Devoir 2

Solutions

Question 1 (2 + 2 + 4 + 2 + 4 = 14 points)
Considérer trois boîte: une rouge, une verte et une bleue. Chaque boîte contient des balles de différentes couleurs selon la distribution suivante:

— boîte rouge : 1 rouges, 2 vertes et 3 bleues,
— boîte verte : 3 rouges, 2 vertes et 2 bleues,
— boîte bleue : 4 rouges, 5 vertes et 2 bleues.

À l'étape initiale (étape 0), une balle de la boîte rouge est sélectionnée aléatoirement, puis est replacée dans cette boîte. À chaque étape ultérieure (étape $n+1$), une balle est sélectionnée aléatoirement dans la boîte de la couleur de la balle choisie à l'étape précédente (étape n), puis est replacée dans cette même boîte.
Soit X_n représentant la couleur de la balle choisie à l'étape n.

Pour la chaîne de Markov $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, les états 0, 1 et 2 vont représenter respectivement les couleurs rouges, vertes et bleues.

a) Expliquer pourquoi $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov.
Il s'agit d'une chaîne de Markov car la prédiction des états futurs du système ne dépend que du présent. En effet, pour calculer les probabilités d'avoir une balle de couleur i à l'étape $n+1$, la connaissance de la balle pigée à l'étape n est suffisante car la couleur de cette balle détermine la boîte dans laquelle on pigera la balle à l'étape $n+1$. La connaissance de la couleur des balles pigées aux étapes précédentes ne modifiera pas cette probabilité.

b) Trouver la matrice de transition P de $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.
La matrice de transition est

$$P = \begin{bmatrix} 1/6 & 2/6 & 3/6 \\ 3/7 & 2/7 & 2/7 \\ 4/11 & 5/11 & 2/11 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0{,}1667 & 0{,}3333 & 0{,}5000 \\ 0{,}4286 & 0{,}2857 & 0{,}2857 \\ 0{,}3636 & 0{,}4545 & 0{,}1818 \end{bmatrix}.$$

c) Quelle est la probabilité de sélectionner une balle verte à la quatrième étape ?

En conditionnant le calcul de probabilité sur la couleur de la balle sélectionnée à l'étape initiale, on obtient

$$\begin{aligned} P(X_4 = 1) &= \sum_{i=0}^{2} P(X_4 = 1 \mid X_0 = i) \cdot P(X_0 = i) \\ &= p_{0,1}^{(4)} \cdot \frac{1}{6} + p_{1,1}^{(4)} \cdot \frac{2}{6} + p_{2,1}^{(4)} \cdot \frac{3}{6}. \end{aligned}$$

Or,

$$P^{(4)} = P^4 = \begin{bmatrix} 0{,}3234 & 0{,}3571 & 0{,}3193 \\ 0{,}3223 & 0{,}3542 & 0{,}3234 \\ 0{,}3235 & 0{,}3549 & 0{,}3216 \end{bmatrix}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} P(X_4 = 1) &= 0{,}3571 \cdot \frac{1}{6} + 0{,}3542 \cdot \frac{2}{6} + 0{,}3549 \cdot \frac{3}{6} \\ &= 0{,}3550. \end{aligned}$$

d) Si une balle bleue a été sélectionnée à la troisième étape, quelle est la probabilité de sélectionner une balle rouge à la huitième étape ?

Puisque la chaîne de Markov est homogène,

$$\begin{aligned} P(X_8 = 0 \mid X_3 = 2) &= P(X_5 = 0 \mid X_0 = 2) \\ &= p_{2,0}^{(5)}. \end{aligned}$$

Or,

$$P^{(5)} = P^5 = \begin{bmatrix} 0{,}3231 & 0{,}3550 & 0{,}3218 \\ 0{,}3232 & 0{,}3557 & 0{,}3212 \\ 0{,}3230 & 0{,}3554 & 0{,}3216 \end{bmatrix}.$$

Ainsi, $P(X_8 = 0 \mid X_3 = 2) = 0{,}3218$.

e) Sur le long terme, quelle proportion des balles sélectionnées sont rouges ? Quelle proportion sont vertes ? Quelle proportion sont bleues ?

Solution 1

Puisque la chaîne de Markov est irréductible et que tous ses états sont ergodiques, alors une distribution stationnaire existe, et est l'unique solution non négative du système d'équations

$$\pi_j = \sum_{i \in E} \pi_i p_{i,j} \text{ pour tout } j, \quad \sum_{j \in E} \pi_j = 1.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \pi_0 &= \frac{1}{6}\pi_0 + \frac{3}{7}\pi_1 + \frac{4}{11}\pi_2 \\ \pi_1 &= \frac{2}{6}\pi_0 + \frac{2}{7}\pi_1 + \frac{5}{11}\pi_2 \\ \pi_2 &= \frac{3}{6}\pi_0 + \frac{2}{7}\pi_1 + \frac{2}{11}\pi_2 \\ \pi_0 &+ \pi_1 + \pi_2 = 1 \end{aligned}$$

En solutionnant ce système, on obtient

$$\begin{bmatrix} \pi_0 \\ \pi_1 \\ \pi_2 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0{,}3231 \\ 0{,}3554 \\ 0{,}3215 \end{bmatrix}.$$

Solution 2

On remarque que $P = ADA^{-1}$, avec

$$A = \begin{bmatrix} 0{,}5774 & 0{,}7264 & 0{,}7264 \\ 0{,}5774 & -0{,}5062 - 0{,}2902i & -0{,}5062 + 0{,}2902i \\ 0{,}5774 & -0{,}1704 + 0{,}3207i & -0{,}1704 - 0{,}3207i \end{bmatrix}.$$

et

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0{,}1829 - 0{,}0876i & 0 \\ 0 & 0 & -0{,}1829 - 0{,}0876i \end{bmatrix}.$$

De plus,

$$\lim_{n\to\infty} D^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} P^{(n)} &= \lim_{n\to\infty} P^n \\ &= \lim_{n\to\infty} (ADA^{-1})^n \\ &= \lim_{n\to\infty} AD^nA^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 0{,}3231 & 0{,}3554 & 0{,}3215 \\ 0{,}3231 & 0{,}3554 & 0{,}3215 \\ 0{,}3231 & 0{,}3554 & 0{,}3215 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Par conséquent, les proportions des balles rouges, vertes et bleues sélectionnées sont respectivement 0,3231, 0,3554 et 0,3215.

Question 2 (4 + 6 = 10 points)

Considérer la chaîne de Markov $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ayant pour espace d'états $E = \{0, 1, 2, 3\}$ et pour matrice de transition

$$P = \begin{bmatrix} 0{,}25 & 0{,}25 & 0{,}25 & 0{,}25 \\ 0{,}40 & 0{,}50 & 0 & 0{,}10 \\ 0 & 0 & 0{,}60 & 0{,}40 \\ 0 & 0 & 0{,}50 & 0{,}50 \end{bmatrix}.$$

a) Pour chaque état de cette chaîne de Markov, déterminer s'il est récurrent ou transitoire.

Puisque $p_{2,3} = 0{,}4 > 0$ et $p_{3,2} = 0{,}5 > 0$, alors $2 \leftrightarrow 3$. Ainsi, les états 2 et 3 font ainsi partis de la même classe d'équivalence pour la relation $\leftrightarrow$. De plus, aucun autre état n'est accessible depuis cet ensemble d'états. Par conséquent, ils forment une classe d'équivalence.

On observe que

$$\begin{aligned} f_2 &= 0{,}6 + \sum_{k=1}^{\infty} 0{,}4 \cdot 0{,}5^k \\ &= 0{,}6 + 0{,}4 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} 0{,}5^k \\ &= 0{,}6 + 0{,}4 \cdot 1 \\ &= 1. \end{aligned}$$

Ainsi, par définition, l'état 2 est récurrent, et par la proposition 2.29, l'état 3 l'est également.

Les états 0 et 1 font partis de la même classe d'équivalence car $p_{0,1} = 0{,}25 > 0$ et $p_{1,0} = 0{,}4 > 0$, d'où $0 \leftrightarrow 1$. On remarque que l'état 2 est accessible depuis l'état 0 car $p_{0,2} = 0{,}25 > 0$. Or, l'état 2 est récurrent et ne fait pas parti de la même classe d'équivalence que l'état 0. Par conséquent, l'état 0 est transitoire. Par la proposition 2.29, on en déduit que l'état 1 est également transitoire.

b) Sachant que

$$P(X_0 = 0) = \frac{1}{2}, \quad P(X_0 = 1) = \frac{1}{3}, \quad P(X_0 = 2) = \frac{1}{12}, \quad P(X_0 = 3) = \frac{1}{12},$$

calculer $E(X_5)$.

Par définition,

$$E(X_5) = \sum_{x=0}^{3} x \cdot P(X_5 = x).$$

Pour obtenir la loi de probabilité de X_5, nous allons conditionner le calcul de probabilité sur l'état initial de la chaîne de Markov.

$$\begin{aligned} P(X_5 = x) &= \sum_{y=0}^{3} P(X_5 = x \mid X_0 = y) \cdot P(X_0 = y) \\ &= \sum_{y=0}^{3} p_{y,x}^{(5)} \cdot P(X_0 = y) \\ &= p_{0,x}^{(5)} \cdot \frac{1}{2} + p_{1,x}^{(5)} \cdot \frac{1}{3} + p_{2,x}^{(5)} \cdot \frac{1}{12} + p_{3,x}^{(5)} \cdot \frac{1}{12}. \end{aligned}$$

Pour poursuivre ce calcul, nous avons besoin de connaître la matrice de 5-transitions de la chaîne de Markov.

$$P^{(5)} = P^5 = \begin{bmatrix} 0{,}0591 & 0{,}0687 & 0{,}4757 & 0{,}3965 \\ 0{,}1099 & 0{,}1278 & 0{,}4070 & 0{,}3553 \\ 0 & 0 & 0{,}5556 & 0{,}4444 \\ 0 & 0 & 0{,}5555 & 0{,}4445 \end{bmatrix}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} P(X_5 = 0) &= p_{0,0}^{(5)} \cdot \frac{1}{2} + p_{1,0}^{(5)} \cdot \frac{1}{3} + p_{2,0}^{(5)} \cdot \frac{1}{12} + p_{3,0}^{(5)} \cdot \frac{1}{12} \\ &= 0{,}0591 \cdot \frac{1}{2} + 0{,}1099 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{12} + 0 \cdot \frac{1}{12} \\ &= 0{,}0662. \end{aligned}$$

En procédant de façon similaire, nous obtenons

$$P(X_5 = 1) = 0{,}0770, \quad P(X_5 = 2) = 0{,}4661, \quad P(X_5 = 3) = 0{,}3908.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} E(X_5) &= 0 \cdot 0{,}0662 + 1 \cdot 0{,}0770 + 2 \cdot 0{,}4661 + 3 \cdot 0{,}3908 \\ &= 2{,}1814. \end{aligned}$$

Question 3 (8 points)

Soient i et j deux états de la chaîne de Markov $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Montrer que si i est récurrent et si i ne communique pas avec j, alors $P_{i,j} = 0$.

[Démonstration par l’absurde] Supposons au contraire que $p_{i,j} > 0$. Cela implique que l'état j est accessible depuis l'état i. Puisque l'état i ne communique pas avec l'état j et que $i \rightarrow j$, alors l'état i n'est pas accessible depuis l'état j. Or, cela signifie qu'un processus commençant à l'état i a une probabilité non nulle d'au moins $p_{i,j}$ de ne jamais retourner à l'état i, ce qui contredit la récurrence de i. Il était donc absurde de supposer $p_{i,j} > 0$. Par conséquent, $p_{i,j} = 0$.

Question 4 (4 + 4 + 4 = 12 points)

Pour chacune des affirmations suivantes, déterminer si elle est vraie ou fausse, avec justification complète.

a) Toute chaîne de Markov a au moins un état récurrent.

L’affirmation est fausse. Considérons la chaîne de Markov $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ayant pour ensemble d'états $E = \mathbb{Z}$ et pour probabilité de transition $p_{i,i+1} = 1$ pour tout $i \in E$. Le diagramme de transition de cette chaîne de Markov est

$$\cdots \xrightarrow{\quad 1 \quad} (-1) \xrightarrow{\quad 1 \quad} (0) \xrightarrow{\quad 1 \quad} (1) \xrightarrow{\quad 1 \quad} (2) \xrightarrow{\quad 1 \quad} \cdots$$

Cette chaîne de Markov n'a aucun état récurrent. En effet, on remarque que

$$p_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i+1, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

et

$$p_{i,j}^{(n)} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i+n, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Entre autres, pour tout état $i \in E$, $p_{i,i}^{(n)} = 0$ lorsque $n \geq 1$. Ainsi,

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{i,i}^{(n)} = 1 < \infty.$$

Par conséquent, selon la proposition 2.28, l'état i est transitoire.

b) Toute chaîne de Markov a au moins un état transitoire.

L’affirmation est fausse. Considérons la chaîne de Markov $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ayant pour ensemble d'états $E = \{0\}$ et pour probabilité de transition $p_{0,0} = 1$. Le diagramme de transition de cette chaîne de Markov est

$$\begin{tikzcd} (0) \arrow[loop above, "1"] \end{tikzcd}$$

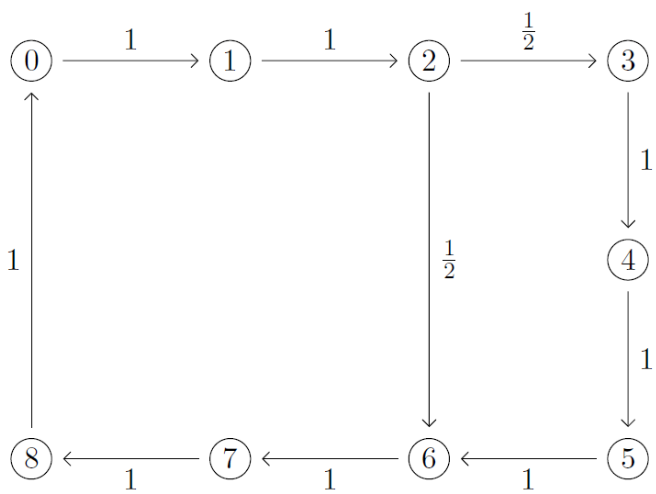
Cette chaîne de Markov n'a aucun état transitoire.

c) Soit i un état d'une chaîne de Markov ayant P pour matrice de transition. Si $d(i) = 3$, alors $P_{i,i}^{(3)} > 0$.

L'affirmation est fausse. Considérons la chaîne de Markov $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ayant pour ensemble d'états $E = \{0, \dots, 8\}$ et pour matrice de transition

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Le diagramme de transition de cette chaîne de Markov est



On vérifie que le degré de l'état 0 est $d(0) = \text{pgcd}\{6, 9, 12, \dots\} = 3$, mais que $p_{0,0}^{(3)} = 0$.

Question 5 (4 + 4 = 8 points)

a) Montrer que tout état de non-retour est transitoire.

Soit i un état de non-retour. Par définition, ceci implique que $p_{i,j}^{(n)} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Ainsi, $f_i = 0$. Donc, par définition, i est transitoire.

b) Montrer que tout état absorbant est récurrent.

Soit i un état absorbant. Par définition, $p_{i,i} = 1$. Ainsi, $f_i = 1$. Donc, par définition, i est récurrent.

Question 6 (2 + 4 + 4 + 4 + 2 + 4 + 4 = 24 points)

La plupart des compagnies d'assurance classent les primes d'assurance de ses clients selon un système de bonus-malus. Chaque assuré se voit décerner une cote (un entier positif), et la prime d'assurance dépend de cette cote. La cote d'un assuré évoluera d'année en année selon le nombre de réclamation qu'il fera. Puisqu'une cote plus petite correspond à une plus petite prime annuelle, l'assuré verra sa cote diminuer s'il ne fait aucune déclaration, et augmentera possiblement sinon.

La compagnie d'assurance ABCD a adopté un tel système de bonus-malus, dans lequel les cotes des clients peuvent varier de 0 à 6. La prime annuelle associée à une cote de k est de $25k^2 + 25k + 200$ \$. De plus, si un assuré ayant une cote de k déclare j accidents au cours de l'année, sa nouvelle cote sera $\max\{\min\{k+j-1, 6\}, 0\}$. Autrement dit, la cote passera de k à $k+j-1$ sans toutefois prendre une valeur plus petite que 0 ni plus grande que 6. Un nouveau client se voit attribuer la cote de 0, et l'ajustement des cotes s'effectue en tout début d'année.

Supposer que le nombre de réclamations annuel du nouveau client Xavier suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 1$, et poser X_n pour représenter la cote de Xavier au début de l'année n.

a) Donner l'ensemble E des états de la chaîne de Markov $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Puisque les cotes des clients peuvent varier de 0 à 6, alors $E = \{0, \dots, 6\}$.

b) Pour tous les états i et j, calculer $p_{i,j}$.

Directement,

$$p_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } i < j-1, \\ 2e^{-1} & \text{si } i = j = 0, \\ \displaystyle\sum_{k=j-i+1}^{\infty} \frac{e^{-1}}{k!} & \text{si } j = 6, \\ \dfrac{e^{-1}}{(j-i+1)!} & \text{sinon.} \end{cases}$$

La matrice de transition est

$$P = \begin{bmatrix} 0{,}7358 & 0{,}1839 & 0{,}0613 & 0{,}0153 & 0{,}0031 & 0{,}0005 & 0{,}0001 \\ 0{,}3679 & 0{,}3679 & 0{,}1839 & 0{,}0613 & 0{,}0153 & 0{,}0031 & 0{,}0006 \\ 0 & 0{,}3679 & 0{,}3679 & 0{,}1839 & 0{,}0613 & 0{,}0153 & 0{,}0037 \\ 0 & 0 & 0{,}3679 & 0{,}3679 & 0{,}1839 & 0{,}0613 & 0{,}0190 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}3679 & 0{,}3679 & 0{,}1839 & 0{,}0805 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}3679 & 0{,}3679 & 0{,}2642 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}3679 & 0{,}6321 \end{bmatrix}$$

c) Déterminer les classes d'équivalence pour la relation de communication de cette chaîne de Markov.

On remarque que pour tout état i et j, $p_{i,j}^{(8)} > 0$. Donc tous les états communiquent ensemble et appartiennent donc à la même classe d'équivalence. Autrement dit, la chaîne de Markov est irréductible.

d) Pour chaque état de cette chaîne de Markov, déterminer s'il est récurrent ou transitoire.

Puisque la chaîne de Markov est irréductible, ses états sont tous récurrents ou tous transitoires. Or, une chaîne de Markov ayant un nombre fini d'état possède au moins un état récurrent (car au moins un des états doit être visité un nombre infini de fois). Par conséquent, tous les états sont récurrents.

e) Quel est la probabilité que la cote de Xavier soit de 0 au début de l'année 4 ?

On sait qu'au début de l'année 0, la cote de Xavier est de 0. Ainsi, la probabilité qu'elle soit de 0 au début de l'année 4 est

$$\begin{aligned} P(X_4 = 0 \mid X_0 = 0) &= p_{0,0}^{(4)} \\ &= 0{,}4770. \end{aligned}$$

f) Quel est la probabilité que la prime annuelle de Xavier soit de plus de 900 \$ à l'année 5, sachant qu'elle était de moins de 500 \$ à l'année 3 ?

Les montants des primes associés aux différents cotes sont les suivantes.

Cote	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Prime (\$)	200	250	350	500	950	1 250	1 600

Ainsi, la prime annuelle de Xavier est de plus de 900 \$ à l'année 5 si $X_5 \geq 4$, et elle est de moins de 500 \$ à l'année 3 si $X_3 \leq 2$. La probabilité que la prime annuelle de Xavier soit de plus de 900 \$ à l'année 5, sachant qu'elle était de moins de 500 \$ à l'année 3 s'exprime par $P(X_5 \geq 4 \mid X_3 \leq 2, X_0 = 0)$. En calculant directement cette valeur, on obtient

$$\begin{aligned} &P(X_5 \geq 4 \mid X_3 \leq 2, X_0 = 0) \\ &= \frac{P(X_5 \geq 4, X_3 \leq 2, X_0 = 0)}{P(X_3 \leq 2, X_0 = 0)} \\ &= \frac{\sum_{i=4}^{6} \sum_{j=0}^{2} P(X_5 = i, X_3 = j, X_0 = 0)}{\sum_{k=0}^{2} P(X_3 = k, X_0 = 0)} \\ &= \frac{\sum_{i=4}^{6} \sum_{j=0}^{2} p_{0,j}^{(3)} \cdot p_{j,i}^{(2)}}{\sum_{k=0}^{2} p_{0,k}^{(3)}} \\ &= \frac{p_{0,0}^{(3)} p_{0,4}^{(2)} + p_{0,0}^{(3)} p_{0,5}^{(2)} + p_{0,0}^{(3)} p_{0,6}^{(2)} + p_{0,1}^{(3)} p_{1,4}^{(2)} + p_{0,1}^{(3)} p_{1,5}^{(2)} + p_{0,1}^{(3)} p_{1,6}^{(2)} + p_{0,2}^{(3)} p_{2,4}^{(2)} + p_{0,2}^{(3)} p_{2,5}^{(2)} + p_{0,2}^{(3)} p_{2,6}^{(2)}}{p_{0,0}^{(3)} + p_{0,1}^{(3)} + p_{0,2}^{(3)}} \\ &= 0{,}0454. \end{aligned}$$

g) Si Xavier conserve son assurance pendant 35 ans, quelle est la probabilité que sa cote soit de 6 au moins une fois ?

Pour calculer cette valeur, on va se créer une nouvelle chaîne de Markov calquée sur $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, mais en mesure de savoir si un client a déjà eu une cote de 6. L'idée est de transformer l'état 6 en un état absorbant. Considérons Y_n la cote de Xavier au début de l'année n, ou 6 si $\max\{X_0, \ldots, X_{n-1}\} = 6$. Ainsi, $Y_n = X_n$ si Xavier n'a jamais été à l'état 6 avant l'année n, et $Y_n = 6$ sinon. La matrice de transition Q pour la chaîne de Markov de $\{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est égale à P sauf pour deux valeur :

$$q_{6,5} = 0 \quad \text{et} \quad q_{6,6} = 1.$$

Sous cette nouvelle modélisation, la probabilité que la cote de Xavier soit de 8 au moins une fois en 35 ans est de $q_{0,6}^{(35)} = 0{,}5067$.

Question 7 (2 + 4 + 4 + 4 = 14 points)

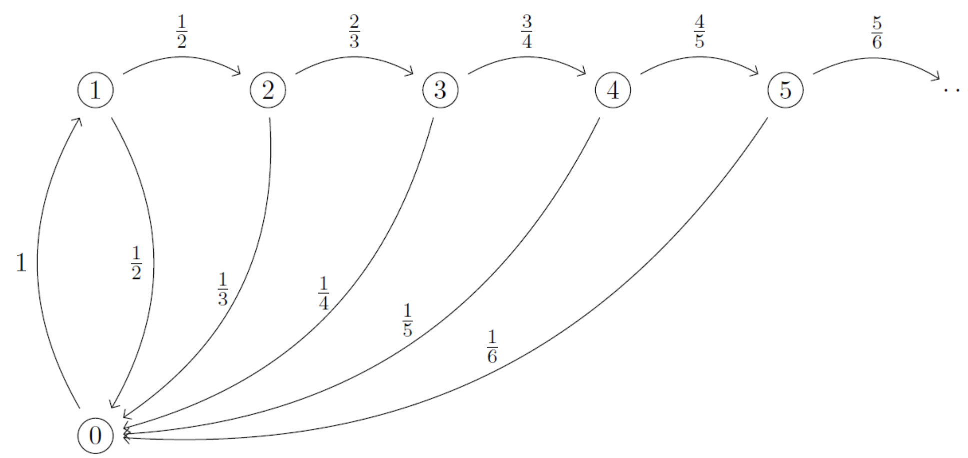
Considérons la chaîne de Markov $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ayant pour espace états $E = \mathbb{N}$ et où les probabilités de transition sont

$$P_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } (i,j) = (0,1), \\ \dfrac{i}{i+1} & \text{si } j = i+1 \text{ et } i \neq 0, \\ \dfrac{1}{i+1} & \text{si } j = 0 \text{ et } i \neq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Posons $T_{i,j} = \min\{n \in \mathbb{N}^* \mid X_n = j, X_0 = i\}$ et $f_{i,j}^{(n)} = P\big(T_{i,j} = n\big)$.

a) Dessiner le diagramme de transition de la chaîne de Markov $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Le diagramme de transition est



b) Calculer $f_{0,0}^{(1)}, f_{0,0}^{(2)}, f_{0,0}^{(3)}, f_{0,0}^{(4)}, f_{0,0}^{(5)}$ puis en déduire une formule pour $f_{0,0}^{(n)}$ où $n \geq 2$.

$$\begin{aligned} f_{i,i}^{(n)} &= P\big(T_{i,i} = n\big) \\ &= P\big(X_n = i, X_j \neq i \text{ pour tout } j \in \{1, \dots, n-1\} \mid X_0 = i\big). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} f_{0,0}^{(1)} &= P(X_1 = 0 \mid X_0 = 0) \\ &= 0, \\ f_{0,0}^{(2)} &= P(X_2 = 0, X_1 \neq 0 \mid X_0 = 0) \\ &= 1 \cdot \frac{1}{2}, \\ f_{0,0}^{(3)} &= P(X_3 = 0, X_2 \neq 0, X_1 \neq 0 \mid X_0 = 0) \\ &= 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}, \\ f_{0,0}^{(4)} &= P(X_4 = 0, X_3 \neq 0, X_2 \neq 0, X_1 \neq 0 \mid X_0 = 0) \\ &= 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
f_{0,0}^{(5)} &= P(X_5 = 0, X_4 \neq 0, X_3 \neq 0, X_2 \neq 0, X_1 \neq 0 \mid X_0 = 0) \\
&= 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{5} \\
&= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5}.
\end{aligned}
$$

En généralisant, on obtient

$$f_{0,0}^{(n)} = \frac{1}{n-1} \cdot \frac{1}{n}$$

Pour tout $n \in \{2, 3, \dots\}$.

c) En déduire que 0 est un état récurrent.

On note que

$$
\begin{aligned}
f_0 &= \sum_{n=1}^{\infty} f_{0,0}^{(n)} \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-1} \cdot \frac{1}{n} \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \\
&= \lim_{n\to\infty} 1 - \frac{1}{n} \quad \text{(par somme téléscopique[1])} \\
&= 1.
\end{aligned}
$$

Ainsi, l'état 0 est récurrent.

d) Montrer que 0 est un état récurrent nul.

Par définition, l'état 0 est récurrent nul si l'espérance de $T_{0,0}$ diverge. Or,

$$
\begin{aligned}
E(T_{0,0}) &= \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot P(T_{0,0} = n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot P(X_n = 0, X_j \neq 0 \text{ pour tout } j \in \{1, \dots, n-1\} \mid X_0 = 0) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot f_{0,0}^{(n)} \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} n \cdot f_{0,0}^{(n)} \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} n \cdot \frac{1}{n-1} \cdot \frac{1}{n} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \\
&= \infty. \quad \text{(car la série harmonique diverge)}
\end{aligned}
$$

Par conséquent, l'état 0 est récurrent nul.

---

[1] https://fr.wikipedia.org/wiki/Somme_t%C3%A9lescopique

Question 8 (10 points)

Considérons la chaîne de Markov $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ayant pour espace états $E = \{0, \dots, 9\}$. Supposons $P_{0,9} = 1$, et supposons que lorsque la chaîne est à l'état $i > 0$, alors le prochain état a autant de chance d'être n'importe quel des états $0, \dots, i-1$. Trouver les probabilités limites de cette chaîne de Markov.

La matrice de transition de $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/7 & 1/7 & 1/7 & 1/7 & 1/7 & 1/7 & 1/7 & 0 & 0 & 0 \\ 1/8 & 1/8 & 1/8 & 1/8 & 1/8 & 1/8 & 1/8 & 1/8 & 0 & 0 \\ 1/9 & 1/9 & 1/9 & 1/9 & 1/9 & 1/9 & 1/9 & 1/9 & 1/9 & 0 \end{bmatrix}.$$

Puisque $p_{0,9} = 1 > 0$ et que $p_{i,i-1} = 1/i > 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, 9\}$, alors

$$0 \to 9 \to 8 \to 7 \to 6 \to 5 \to 4 \to 3 \to 2 \to 1 \to 0.$$

Ainsi, tous les états communiquent et la chaîne de Markov est irréductible. De plus,

$$p_{0,0}^{(2)} = 1/9 > 0 \quad \text{et} \quad p_{0,0}^{(3)} = 0{,}302 > 0.$$

Ainsi, $d(0) = \text{pgcd}\{2, 3, \dots\} = 1$. Puisque la période d'un état est invariante sous la relation de communication, alors tous les états de la chaîne de Markov sont apériodiques. De plus, puisque cette chaîne de Markov est irréductible et a un nombre fini d'états, alors tous ces états sont récurrents positifs (selon la remarque sous la proposition 2.42). Par conséquent, tous les états de la chaîne de Markov sont ergodiques. Selon le théorème 2.44, les probabilités limites de cette chaîne de Markov sont données par l'unique solution non négative de

$$\pi_j = \sum_{i=0}^{9} \pi_i P_{i,j} \text{ pour tout } j, \quad \sum_{j=0}^{9} \pi_j = 1.$$

En solutionnant ce système on obtient

$$\begin{bmatrix} \pi_0 \\ \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \\ \pi_4 \\ \pi_5 \\ \pi_6 \\ \pi_7 \\ \pi_8 \\ \pi_9 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0{,}2612 \\ 0{,}1306 \\ 0{,}0871 \\ 0{,}0653 \\ 0{,}0522 \\ 0{,}0435 \\ 0{,}0373 \\ 0{,}0327 \\ 0{,}0290 \\ 0{,}2612 \end{bmatrix}.$$