CHAPITRE 3
PROCESSUS DE POISSON

Exercice 3.1 Deux personnes sont en attente à un guichet. Les temps d'attente sont indépendants et de loi $X_1 \sim \text{Exp}(\lambda_1)$ et $X_2 \sim \text{Exp}(\lambda_2)$.

a) Déterminer $E(\min(X_1, X_2))$.

b) Déterminer $E(\max(X_1, X_2))$.

c) Déterminer la fonction de masse et la fonction de répartition de $X_1 \mid X_1 < c$.

d) Déterminer $E(X_1 \mid X_1 < c)$.

a) Soit $Y = \min\{X_1, X_2\}$. Alors, d'après la proposition 3.6, $Y \sim \text{Exp}(\lambda_1 + \lambda_2)$. Ainsi,

$$E(Y) = \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2}.$$

b) **Solution 1**

Soit $Y = \max\{X_1, X_2\}$. Puisque

$$\max\{X_1, X_2\} + \min\{X_1, X_2\} = X_1 + X_2$$

alors

$$\begin{aligned} E(\max\{X_1, X_2\}) &= E(X_1) + E(X_2) - E(\min\{X_1, X_2\}) \\ &= \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2}. \end{aligned}$$

Solution 2

On peut aussi démontrer ce résultat sans se référer à $\min\{X_1, X_2\}$.

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) = P(X_1 \leq y, X_2 \leq y) \\ &= P(X_1 \leq y) \cdot P(X_2 \leq y) \quad \text{(car } X_1 \text{ et } X_2 \text{ sont indépendants)} \\ &= \left(1 - e^{-\lambda_1 y}\right) \cdot \left(1 - e^{-\lambda_2 y}\right). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \frac{d}{dy}\left(F_y(y)\right) \\ &= \frac{d}{dy}\left(\left(1 - e^{-\lambda_1 y}\right) \cdot \left(1 - e^{-\lambda_2 y}\right)\right) \\ &= \left(1 - e^{-\lambda_1 y}\right) \cdot \lambda_2 e^{-\lambda_2 y} + \left(1 - e^{-\lambda_2 y}\right) \cdot \lambda_1 e^{-\lambda_1 y} \\ &= \lambda_2 e^{-\lambda_2 y} - \lambda_2 e^{-(\lambda_1 + \lambda_2) y} + \lambda_1 e^{-\lambda_1 y} - \lambda_1 e^{-(\lambda_1 + \lambda_2) y} \\ &= f_{X_1}(y) + f_{X_2}(y) - (\lambda_1 + \lambda_2) e^{-(\lambda_1 + \lambda_2) y} \end{aligned}$$

On en déduit

$$E(Y) = \int_0^\infty y \cdot f_Y(y)\, dy$$

$$= \int_0^\infty y \cdot f_{X_1}(y)\,dy + \int_0^\infty y \cdot f_{X_2}(y)\,dy - \int_0^\infty y \cdot (\lambda_1 + \lambda_2) e^{-(\lambda_1+\lambda_2)y}\,dy$$
$$= E(X_1) + E(X_2) - E(X_1 + X_2)$$
$$= \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2}.$$

c) On cherche la loi de $X_1 \mid X_1 < c$. Soit $0 < x < c$. On a

$$\begin{aligned} F_{X_1 \mid X_1 < c}(x) &= P(X_1 \le x \mid X_1 < c) \\ &= \frac{P(X_1 \le x)}{P(X_1 < c)} \\ &= \frac{1 - e^{-\lambda_1 x}}{1 - e^{-\lambda_1 c}}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} f_{X_1 \mid X_1 < c}(x) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{1 - e^{-\lambda_1 x}}{1 - e^{-\lambda_1 c}}\right) \\ &= \frac{\lambda_1 e^{-\lambda_1 x}}{1 - e^{-\lambda_1 c}}. \end{aligned}$$

d) Directement,

$$\begin{aligned} E(X_1 \mid X_1 < c) &= \int_0^c x \cdot \frac{\lambda_1 e^{-\lambda_1 x}}{1 - e^{-\lambda_1 c}}\,dx \\ &= \frac{\lambda_1}{1 - e^{-\lambda_1 c}} \int_0^c x \cdot e^{-\lambda_1 x}\,dx \\ &= \frac{1 - e^{-\lambda_1 c} \cdot (1 + \lambda_1 c)}{\lambda_1 (1 - e^{-\lambda_1 c})}. \end{aligned}$$

Exercice 3.2 On dit qu'une variable aléatoire non négative X est **sans mémoire** si, pour toutes valeurs $s, t \geq 0$, $P(X > s + t \mid X > t) = P(X > s)$. Si X représente la durée de vie d'un certain objet, alors si l'objet est toujours fonctionnel au temps t, la distribution du temps restant avant sa mort est la même que la distribution du temps depuis l'origine (un peu comme si l'objet avait « oublié » qu'il était utilisé depuis un temps t).

a) Montrer que les variables aléatoires exponentielles sont sans mémoire.

b) On va montrer ici que ce sont les seules variables aléatoires continues sans mémoire.

1) Soit g une fonction continue à droite telle que $g(s+t) = g(s)g(t)$. Montrer que $g(m/n) = \left(g(1/n)\right)^m$ pour toutes valeurs $m, n \in \mathbb{Z}$ avec $n \neq 0$.

2) En déduire que $g(1/n) = \left(g(1)\right)^{1/n}$.

3) Montrer que $g(x) = \left(g(1)\right)^x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

4) Montrer que $g(1) \geq 0$.

5) En déduire que $g(x) = e^{-\lambda x}$, où $\lambda = -\ln\left(g(1)\right)$.

6) Soit X une variable aléatoire sans mémoire. Posons $\bar{F}(x) = P(X > x)$. Montrer que
$$\bar{F}(s+t) = \bar{F}(s)\bar{F}(t).$$

7) En déduire que X suit une loi exponentielle.

a) Soit $X \sim \text{Exp}(\lambda)$. Alors
$$\begin{aligned} P(X > s + t \mid X > t) &= \frac{P(X > s + t, X > t)}{P(X > t)} \\ &= \frac{P(X > s + t)}{P(X > t)} \\ &= \frac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda t}} \\ &= e^{-\lambda s} \\ &= P(X > s). \end{aligned}$$
Ainsi, X est sans mémoire.

b) 1) Si $g(0) = 0$, alors $g(x) = g(x + 0) = g(x)g(0) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Si $g(0) \neq 0$, alors $g(0) = g(0 + 0) = g(0)g(0) \Longrightarrow g(0) = 1$.
Ainsi, pour $m = 0$, on a
$$g(0/n) = 1 = \left(g(1/n)\right)^0.$$
Pour $m > 0$, on a
$$\begin{aligned} g(m/n) &= g\left(\frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}\right) \\ &= g\left(\frac{1}{n}\right) \cdot \ldots \cdot g\left(\frac{1}{n}\right) \\ &= \left(g(1/n)\right)^m. \end{aligned}$$
Pour $m < 0$, on a
$$1 = g(0) = g\left(-\frac{m}{n} + \frac{m}{n}\right) = g(-m/n)g(m/n) = \left(g(1/n)\right)^{-m} g(m/n),$$
d'où
$$g(m/n) = \left(g(1/n)\right)^m.$$

2) On a

$$g(1) = g(n/n) = \big(g(1/n)\big)^n,$$

d'où

$$g(1/n) = \big(g(1)\big)^{1/n}.$$

3) On a

$$\begin{aligned}\big(g(1)\big)^{m/n} &= \left(\big(g(1)\big)^{1/n}\right)^m \\ &= \big(g(1/n)\big)^m \quad \text{(démontré en 2)} \\ &= g(m/n). \quad \text{(démontré en 1)}\end{aligned}$$

Ainsi, $\big(g(1)\big)^x = g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{Q}$. Or, g est continue et $\mathbb{Q}$ est une partie dense de $\mathbb{R}$. Ainsi, par un argument de continuité, $\big(g(1)\big)^x = g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

4) Directement,

$$\begin{aligned}g(1) &= g\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) \\ &= g(1/2)g(1/2) \\ &= \big(g(1/2)\big)^2 \\ &\geq 0.\end{aligned}$$

5) Directement,

$$\begin{aligned}e^{-\lambda x} &= e^{\ln(g(1))x} \\ &= \big(g(1)\big)^x \\ &= g(x).\end{aligned}$$

6) Directement,

$$\begin{aligned}\bar{F}(s+t) &= P(X > s+t) \\ &= P(X > s+t \mid X > t) \cdot P(X > t) \quad \text{(définition de la probabilité conditionnelle)} \\ &= P(X > s) \cdot P(X > t) \quad \text{(car } X \text{ est sans mémoire)} \\ &= \bar{F}(s)\bar{F}(t).\end{aligned}$$

7) Puisque X est sans mémoire, alors, selon 6), $\bar{F}(s+t) = \bar{F}(s)\bar{F}(t)$. Ainsi,

$$\begin{aligned}F(x) &= 1 - \bar{F}(x) \\ &= 1 - e^{-\lambda x}, \quad \text{(selon 5)}\end{aligned}$$

où $\lambda = -\ln(\bar{F}(1))$. Or, il s'agit de la fonction de répartition d'une loi exponentielle de paramètre λ. En effet,

$$\begin{aligned}-\ln(\bar{F}(1)) &= -\ln(1 - F(1)) \\ &= -\ln\left(1 - (1 - e^{-\lambda})\right) \\ &= -\ln(e^{-\lambda}) \\ &= -(-\lambda) = \lambda.\end{aligned}$$

Exercice 3.3 Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes telles que $X_1 \sim \text{Exp}(\lambda_1)$ et $X_2 \sim \text{Exp}(\lambda_2)$. Montrer que

$$P(X_2 > X_1 + t \mid X_2 > X_1) = P(X_2 > t).$$

En conditionnant sur X_1, on obtient

$$\begin{aligned}
P(X_2 > X_1 + t \mid X_2 > X_1) &= \int_0^\infty P(X_2 > X_1 + t \mid X_2 > X_1, X_1 = x) \cdot f_{X_1}(x)\,dx \\
&= \int_0^\infty P(X_2 > x + t \mid X_2 > x, X_1 = x) \cdot f_{X_1}(x)\,dx \\
&= \int_0^\infty P(X_2 > x + t \mid X_2 > x) \cdot f_{X_1}(x)\,dx \quad \text{(car } X_1 \text{ et } X_2 \text{ sont ind.)} \\
&= \int_0^\infty P(X_2 > t) \cdot f_{X_1}(x)\,dx \quad \text{(car selon le thm 3.3, } X_2 \text{ est sans mémoire)} \\
&= P(X_2 > t) \cdot \int_0^\infty f_{X_1}(x)\,dx \\
&= P(X_2 > t).
\end{aligned}$$

C'est la propriété d'**absence de mémoire forte** de la loi exponentielle.

Exercice 3.4 Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes, où $Y \sim \text{Exp}(\lambda)$. Montrer que la distribution conditionnelle de $Y - X \mid X < Y$ est aussi exponentielle de paramètre λ.

Directement,

$$\begin{aligned}
F_{Y-X \mid X<Y}(t) &= P(Y - X \leq t \mid X < Y) \\
&= 1 - P(Y - X > t \mid X < Y) \\
&= 1 - P(Y > X + t \mid Y > X) \\
&= 1 - P(Y > t) \quad \text{(voir exercice 3.3)} \\
&= 1 - e^{-\lambda t},
\end{aligned}$$

qui est la fonction de répartition d'une loi exponentielle de paramètre λ.

Exercice 3.5 Soit X une variable aléatoire continue de densité f et de fonction de répartition F, représentant la durée de vie d'un certain composant. On appelle **fonction taux de panne** de X, notée $\lambda(t)$, la fonction $\lambda(t) = f(t)/\big(1 - F(t)\big)$.

a) Montrer que $P(X \in \,]t, t + dt[\mid X > t) \approx \lambda(t)dt$.

b) Montrer que la fonction taux de panne d'une distribution exponentielle est constante.

c) Montrer que la fonction taux de panne détermine uniquement la distribution d'une variable aléatoire, c'est-à-dire que si $\lambda(t)$ est connue, il n'y a qu'un seul choix pour la loi de X.

d) En déduire que l'unique distribution ayant un taux de panne constant est la distribution exponentielle.

e) Supposons que le taux de mortalité pour un fumeur de t années est donné par $\lambda_f(t)$ tandis que le taux de mortalité pour un non fumeur du même âge est donné par $\lambda_n(t)$. Admettons que le taux de mortalité pour un fumeur est le double de celui d'un non fumeur.

1) Déterminer la probabilité pour qu'un non fumeur d'âge A atteigne l'âge B sous l'hypothèse que $A < B$.

2) Faire le même calcul pour un fumeur.

3) En déduire que si on a deux individus du même âge dont l'un est fumeur et l'autre pas, la probabilité que le fumeur survive à un âge donné est le carré de celle du non fumeur.

4) Déterminer la probabilité pour qu'un individu âgé de 50 ans survive jusqu'à l'âge de 60 ans selon qu'il est fumeur ou non en supposant que $\lambda_n(t) = 1/30$ pour $50 \le t \le 60$.

a) Directement,

$$\begin{aligned}
P(X \in \,]t, t + dt[\mid X > t) &= \frac{P(X \in \,]t, t + dt[, X > t)}{P(X > t)} \\
&= \frac{P(X \in \,]t, t + dt[)}{P(X > t)} \\
&\approx \frac{f(t) \cdot dt}{1 - F(t)} \\
&= \lambda(t)dt.
\end{aligned}$$

b) Supposons que $X \sim \operatorname{Exp}(\lambda)$. Alors

$$\begin{aligned}
\lambda(t) &= \frac{f(t)}{1 - F(t)} \\
&= \frac{\lambda e^{-\lambda t}}{e^{-\lambda t}} \\
&= \lambda,
\end{aligned}$$

qui est une constante.

c) On a

$$\begin{aligned}
\lambda(t) &= \frac{f(t)}{1 - F(t)} \\
&= \frac{\frac{d}{dt}\big(F(t)\big)}{1 - F(t)}.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\int_0^t \lambda(t)\, dt = \int_0^t \frac{\frac{d}{dt}\big(F(t)\big)}{1-F(t)}\, dt \Longrightarrow \int_0^t \lambda(t)\, dt = -\log\big(1-F(t)\big) + C$$

$$\Longrightarrow \log\big(1-F(t)\big) = -\int_0^t \lambda(t)\, dt + C$$

$$\Longrightarrow 1-F(t) = e^{-\int_0^t \lambda(t)\, dt} \cdot e^C.$$

En posant $t = 0$, on trouve

$$\begin{aligned} 1 &= 1 - F(0) \\ &= e^{-\int_0^0 \lambda(t)\, dt} \cdot e^C \\ &= e^C. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$F(t) = 1 - e^{-\int_0^t \lambda(t)\, dt}.$$

d) Soit X une variable aléatoire telle que $\lambda(t) = \lambda$, une constante. Alors

$$\begin{aligned} F(t) &= 1 - e^{-\int_0^t \lambda\, dt} \\ &= 1 - e^{-\lambda t}, \end{aligned}$$

qui est la fonction de répartition d'une loi exponentielle de paramètre λ, d'où $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$.

e) Soit X_n et X_f deux variables aléatoires représentant respectivement l'âge de décès d'un non-fumeur et d'un fumeur.

1) Directement,

$$\begin{aligned} P(X_n \geq B \mid X_n \geq A) &= \frac{P(X_n \geq B, X_n \geq A)}{P(X_n \geq A)} \\ &= \frac{P(X_n \geq B)}{P(X_n \geq A)} \\ &= \frac{1-F(B)}{1-F(A)} \\ &= \frac{e^{-\int_0^B \lambda_n(t)\, dt}}{e^{-\int_0^A \lambda_n(t)\, dt}} \quad \text{(résultat obtenu en c))} \\ &= e^{-\int_A^B \lambda_n(t)\, dt}. \end{aligned}$$

2) En procédant comme en 1), on obtient

$$P\big(X_f \geq B \mid X_f \geq A\big) = e^{-\int_A^B \lambda_f(t)\, dt}.$$

3) Selon l'énoncé, $\lambda_f = 2\lambda_n$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
P\left(X_f \geq B \mid X_f \geq A\right) &= e^{-\int_A^B \lambda_f(t)\,dt} \quad \text{(résultat obtenu en 2))} \\
&= e^{-\int_A^B 2\lambda_n(t)\,dt} \\
&= e^{2\left(-\int_A^B \lambda_n(t)\,dt\right)} \\
&= \left(e^{-\int_A^B \lambda_n(t)\,dt}\right)^2 \\
&= \left(P(X_n \geq B \mid X_n \geq A)\right)^2. \quad \text{(résultat obtenu en 3))}
\end{aligned}$$

4) Directement,

$$\begin{aligned}
P(X_n \geq 60 \mid X_n \geq 50) &= e^{-\int_{50}^{60}(1/30)\,dt} \\
&= e^{-10/30} \\
&= e^{-1/3} \approx 0{,}7165
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
P\left(X_f \geq 60 \mid X_f \geq 50\right) &= P(X_n \geq 60 \mid X_n \geq 50)^2 \quad \text{(résultat obtenu en 3))} \\
&= e^{-2/3} \approx 0{,}5134.
\end{aligned}$$

Exercice 3.6 Deux individus, A et B, attendent un rein pour une transplantation. Si l'individu A ne reçoit pas de rein, son temps de survie suit une loi exponentielle avec paramètre λ_A. Pour l'individu B, ce temps de survie est de loi exponentielle avec paramètre λ_B. Les reins deviennent disponibles selon un processus de Poisson d'intensité λ. Le premier rein ira à A s'il est en vie, sinon à B s'il est toujours vivant. Les autres causes de décès sont négligeables.

a) Quelle est la probabilité que A reçoive un rein ?

b) Quelle est la probabilité que B reçoive un rein ?

a) Soit X_A et X_B les moments des décès des individus A et B respectivement et soit T_i le moment où le rein i devient disponible. Pour que A reçoive un rein, il faut que $X_A > T_1$. Or,

$$P(X_A > T_1) = \frac{\lambda}{\lambda + \lambda_A}$$

car $X_A \sim \text{Exp}(\lambda_A)$ et $T_1 \sim \text{Exp}(\lambda)$.

b) Pour obtenir la probabilité que B obtienne un nouveau rein, on va conditionner sur la plus petite valeur entre X_A, X_B et T_1. Ainsi,

$$\begin{aligned}
&P(B \text{ obtient un rein}) \\
&= P(B \text{ obtient un rein} \mid X_A = \min\{X_A, X_B, T_1\}) \cdot P(X_A = \min\{X_A, X_B, T_1\}) \\
&\quad + P(B \text{ obtient un rein} \mid X_B = \min\{X_A, X_B, T_1\}) \cdot P(X_B = \min\{X_A, X_B, T_1\}) \\
&\quad + P(B \text{ obtient un rein} \mid T_1 = \min\{X_A, X_B, T_1\}) \cdot P(T_1 = \min\{X_A, X_B, T_1\}) \\
&= P(T_1 < X_B) \cdot \left(\frac{\lambda_A}{\lambda_A + \lambda_B + \lambda}\right) + 0 \cdot \left(\frac{\lambda_B}{\lambda_A + \lambda_B + \lambda}\right) + P(T_2 - T_1 < X_B) \cdot \left(\frac{\lambda}{\lambda_A + \lambda_B + \lambda}\right) \\
&= \left(\frac{\lambda}{\lambda_B + \lambda}\right) \cdot \left(\frac{\lambda_A}{\lambda_A + \lambda_B + \lambda}\right) + \left(\frac{\lambda}{\lambda_B + \lambda}\right) \cdot \left(\frac{\lambda}{\lambda_A + \lambda_B + \lambda}\right) \\
&= \left(\frac{\lambda}{\lambda_B + \lambda}\right)\left(\frac{\lambda_A + \lambda}{\lambda_A + \lambda_B + \lambda}\right).
\end{aligned}$$

Exercice 3.7 Les espacements T entre les temps d'arrivée des trains à une gare obéissent à une loi de probabilité quelconque de moyenne 30 minutes et d'écart-type 4 minutes. Des passagers arrivent à cette gare selon un processus de Poisson avec une moyenne de 70 par heure. Supposons qu'un train vient de quitter la gare. Posons X le nombre de passagers qui prendront le prochain train. Déterminer $E(X)$ et $Var(X)$.

Soit N_t le nombre de passagers arrivés en gare avant l'instant t (en minute). Selon l'énoncé, $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ est un processus de poisson de moyenne 70, d'où $N_t \sim \text{Poisson}(\lambda t)$ et $E(N_t) = Var(N_t) = 70t$ Par ailleurs, $(X \mid T = t) = N_t$, $E(T) = 30/60 = 1/2$, $\sigma(T) = 4/60 = 1/15$.

On a

$$\begin{aligned}
E(X) &= E\big(E(X \mid T)\big) \\
&= \int_0^\infty E(X \mid T = t) \cdot f_T(t)\, dt \\
&= \int_0^\infty E(N_t) \cdot f_T(t)\, dt \\
&= \int_0^\infty 70t \cdot f_T(t)\, dt \\
&= 70 \int_0^\infty t \cdot f_T(t)\, dt \\
&= 70 \cdot E(T) \\
&= 70 \cdot \frac{1}{2} \\
&= 35.
\end{aligned}$$

À noter qu'on peut également calculer l'espérance de X de façon plus succincte de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
E(X) &= E\big(E(X \mid T)\big) \\
&= E\big(E(N_T)\big) \\
&= E(70T) \\
&= 70 \cdot E(T) \\
&= 70 \cdot \frac{1}{2} \\
&= 35.
\end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned}
Var(X) &= E\big(Var(X \mid T)\big) + Var\big(E(X \mid T)\big) \\
&= E\big(Var(N_T)\big) + Var\big(E(N_T)\big) \\
&= E(70T) + Var(70T) \\
&= 70 \cdot E(T) + 70^2 \cdot Var(T) \\
&= 70 \cdot \frac{1}{2} + 4\,900 \cdot \frac{1}{15^2} \\
&= 35 + \frac{196}{9} \\
&= \frac{511}{9} \approx 56{,}8.
\end{aligned}$$

Exercice 3.8 Des patients se présentent à l'unité mobile de service à la collectivité de l'Ambulance Saint-Jean selon un processus de Poisson d'intensité $\lambda = 1$ par heure.

a) Déterminer le temps moyen pour que le dixième patient se présente pour recevoir des soins.

b) Déterminer la probabilité pour que le temps écoulé entre l'arrivée du dixième patient et celle du onzième soit de plus de trois heures.

c) Sachant que chaque patient a une probabilité de 10 % de s'y présenter pour un problème traumatique, déterminer la probabilité pour que personne ne se pointe à l'unité au cours des six prochaines heures pour un problème de ce type.

Soient T_i le temps entre les arrivées $i-1$ et i. On sait que $T_i \sim \text{Exp}(\lambda = 1)$.

a) Posons $S = \sum_{i=1}^{10} T_{10}$. Alors $S \sim \text{Gamma}(\alpha = 10, \beta = 1)$. Ainsi,

$$\begin{aligned} E(S) &= \frac{\alpha}{\beta} \\ &= \frac{10}{1} = 10. \end{aligned}$$

b) Directement,

$$\begin{aligned} P(T_{11} > 3) &= e^{-\lambda \cdot 3} \\ &= e^{-3} \approx 0{,}0498. \end{aligned}$$

c) Posons $N1_t$ le nombre de patients traumatiques au temps t. On sait que

$$n1_t \sim \text{Poisson}(\lambda \cdot 0{,}1 \cdot t) = \text{Poisson}(t/10).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} P(N1_{6+s} - N1_s = 0) &= P(N1_6 - N1_0 = 0) \\ &= P(N1_6 = 0) \\ &= e^{-3/5} \approx 0{,}5488. \end{aligned}$$

Exercice 3.9 Des enfants se présentent à un manège selon un processus de Poisson d'intensité λ. L'opérateur du manège le lance à toutes les 15 minutes. De façon à minimiser le temps d'attente total des enfants, il souhaite le lancer à nouveau en un temps t entre les démarrages habituels.

a) Déterminer le nombre moyen d'enfants qui se pointent au manège dans l'intervalle $]0, t[$.

b) Quel est le temps moyen d'attente pour un enfant qui s'est présenté au manège dans l'intervalle $]0, t[$?

c) Quel est le temps d'attente total moyen des enfants ?

d) Déterminer la valeur de t qui minimise ce temps total moyen.

Soit N_t le nombre d'enfants arrivant au manège avant le temps t. Puisque $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$, alors $N_t \sim \text{Poisson}(\lambda t)$, ce qui implique $E(N_t) = Var(N_t) = \lambda t$.

a) Directement,

$$E(N_t) = \lambda t.$$

b) Soit X le temps d'arrivé d'un enfant. Alors $(X \mid X \in]0, t[) \sim \text{Unif}(0, t)$. Ainsi,

$$t - E(X \mid X < t) = t - t/2 = t/2.$$

c) Soit X_i le temps d'arrivé de l'enfant i et soit Y_i son temps d'attente. Alors

$$\begin{aligned}
E\left(\sum_{i=1}^{N_{15}} Y_i\right) &= E\left(\sum_{i=1}^{N_t} Y_i\right) + E\left(\sum_{i=N_t}^{N_{15}} Y_i\right) \\
&= E\left(\sum_{i=1}^{N_t} t - X_i\right) + E\left(\sum_{i=N_t}^{N_{15}} 15 - X_i\right) \\
&= E(N_t) \cdot E(t - X_i \mid X_i \in]0, t[) + E(N_{15} - N_t) \cdot E(15 - X_i \mid X_i \in]t, 15[) \\
&= E(N_t) \cdot \big(t - E(X_i \mid X_i \in]0, t[)\big) + \big(E(N_{15}) - E(N_t)\big) \cdot \big(15 - E(X_i \mid X_i \in]t, 15[)\big) \\
&= \lambda t \left(t - \frac{t}{2}\right) + (\lambda 15 - \lambda t) \cdot \left(15 - \frac{(t + 15)}{2}\right) \\
&= \frac{\lambda t^2}{2} + \frac{\lambda (15 - t)^2}{2}.
\end{aligned}$$

d) Directement,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\frac{\lambda t^2}{2} + \frac{\lambda (15 - t)^2}{2}\right) = 0 &\Longrightarrow \lambda t - \lambda(15 - t) = 0 \\
&\Longrightarrow \lambda(2t - 15) = 0 \\
&\Longrightarrow t = \frac{15}{2} = 7{,}5.
\end{aligned}$$

Exercice 3.10 Les automobiles passent à un passage piétonnier selon un processus de Poisson d'intensité $\lambda = 3$ par minute. Un piéton veut déjouer la mort et traverse le passage clouté les yeux fermés.

a) S'il lui faut s secondes pour le faire, déterminer la probabilité pour qu'il s'en sorte indemne.

b) Supposons que le piéton peut éviter une automobile qui passe mais ne peut éviter l'accident s'il y en a deux ou plus qui passent en même temps que lui. Déterminer la probabilité pour qu'il s'en sorte indemne s'il lui faut s secondes pour traverser.

a) Soit N_t le nombre de voitures passant à un passage piétonnier dans les t premières secondes. Puisque $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ est un processus de Poisson, alors $N_t \sim \text{Poisson}(3t/60)$. Ainsi,

$$\begin{aligned} P(N_{t+s} - N_t = 0) &= P(N_s = 0) \\ &= e^{-3s/60} \\ &= e^{-s/20}. \end{aligned}$$

b) Il va s'en sortir indemne si $N_{t+s} - N_t \leq 1$. Ainsi,

$$\begin{aligned} P(N_{t+s} - N_t \leq 1) &= P(N_s \leq 1) \\ &= P(N_s = 0) + P(N_s = 1) \\ &= e^{-3s/60} + e^{-3s/60} \cdot \frac{3s}{60} \\ &= e^{-s/20}\left(1 + \frac{s}{20}\right) \cdot \end{aligned}$$

Exercice 3.11 Supposons que $\{N1_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ et $\{N2_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ sont des processus de Poisson indépendants de paramètres λ_1 et λ_2 respectivement. Montrer que $N_t = N1_t + N2_t$ est un processus de Poisson de paramètre $\lambda_1 + \lambda_2$.

On veut montrer que $N_t \sim \text{Poisson}\big((\lambda_1+\lambda_2)t\big)$. En conditionnant sur $N1_t$, on obtient

$$\begin{aligned}
P(N_t = k) &= \sum_{i=0}^{k} P(N_t = k \mid N1_t = i)\cdot P(N1_t = i)\\
&= \sum_{i=0}^{k} P(N2_t = k-i \mid N1_t = i)\cdot P(N1_t = i)\\
&= \sum_{i=0}^{k} P(N2_t = k-i,\ N1_t = i)\\
&= \sum_{i=0}^{k} P(N2_t = k-i)\cdot P(\,N1_t = i) \quad \text{(car } N1_t \text{ et } N2_t \text{ sont indépendants)}\\
&= \sum_{i=0}^{k} \frac{e^{-\lambda_2 t}(\lambda_2 t)^{k-i}}{(k-i)!}\cdot\frac{e^{-\lambda_1 t}(\lambda_1 t)^{i}}{i!}\\
&= \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}}{k!}\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}(\lambda_1 t)^i\cdot(\lambda_2 t)^{k-i}\\
&= \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}}{k!}(\lambda_1 t+\lambda_2 t)^k\\
&= \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}\cdot\big((\lambda_1+\lambda_2)t\big)^k}{k!},
\end{aligned}$$

qui est bien la fonction de masse d'une loi de Poisson de paramètre $(\lambda_1+\lambda_2)t$.

Exercice 3.12 L'appareil 1 fonctionne présentement. L'appareil 2 sera mis en fonction dans t minutes. Si la durée de vie de l'appareil i suit une loi exponentielle de taux λ_i, quelle est la probabilité que l'appareil 1 soit le premier à s'arrêter ?

Soit $X_i \sim \text{Exp}(\lambda_i)$ la durée de vie de l'appareil $i \in \{1, 2\}$. On cherche la probabilité que l'appareil 1 soit le premier à s'arrêter sachant que l'appareil 2 sera mis en fonction dans t minutes. Autrement dit, on cherche la probabilité que X_1 soit plus petit que $X_2 + t$. En conditionnant ce calcul de probabilité sur X_2, on obtient

$$\begin{aligned}
P(X_1 < X_2 + t) &= \int_0^\infty P(X_1 < X_2 + t \,|\, X_2 = s) \cdot f_{X_2}(s)\, ds \\
&= \int_0^\infty P(X_1 < s + t) \cdot f_{X_2}(s)\, ds \quad \text{(on présume que } X_1 \text{ et } X_2 \text{ sont indépendantes)} \\
&= \int_0^\infty \left(1 - e^{-\lambda_1(s+t)}\right) \cdot \lambda_2 e^{-\lambda_2 s}\, ds \\
&= \int_0^\infty \lambda_2 e^{-\lambda_2 s}\, ds - \lambda_2 e^{-\lambda_1 t} \int_0^\infty e^{-(\lambda_1+\lambda_2)s}\, ds \\
&= 1 - e^{-\lambda_1 t}\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}\right).
\end{aligned}$$

Nous pouvons obtenir ce même résultat en procédant autrement :

$$\begin{aligned}
P(X_1 < X_2 + t) &= P\big((X_1 < t, X_1 < X_2 + t) \quad \text{ou} \quad (X_1 \geq t, X_1 < X_2 + t)\big) \\
&= P\big((X_1 < t) \quad \text{ou} \quad (X_1 \geq t, X_1 < X_2 + t)\big) \\
&= P(X_1 < t) + P(X_1 \geq t, X_1 < X_2 + t) \quad \text{(car les évènements sont incompatibles)} \\
&= P(X_1 < t) + P(X_1 \geq t) \cdot P(X_1 < X_2 + t \,|\, X_1 \geq t) \\
&= F_{X_1}(t) + \left(1 - F_{X_1}(t)\right) \cdot P(X_1 < X_2) \\
&= \left(1 - e^{-\lambda_1 t}\right) + e^{-\lambda_1 t} \cdot \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \\
&= 1 - e^{-\lambda_1 t}\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}\right).
\end{aligned}$$

Exercice 3.13 Un médecin a établi deux rendez-vous, l'un à 13 h et l'autre à 13 h 30. Les durées de ces rendez-vous suivent des variables aléatoires exponentielles indépendantes de moyennes 30 minutes. En assumant que les deux patients sont à l'heure, calculer le temps moyen que passera au bureau du médecin le patient ayant son rendez-vous à 13 h 30.

Soit $X_i \sim \text{Exp}(\lambda_i = 1/30)$ la durée du rendez-vous du patient $i \in \{1, 2\}$ et soit $X = X_2 + \max\{0, X_1 - 30\}$ le temps passé au bureau par le deuxième patient. On cherche l'espérance de X.

$$\begin{aligned} E(X) &= E(X_2 + \max\{0, X_1 - 30\}) \\ &= E(X_2) + E(\max\{0, X_1 - 30\}). \end{aligned}$$

L'espérance de X_2 est de 30 minutes. Pour le calcul de l'espérance de $\max\{0, X_1 - 30\}$, on conditionne sur

$$Y = \begin{cases} 1 & \text{si } X_1 < 30, \\ 0 & \text{si } X_1 \geq 30. \end{cases}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} & E(\max\{0, X_1 - 30\}) \\ &= E(\max\{0, X_1 - 30\} \mid Y = 1) \cdot P(Y = 1) + E(\max\{0, X_1 - 30\} \mid Y = 0) \cdot P(Y = 0) \\ &= E(\max\{0, X_1 - 30\} \mid X_1 < 30) \cdot P(X_1 < 30) + E(\max\{0, X_1 - 30\} \mid X_1 \geq 30) \cdot P(X_1 \geq 30) \\ &= 0 \cdot P(X_1 < 30) + E(X_1 - 30 \mid X_1 \geq 30) \cdot P(X_1 \geq 30) \\ &= E(X_1) \cdot P(X_1 \geq 30) \quad \text{(car } X_1 \text{ est sans mémoire)} \\ &= 30 \cdot e^{-1} \approx 11{,}04. \end{aligned}$$

Ainsi, $E(X_2) = 30 \cdot (1 + e^{-1}) \approx 41{,}04$ minutes.

Exercice 3.14 Une théorie scientifique suppose que des erreurs dans la division cellulaire se produisent selon un processus de Poisson avec un taux de 2,5 par année, et qu'un individu meurt lorsque 196 de ces erreurs se produisent. Assumer l'exactitude de cette théorie.

a) Calculer l'espérance de vie d'un individu.

b) Calculer la probabilité qu'un individu vive plus de 90 ans.

Soit N_t le nombre d'erreurs s'étant produites dans la division cellulaire au temps t. On sait que $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ suit un processus de Poisson d'intensité $\lambda = 2{,}5$. Posons T_i le temps entre les erreurs $i-1$ et i. On sait que $T_i \sim \text{Exp}(2{,}5)$ pour tout $i \in \mathbb{N}_+$.

a) Puisque $T_i \sim \text{Exp}(2{,}5)$, alors $E(T_i) = 1/2{,}5 = 0{,}4$. Ainsi,

$$\begin{aligned} E\left(\sum_{i=1}^{196} T_i\right) &= \sum_{i=1}^{196} E(T_i) \\ &= 196 \cdot 0{,}4 \\ &= 78{,}4. \end{aligned}$$

b) Puisque $T_i \sim \text{Exp}(2{,}5)$ et que les variables T_i sont indépendantes, alors $\sum_{i=1}^{196} T_i \sim \text{Gamma}(\alpha = 196, \beta = 0{,}4)$. Ainsi,

$$P\left(\sum_{i=1}^{196} T_i > 90\right) = 0{,}0227. \quad \text{(calculée à l'ordinateur)}$$

Exercice 3.15 Des voitures circulent sur une rue selon un processus de Poisson de taux λ par minute. Une femme souhaitant traverser la rue à un certain endroit attend jusqu'à ce qu'elle voit qu'il n'y aura pas de voiture dans les T prochaines minutes.

a) Calculer la probabilité que son temps d'attente soit de 0.

b) Calculer l'espérance de son temps d'attente.

Soit N_t le nombre de voitures ayant circulé au temps t et soit X le temps d'attente de la femme. On sait que $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ suit un processus de Poisson d'intensité λ. Posons T_i le temps entre les voitures $i-1$ et i. On sait que $T_i \sim \text{Exp}(\lambda)$ pour tout $i \in \mathbb{N}_+$.

a) On sait que $N_t \sim \text{Poisson}(\lambda T)$. Ainsi,

$$\begin{aligned} P(X=0) &= P(N_T = 0) \\ &= e^{-\lambda T}. \end{aligned}$$

b) En conditionnant l'espérance du temps d'attente X sur T_1, on obtient

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_0^\infty E(X \mid T_1 = s)\cdot f_{T_1}(s)\,ds \\ &= \int_0^T E(X \mid T_1 = s)\cdot f_{T_1}(s)\,ds + \int_T^\infty E(X \mid T_1 = s)\cdot f_{T_1}(s)\,ds \\ &= \int_0^T E(X+s)\cdot f_{T_1}(s)\,ds + \int_T^\infty 0\cdot f_{T_1}(s)\,ds \\ &= E(X)\int_0^T f_{T_1}(s)\,ds + \int_0^T s\cdot f_{T_1}(s)\,ds. \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned} \int_0^T f_{T_1}(s)\,ds &= F_{T_1}(T) \\ &= 1 - e^{-\lambda T} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \int_0^T s\cdot f_{T_1}(s)\,ds &= \int_0^T s\cdot \lambda e^{-\lambda s}\,ds \\ &= \frac{1}{\lambda} - \left(T - \frac{1}{\lambda}\right)e^{-\lambda s}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} E(X) = E(X)\left(1 - e^{-\lambda T}\right) + \frac{1}{\lambda} - \left(T - \frac{1}{\lambda}\right)e^{-\lambda s} &\Rightarrow E(X) = \frac{e^{\lambda T}}{\lambda} - T - \frac{1}{\lambda} \\ &\Rightarrow E(X) = \frac{e^{\lambda T} - (T\lambda + 1)}{\lambda}. \end{aligned}$$

Exercice 3.16 Le coût engendré par un accident de voiture est une variable aléatoire exponentielle de moyenne 1 500 \$. De ce montant, la compagnie d'assurance paie seulement le montant excédant 500 \$. Calculer le montant moyen que paie la compagnie d'assurance par accident.

Soit X le montant que paie la compagnie d'assurance lors d'un accident et Y le coût engendré par un accident. Selon l'énoncé, $Y \sim \text{Exp}(\lambda = 1/1\,500)$. Par ailleurs,

$$E(X \mid Y = y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \in [0, 500], \\ y - 500 & \text{si } y \in [500, \infty]. \end{cases}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} E(X) = E\big(E(X \mid Y)\big) &= \int_0^\infty E(X \mid Y = y) \cdot f_Y(y)\,dy \\ &= \int_0^{500} E(X \mid Y = y) \cdot f_Y(y)\,dy + \int_{500}^\infty E(X \mid Y = y) \cdot f_Y(y)\,dy \\ &= \int_{500}^\infty (y - 500) \cdot \lambda e^{-\lambda y}\,dy \\ &= \lambda \int_{500}^\infty (y - 500) \cdot e^{-\lambda y}\,dy \\ &= \frac{e^{-500\lambda}}{\lambda} \\ &= 1\,500 \cdot e^{-1/3} \\ &= 1074{,}80\ \$. \end{aligned}$$

Exercice 3.17 Les espacements entres les temps d'arrivée des trains à une gare obéissent à une loi de probabilité quelconque de moyenne μ minutes. Des passagers arrivent à cette gare selon un processus de Poisson avec une moyenne de α par heure. Supposons qu'un train vient de quitter la gare. Posons X le nombre de passagers qui prendront le prochain train. Déterminer $E(X)$.

Soit T les espacements (en minutes) entre les temps d'arrivée des trains à une gare et soit N_t le nombre de passagers arrivés en gare avant l'instant t (en minutes). Selon l'énoncé, $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ est un processus de poisson de moyenne μ, d'où $N_t \sim \text{Poisson}(\alpha t/60)$ et $E(N_t) = \alpha t/60$. Par ailleurs, $(X \mid T = t) = N_t$, $E(T) = \mu$.
On a

$$\begin{aligned}
E(X) &= E\big(E(X \mid T)\big) \\
&= \int_0^\infty E(X \mid T = t) \cdot f_T(t)\, dt \\
&= \int_0^\infty E(N_t) \cdot f_T(t)\, dt \\
&= \int_0^\infty \frac{\alpha t}{60} \cdot f_T(t)\, dt \\
&= \frac{\alpha}{60} \int_0^\infty t \cdot f_T(t)\, dt \\
&= \frac{\alpha}{60} \cdot E(T) \\
&= \frac{\alpha\mu}{60}.
\end{aligned}$$