CHAPITRE 1
PROBABILITÉS CONDITIONNELLES

Exercice 1.1 Soit $X \sim \mathrm{Bin}(n,p)$ et $Y \sim \mathrm{Bin}(n,p)$ deux variables aléatoires indépendantes. Déterminer la fonction de masse conditionnelle de X sachant que $X+Y=m$. De quelle loi s'agit-il ?

On sait que $X+Y \sim \mathrm{Bin}(2n,p)$. Soit $x \in \{0,\dots,m\}$. Alors

$$\begin{aligned} P(X=x \mid X+Y=m) &= \frac{P(X=x, X+Y=m)}{P(X+Y=m)} \\ &= \frac{P(X=x, Y=m-x)}{P(X+Y=m)} \\ &= \frac{P(X=x)\cdot P(Y=m-x)}{P(X+Y=m)} \\ &= \frac{\binom{n}{x}p^x q^{n-x}\cdot \binom{n}{m-x}p^{m-x}q^{n-m+x}}{\binom{2n}{m}p^m q^{2n-m}} \\ &= \frac{\binom{n}{x}\cdot\binom{n}{m-x}}{\binom{2n}{m}}. \end{aligned}$$

Il s'agit de la fonction de masse d'une loi hypergéométrique. Ainsi,

$$X \mid X+Y=m \sim \mathrm{Hypergeom}(m,n,n).$$

Exercice 1.2 Soit X et Y deux variables aléatoires continues de densité conjointe

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 4y(x-y)e^{-(x+y)} & \text{si } 0 < x < \infty \quad \text{et} \quad 0 \le y \le x, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Calculer $E(X \mid Y = y)$.

On a

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\, dx \\ &= \int_{y}^{\infty} 4y(x-y)e^{-(x+y)}\, dx \\ &= 4ye^{-(x+y)}(-x+y-1)\Big|_{x=y}^{x=\infty} \\ &= 4ye^{-2y}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} E(X \mid Y = y) &= \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_{X|Y=y}(x)\, dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}\, dx \\ &= \int_{y}^{\infty} \frac{4xy(x-y)e^{-(x+y)}}{4\,ye^{-2y}}\, dx \\ &= \int_{y}^{\infty} x(x-y)e^{y-x}\, dx \\ &= e^{-x+y}(-x^2+xy-2x+y-2)\Big|_{y}^{\infty} \\ &= 0-(-y^2+y^2-2y+y-2) \\ &= y+2. \end{aligned}$$

Exercice 1.3 Dans un magasin, on observe deux types de clients. Le premier va acheter quelque chose alors que le deuxième type se contente de reluquer la marchandise. Sachant que le nombre de clients observés en une heure de chacun de ces deux types suit une loi de Poisson, que le nombre moyen d'acheteurs à l'heure est de 9 et que le nombre moyen de flâneurs est de 21, déterminer la loi du nombre d'acheteur si on sait qu'il y a eu 25 clients dans une heure. Déterminer en plus l'espérance du nombre d'acheteurs sous cette même hypothèse.

Soit X le nombre d'acheteurs en une heure et Y le nombre de flâneurs en une heure. On suppose que X et Y sont indépendantes. D'après l'exemple 1.7,

$$X \mid X + Y = 25 \sim \mathrm{Bin}\left(25, \frac{9}{30}\right).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} E(X \mid X + Y = 25) &= 25 \cdot \frac{9}{30} \\ &= 7{,}5. \end{aligned}$$

Exercice 1.4 Soient X et Y deux variables aléatoires de loi de probabilité conjointe

		Y	
	$P_{X,Y}(x,y)$	0	1
	0	0,2	0,1
X	1	0,4	0,2
	2	0,1	0,0

a) Déterminer la fonction de masse de X, $E(X)$ et $Var(X)$.

b) Déterminer la fonction de masse de $X \mid Y = 1$ puis calculer $E(X \mid Y = 1)$ et $Var(X \mid Y = 1)$.

c) Déterminer la fonction de masse de $X \mid Y = 0$ puis calculer $E(X \mid Y = 0)$ et $Var(X \mid Y = 0)$.

a) Directement,

$$p_X(x) = \begin{cases} 0{,}3 & \text{si } x = 0, \\ 0{,}6 & \text{si } x = 1, \\ 0{,}1 & \text{si } x = 2, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_x x \cdot p_X(x) \\ &= 0 \cdot 0{,}3 + 1 \cdot 0{,}6 + 2 \cdot 0{,}1 \\ &= 0{,}8. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Var(X) &= \sum_x \big(x - E(X)\big)^2 \cdot P_X(x) \\ &= (0 - 0{,}8)^2 \cdot 0{,}3 + (1 - 0{,}8)^2 \cdot 0{,}6 + (2 - 0{,}8)^2 \cdot 0{,}1 \\ &= 0{,}192 + 0{,}024 + 0{,}144 = 0{,}36. \end{aligned}$$

b) Directement,

$$p_{X|Y=1}(x) = \begin{cases} 1/3 & \text{si } x = 0, \\ 2/3 & \text{si } x = 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} E(X \mid Y = 1) &= \sum_x x \cdot p_{X|Y=1}(x) \\ &= 0 \cdot 1/3 + 1 \cdot 2/3 \\ &= 2/3 = 0{,}6667. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Var(X \mid Y = 1) &= \sum_x \big(x - E(X)\big)^2 \cdot P_{X|Y=1}(x) \\ &= (0 - 2/3)^2 \cdot 1/3 + (1 - 2/3)^2 \cdot 2/3 \\ &= 2/9 = 0{,}2222. \end{aligned}$$

c) Directement,

$$p_{X|Y=0}(x) = \begin{cases} 2/7 & \text{si } x = 0, \\ 4/7 & \text{si } x = 1, \\ 1/7 & \text{si } x = 2, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} E(X \mid Y = 0) &= \sum_x x \cdot p_{X|Y=0}(x) \\ &= 0 \cdot 2/7 + 1 \cdot 4/7 + 2 \cdot 1/7 \\ &= 6/7 = 0{,}8571. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Var(X \mid Y = 0) &= \sum_x \big(x - E(X)\big)^2 \cdot P_{X|Y=0}(x) \\ &= (0 - 6/7)^2 \cdot 2/7 + (1 - 6/7)^2 \cdot 4/7 + (2 - 6/7)^2 \cdot 1/7 \\ &= 20/49 = 0{,}4082. \end{aligned}$$

Exercice 1.5 Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes. Montrer que

$$\sum_{x \in \mathbb{R}} p_{X|Y=y}(x) = 1$$

pour toute valeur y telle que $p_Y(y) \neq 0$.

Directement,

$$\begin{aligned}
\sum_x p_{X|Y=y}(x) &= \sum_x \frac{p_{X,Y}(x,y)}{p_Y(y)} \\
&= \frac{1}{p_Y(y)} \cdot \sum_x p_{X,Y}(x,y) \\
&= \frac{1}{p_Y(y)} \cdot p_Y(y) \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Exercice 1.6 Une urne contient trois boules blanches, six boules rouges et cinq boules noires. On tire au hasard et simultanément six boules de l'urne. Soient X et Y les nombres de boules blanches et noires tirées respectivement.

a) Déterminer la fonction de masse de X sachant que $Y = 3$.

b) Calculer $E(X \mid Y = 1)$ et $Var(X \mid Y = 1)$.

a) On a

$$X \sim \text{Hypergeom}(6,\ 3,\ 11) \quad \text{et} \quad Y \sim \text{Hypergeom}(6,\ 5,\ 9).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} p_{X|Y=3}(x) &= \frac{p_{X,Y}(x,3)}{p_Y(3)} \\ &= \frac{\left(\frac{\binom{5}{3}\binom{3}{x}\binom{6}{3-x}}{\binom{14}{6}}\right)}{\left(\frac{\binom{5}{3}\binom{9}{6}}{\binom{14}{6}}\right)} \\ &= \frac{\binom{3}{x}\binom{6}{3-x}}{\binom{9}{3}}. \end{aligned}$$

Par conséquent, $X \mid Y = 3 \sim \text{Hypergeom}(3,\ 3,\ 6)$

b) On a $X \mid Y = 1 \sim \text{Hypergeom}(5,\ 3,\ 6)$. Ainsi,

$$\begin{aligned} E(X \mid Y = 1) &= 5 \cdot \frac{3}{9} \\ &= \frac{5}{3} = 1{,}6667 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} Var(X \mid Y = 1) &= 5 \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{6}{9} \cdot \left(\frac{9-3}{9-1}\right) \\ &= \frac{5}{6} \\ &= 0{,}8333. \end{aligned}$$

Exercice 1.7 Soit X une variable aléatoire uniforme sur l'intervalle $[0,\ 1]$. Déterminer $E(X \mid X < 0{,}5)$.

(Solution 1)

On a

$$\begin{aligned} F_{X|X<0,5}(x) &= P(X \leq x \mid X < 0{,}5) \\ &= \frac{P(X \leq x, X < 0{,}5)}{P(X < 0{,}5)} \\ &= 2 \cdot P(X \leq x, X < 0{,}5) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 2x & \text{si } 0 \leq x < 0{,}5 \\ 1 & \text{si } x \geq 0{,}5. \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi, $X \mid X < 0{,}5 \sim \text{Unif}(0,\ 0{,}5)$. Par conséquent,

$$E(X \mid X < 0{,}5) = 0{,}25.$$

(Solution 2)

Directement,

$$\begin{aligned} E(X \mid X < 0{,}5) &= \int_{x=-\infty}^{\infty} x \cdot f_{X|X<0,5}(x)\, dx \\ &= \int_{x=0}^{0,5} x \cdot \frac{f_X(x)}{P(X < 0{,}5)}\, dx \\ &= \int_{x=0}^{0,5} x \cdot \frac{1}{1/2}\, dx \\ &= x^2 \Big|_{x=0}^{x=0,5} \\ &= 0{,}25. \end{aligned}$$

Exercice 1.8 On lance une pièce de monnaie qui donne « face » avec probabilité p. Déterminer la variance du nombre moyen de lancers à effectuer avant d'obtenir une première fois « face » en conditionnant par la variable

$$Y = \begin{cases} 1 & \text{si le } 1^{\text{er}} \text{ lancer est « face »,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit X le nombre de lancers avant d'obtenir une première fois face. En conditionnant le calcul de la variance de X par Y, on obtient

$$Var(X) = E\big(Var(X \mid Y)\big) + Var\big(E(X \mid Y)\big).$$

On a

$$\begin{aligned} E\big(Var(X \mid Y)\big) &= \sum_{y=0}^{1} Var(X \mid Y = y) \cdot P(Y = y) \\ &= Var(X \mid Y = 0) \cdot P(Y = 0) + Var(X \mid Y = 1) \cdot P(Y = 1) \\ &= Var(X) \cdot q + 0 \cdot p \quad (\text{où } q = 1 - p) \\ &= Var(X) \cdot q. \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} Var\big(E(X \mid Y)\big) &= \sum_{y=0}^{1} \Big(E(X \mid Y = y) - E\big(E(X \mid Y)\big)\Big)^2 \cdot P(Y = y) \\ &= \sum_{y=0}^{1} \big(E(X \mid Y = y) - E(X)\big)^2 \cdot P(Y = y) \\ &= \big(E(X \mid Y = 0) - E(X)\big)^2 \cdot P(Y = 0) + \big(E(X \mid Y = 1) - E(X)\big)^2 \cdot P(Y = 1) \\ &= \left(\left(1 + \frac{1}{p}\right) - \frac{1}{p}\right)^2 \cdot q + \left(1 - \frac{1}{p}\right)^2 \cdot p \\ &= \frac{q}{p}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} Var(X) = E\big(Var(X \mid Y)\big) + Var\big(E(X \mid Y)\big) &\Rightarrow Var(X) = Var(X) \cdot q + \frac{q}{p} \\ &\Rightarrow Var(X) = \frac{\mathrm{q}}{\mathrm{p}^2}. \end{aligned}$$

Exercice 1.9 Une souris est au centre d'un labyrinthe comportant trois chemins. Un seul de ces chemins mène à un morceau de fromage après deux minutes de marche. Les deux autres chemins reviennent au milieu après trois et cinq minutes de marche respectivement (les trajets sont en demi-cercle et la souris poursuit toujours son chemin droit devant elle). Sous l'hypothèse que la souris est incapable de se rappeler de ne pas prendre le même chemin lorsqu'elle revient, et que les choix de chemins sont faits au hasard avec probabilités égales, déterminer l'espérance et la variance de X, où X est le nombre de minutes nécessaires pour atteindre le fromage.

Soit Y la variable aléatoire représentant le choix du chemin emprunté par la souris au début. Ainsi,

$$Y = \begin{cases} 1 & \text{la souris emprunte le chemin menant au fromage,} \\ 2 & \text{la souris emprunte le chemin revenant au milieu après 3 minutes,} \\ 3 & \text{la souris emprunte le chemin revenant au milieu après 5 minutes.} \end{cases}$$

Ainsi, en conditionnant le calcul d'espérance de X par Y, on obtient

$$\begin{aligned} E(X) &= E\big(E(X \mid Y)\big) \\ &= \sum_{y=1}^{3} E(X \mid Y = y) \cdot P(Y = y) \\ &= E(X \mid Y = 1) \cdot P(Y = 1) + E(X \mid Y = 2) \cdot P(Y = 2) + E(X \mid Y = 3) \cdot P(Y = 3) \\ &= 2 \cdot \frac{1}{3} + \big(3 + E(X)\big) \cdot \frac{1}{3} + \big(5 + E(X)\big) \cdot \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

En résolvant cette équation, on obtient $E(X) = 10$.

Maintenant, en conditionnant le calcul de la variance de X par Y, on obtient

$$Var(X) = E\big(Var(X \mid Y)\big) + Var\big(E(X \mid Y)\big).$$

On a

$$\begin{aligned} E\big(Var(X \mid Y)\big) &= \sum_{y=1}^{3} Var(X \mid Y = y) \cdot P(Y = y) \\ &= 0 \cdot \frac{1}{3} + Var(X) \cdot \frac{1}{3} + Var(X) \cdot \frac{1}{3} \\ &= \frac{2}{3} \cdot Var(X). \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} Var\big(E(X \mid Y)\big) &= \sum_{y=1}^{3} \Big(E(X \mid Y = y) - E\big(E(X \mid Y)\big)\Big)^2 \cdot P(Y = y) \\ &= \sum_{y=1}^{3} \big(E(X \mid Y = y) - E(X)\big)^2 \cdot P(Y = y) \\ &= (2 - 10)^2 \cdot \frac{1}{3} + (13 - 10)^2 \cdot \frac{1}{3} + (15 - 10)^2 \cdot \frac{1}{3} \\ &= \frac{98}{3}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} Var(X) = E\big(Var(X \mid Y)\big) + Var\big(E(X \mid Y)\big) &\Longrightarrow Var(X) = \frac{2}{3} \cdot Var(X) + \frac{98}{3} \\ &\Longrightarrow Var(X) = 98. \end{aligned}$$

Exercice 1.10 (théorème de la variance totale) Soients X et Y deux variables aléatoires. Montrer que

$$Var(X) = E\big(Var(X \mid Y)\big) + Var\big(E(X \mid Y)\big).$$

Cette formule a été démontré à la séance 3 (proposition 1.19).

Exercice 1.11 On choisit au hasard un nombre Y selon une loi uniforme sur l'intervalle $[0,\ 1]$. Ensuite, on choisit un nombre X selon une loi uniforme sur l'intervalle $[Y, 1]$.

a) Déterminer $E(X)$.

b) Déterminer $Var(X)$.

c) Déterminer les fonctions de densité de $Y \mid X = x$ et de X.

a) En conditionnant sur Y on obtient

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_0^1 E(X \mid Y = y) \cdot f_Y(y)\, dy \\ &= \int_0^1 \frac{y+1}{2} \cdot 1\, dy \\ &= \frac{y^2}{4} + \frac{y}{2}\Bigg|_{y=0}^{y=1} \\ &= \frac{3}{4} = 0{,}75. \end{aligned}$$

b) En conditionnant sur Y on obtient

$$\begin{aligned} Var(X) &= E\big(Var(X \mid Y)\big) + Var\big(E(X \mid Y)\big) \\ &= \int_0^1 Var(X \mid Y = y) \cdot f_Y(y)\, dy + \int_0^1 \Big(E(X \mid Y = y) - E\big(E(X \mid Y)\big)\Big)^2 \cdot f_Y(y)\, dy \\ &= \int_0^1 \frac{(1-y)^2}{12} \cdot 1\, dy + \int_0^1 \left(\frac{y+1}{2} - \frac{3}{4}\right)^2 \cdot 1\, dy \\ &= \frac{1}{12}\int_0^1 (1-y)^2\, dy + \frac{1}{16}\int_0^1 (2y-1)^2\, dy \\ &= \frac{1}{12} \cdot \frac{-(1-y)^3}{3}\Bigg|_{y=0}^{y=1} + \frac{1}{16} \cdot \frac{(2y-1)^3}{6}\Bigg|_{y=0}^{y=1} \\ &= \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{16} \cdot \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\right) \\ &= \frac{1}{36} + \frac{1}{48} \\ &= \frac{7}{144} = 0{,}0486. \end{aligned}$$

c)

$$
\begin{aligned}
f_{X,Y}(x,y) &= f_Y(y) \cdot f_{X|Y=y}(x) \\
&= \begin{cases} f_{X|Y=y}(x) & \text{si } y \in [0,1], \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \dfrac{1}{1-y} & \text{si } y \in [0,1] \quad \text{et} \quad x \in [y,\ 1], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}
\end{aligned}
$$

Ainsi, si $x \in [0,\ 1]$,

$$
\begin{aligned}
f_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\, dy \\
&= \int_0^x \frac{1}{1-y}\, dy \\
&= -\ln(1-y)\Big|_{y=0}^{y=x} \\
&= -\ln(1-x)
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
f_{Y|X=x}(x) &= \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} \\
&= \frac{-1}{(1-y)\cdot \ln(1-x)}.
\end{aligned}
$$

Exercice 1.12 Soient $X_1, X_2, \ldots$ une suite de variable aléatoires telles que $E(X_i) = \mu$ pour tout i. Soit N une variable aléatoire à valeurs entières. Supposons que les variables $N, X_1, X_2, \ldots$ soient mutuellement indépendantes. Montrer que

$$E\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right) = E(N) \cdot \mu.$$

C'est l'**identité de Wald**, du nom du mathématicien hongrois Abraham Wald (1902–1950).

En conditionnant sur N on obtient

$$\begin{aligned}
E\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right) &= \sum_n E\left(\sum_{i=1}^{N} X_i \mid N = n\right) \cdot P(N = n) \\
&= \sum_n \sum_{i=1}^{n} E(X_i \mid N = n) \cdot P(N = n) \\
&= \sum_n \sum_{i=1}^{n} E(X_i) \cdot P(N = n) \quad \text{(car } X_i \text{ et } N \text{ sont indépendantes)} \\
&= \sum_n \sum_{i=1}^{n} \mu \cdot P(N = n) \\
&= \mu \sum_n n \cdot P(N = n) \\
&= \mu \cdot E(N) \\
&= E(X_i) \cdot E(N).
\end{aligned}$$

Exercice 1.13 Soient $X_1, X_2, \ldots$ une suite de variable aléatoires telles que $E(X_i) = \mu$ et $Var(X_i) = \sigma^2$ pour tout i. Soit N une variable aléatoire à valeurs entières. Supposons que les variables $N, X_1, X_2, \ldots$ soient mutuellement indépendantes. Montrer que

$$Var\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right) = E(N) \cdot \sigma^2 + \mu^2 \cdot Var(N).$$

Directement,

$$\begin{aligned}
E\left(Var\left(\sum_{i=1}^{N} X_i \mid N\right)\right) &= \sum_{n=1}^{\infty} Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \mid N = n\right) \cdot P(N = n) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} Var(X_i \mid N = n) \cdot P(N = n) \quad \text{(car les } X_i \text{ sont indépendantes)} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) \cdot P(N = n) \quad \text{(car } X_i \text{ et } N \text{ sont indépendantes)} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} \sigma^2 \cdot P(N = n) \\
&= \sigma^2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot P(N = n) \\
&= \sigma^2 \cdot E(N).
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
Var\left(E\left(\sum_{i=1}^{N} X_i \mid N\right)\right) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \mid N = n\right) - E\left(E\left(\sum_{i=1}^{N} X_i \mid N\right)\right)\right)^2 \cdot P(N = n) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(\sum_{i=1}^{n} E(X_i \mid N = n)\right) - E\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right)\right)^2 \cdot P(N = n) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(\sum_{i=1}^{n} E(X_i)\right) - E(N) \cdot \mu\right)^2 \cdot P(N = n) \quad (X_i \text{ et } N \text{ sont ind. ; Wald}) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(\sum_{i=1}^{n} \mu\right) - E(N) \cdot \mu\right)^2 \cdot P(N = n) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (n \cdot \mu - E(N) \cdot \mu)^2 \cdot P(N = n) \\
&= \mu^2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \big(n - E(N)\big)^2 \cdot P(N = n) \\
&= \mu^2 \cdot Var(N).
\end{aligned}$$

Ainsi, en conditionnant sur N, on obtient

$$\begin{aligned} Var\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right) &= E\left(Var\left(\sum_{i=1}^{N} X_i \mid N\right)\right) + Var\left(E\left(\sum_{i=1}^{N} X_i \mid N\right)\right) \\ &= \sigma^2 \cdot E(N) + \mu^2 \cdot Var(N) \\ &= Var(X_i) \cdot E(N) + \left(E(X_i)\right)^2 \cdot Var(N) \end{aligned}$$

Exercice 1.14 Le nombre de retraits bancaires durant une heure à un guichet automatique suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 120$. Sachant que les montants retirés sont des variables aléatoires indépendantes d'espérance 55 \$ et de variance 900 $\$^2$, déterminer le montant total moyen retiré en une heure à ce guichet automatique et la variance de ce montant total.

Soit N le nombre de retraits bancaires effectué en une heure et soit X_i le montant du retrait i. Selon l'énoncé du problème,

$$E(N) = 120, \qquad E(X_i) = 55,$$
$$Var(N) = 120, \quad Var(X_i) = 900.$$

Ainsi, selon l'identité de Wald,

$$\begin{aligned} E\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right) &= E(N) \cdot E(X_i) \\ &= 120 \cdot 55 \\ &= 6\,600 \text{ \$}. \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} Var\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right) &= E(N) \cdot Var(X_i) + \big(E(X_i)\big)^2 \cdot Var(N) \\ &= 120 \cdot 900 + 55^2 \cdot 120 \\ &= 471\,000 \text{ \$}^2. \end{aligned}$$

Exercice 1.15 La loi de probabilité conjointe de X et Y est donnée par

	$p_{X,Y}(x,y)$	Y = 1	2	3
	1	$1/12$	$1/12$	0
X	2	$1/2$	0	$1/10$
	3	$1/10$	$1/10$	$1/30$

Calculer $E(X \mid Y = i)$ pour $i \in \{1,\ 2,\ 3\}$.

Directement,

$$\begin{aligned}
E(X \mid Y = 1) &= \sum_{i=1}^{3} x \cdot P(X = x \mid Y = 1) \\
&= \sum_{i=1}^{3} x \cdot \frac{P(X = x, Y = 1)}{P(Y = 1)} \\
&= \frac{1}{P(Y = 1)} \sum_{i=1}^{3} x \cdot P(X = x, Y = 1) \\
&= \frac{1}{\frac{1}{12} + \frac{1}{2} + \frac{1}{10}} \cdot \left(1 \cdot \frac{1}{12} + 2 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{10}\right) \\
&= \frac{60}{41} \cdot \frac{83}{60} \\
&= \frac{83}{41} = 2{,}0244.
\end{aligned}$$

En procédant de la même façon, on obtient

$$\begin{aligned}
E(X \mid Y = 2) &= \frac{1}{\frac{1}{12} + 0 + \frac{1}{10}} \cdot \left(1 \cdot \frac{1}{12} + 2 \cdot 0 + 3 \cdot \frac{1}{10}\right) \\
&= \frac{60}{11} \cdot \frac{23}{60} \\
&= \frac{23}{11} = 2{,}0909
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
E(X \mid Y = 3) &= \frac{1}{0 + \frac{1}{10} + \frac{1}{30}} \cdot \left(1 \cdot 0 + 2 \cdot \frac{1}{10} + 3 \cdot \frac{1}{30}\right) \\
&= \frac{30}{4} \cdot \frac{9}{30} \\
&= \frac{9}{4} = 2{,}25.
\end{aligned}$$

Exercice 1.16 Un dé équilibré est lancé successivement. Soit X et Y représentant, respectivement, le nombre de lancés nécessaire pour obtenir un six et un cinq.

a) Trouver $E(X)$.

b) Trouver $E(X \mid Y = 1)$.

c) Trouver $E(X \mid Y = 5)$.

a) Puisque $X \sim \text{Geom}(1/6)$, alors $E(X) = 6$.

b) On remarque que

$$P(X = 1 \mid Y = 1) = 0$$

et, pour $x \geq 2$,

$$\begin{aligned} P(X = x \mid Y = 1) &= \frac{P(X = x, Y = 1)}{P(Y = 1)} \\ &= \frac{(1/6) \cdot (5/6)^{x-2} \cdot (1/6)}{1/6} \\ &= (5/6)^{x-2} \cdot (1/6). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} E(X \mid Y = 1) &= \sum_{x=1}^{\infty} x \cdot P(X = x \mid Y = 1) \\ &= \sum_{x=2}^{\infty} x \cdot (5/6)^{x-2} \cdot (1/6) \\ &= \frac{1}{5/6} \cdot \sum_{x=2}^{\infty} x \cdot (5/6)^{x-1} \cdot (1/6) \\ &= \frac{6}{5} \cdot \left(-1 \cdot (5/6)^{1-1} \cdot (1/6) + \sum_{x=1}^{\infty} x \cdot (5/6)^{x-1} \cdot (1/6) \right) \\ &= \frac{6}{5} \cdot \left(-\frac{1}{6} + \mathrm{E}(X) \right) \\ &= \frac{6}{5} \cdot \left(-\frac{1}{6} + 6 \right) \\ &= \frac{6}{5} \cdot \left(\frac{35}{6} \right) \\ &= 7. \end{aligned}$$

c) On remarque que

$$P(X = x \mid Y = 5) = \begin{cases} (4/5)^{x-1} \cdot (1/5) & \text{si } x \in \{1, \dots, 4\}, \\ 0 & \text{si } x = 5, \\ (4/5)^4 \cdot (5/6)^{x-6} \cdot (1/6) & \text{si } x > 5. \end{cases}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} E(X \mid Y = 5) &= \sum_{x=1}^{\infty} x \cdot P(X = x \mid Y = 5) \\ &= \sum_{x=1}^{4} x \cdot (4/5)^{x-1} \cdot (1/5) + 0 + \sum_{x=6}^{\infty} x \cdot (4/5)^4 \cdot (5/6)^{x-6} \cdot (1/6). \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned} \sum_{x=1}^{4} x \cdot (4/5)^{x-1} \cdot (1/5) &= \frac{1}{5} \cdot \left(1 \cdot 1 + 2 \cdot \frac{4}{5} + 3 \cdot \frac{4^2}{5^2} + 4 \cdot \frac{4^3}{5^3}\right) \\ &= \frac{1}{5} \cdot \left(1 + \frac{8}{5} + \frac{48}{25} + \frac{256}{125}\right) \\ &= \frac{821}{625}. \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \sum_{x=6}^{\infty} x \cdot (4/5)^4 \cdot (5/6)^{x-6} \cdot (1/6) &= \left(\frac{4}{5}\right)^4 \cdot \left(\frac{6}{5}\right)^5 \cdot \sum_{x=6}^{\infty} x \cdot (5/6)^{x-1} \cdot (1/6) \\ &= \left(\frac{4}{5}\right)^4 \cdot \left(\frac{6}{5}\right)^5 \cdot \left(-\sum_{x=1}^{5} x \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{x-1} \cdot \frac{1}{6} + \sum_{x=1}^{\infty} x \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{x-1} \cdot \frac{1}{6}\right) \\ &= \left(\frac{4}{5}\right)^4 \cdot \left(\frac{6}{5}\right)^5 \cdot \left(-\frac{12281}{7776} + \mathrm{E}(X)\right) \\ &= \left(\frac{4}{5}\right)^4 \cdot \left(\frac{6}{5}\right)^5 \cdot \left(-\frac{12281}{7776} + 6\right) \\ &= \frac{2816}{625}. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} E(X \mid Y = 5) &= \frac{821}{625} + \frac{2816}{625} \\ &= \frac{3637}{625} = 5{,}8192. \end{aligned}$$

Exercice 1.17 La fonction de densité conjointe de X et Y est

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{e^{-y}(y^2 - x^2)}{8} & \text{si } 0 < y < \infty \quad \text{et} \quad -y \leq x \leq y, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que $E(X \mid Y = y) = 0$.

Cet exercice se retrouve dans le devoir 1.

Exercice 1.18 Montrer que si X et Y sont continues, alors

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} E(X \mid Y = y) \cdot f_Y(y)\, dy.$$

Directement,

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} E(X \mid Y = y) \cdot f_Y(y)\, dy &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_{X|Y=y}(x)\, dx \right) \cdot f_Y(y)\, dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} f_{X|Y=y}(x) \cdot f_Y(y)\, dy \right) dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y)\, dy \right) dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x)\, dx \\
&= E(X).
\end{aligned}$$

Exercice 1.19 Un parieur remporte chaque partie avec une probabilité p. Dans les deux cas suivants, déterminer le nombre moyen de victoires.

a) Le parieur jouera n parties. S'il remporte X de ces parties, alors il jouera X parties additionnelles avant d'arrêter.

b) Le parieur jouera jusqu'à ce qu'il remporte une partie. Si ça lui prend Y parties pour obtenir cette victoire, alors il jouera Y parties additionnelles avant d'arrêter.

a) Soit Z le nombre total de victoire, X le nombre de victoires dans les n premières parties et W le nombre de victoires dans les parties additionnelles. Puisque $Z = X + W$, alors $E(Z) = E(X) + E(W)$.

D'une part, on a $X \sim \mathrm{Bin}(n, p)$, d'où $E(X) = np$.

D'autre part, on a $W \sim \mathrm{Bin}(X, p)$. Ainsi, en conditionnant le calcul d'espérance de W sur X on obtient

$$\begin{aligned} E(W) &= \sum_{x=0}^{n} E(W \mid X = x) \cdot P(X = x) \\ &= \sum_{x=0}^{n} xp \cdot P(X = x) \\ &= p \cdot \sum_{x=0}^{n} x \cdot P(X = x) \\ &= p \cdot E(X) \\ &= np^2. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} E(Z) &= E(X) + E(W) \\ &= np + np^2 \\ &= np(1 + p). \end{aligned}$$

b) Soit Z le nombre total de victoire et W le nombre de victoires dans les parties additionnelles. Puisque $Z = 1 + W$, alors $E(Z) = 1 + E(W)$.

D'une part, on a $Y \sim \mathrm{Geom}(p)$, d'où $E(Y) = 1/p$.

D'autre part, on note que $W \sim \mathrm{Bin}(Y, p)$ En conditionnant le calcul d'espérance de W sur Y on obtient

$$\begin{aligned} E(W) &= \sum_{y=1}^{\infty} E(W \mid Y = y) \cdot P(Y = y) \\ &= \sum_{y=1}^{\infty} yp \cdot P(Y = y) \\ &= p \sum_{y=1}^{\infty} y \cdot P(Y = y) \\ &= \mathrm{p} \cdot E(Y) \\ &= p \cdot \frac{1}{p} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} E(Z) &= 1 + E(W) \\ &= 1 + 1 \\ &= 2. \end{aligned}$$

Exercice 1.20 Chaque élément d'une suite de données binaires est soit 1 avec une probabilité p ou 0 avec une probabilité $1-p$. Une sous-suite maximale de données consécutives ayant la même valeur est appelée une série. Par exemple, pour la suite 1, 1, 0, 1, 1, 1, 0, la première série est de longueur 2, la deuxième est de longueur 1, la troisième est de longueur 3 et la quatrième est de longueur 1.

a) Trouver la longueur moyenne de la première série.

b) Trouver la longueur moyenne de la deuxième série.

a) Soit X la longueur de la première série et

$$Y = \begin{cases} 1 & \text{si le premier élément de la suite est 1,} \\ 0 & \text{si le premier élément de la suite est 0.} \end{cases}$$

On note que

$$X \mid Y = 0 \sim \text{Geom}(p) \quad \text{et} \quad X \mid Y = 1 \sim \text{Geom}(1-p)$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} E(X) &= E(X \mid Y = 0) \cdot P(Y = 0) + E(X \mid Y = 1) \cdot P(Y = 1) \\ &= \frac{1}{\mathrm{p}} \cdot (1-p) + \frac{1}{1-p} \cdot p. \end{aligned}$$

b) Soit X la longueur de la deuxième série et

$$Y = \begin{cases} 1 & \text{si le premier élément de la deuxième série est 1,} \\ 0 & \text{si le premier élément de la deuxième série est 0.} \end{cases}$$

On note que

$$X \mid Y = 0 \sim \text{Geom}(p) \quad \text{et} \quad X \mid Y = 1 \sim \text{Geom}(1-p)$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} E(X) &= E(X \mid Y = 0) \cdot P(Y = 0) + E(X \mid Y = 1) \cdot P(Y = 1) \\ &= \frac{1}{\mathrm{p}} \cdot p + \frac{1}{1-p} \cdot (1-p) \\ &= 2. \end{aligned}$$

Exercice 1.21 Alice et Bob jouent une série de parties, au cours de laquelle Alice a une probabilité p de remporter chaque partie. Le gagnant est le premier joueur à remporter deux parties de plus que son adversaire.

a) Trouver la probabilité que Alice soit la vainqueur.

b) Trouver le nombre moyen de parties jouées.

a) Soit E : « Alice est la gagnante » et

$$Y = \begin{cases} 2 & \text{Alice remporte les deux premières parties,} \\ 1 & \text{Alice remporte une des deux premières parties,} \\ 0 & \text{Alice perd les deux premières parties.} \end{cases}$$

Alors

$$\begin{aligned} P(E) &= P(E \mid Y=0) \cdot P(Y=0) + P(E \mid Y=1) \cdot P(Y=1) + P(E \mid Y=2) \cdot P(Y=2) \\ &= 0 \cdot (1-p)^2 + P(E) \cdot 2pq + 1 \cdot p^2. \end{aligned}$$

En solutionnant cette équation on obtient

$$\begin{aligned} P(E) &= \frac{p^2}{1-2pq} \\ &= \frac{p^2}{p^2+(1-p)^2}. \end{aligned}$$

b) Soit X représentant le nombre de parties jouées et

$$Y = \begin{cases} 1 & \text{Alice ou Bob remportent les deux premières parties,} \\ 0 & \text{Alice et Bob remporte une des deux premières parties.} \end{cases}$$

Alors

$$\begin{aligned} E(X) &= E(X \mid Y=0) \cdot P(Y=0) + E(X \mid Y=1) \cdot P(Y=1) \\ &= \big(2 + E(X)\big) \cdot 2\mathrm{pq} + 2 \cdot (1 - 2\mathrm{pq}) \\ &= 2 + E(X) \cdot 2pq. \end{aligned}$$

En solutionnant cette équation on obtient

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{2}{1-2pq} \\ &= \frac{2}{p^2+(1-p)^2}. \end{aligned}$$

Exercice 1.22 Une étude démontre que les jours de pluie, le nombre d'accidents de la route à Sherbrooke suit une loi de Poisson de moyenne 6, alors qu'il suit une loi de Poisson de moyenne 2 les autres jours. Les prévisions météorologiques nous indiquent que la probabilité d'avoir de la pluie demain est de 60 %. Posons X le nombre d'accidents de la route qui se produiront demain.

a) Calculer $E(X)$.

b) Calculer $p_X(0)$.

c) Calculer $Var(X)$.

Soit

$$Y = \begin{cases} 1 & \text{s'il pleut demain,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On a

$$X \mid Y = 0 \sim \text{Poisson}(2) \quad et \quad X \mid Y = 1 \sim \text{Poisson}(6).$$

a) Directement,

$$\begin{aligned} E(X) &= E(X \mid Y = 0) \cdot P(Y = 0) + E(X \mid Y = 1) \cdot P(Y = 1) \\ &= 2 \cdot 0{,}4 + 6 \cdot 0{,}6 \\ &= 4{,}4 \text{ accidents.} \end{aligned}$$

b) Directement,

$$\begin{aligned} P(X = 0) &= P(X = 0 \mid Y = 0) \cdot P(Y = 0) + P(X = 0 \mid Y = 1) \cdot P(Y = 1) \\ &= \mathrm{e}^{-2} \cdot 0{,}4 + \mathrm{e}^{-6} \cdot 0{,}6 \\ &= 0{,}0556. \end{aligned}$$

c) On a

$$\begin{aligned} E\big(Var(X \mid Y)\big) &= Var(X \mid Y = 0) \cdot P(Y = 0) + Var(X \mid Y = 1) \cdot P(Y = 1) \\ &= 2 \cdot 0{,}4 + 6 \cdot 0{,}6 \\ &= 4{,}4. \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} Var\big(E(X \mid Y)\big) &= \big(E(X \mid Y = 0) - E(X)\big)^2 \cdot P(Y = 0) + \big(E(X \mid Y = 1) - E(X)\big)^2 \cdot P(Y = 1) \\ &= (2 - 4{,}4)^2 \cdot 0{,}4 + (6 - 4{,}4)^2 \cdot 0{,}6 \\ &= 2{,}304 + 1{,}536 \\ &= 3{,}84. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} Var(X) &= E\big(Var(X \mid Y)\big) + Var\big(E(X \mid Y)\big) \\ &= 4{,}4 + 3{,}84 = 8{,}24. \end{aligned}$$

Exercice 1.23 Albert et Bob s'affrontent à la finale de tennis du US Open. Albert remporte chaque échange avec une probabilité p lorsqu'il effectue le service, et avec une probabilité q lorsque c'est son adversaire qui effectue le service. Si Albert a le service lors du premier échange, quelle est la probabilité qu'il remporte le tournoi ?

Bonne chance !
(voir question bonus du devoir 1)

Exercice 1.24 Soient X et Y deux variables discrètes indépendantes. Démontrer que

$$E(X \mid Y = y) = E(X)$$

pour tout y.

Directement,

$$\begin{aligned} E(X \mid Y = y) &= \sum_x x \cdot P(X = x \mid Y = y) \\ &= \sum_x x \cdot P(X = x) \quad \text{(car } X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes)} \\ &= E(X). \end{aligned}$$

Exercice 1.25 Une souris est au centre d'un labyrinthe comportant $n+1$ chemins. Un seul de ces chemins, le chemin $n+1$, mène à un morceau de fromage après a_{n+1} minutes de marche. Les chemins 1 à n reviennent au centre du labyrinthe après respectivement $a_1, \ldots, a_n$ minutes de marche (les trajets sont en demi-cercle et la souris poursuit toujours son chemin droit devant elle). Sous l'hypothèse que la souris est incapable de se rappeler de ne pas prendre le même chemin lorsqu'elle revient au centre du labyrinthe, et que les choix de chemins sont faits au hasard avec probabilités égales, déterminer l'espérance de X, où X est le nombre de minutes nécessaires pour atteindre le fromage.

Soit Y le numéro du chemin emprunté par la souris. En conditionnant le calcul de l'espérance de X par Y, on obtient

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{y=1}^{n+1} E(X \mid y = y) \cdot P(Y = y) \\ &= \sum_{y=1}^{n+1} E(X \mid y = y) \cdot \frac{1}{n+1} \\ &= \frac{1}{n+1} \cdot \left(\left(\sum_{y=1}^{n} E(X \mid y = y) \right) + E(X \mid Y = n+1) \right) \\ &= \frac{1}{n+1} \cdot \left(\left(\sum_{y=1}^{n} \left(a_y + E(X) \right) \right) + a_{n+1} \right) \\ &= \frac{1}{n+1} \cdot \left(n \cdot E(X) + \sum_{y=1}^{n+1} a_y \right) \\ &= \frac{n}{n+1} \cdot E(X) + \frac{1}{n+1} \cdot \sum_{y=1}^{n+1} a_y. \end{aligned}$$

En isolant $E(X)$ on obtient

$$E(X) = \sum_{y=1}^{n+1} a_i.$$

Exercice 1.26 Le nombre d'orages se produisant au cours du prochain mois, noté X, est distribué selon une loi de Poisson ayant comme paramètre une valeur uniformément distribuée sur l'intervalle $[0,\ 3]$. Autrement dit, λ suit une loi uniforme sur $[0,\ 3]$, et X suit une loi de Poisson de paramètre λ. Calculer la probabilité qu'il n'y ait aucun orage au cours du prochain mois.

Selon l'énoncé, $\lambda \sim \text{Unif}(0,\ 3)$ et $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$. En conditionnant le calcul de $P(X = 0)$ sur λ, on obtient

$$\begin{aligned}
P(X = 0) &= \int_{-\infty}^{\infty} P(X = 0 \mid \lambda = t) \cdot f_\lambda(t)\, dt \\
&= \int_0^3 \frac{t^0 e^{-t}}{0!} \cdot \frac{1}{3}\, dt \\
&= \frac{1}{3} \cdot \int_0^3 e^{-t}\, dt \\
&= \frac{1}{3} \cdot \left(-e^{-t}\big|_{t=0}^{t=3}\right) \\
&= \frac{1 - e^{-3}}{3} \\
&= 0{,}3167.
\end{aligned}$$

Exercice 1.27 Un pion est promené au hasard sur les 12 cases d'un échiquier 3×4. Les cases sont numérotées selon l'illustration ci-dessous.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12

Au temps 0, le pion est sur la case 1. Puis, à chaque unité de temps, le pion est déplacé au hasard vers une des 2, 3 ou 4 cases voisines de celle où il était placé (avec des probabilités égales : 1/2, 1/3 ou 1/4 selon le cas). Les mouvements diagonaux sont interdits. Évaluez la probabilité que la case 4 soit visitée avant la case 12.

Soit A_i l'évènement représentant le fait d'atteindre la case 4 avant la case 12 si le pion est sur la case i. Alors

$$P(A_1) = 1 \quad \text{et} \quad P(A_{12}) = 0.$$

Également, par symétrie,

$$P(A_5) = P(A_6) = P(A_7) = P(A_8) = 1/2.$$

Maintenant, en conditionnant sur le premier déplacement, on obtient les équations

$$\begin{cases} P(A_1) = P(A_2) \cdot \dfrac{1}{2} + P(A_5) \cdot \dfrac{1}{2} = P(A_2) \cdot \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4}, \\ P(A_2) = P(A_1) \cdot \dfrac{1}{3} + P(A_3) \cdot \dfrac{1}{3} + P(A_6) \cdot \dfrac{1}{3} = P(A_1) \cdot \dfrac{1}{3} + P(A_3) \cdot \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{6}, \\ P(A_3) = P(A_2) \cdot \dfrac{1}{3} + P(A_4) \cdot \dfrac{1}{3} + P(A_7) \cdot \dfrac{1}{3} = P(A_2) \cdot \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

En solutionnant ce système on obtient

$$P(A_1) = \frac{7}{13} = 0{,}5385.$$