurrent.

d) Prouver que l'état 8 est transitoire.

Exercice 2.31 Démontrer que la relation $\leftrightarrow$ (communication entre deux états) est une relation d'équivalence (réflexive, transitive et symétrique).

Exercice 2.32 Dans une ville, un système de vélos en libre-service a été implanté. À la fin du premier mois d'opération, 10 % de la population l'a utilisé, alors que 90 % de la population a utilisé sa voiture. Supposons qu'à chaque mois, 10 % des utilisateurs de ce système de vélos retournent à leur voiture, alors que 5 % des automobilistes transfèrent vers le système de vélo.

a) Si une personne utilisait sa voiture à la fin du premier mois, quelle est la probabilité qu'elle utilise le système de vélos à la fin du troisième mois ?

b) À la fin du troisième mois, quel sera le pourcentage de gens utilisant le système de vélos ?

c) À long terme, quelle proportion de la population utilisera le système de vélos ?

Exercice 2.33 Lors du carnaval de l'Université de Sherbrooke, Alice décide de jouer à un jeu, lequel nécessite l'achat d'un coupon au coût de 1 \$. À chaque tour de jeu, elle a 60 % de chance de gagner un coupon et 40 % de chance d'en perdre un. Le jeu prend fin lorsqu'elle n'a plus de coupons, auquel cas elle repart les mains vides, ou lorsqu'elle réussit à accumuler trois coupons, auquel cas elle remporte un gros toutou.

a) Quelle est la probabilité qu'Alice remporte un gros toutou ?

b) En moyenne, combien de tours de jeu seront nécessaires avant que la partie prenne fin ?

Exercice 2.34 Pour chacune des affirmations suivantes, déterminer si elle est vraie ou fausse. Justifier votre réponse par une preuve complète si l'affirmation est vraie, ou par un contre-exemple si elle fausse.

a) Toute chaine de Markov a au moins un état récurrent.

b) Toute chaine de Markov a au moins un état transitoire.

c) Soit i un état d'une chaine de Markov ayant P pour matrice de transition. Si $d(i) = 2$, alors $P_{i,i}^{(2)} > 0$.

Exercice 2.35 Soit $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une chaine de Markov à temps discret ayant pour espace d'états $E = \{0, 1, 2, 3\}$ et dont la matrice de transition est

$$P = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,4 & 0,1 & 0 \\ 0,3 & 0,5 & 0 & 0,2 \\ 0 & 0 & 0,6 & 0,4 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0,5 \end{bmatrix}.$$

Supposons que $X_0 = 0$. Soit M le nombre de fois où le processus est à l'état 0, incluant au temps 0. Déterminer $E(M)$.

Exercice 2.36 Une population est formée d'individus tous identiques qui donnent naissance à des individus de même type. Chaque individu produit dans sa vie j enfants avec probabilité P_j, où $P_0 = 0{,}25$, $P_1 = 0{,}25$ et $P_0 = 0{,}50$. Soit X_n le nombre d'individus de la génération n.

a) Montrer que $E(X_n) = (5/4)^n \cdot E(X_0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) Sachant que la population comprenait deux individus au temps 0, calculez la probabilité qu'elle s'éteigne.

3. Processus de Poisson

Un processus de Poisson est un processus stochastique comptant le nombre d'évènements et le moment d'occurrence de ces évènements sur un intervalle de temps. Le temps écoulé entre chaque paire d'évènements successifs suit une distribution exponentielle.

3.1 La loi exponentielle

Rappels (loi exponentielle)

Une variable aléatoire continue X suit une **loi exponentielle** de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, notée $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$, si sa fonction de densité est

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \in \mathbb{R}_+^* \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}.$$

Sa fonction de répartition de $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ est

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

Son espérance est $E(X) = 1/\lambda$ et sa variance est $Var(X) = 1/\lambda^2$.

Sa fonction génératrice des moments est

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= E(e^{tX}) \\ &= \int_0^\infty e^{tx} \lambda e^{-\lambda x}\, dx \\ &= \frac{\lambda}{\lambda - t} \quad \text{pour } t < \lambda. \end{aligned}$$

Exemple 3.1 Soit X le temps d'attente à un guichet automatique. Si $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ et si le temps d'attente moyen est de deux minutes, déterminer $P(X > 5)$ et $P(X > 9 \mid X > 4)$.

Définition 3.2 Une variable aléatoire X est dite **sans mémoire** si, pour tout $s, t \geq 0$,

$$P(X > s + t \mid X > t) = P(X > s).$$

Théorème 3.3 Une variable aléatoire est sans mémoire si et seulement si elle suit une loi exponentielle.

Proposition 3.4 Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes avec $X_1 \sim \mathrm{Exp}(\lambda_1)$ et $X_2 \sim \mathrm{Exp}(\lambda_2)$. Alors

$$P(X_1 < X_2) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}.$$

Exemple 3.5 Trois individus attendent à un guichet. Bob attend au guichet 1 et Carlos attend au guichet 2. Alice se rendra au guichet libéré en premier. Le temps d'attente au guichet 1 suit une loi exponentielle de moyenne 3 minutes et le temps d'attente au guichet 2 suit une loi exponentielle de moyenne 4 minutes. Déterminer les probabilités suivantes.

a) Bob soit servi avant Carl.

b) Alice soit servie avant Carl.

c) Alice soit servie avant Bob.

d) Alice soit servie la dernière.

Proposition 3.6 Soit $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes telles que $X_i \sim \text{Exp}(\lambda_i)$ pour tout i. Si $Y = \min\{X_1, \dots, X_n\}$, alors

$$Y \sim \text{Exp}\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right).$$

Rappels (loi gamma)

Une variable aléatoire continue X suit une **loi gamma** de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, notée $X \sim \Gamma(k, \theta)$, si

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{k-1} e^{-x/\theta}}{\Gamma(k)\theta^k} & \text{si } x \in \mathbb{R}_+^*. \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où $\Gamma(k)$ est la fonction gamma. Dans ce cas,

$$E(X) = k\theta \quad \text{et} \quad Var(X) = k\theta^2.$$

Alternativement, la loi gamma peut être paramétrée à l'aide d'un paramètre de forme $\alpha = k$ et d'un paramètre d'intensité $\beta = 1/\theta$, notée $X \sim \Gamma(\alpha, \beta)$. Dans ce cas la fonction de densité est

$$f_X(x) = \begin{cases} x^{\alpha-1} \dfrac{\beta^\alpha e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha)} & \text{si } x \in \mathbb{R}_+^*. \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où $\Gamma(k)$ est la fonction gamma. Dans ce cas,

$$E(X) = k/\beta \quad \text{et} \quad Var(X) = k/\beta^2.$$

Proposition 3.7 Soit $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes telles que $X_i \sim \text{Exp}(\lambda_i)$ pour tout i. Si $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$, alors

$$Y \sim \Gamma(\alpha = n, \beta = \lambda).$$

Exemple 3.8 Deux clients attendent dans une file où le temps d'attente suit une loi exponentielle de moyenne cinq minutes. Soit X_i le temps d'attente du client i, pour $i \in \{1, 2\}$. Posons $T = X_1 + X_2$. Quelle est la probabilité que le temps d'attente global excède 20 minutes ? Excède 10 minutes ?

3.2 Processus de Poisson

Définition 3.9 Un processus stochastique $\{N_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ est un **processus de comptage** lorsque N_t représente le nombre d'évènements observés jusqu'à l'instant t. Il satisfait aux propriété suivantes :

a) $N_t \in \mathbb{N}$,
b) Si $s < t$, alors $N_s < N_t$.
c) Si $s < t$, alors $N_t - N_s$ représente le nombre d'évènements observés dans l'intervalle $]s\ t]$.

Exemple 3.10

a) Le nombre de personnes qui sont entrées dans un magasin particulier à, ou avant, un certain temps t.
b) Le nombre de personnes dans le magasin au moment t ne serait pas un processus de comptage.
c) Le nombre de personnes qui sont nées avant l'instant t.
d) Le nombre d'arrivés à un guichet.
e) Le nombre d'émissions radioactives.
f) Le nombre de buts en carrière au moment t.

Définition 3.11 Un processus de comptage est à **accroissements stationnaires** si, pour tous $t_1 < t_2$ et pour tout $s > 0$, la loi de probabilité de $N_{t_2+s} - N_{t_1+s}$ est la même que celle de $N_{t_2} - N_{t_1}$.

Définition 3.12 Un processus de comptage est à **accroissements indépendants** si, pour toutes valeurs $a_1 < b_1$ et $a_2 < b_2$, le nombre d'évènements $N_{b_2} - N_{a_2}$ est indépendant du nombre d'évènements $N_{b_1} - N_{a_1}$ lorsque $[a_1, b_1]$ et $[a_2, b_2]$ sont disjoints.

Définition 3.13 Un processus de comptage $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ est un **processus de Poisson** avec paramètre d'intensité λ si

a) $N_0 = 0$,

b) le processus est à accroissements indépendants,

c) $N_{t+s} - N_s \sim \text{Poisson}(\lambda t)$ pour toutes valeurs $s, t \geq 0$.

Remarques

a) Soit $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ un processus de Poisson avec paramètre d'intensité λ. Le nombre d'évènements dans l'intervalle $[0, t]$ est en moyenne λt.

b) Tout processus de Poisson est à accroissements stationnaires.

Exemple 3.14 Une compagnie d'assurance a 240 000 clients entre 50 et 60 ans. Supposons que N_t, le nombre de décès à l'instant t, est un processus de Poisson et que le taux annuel de mortalité est de 1 sur 10 000.

a) Quelle est la probabilité qu'il y ait plus de deux décès dans un mois ?

b) Quelle est la probabilité qu'il y ait deux décès ou plus dans une semaine ?

c) Quelle est la probabilité qu'il y ait deux décès ou plus la semaine prochaine sachant qu'il y en a eu trois la semaine passée ?

d) Quelle est la probabilité qu'il y ait plus d'une semaine d'attente avant le prochain décès ?

e) Quel est le temps moyen à partir d'aujourd'hui pour qu'il y ait quatre décès ?

f) En supposant que 60 % des décès sont dus à une maladie A, quelle est la probabilité pour qu'il y ait deux décès ou plus dans un mois qui soit attribuables à la maladie A ?

g) Quelle est la probabilité qu'il y ait deux décès ou plus dus à la maladie A le mois prochain, étant donné qu'il y en a trois le mois passé qui n'étaient pas attribuable à A ?

Exemple 3.15 Une crèmerie doit liquider son inventaire de crème glacée. En stock, il y a un pot de chacune des saveurs $1, \dots, M$. Les clients arrivent selon un processus de Poisson d'intensité λ et chacun achète la saveur j avec probabilité p_j (et n'achète rien s'il n'en reste plus). Déterminer le temps moyen pour tout vendre.

Remarque Supposons que $N_t = 1$. C'est donc dire que dans l'intervalle $[0, t]$, il s'est réalisé un unique évènement. Soit T_1 le moment où cet évènement s'est réalisé. Alors la distribution de $T_1 \mid N_t = 1$ est uniforme sur $[0, t]$.

Proposition 3.16 Supposons que des évènements se produisent selon un processus de Poisson d'intensité λ. Posons $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ ce processus de Poisson. Lorsqu'un évènement se produit au temps s, il a une probabilité $P(s)$ d'être classé de type A. Sinon, il est de type B. Soient NA_t et NB_t le nombre d'évènements de type A (respectivement de type B) qui se sont produits jusqu'au temps t. Alors $NA_t \sim$ Poisson(λtp) et $NA_t \sim$ Poisson$\big(\lambda t(1-p)\big)$, où

$$p = \frac{1}{t}\int_0^t P(s)\,ds.$$

De plus, NA_t et NB_t sont indépendantes.

Exemple 3.17 On suppose que le nombre de personnes contractant le VIH suit un processus de Poisson d'intensité $\lambda \in \mathbb{R}_+$, avec λ inconnu. On suppose que le temps d'incubation du VIH-SIDA est une variable aléatoire de fonction de répartition G connue. On admet que les temps d'incubation sont indépendants d'un individu à l'autre. Posons $N1_t$ le nombre de sidatiques au temps t et $N2_t$ le nombre de porteurs du VIH non sidatiques (aucun symptôme observable) au temps t. On veut estimer $N2_t$ à un temps t_0.

3.3 Exercices supplémentaires

Exercice 3.1 Deux personnes sont en attente à un guichet. Les temps d'attente sont indépendants et de loi $X_1 \sim \mathrm{Exp}(\lambda_1)$ et $X_2 \sim \mathrm{Exp}(\lambda_2)$.

a) Déterminer $E(\min(X_1, X_2))$.

b) Déterminer $E(\max(X_1, X_2))$.

c) Déterminer la fonction de masse et la fonction de répartition de $X_1 \mid X_1 < c$.

d) Déterminer $E(X_1 \mid X_1 < c)$.

Exercice 3.2 On dit qu'une variable aléatoire non négative X est **sans mémoire** si, pour toutes valeurs $s, t \geq 0$, $P(X > s + t \mid X > t) = P(X > s)$. Si X représente la durée de vie d'un certain objet, alors si l'objet est toujours fonctionnel au temps t, la distribution du temps restant avant sa mort est la même que la distribution du temps depuis l'origine (un peu comme si l'objet avait « oublié » qu'il était utilisé depuis un temps t).

a) Montrer que les variables aléatoires exponentielles sont sans mémoire.

b) On va montrer ici que ce sont les seules variables aléatoires continues sans mémoire.

1) Soit g une fonction continue à droite telle que $g(s+t) = g(s)g(t)$. Montrer que $g(m/n) = \big(g(1/n)\big)^m$ pour toutes valeurs $m, n \in \mathbb{Z}$ avec $n \neq 0$.

2) En déduire que $g(1/n) = \big(g(1)\big)^{1/n}$.

3) Montrer que $g(x) = \big(g(1)\big)^x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

4) Montrer que $g(1) \geq 0$.

5) En déduire que $g(x) = e^{-\lambda x}$, où $\lambda = -\ln\big(g(1)\big)$.

6) Soit X une variable aléatoire sans mémoire. Posons $\bar{F}(x) = P(X > x)$. Montrer que

$$\bar{F}(s+t) = \bar{F}(s)\bar{F}(t).$$

7) En déduire que X suit une loi exponentielle.

Exercice 3.3 Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes telles que $X_1 \sim \text{Exp}(\lambda_1)$ et $X_2 \sim \text{Exp}(\lambda_2)$. Montrer que

$$P(X_2 > X_1 + t \mid X_2 > X_1) = P(X_2 > t).$$

Exercice 3.4 Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes, où $Y \sim \text{Exp}(\lambda)$. Montrer que la distribution conditionnelle de $Y - X \mid X < Y$ est aussi exponentielle de paramètre λ.

Exercice 3.5 Soit X une variable aléatoire continue de densité f et de fonction de répartition F, représentant la durée de vie d'un certain composant. On appelle **fonction taux de panne** de X, notée $\lambda(t)$, la fonction $\lambda(t) = f(t)/\big(1 - F(t)\big)$.

a) Montrer que $P(X \in]t, t + dt[\mid X > t) \approx \lambda(t)dt$.

b) Montrer que la fonction taux de panne d'une distribution exponentielle est constante.

c) Montrer que la fonction taux de panne détermine uniquement la distribution d'une variable aléatoire, c'est-à-dire que si $\lambda(t)$ est connue, il n'y a qu'un seul choix pour la loi de X.

d) En déduire que l'unique distribution ayant un taux de panne constant est la distribution exponentielle.

e) Supposons que le taux de mortalité pour un fumeur de t années est donné par $\lambda_f(t)$ tandis que le taux de mortalité pour un non fumeur du même âge est donné par $\lambda_n(t)$. Admettons que le taux de mortalité pour un fumeur est le double de celui d'un non fumeur.

1) Déterminer la probabilité pour qu'un non fumeur d'âge A atteigne l'âge B sous l'hypothèse que $A < B$.

2) Faire le même calcul pour un fumeur.

3) En déduire que si on a deux individus du même âge dont l'un est fumeur et l'autre pas, la probabilité que le fumeur survive à un âge donné est le carré de celle du non fumeur.

4) Déterminer la probabilité pour qu'un individu âgé de 50 ans survive jusqu'à l'âge de 60 ans selon qu'il est fumeur ou non en supposant que $\lambda_n(t) = 1/30$ pour $50 \leq t \leq 60$.

Exercice 3.6 Deux individus, A et B, attendent un rein pour une transplantation. Si l'individu A ne reçoit pas de rein, son temps de survie suit une loi exponentielle avec paramètre λ_A. Pour l'individu B, ce temps de survie est de loi exponentielle avec paramètre λ_B. Les reins deviennent disponibles selon un processus de Poisson d'intensité λ. Le premier rein ira à A s'il est en vie, sinon à B s'il est toujours vivant. Les autres causes de décès sont négligeables.

a) Quelle est la probabilité que A reçoive un rein ?

b) Quelle est la probabilité que B reçoive un rein ?

Exercice 3.7 Les espacements T entre les temps d'arrivée des trains à une gare obéissent à une loi de probabilité quelconque de moyenne 30 minutes et d'écart-type 4 minutes. Des passagers arrivent à cette gare selon un processus de Poisson avec une moyenne de 70 par heure. Supposons qu'un train vient de quitter la gare. Posons X le nombre de passagers qui prendront le prochain train. Déterminer $E(X)$ et $Var(X)$.

Exercice 3.8 Des patients se présentent à l'unité mobile de service à la collectivité de l'Ambulance Saint-Jean selon un processus de Poisson d'intensité $\lambda = 1$ par heure.

a) Déterminer le temps moyen pour que le dixième patient se présente pour recevoir des soins.

b) Déterminer la probabilité pour que le temps écoulé entre l'arrivée du dixième patient et celle du onzième soit de plus de trois heures.

c) Sachant que chaque patient a une probabilité de 10 % de s'y présenter pour un problème traumatique, déterminer la probabilité pour que personne ne se pointe à l'unité au cours des six prochaines heures pour un problème de ce type.

Exercice 3.9 Des enfants se présentent à un manège selon un processus de Poisson d'intensité λ. L'opérateur du manège le lance à toutes les 15 minutes. De façon à minimiser le temps d'attente total des enfants, il souhaite le lancer à nouveau en un temps t entre les démarrages habituels.

a) Déterminer le nombre moyen d'enfants qui se pointent au manège dans l'intervalle $]0, t[$.

b) Quel est le temps moyen d'attente pour un enfant qui s'est présenté au manège dans l'intervalle $]0, t[$?

c) Quel est le temps d'attente total moyen des enfants ?

d) Déterminer la valeur de t qui minimise ce temps total moyen.

Exercice 3.10 Les automobiles passent à un passage piétonnier selon un processus de Poisson d'intensité $\lambda = 3$ par minute. Un piéton veut déjouer la mort et traverse le passage clouté les yeux fermés.

a) S'il lui faut s secondes pour le faire, déterminer la probabilité pour qu'il s'en sorte indemne.

b) Supposons que le piéton peut éviter une automobile qui passe mais ne peut éviter l'accident s'il y en a deux ou plus qui passent en même temps que lui. Déterminer la probabilité pour qu'il s'en sorte indemne s'il lui faut s secondes pour traverser.

Exercice 3.11 Supposons que $\{N1_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ et $\{N2_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ sont des processus de Poisson indépendants de paramètres λ_1 et λ_2 respectivement. Montrer que $N_t = N1_t + N2_t$ est un processus de Poisson de paramètre $\lambda_1 + \lambda_2$.

Exercice 3.12 L'appareil 1 fonctionne présentement. L'appareil 2 sera mis en fonction dans t minutes. Si la durée de vie de l'appareil i suit une loi exponentielle de taux λ_i, quelle est la probabilité que l'appareil 1 soit le premier à s'arrêter ?

Exercice 3.13 Un médecin a établi deux rendez-vous, l'un à 13 h et l'autre à 13 h 30. Les durées de ces rendez-vous suivent des variables aléatoires exponentielles indépendantes de moyennes 30 minutes. En assumant que les deux patients sont à l'heure, calculer le temps moyen que passera au bureau du médecin le patient ayant son rendez-vous à 13 h 30.

Exercice 3.14 Une théorie scientifique suppose que des erreurs dans la division cellulaire se produisent selon un processus de Poisson avec un taux de 2,5 par année, et qu'un individu meurt lorsque 196 de ces erreurs se produisent. Assumer l'exactitude de cette théorie.

a) Calculer l'espérance de vie d'un individu.

b) Calculer la probabilité qu'un individu vive plus de 90 ans.

Exercice 3.15 Des voitures circulent sur une rue selon un processus de Poisson de taux λ par minute. Une femme souhaitant traverser la rue à un certain endroit attend jusqu'à ce qu'elle ne voit qu'aucune voiture ne viendra dans les T prochaines minutes.

a) Calculer la probabilité que son temps d'attente soit de 0.

b) Calculer l'espérance de son temps d'attente.

Exercice 3.16 Le coût engendré par un accident de voiture est une variable aléatoire exponentielle de moyenne 1 500 \$. De ce montant, la compagnie d'assurance paie seulement le montant excédant 500 \$. Calculer le montant moyen que paie la compagnie d'assurance par accident.

Exercice 3.17 Les espacements entres les temps d'arrivée des trains à une gare obéissent à une loi de probabilité quelconque de moyenne μ minutes. Des passagers arrivent à cette gare selon un processus de Poisson avec une moyenne de α par heure. Supposons qu'un train vient de quitter la gare. Posons X le nombre de passagers qui prendront le prochain train. Déterminer $E(X)$.

4. Chaines de Markov à temps continu

En étudiant les processus de Poisson, nous avons rencontré notre premier exemple de chaine de Markov à temps continu. En effet, si $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ est un processus de Poisson d'intensité λ, et si on définit les états de la chaine de Markov par les valeurs prises par N_t (c'est-à-dire $0, 1, 2, \ldots$), alors on a une chaine de Markov à temps continu.

4.1 Définitions

Définition 4.1 Soit $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ un processus stochastique prenant ses valeurs dans un ensemble $E \subseteq \mathbb{N}$, nommé l'**espace d'états**. On dit que ce processus est une **chaine de Markov à temps continu** si, pour tout $s, t \in \mathbb{R}_+$, pour tout $i, j \in E$ et pour tout $x(u) \in E$ avec $u \in [0, s[$,

$$P(X_{s+t} = j \mid X_s = i, X_u = x(u) \text{ pour tout } u \in [0, s[) = P(X_{s+t} = j \mid X_s = i).$$

De plus, on fait l'hypothèse que les probabilités $P(X_{s+t} = j \mid X_s = i)$ sont indépendantes de s. Ainsi,

$$P(X_{s+t} = j \mid X_s = i) = P(X_t = j \mid X_0 = i)$$

pour tout s. On dit dans ce cas que la chaine de Markov admet des **transitions homogènes**.

Exemple 4.2 Soit $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ une chaine de Markov à temps continu ayant E pour espace d'états. Supposons que $X_0 = i$ et que $X_s = i$ pour tout $s \in [0, 10]$. Déterminer $P(X_t = i \text{ pour tout } t \in [10, 15])$.

Définition 4.3 Une chaine de Markov à temps continu est un processus stochastique ayant la propriété qu'à chaque fois qu'il est dans l'état i :

a) le temps qu'il y séjourne avant de faire une transition dans un autre état, noté T_i, suit une loi exponentielle de paramètre v_i,

b) lorsqu'il le quitte, il le fait vers l'état j avec probabilité $p_{i,j}$, où $p_{i,i} = 0$ et $\sum_{j\in E} p_{i,j} = 1$,

c) les variables T_i et les prochains états visités sont des variables aléatoires indépendantes.

Exemple 4.4 Une chaine de montage a deux postes de travail. Une pièce y entre lorsque la chaine est vide, est modifiée au premier poste, puis au second. Supposons que les temps de modification aux deux postes sont indépendants de lois exponentielles de paramètres λ_1 et λ_2 respectivement. Supposons que l'arrivée des pièces suit un processus de Poisson d'intensité λ.

4.2 Processus de naissance (arrivée) et de mort (départ)

Définition 4.5 Une chaine de Markov à temps continu $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ ayant $E = \mathbb{N}$ pour espace d'états est un **processus de naissance et de mort** si

a) $p_{i,j} = 0$ lorsque $j \notin \{i-1, i+1\}$,

b) lorsque $X_t = n$, le temps avant la prochaine arrivée suit une loi exponentielle de paramètre λ_n et est indépendante du temps avant le prochain départ, qui, lui, suit une loi exponentielle de paramètre μ_n.

Remarques

a) Le temps de séjour à l'état 0 suit une loi exponentielle de paramètre $v_0 = \lambda_0$. De plus, de l'état 0, le seul état accessible est l'état 1, d'où $p_{0,1} = 1$.

b) Pour tout état $i \neq 0$, le temps de séjour à l'état i suit une loi exponentielle de paramètre $v_i = \lambda_i + \mu_i$. De plus,

$$p_{i,i+1} = \frac{\lambda_i}{\lambda_i + \mu_i} \quad \text{et} \quad p_{i,i-1} = \frac{\mu_i}{\lambda_i + \mu_i}.$$

Exemple 4.6 (Processus de naissance pure) Pour tout n, $\mu_n = 0$ et $\lambda_n = \lambda$.

Exemple 4.7 (Processus de Yule) Une population est formée d'individus immortels, où chaque individu produit une naissance selon un temps suivant une loi exponentielle de paramètre λ, indépedants les uns des autres.

Exemple 4.8 (Modèle de croissance linéaire) Chaque individu produit une naissance selon un temps suivant une loi exponentielle de paramètre λ et meurt selon un temps suivant une loi exponentielle de paramètre μ.

Exemple 4.9 (Modèle de croissance linéaire avec immigration) Chaque individu produit une naissance selon un temps suivant une loi exponentielle de paramètre λ et meurt selon un temps suivant une loi exponentielle de paramètre μ. De plus, des naissances dues à un facteur externe (immigration) surviennent à un taux θ.

Exemple 4.10 (Modèle d'immigration/émigration)

Exemple 4.11 (File d'attente M|M|1) Un seul guichet, où les clients arrivent selon un processus de Poisson de paramètre λ et les temps de service sont indépendants de loi exponentielle μ.

Exemple 4.12 (File d'attente multiserveurs M|M|s) On a s guichets, où les clients arrivent selon un processus de Poisson de paramètre λ (file unique) et les temps de service sont indépendants de loi exponentielle μ.

4.3 Équations différentielles de Kolmogorov

Définition 4.13 Soit $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ une chaine de Markov à temps continu ayant pour espace d'états E. Les **probabilités de transition** de cette chaine de Markov sont $p_{i,j}(t) = P(X_t = j \mid X_0 = i)$, où $i, j \in E$ et $t \in \mathbb{R}_+$.

Les deux lemmes suivants vont nous permettre de construire un ensemble d'équations différentielles pour obtenir les valeurs $p_{i,j}(t)$. Afin d'en faciliter la démonstration, nous allons d'abord introduire une définition alternative aux processus de Poisson.

Définition 4.14 Le processus de comptage $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ est une processus de Poisson de paramètre λ si

a) $N_0 = 0$.

b) Le processus est à accroissements indépendants et stationnaires.

c) $P(N_h = 1) = \lambda h + o(h)$.

d) $P(N_h \geq 2) = o(h)$.

Lemme 4.15 Soit $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ une chaine de Markov à temps continu ayant pour espace d'états E.

a) Pour tout $i \in E$,

$$v_i = \lim_{h\to 0} \frac{1 - p_{i,i}(h)}{h}.$$

b) Pour tout $i, j \in E$, si $i \neq j$, alors

$$v_i \cdot p_{i,j} = \lim_{h\to 0} \frac{p_{i,j}(h)}{h}.$$

Lemme 4.16 Soit $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ une chaine de Markov à temps continu ayant pour espace d'états E. Pour tout $i, j \in E$ et pour tout $s, t \in \mathbb{R}_+$,

$$p_{i,j}(s+t) = \sum_{k=0}^{\infty} p_{i,k}(s) \cdot p_{k,j}(t)$$

Théorème 4.17 Soit $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ une chaine de Markov à temps continu ayant pour espace d'états E. Pour tout $i, j \in E$ et pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$\frac{d}{dt}\left(p_{i,j}(t)\right) = \sum_{k\in E\setminus\{j\}} v_k \cdot p_{k,j} \cdot p_{i,k}(t) - v_j \cdot p_{i,j}(t).$$

Proposition 4.18 Pour un processus de naissance pur,

$$\begin{cases} p_{i,i}(t) = e^{-\lambda_i t} & \text{pour tout } i \in \mathbb{N}, \\ p_{i,j}(t) = \lambda_{j-1} \cdot e^{-\lambda_j t} \cdot \int_0^t e^{\lambda_j t} \cdot p_{i,j-1}(s)\, ds & \text{pour tout } j > i. \end{cases}$$

Exemple 4.19 Des clients arrivent à une banque selon un processus de Poisson de paramètre $\lambda = 0{,}2$. Déterminer la probabilité pour que quinze minutes après l'ouverture des portes, il y ait deux clients qui soient entrés.

4.4 Probabilités limites

Dans cette section, on cherche la proportion de temps, à long terme, où une chaine de Markov à temps continu $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ ayant E pour espace d'états se retrouve dans un état $j \in E$ donné.

Proposition 4.20 Soit $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ une chaine de Markov à temps continu irréductible (tous les états communiquent) ayant pour espace d'états E, où tous les états sont récurrents positifs (le temps moyen de retour à l'état i si on part de i est fini). Alors, pour tout $i, j \in E$,

$$p_j = \lim_{t\to\infty} p_{i,j}(t)$$

existe et est indépendante de i. De plus, p_j est solution de

$$\begin{cases} v_j \cdot p_j = \displaystyle\sum_{k\in E\setminus\{j\}} v_k \cdot p_{k,j} \cdot p_k \,, \\ \displaystyle\sum_{j\in E} p_j = 1. \end{cases}$$

Exemple 4.21 Déterminer les probabilités limites p_j dans le cas d'un processus de naissance et de mort.

Exemple 4.22 Des étudiants travaillent sur des problèmes en classe. Chacun des $M = 9$ étudiants travaillent pendant un temps suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}1$ par minute avant de devoir s'arrêter et d'aller poser une question au chargé, qui y répond en un temps suivant une loi exponentielle de paramètre $\mu = 0{,}2$ par minute.

a) Déterminer le nombre moyen d'étudiants qui ne travaillent pas.

b) Déterminer la proportion du temps où chaque étudiant travaille.

c) À la fin d'une séance de 55 minutes, quelle est la probabilité qu'il y ait une file de deux étudiants ou plus au bureau du chargé ?

4.5 Exercices supplémentaires

Exercice 4.1 Une population est formée d'organismes sexués. La probabilité pour qu'un mâle spécifique ne s'accouple avec une femelle désignée dans un intervalle de temps de longueur h est de l'ordre de $\lambda h + o(h)$. Chaque accouplement produit instantanément un rejeton qui a autant de chance d'être un mâle qu'une femelle. Soient $N1_t$ et $N2_t$ les quantités de mâles et de femelles respectivement dans la population. Déterminer les valeurs des v_i et des $p_{i,j}$ pour la chaine de Markov à temps continu $\{N1_t, N2_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$.

Exercice 4.2 Un organisme unicellulaire peut être dans un de deux états A ou B. Les individus de type A mutent en individus de type B à un taux exponentiel α. Les individus de type B mutent en deux individus de type A à un taux exponentiel β. Construire une chaine de Markov à temps continu appropriée pour ce modèle et déterminer les valeurs des v_i et des $p_{i,j}$.

Exercice 4.3 Soit $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ une chaine de Markov à temps continu. Soient i et j deux états de cette chaine. Posons $p_{i,j}(t) = P(X_{s+t} = j \mid X_s = i)$. Justifier pourquoi l'équation de Kolmogorov pour le passé est vraie

$$p'_{i,j}(t) = \sum_{k\in E\setminus\{i\}} v_i \cdot p_{i,k} \cdot p_{k,j}(t) - v_i \cdot p_{i,j}(t).$$

Exercice 4.4 On opère une machine qui travaille selon un temps exponentiellement distribué avant de tomber en panne, avec moyenne $1/\lambda$. Supposons que le temps pour réparer la machine est exponentiellement distribué de moyenne $1/\mu$. Supposons que la machine est fonctionnelle au temps 0. On cherche la probabilité qu'elle le soit encore au temps $t = 10$.

a) Modéliser ce processus par un processus de naissance et de mort à deux états et déterminer les valeurs des paramètres μ_n et λ_n.

b) Montrer que les équations de Kolmogorov pour le passé dans le cas d'un processus de naissance et de mort deviennent

$$\begin{cases} p'_{0,j}(t) = \lambda_0 \cdot \left(p_{1,j}(t) - p_{0,j}(t)\right) \\ p'_{i,j}(t) = \lambda_i \cdot p_{i+1,j}(t) + \mu_i \cdot p_{i-1,j}(t) - (\lambda_i + \mu_i) \cdot p_{i,j}(t) \quad \text{pour } i \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

c) Écrire les équations de Kolmogorov du passé pour le problème sous étude.

d) Montrer que $\mu \cdot p'_{0,0}(t) + \lambda \cdot p'_{1,0}(t) = 0$.

e) En intégrant l'équation de d), montrer que $p'_{0,0}(t) = \mu - (\mu + \lambda) \cdot p_{0,0}(t)$.

f) Posons

$$h(t) = p_{0,0}(t) - \frac{\mu}{\mu + \lambda}.$$

En dérivant $h(t)$, montrer que $h(t) = K \cdot e^{-(\mu+\lambda)t}$ pour une constante K.

g) En déduire des formules pour $p_{0,0}(t)$ et $p_{1,0}(t)$, puis la solution à la question posée au départ.

Exercice 4.5 Montrer, pour un processus de naissance pur, que

$$\begin{cases} p_{i,i}(t) = e^{-\lambda_i t} & \text{pour } i \in \mathbb{N}, \\ p_{i,j}(t) = \lambda_{j-1} e^{-\lambda_j t} \displaystyle\int_0^t e^{\lambda_j s} \cdot p_{i,j-1}(s)\, ds & \text{pour } j \in \mathbb{N}, j > i. \end{cases}$$

Exercice 4.6 Montrer, dans le cas du modèle de croissance linéaire avec immigration, que les probabilités limites p_i existent lorsque $\lambda < \mu$.

Exercice 4.7 Montrer, dans le cas de la file d'attente (M/M/1), que les probabilités limites p_i existent lorsque $\lambda < \mu$. Déterminer alors les probabilités limites pour chacun des états.

Exercice 4.8 Une chaine de montage a deux postes de travail. Une pièce y entre seulement lorsque la chaine est vide, est modifiée au premier poste, puis au second. Supposons que les temps de modification aux deux postes soient indépendants de lois exponentielles de paramètres λ_1 et λ_2 respectivement. Supposons que l'arrivée des pièces suit un processus de Poisson d'intensité λ. On crée trois états correspondant respectivement au fait que la chaine soit vide, qu'il y ait une pièce au premier poste ou qu'il y en ait une au second. Déterminer les probabilités limites pour chacun des états.

Exercice 4.9 Un salon de barbier est opéré par son propriétaire et par lui seul. Il possède sa chaise de coupe et une unique chaise pour un client en attente. Si un client se pointe et que la place d'attente est prise, il fait demi-tour. Sachant que les clients se présentent au salon selon un processus de Poisson à un rythme de trois à l'heure et que le barbier s'exécute en un temps exponentiellement distribué de moyenne un quart d'heure, déterminer le nombre moyen de clients dans son commerce.

Exercice 4.10 Des clients potentiels se pointent au service au volant d'un restaurant selon un processus de Poisson de taux λ. Cependant, si, au moment de son arrivé, un client aperçoit n voitures déjà dans la file d'attente, alors il joindra cette file avec une probabilité α_n. Assumant que le taux de service suit une loi exponentielle de paramètre μ, modéliser cette situation selon un processus de naissance et de mort, et déterminer les taux de naissance (d'arrivée) et de mort (de départ).

Exercice 4.11 Une population est composée de N individus. Certains d'entre eux ont une infection, laquelle se propage de la façon suivante. Les échanges entre deux membres de cette population se produisent en suivant un processus de Poisson de taux λ. Lorsqu'un contact se produit, il a autant de chance d'impliquer n'importe quelles des $\binom{N}{2}$ paires d'individus de la population. Si un contact implique un individu infecté et un individu non infecté, alors l'individu non infecté à une probabilité p de le devenir. Lorsqu'un individu est infecté, il le demeure pour toujours.

Soit X_t le nombre d'individus de la population infectés au temps t.

a) Expliquer pourquoi $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ est une chaine de Markov à temps continu.

b) Si un seul individu est infecté au temps 0, combien de temps en moyenne cela prendra-t-il avant que toute la population soit infectée ?

Exercice 4.12 Soit un processus de naissance et de mort ayant pour taux de naissance $\lambda_n = (n+1)\lambda$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour taux de mort $\mu_n = n\mu$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Déterminer l'espérance du temps requis pour passer de l'état 0 à l'état 4.

Exercice 4.13 Deux machines opèrent pour une durée exponentielle de taux λ_i avant de se briser, et leur temps de réparation est exponentielle de taux μ_i. Le temps de fonctionnement des machines est indépendant l'un de l'autre. Déterminer une chaine de Markov à temps continu à quatre états respectant les conditions des deux machines, et calculer les probabilités de transition pour cette chaine.

Exercice 4.14 Des clients potentiels arrivent à une station-service « avec service » ayant une seule pompe selon un processus de Poisson ayant pour taux 20 voitures à l'heure. Cependant, un client entrera à la station seulement s'il n'y a pas plus de deux voitures (incluant celle en train de se faire remplir). Supposer que le temps requis pour se faire servir est distribué exponentiellement avec une moyenne de cinq minutes.

a) Quelle proportion du temps l'employé servira un client ?

b) Quelle fraction des clients potentiels rebrousseront chemin ?

Exercice 4.15 À une station de taxi, les taxis et les clients arrivent respectivement selon un processus de Poisson de taux de un et de deux par minute. Un taxi attendra peu importe le nombre de taxis déjà présents. Toutefois, un client ne trouvant pas de taxi en attente quittera la station.

a) Trouver le nombre moyen de taxis en attente.

b) Trouver la proportion de clients arrivant à la station qui aura un taxi.

Exercice 4.16 Soit $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ une chaine de Markov à temps continu et soient $p_{i,j}(t)$ ses probabilités de transition. Montrer que, pour tout $s, t \in \mathbb{R}_+$,

$$p_{i,j}(s+t) = \sum_{k=0}^{\infty} p_{i,k}(s) \cdot p_{k,j}(t).$$

Exercice 4.17 Montrer, dans le cas de la file d'attente (M/M/1), que les probabilités limites p_i existent lorsque $\lambda < \mu$. Déterminer alors les probabilités limites pour chacun des états.

5. Files d'attente

Dans cette section, on va étudier une classe de modèles dans lesquels des individus arrivent de façon aléatoire à un centre de service. À leur arrivée, ils attendent dans une file jusqu'à ce qu'ils soient servis. Lorsqu'ils sont servis, ils quittent le centre. Pour ces modèles, on est intéressé à obtenir certaines informations, comme le nombre moyen d'individus dans le système (ou dans la file d'attente) et le temps moyen qu'un individu passera dans le système (ou dans la file d'attente).

5.1 Équations de coût

Notation 5.1 Des quantités d'intérêts pour les modèles de file d'attente sont :

- L : le nombre moyen d'individus dans le système ;
- L_Q : le nombre moyen d'individus dans la queue ;
- W : le temps d'attente moyen d'un individu dans le système ;
- W_Q : le temps d'attente moyen d'un individu dans la queue.

Proposition 5.2 Soit λ_a le taux d'arrivée des individus. Si on fait payer les individus entrant dans le sytème, le taux moyen auquel le système amasse de l'argent est égal au produit du taux d'arrivé des individus λ_a par le montant moyen payé par individu.

Exemple 5.3 On fait payer 1 \$ à chaque individu pour chaque unité de temps dans le système. Alors

$$L = \lambda_a \cdot W.$$

Il s'agit de l'**équation de Little**.

Exemple 5.4 On fait payer 1 \$ à chaque individu pour chaque unité de temps dans la queue. Alors

$$L_Q = \lambda_a \cdot W_Q.$$

Exemple 5.5 On fait payer 1 \$ à chaque individu pour chaque unité de temps passée en traitement au guichet. Si S représente le temps d'un individu passé en service, alors

$$\text{Nombre moyen d'individus en service} = \lambda_a \cdot E(S).$$

5.2 Probabilité en régime stationnaire

Définition 5.6 Soit X_t le nombre d'individus dans le système au temps t. Posons

$$p_n = \lim_{t\to\infty} P(X_t = n)$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. On peut vérifier, si le processus est régénératif, que p_n représente la proportion du temps où le système contient exactement n individus. On l'appelle parfois la **probabilité stationnaire** d'avoir n individus dans le système.

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

- a_n : proportion d'individu qui trouvent n individus dans le système lorsqu'ils arrivent ;
- d_n : proportion d'individu qui laissent n individus dans le système lorsqu'ils quittent.

Exemple 5.7 Considérons un modèle de file d'attente dans lequel tous les individus ont un temps de service égal à 1, et où la durée entre l'arrivée de deux individus est toujours plus grande que 1. Ainsi, $a_0 = d_0 = 1$, mais $p_0 \neq 1$.

Proposition 5.8 Si les individus arrivent un à la fois et sont servis un à la fois, alors $a_n = d_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Proposition 5.9 Pour des arrivés selon un processus de Poisson, $p_n = a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

5.3 Modèles exponentiels

5.3.1 Système M|M|1 avec queue infinie

Rappel du modèle M|M|1 :

— les arrivés se font selon un processus de Poisson d'intensité λ ;

— les temps de service suivent des lois exponentielles de paramètre μ indépendantes les unes des autres ;

— il n'y a qu'un seul centre de service, et s'il est occupé, l'individu arrivant se place dans la file d'attente.

On a vu à la section 4.4 que les probabilités limites sont

$$p_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)$$

lorsque $\lambda/\mu < 1$.

Proposition 5.10 Le nombre moyen d'individus dans le système est

$$L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}.$$

De plus,

$$W = \frac{1}{\mu - \lambda}, \quad W_Q = \frac{\mu}{\mu(\mu - \lambda)}, \quad L_Q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)}.$$

Exemple 5.11 Des individus arrivent selon un processus de Poisson à un taux d'un aux douze minutes et le temps de service est exponentiel à un taux d'un aux huit minutes.

a) Déterminer L et W.

b) Déterminer L et W si on augmente de 20 % le taux d'arrivée.

Proposition 5.12 Soit W^* le temps passé dans le système par un individu arbitraire. Alors

$$W^* \sim \text{Exp}(\mu - \lambda).$$

5.3.2 Système M|M|1 avec queue finie

On admet que le système ne peut contenir plus de N individus : tout individu arrivant lorsque le système contient N individus rebroussera chemin. On a vu à la section 4.4 que les probabilités limites sont

$$p_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \cdot \left(\frac{1-\frac{\lambda}{\mu}}{1-\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{N+1}}\right).$$

Proposition 5.13 Dans le cas M|M|1 borné à N individus dans le système, le nombre moyen d'individus dans le système est

$$L = \frac{\lambda\left(1+N\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{N+1}-(N+1)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{N}\right)}{(\mu-\lambda)\left(1-\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{N+1}\right)}.$$

Proposition 5.14 Dans le cas M|M|1 borné à N individus dans le système, le temps d'attente moyen d'un individu dans le système est

$$W = \begin{cases} \dfrac{L}{\lambda} & \text{si on prend en compte les individus rebroussant chemin,} \\ \dfrac{L}{\lambda(1-p_N)} & \text{si on ne prend pas en compte les individus rebroussant chemin.} \end{cases}$$

Exemple 5.15 Supposons qu'il en coûte μ \$/h pour offrir un service à un taux μ, que chaque client rapporte 10 \$ de profit, et que les clients arrivent selon un processus de Poisson à un taux de 4 par heure. Sachant que le système a une capacité de 3 individus, déterminer la valeur de μ qui maximise le profit.

5.3.3 Système M|M|2 avec queue finie

Exemple 5.16 Un petit salon de coiffure dispose de deux chaises. Un client entrant ira sur la chaine 1 et se fera laver les cheveux. Lorsque ce sera fait, il ira à la chaise 2 pour se faire couper les cheveux si elle est libre, ou attendra patiemment qu'elle se libère. Supposons qu'un client potentiel entre dans le salon de coiffure seulement si la chaise 1 est libre. Supposons que les arrivées des clients potentiels suivent un processus de Poisson de paramètre λ, et que les temps de service aux chaises 1 et 2 sont indépendants et ont respectivement des taux exponentiels de μ_1 et μ_2.

a) Déterminer la proportion des clients potentiels qui entrent dans le système.

b) Déterminer le nombre moyen de clients dans le système.

c) Déterminer le temps moyen passé dans le système pour un client qui y entre.

d) Calculer les réponses aux sous-questions précédentes si $\lambda = 2$, $\mu_1 = 10$ et $\mu_2 = 2$.

5.4 Exercices supplémentaires

Exercice 5.1 Des voitures de Formule 1 se présentent aux puits au plus à toutes les minutes. Supposons que le temps de service est constant à 10 secondes. Déterminer les valeurs de a_n, d_n et p_n pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour les variables où cela s'avèrerait impossible, déterminer seulement si elles sont nulles ou pas.

Exercice 5.2 Soit un système M|M|1 où les arrivés se font selon un processus de Poisson d'intensité λ et les temps de service suivent des lois exponentielles de paramètre μ indépendantes les unes des autres.

a) Calculer le nombre moyen d'arrivées pendant une période de service.

b) Calculer la probabilité qu'aucun individu arrive pendant une période de service.

Exercice 5.3 Dans une usine, les machines se brisent à un taux exponentiel de six par heure. Il y a un unique mécanicien pouvant réparer les machines défectueuses à un taux exponentiel de huit par heure. Le coût induit en production perdue lorsque les machines sont brisées est de 10 $ par heure par machine. Quel est le taux du coût moyen imputé aux machines brisées ?

Exercice 5.4 Deux individus utilisent trois serveurs. Lorsque le service au serveur i est complété, l'individu quitte ce serveur et se rend immédiatement au serveur non occupé par l'autre individu. Ainsi, deux serveurs sont toujours occupés pendant que l'autre est inactif. Si le temps de service au serveur i est exponentiel de taux μ_i, quelle proportion de temps le serveur i est-il inactif ?

Exercice 5.5 Montrer que W est plus petit dans un modèle M|M|1 ayant des arrivées au taux λ et des départs au taux 2μ que dans un modèle M|M|2 ayant des arrivées au taux λ et des départs au taux μ.

Exercice 5.6 Un groupe de n individus se déplacent entre deux serveurs. Lorsqu'un individu a été servi à un serveur, il se rend à l'autre, où il se joindra à la file d'attente si un individu est en train de se faire servir. Tous les temps de service sont exponentiels de paramètre μ. Trouver la proportion de temps où il y a j individus au serveur 1, où $j \in \{0, \dots, n\}$.

Exercice 5.7 Une boulangerie produit des baguettes de pain selon un processus de Poisson de taux λ. Cependant, elle a de l'espace pour entreposer au plus k baguettes, et ainsi arrête la production lorsque k baguettes sont dans les étagères. Les clients arrivent à la boulangerie selon un processus de Poisson de taux μ. Chaque client achète une baguette et quitte immédiatement après avec la baguette, ou les mains vides s'il n'y avait pas de baguette de prête.

a) Trouver la proportion de clients qui repartiront les mains vides.

b) Calculer le temps moyen qu'une baguette passera sur les étagères.

c) Calculer le nombre moyen de baguettes sur les étagères.

d) Calculer les réponses aux sous-questions précédentes si $\lambda = 30$, $\mu = 30$ et $k = 15$.

Exercice 5.8 Une épicerie dispose de deux caisses, chacune opérant au taux μ. Les caisses fonctionnent de la façon suivante :

- une file d'attente unique alimente les deux caisses ;
- la première caisse est opérée par un caissier permanent, et la seconde par un commis à l'entrepôt qui se rend immédiatement à la caisse lorsque deux clients ou plus se présentent aux caisses. Le commis retourne à l'entrepôt dès qu'il a complété son service et qu'il y a moins que deux clients aux caisses.

a) Soit p_n la proportion de temps où il y a n clients aux caisses. Établissez les équations pour p_n et résolvez-les.

b) À quel taux est-ce que le système va de 0 à 1 client ? De 2 à 1 client ?

c) Quelle est la proportion du temps passé par le commis à l'entrepôt à la caisse ?

Exercice 5.9 Une boulangerie produit des baguettes de pain selon un processus de Poisson de taux 45 par heure, et peut entreposer autant de baguettes qu'elle le souhaite. Les clients arrivent à la boulangerie selon un processus de Poisson de taux 50 par heure. Chaque client achète une baguette et quitte immédiatement après avec la baguette, ou alors il quitte les mains vides s'il n'y avait pas de baguette de prête.

a) Trouver la proportion de clients qui repartiront les mains vides.

b) Calculer le temps moyen qu'une baguette passera sur les étagères.

c) Calculer le nombre moyen de baguettes sur les étagères.

d) À l'ouverture du magasin, aucune baguette n'est produite. Quelle est la probabilité que les cinq premiers clients se présentant au magasin repartent les mains vides ?

Solutions aux exercices

Les solutions détaillées de l'ensemble des exercices se retrouvent sur le site web Moodle du cours.