CHAPITRE 5
FILES D'ATTENTE

Exercice 5.1 Des voitures de Formule 1 se présentent aux puits au plus à toutes les minutes. Supposons que le temps de service est constant à 10 secondes. Déterminer les valeurs de a_n, d_n et p_n pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour les variables où cela s'avérerait impossible, déterminer seulement si elles sont nulles ou pas.

Directement,

$$a_0 = d_0 = 1$$

et

$$a_n = d_n = 0$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Par ailleurs, on ne peut pas calculer précisément p_0 et p_1, mais

$$p_0 + p_1 = 1 \quad \text{et} \quad p_n = 0 \text{ pour tout } n \geq 2.$$

Exercice 5.2 Soit un système M|M|1 où les arrivés se font selon un processus de Poisson d'intensité λ et les temps de service suivent des lois exponentielles de paramètre μ indépendantes les unes des autres.

a) Calculer le nombre moyen d'arrivées pendant une période de service.

b) Calculer la probabilité qu'aucun individu arrive pendant une période de service.

a) Le temps de service suit une loi exponentielle de paramètre μ, donc le temps moyen de service est $1/\mu$. Par ailleurs, le temps d'arrivée suit une loi exponentielle de paramètre λ, donc le temps moyen entre deux arrivées est $1/\lambda$. Ainsi, le nombre moyen d'arrivées pendant une période de service est

$$\frac{1/\mu}{1/\lambda} = \frac{\lambda}{\mu}.$$

b) Le temps de service suit une loi exponentielle de paramètre μ et le temps d'arrivée suit une loi exponentielle de paramètre λ. Ainsi, la probabilité qu'aucun individu arrive pendant une période de service est

$$P\big(\mathrm{Exp}(\mu) < \mathrm{Exp}(\lambda)\big) = \frac{\mu}{\lambda + \mu}$$

Exercice 5.3 Dans une usine, les machines se brisent à un taux exponentiel de six par heure. Il y a un unique mécanicien pouvant réparer les machines défectueuses à un taux exponentiel de huit par heure. Le coût induit en production perdue lorsque les machines sont brisées est de 10 $ par heure par machine. Quel est le taux du coût moyen imputé aux machines brisées ?

Soit X_t le nombre de machines brisées au temps t. Alors $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ est une chaîne de Markov suivant le modèle M | M | 1 à queue infinie, avec $\lambda = 6$ et $\mu = 8$. Ainsi, en moyenne, le nombre de machines brisées à l'heure est de

$$\begin{aligned} L &= \frac{\lambda}{\mu - \lambda} \\ &= \frac{6}{8-6} \\ &= 3. \end{aligned}$$

Le taux du coût moyen imputé aux machines brisées est donc de

$$3 \cdot 10 = 30 \text{ \$/h}.$$

Exercice 5.4 Deux individus utilisent trois serveurs. Lorsque le service au serveur i est complété, l'individu quitte ce serveur et se rend immédiatement au serveur non occupé par l'autre individu. Ainsi, deux serveurs sont toujours occupés pendant que l'autre est inactif. Si le temps de service au serveur i est exponentiel de taux μ_i, quelle proportion de temps le serveur i est-il inactif ?

Cet exercice a été fait en classe. La solution est

$$\frac{\mu_i}{\mu_1 + \mu_2 + \mu_3}.$$

Exercice 5.5 Montrer que W est plus petit dans un modèle M|M|1 ayant des arrivées au taux λ et des départs au taux 2μ que dans un modèle M|M|2 ayant des arrivées au taux λ et des départs au taux μ.

On suppose que $\lambda < 2\mu$, autrement les temps d'attente moyen sont infinis pour les 2 systèmes.

Dans le modèle M|M|1, le temps d'attente moyen est

$$W_1 = \frac{1}{2\mu - \lambda}.$$

Dans le modèle M|M|2, le temps d'attente moyen est

$$W_2 = \frac{4\mu}{(2\mu - \lambda)(2\mu + \lambda)}.$$

Puisque $2\mu > \lambda$, alors $4\mu > 2\mu + \lambda$, d'où $4\mu/(2\mu + \lambda) > 1$. Ainsi,

$$W_2 = \frac{4\mu}{(2\mu - \lambda)(2\mu + \lambda)} > \frac{1}{2\mu - \lambda} = W_1.$$

Exercice 5.6 Un groupe de n individus se déplacent entre deux serveurs. Lorsqu'un individu a été servi à un serveur, il se rend à l'autre, où il se joindra à la file d'attente si un individu est en train de se faire servir. Tous les temps de service sont exponentiels de paramètre μ. Trouver la proportion de temps où il y a j individus au serveur 1, où $j \in \{0, \dots, n\}$.

Soit X_t le nombre d'individus au serveur 1 au temps t. Alors $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ est un processus d'arrivée et de départ, où $\lambda_k = \mu_k = \mu$ pour tout $k \in \{0, 1, \dots, n\}$. Ainsi,

$$\begin{aligned} p_0 &= \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^{n} \left(\prod_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}} \right)} \\ &= \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^{n} \left(\prod_{i=0}^{k-1} \frac{\mu}{\mu} \right)} \\ &= \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} p_j &= \left(\prod_{i=0}^{j-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}} \right) p_0 \\ &= \left(\prod_{i=0}^{j-1} \frac{\mu}{\mu} \right) p_0 \\ &= p_0 \\ &= \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Exercice 5.7 Une boulangerie produit des baguettes de pain selon un processus de Poisson de taux λ. Cependant, elle a de l'espace pour entreposer au plus k baguettes, et ainsi arrête la production lorsque k baguettes sont dans les étagères. Les clients arrivent à la boulangerie selon un processus de Poisson de taux μ. Chaque client achète une baguette et quitte immédiatement après avec la baguette, ou les mains vides s'il n'y avait pas de baguette de prête.

a) Trouver la proportion de clients qui repartiront les mains vides.

b) Calculer le temps moyen qu'une baguette passera sur les étagères.

c) Calculer le nombre moyen de baguettes sur les étagères.

d) Calculer les réponses aux sous-questions précédentes si $\lambda = 30$, $\mu = 30$ et $k = 15$.

Soit X_t le nombre de baguettes disponibles au temps t. Alors $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ est une processus M|M|1 à queue finie, où

$$\lambda_n = \lambda \text{ si } n < k \quad \text{et} \quad \mu_n = \mu.$$

a) Si $\lambda = \mu$, alors $p_i = 1/(k+1)$ pour tout $i \in \{0, 1, \dots, k\}$. Autrement,

$$\begin{aligned} p_0 &= \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^0 \cdot \left(\frac{1 - \frac{\lambda}{\mu}}{1 - \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{k+1}}\right) \\ &= \frac{1 - \frac{\lambda}{\mu}}{1 - \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{k+1}}. \end{aligned}$$

b) Directement

$$W = \frac{L}{\lambda(1 - p_k)}.$$

Le calcul de L est réalisé en c). Si $\lambda = \mu$, alors

$$\begin{aligned} W &= \frac{k/2}{\lambda(1 - 1/(k+1))} \\ &= \frac{k+1}{2\lambda}. \end{aligned}$$

Autrement,

$$W = \frac{1 + k\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{k+1} - (k+1)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k}{(\mu - \lambda)\left(1 - \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{k+1}\right)} \cdot \frac{1}{\left(1 - \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \cdot \left(\frac{1 - \frac{\lambda}{\mu}}{1 - \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{k+1}}\right)\right)}$$

c) Si $\lambda = \mu$, alors

$$L = \sum_{i=0}^{k} i \cdot p_i$$

$$= \frac{1}{k+1} \cdot \sum_{i=0}^{k} i$$
$$= \frac{1}{k+1} \cdot \frac{k \cdot (k+1)}{2}$$
$$= \frac{k}{2}.$$

Autrement,

$$L = \frac{\lambda\left(1 + k\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{k+1} - (k+1)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{k}\right)}{(\mu - \lambda)\left(1 - \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{k+1}\right)}.$$

d) On note que $\lambda = \mu = 30$. Ainsi,

$$p_0 = \frac{1}{16},$$
$$L = \frac{15}{2} = 7{,}5,$$
$$W = \frac{16}{60} \approx 0{,}2667.$$

Exercice 5.8 Une épicerie dispose de deux caisses, chacune opérant au taux μ. Les caisses fonctionnent de la façon suivante :

— une file d'attente unique alimente les deux caisses ;
— la première caisse est opérée par un caissier permanent, et la seconde par un commis à l'entrepôt qui se rend immédiatement à la caisse lorsque deux clients ou plus se présentent aux caisses. Le commis retourne à l'entrepôt dès qu'il a complété son service et qu'il y a moins que deux clients aux caisses.

a) Soit p_n la proportion de temps où il y a n clients aux caisses. Établissez les équations pour p_n et résolvez-les.

b) À quel taux est-ce que le système va de 0 à 1 client ? De 2 à 1 client ?

c) Quelle est la proportion du temps passé par le commis à l'entrepôt à la caisse ?

Soit X_t le nombre de clients aux caisses au temps t. $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ est un système $M|M|2$ avec queue infinie. Il s'agit d'un processus d'arrivée et de départ, où

$$\lambda_n = \lambda \quad \text{et} \quad \mu_n = \begin{cases} \mu & \text{si } n = 1, \\ 2\mu & \text{si } n > 1. \end{cases}$$

a) Directement,

$$\begin{aligned} p_0 &= \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\prod_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda_n}{\mu_{n+1}}\right)} \\ &= \frac{1}{1 + \frac{\lambda}{\mu} \cdot \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{2\mu}\right)^{k-1}} \\ &= \frac{1}{1 + \frac{\lambda}{\mu} \cdot \left(\frac{1}{1 - \frac{\lambda}{2\mu}}\right)} \\ &= \frac{1}{1 + \frac{\lambda}{\mu} \cdot \left(\frac{2\mu}{2\mu - \lambda}\right)} \\ &= \frac{2\mu - \lambda}{2\mu + \lambda} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} p_n &= \left(\prod_{i=0}^{n-1} \frac{\lambda_n}{\mu_{n+1}}\right) p_0 \\ &= \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{2\mu - \lambda}{2\mu + \lambda}\right). \end{aligned}$$

b) Le système va de 0 à 1 au taux

$$\lambda \cdot p_0 = \lambda \cdot \left(\frac{2\mu - \lambda}{2\mu + \lambda}\right)$$

et de 2 à 1 au taux

$$2\mu \cdot p_2 = \frac{\lambda^2}{\mu} \cdot \left(\frac{2\mu - \lambda}{2\mu + \lambda}\right).$$

c) On introduit un nouvel état 1^* pour indiquer que le commis à l'entrepôt sert un client seul à la caisse. L'équation d'égalité des taux pour cet état est

$$(\lambda+\mu)p_{1^*} = \mu p_2.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} p_{1^*} &= \frac{\mu}{\lambda+\mu}\cdot p_2 \\ &= \frac{\lambda^2}{2\mu(\lambda+\mu)}\cdot\left(\frac{2\mu-\lambda}{2\mu+\lambda}\right). \end{aligned}$$

La proportion du temps passé par le commis à l'entrepôt à la caisse est donc

$$p_{1^*} + \sum_{n=2}^{\infty} p_n = \frac{\lambda^2}{2\mu(\lambda+\mu)}\cdot\left(\frac{2\mu-\lambda}{2\mu+\lambda}\right) + \frac{\lambda^2}{\mu(2\mu+\lambda)}.$$

Exercice 5.9 Une boulangerie produit des baguettes de pain selon un processus de Poisson de taux 45 par heure, et peut entreposer autant de baguettes qu'elle le souhaite. Les clients arrivent à la boulangerie selon un processus de Poisson de taux 50 par heure. Chaque client achète une baguette et quitte immédiatement après avec la baguette, ou alors il quitte les mains vides s'il n'y avait pas de baguette de prête.

a) Trouver la proportion de clients qui repartiront les mains vides.

b) Calculer le temps moyen qu'une baguette passera sur les étagères.

c) Calculer le nombre moyen de baguettes sur les étagères.

d) À l'ouverture du magasin, aucune baguette n'est produite. Quelle est la probabilité que les cinq premiers clients se présentant au magasin repartent les mains vides ?

Soit X_t le nombre de baguettes de pain entreposées au temps t. $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ est un système $M|M|1$ avec queue infinie, où $\lambda_n = 45$ et $\mu_n = 50$.

a) On cherche p_0. Directement,

$$\begin{aligned} p_0 &= 1 - \frac{\lambda}{\mu} \\ &= 1 - \frac{45}{50} \\ &= \frac{5}{50} = 0{,}1. \end{aligned}$$

b) Directement,

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{\mu - \lambda} \\ &= \frac{1}{50 - 45} \\ &= \frac{1}{5} = 12 \text{ minutes}. \end{aligned}$$

c) Directement,

$$\begin{aligned} L &= \frac{\lambda}{\mu - \lambda} \\ &= \frac{45}{50 - 45} \\ &= 9. \end{aligned}$$

d) Cette probabilité est

$$\begin{aligned} P\big(\mathrm{Exp}(50) < \mathrm{Exp}(45)\big)^5 &= \left(\frac{50}{50 + 45}\right)^5 \\ &\approx 0{,}0404. \end{aligned}$$