Département de mathématiques de l'Université de Sherbrooke
Sylvain Bérubé, mai 2021

CHAPITRE 1
PROBABILITÉS CONDITIONNELLES

Une notion très utile dans l'étude de la théorie des probabilités est celle de la probabilité conditionnelle. Elle permet de tenir compte d'une information complémentaire lors de l'estimation probabiliste de la réalisation d'un évènement. Puisque cette estimation est conditionnée par la réalisation d'un autre évènement, elle est dite conditionnelle.

1.1 Variable aléatoire discrète

Dans cette section, X et Y représentent des variables aléatoires discrètes.

Définition 1.1 La **fonction de masse conjointe** (ou **loi de probabilité conjointe**) de X et Y est

$$p_{X,Y}(x,y) = P(X = x, Y = y).$$

La **fonction de répartition conjointe** est

$$F_{X,Y}(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y).$$

Remarque On peut retrouver la **fonction de masse marginale** de X à partir de la fonction de masse conjointe de X et Y via l'équation

$$p_X(x) = \sum_{y \in \mathbb{R}} p_{X,Y}(x,y).$$

Similairement, on retrouve la **fonction de répartition marginale** de X à partir de la fonction de masse conjointe de X et Y via l'équation

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \sum_{a \leq x} \sum_{y \in \mathbb{R}} p_{X,Y}(a,y) \\ &= F_{X,Y}(x,\infty). \end{aligned}$$

Définition 1.2 La **fonction de masse conditionnelle** (ou **loi de probabilité conditionnelle**) de X sachant que $Y = y$, où $p_Y(y) \neq 0$, est

$$\begin{aligned} p_{X|Y=y}(x) &= p_{X|Y}(x \mid y) \\ &= p_X(x \mid \mathrm{Y} = y) \\ &= P(X = x \mid Y = y) \\ &= \frac{P(X = x, Y = y)}{P(Y = y)} \\ &= \frac{p_{X,Y}(x,y)}{p_Y(y)}. \end{aligned}$$

La **fonction de répartition conditionnelle** de X sachant que $Y = y$, où $p_Y(y) \neq 0$, est

$$\begin{aligned} F_{X|Y=y}(x) &= F_{X|Y}(x \mid y) \\ &= F_X(x \mid Y = y) \\ &= P(X \leq x \mid Y = y) \\ &= \sum_{a \leq x} P(X = a \mid Y = y) \\ &= \sum_{a \leq x} p_{X|Y=y}(a). \end{aligned}$$

Définition 1.3 L'**espérance conditionnelle** de X sachant que $Y = y$, où $p_Y(y) \neq 0$, est

$$\begin{aligned} E(X \mid Y = y) &= \sum_{x \in \mathbb{R}} x \cdot p_{X|Y=y}(x) \\ &= \sum_{x \in \mathbb{R}} x \cdot P(X = x \mid Y = y). \end{aligned}$$

La **variance conditionnelle** de X sachant que $Y = y$, où $p_Y(y) \neq 0$, est

$$\begin{aligned} Var(X \mid Y = y) &= E\left(\left(X - E(X \mid Y = y)\right)^2 \mid Y = y\right) \\ &= E(X^2 \mid Y = y) - \left(E(X \mid Y = y)\right)^2. \end{aligned}$$

L'**écart-type conditionnel** de X sachant que $Y = y$, où $p_Y(y) \neq 0$, est

$$\sigma(X \mid Y = y) = \sqrt{Var(X \mid Y = y)}.$$

Définition 1.4 X et Y sont dites **indépendantes** si

$$p_{X,Y}(x, y) = p_X(x) \cdot p_Y(y) \quad \text{pour tout } x, y \in \mathbb{R}.$$

Par ailleurs, elles sont **identiquement distribuées** si elles ont la même loi, c'est-à-dire si

$$p_X(x) = p_Y(x) \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Proposition 1.5 Si X et Y sont indépendantes, alors

$$p_{X|Y=y}(x) = p_X(x).$$

Exemple 1.6 Soient X et Y deux variables aléatoires de loi conjointe

	$p_{X,Y}(x,y)$	Y = 1	Y = 2
	1	0,20	0,10
X	2	0,15	0,05
	3	0,30	0,20

a) Trouver la fonction de masse marginale de X.

b) Trouver la fonction de masse conditionnelle de X sachant que $Y = 1$.

c) Trouver la fonction de masse conditionnelle de Y sachant que $X = 2$.

d) Calculer $F_{X|Y=1}(2)$.

e) Calculer $E(X \mid Y = 1)$.

Exemple 1.7 Supposons $X \sim \text{Poisson}(\lambda_1)$ et $Y \sim \text{Poisson}(\lambda_2)$, où $\lambda_1, \lambda_1 \in \mathbb{R}_+^*$, avec X et Y indépendantes. Déterminer l'espérance de X sachant que $X + Y = n$.

Exemple 1.8 On réalise $n + m$ épreuves indépendantes ayant chacune p probabilité de succès. Déterminer l'espérance du nombre de succès dans les n premières épreuves sachant qu'il y a k succès en tout.

1.2 Variable aléatoire continue

Dans cette section, X et Y représentent des variables aléatoires continues.

Définition 1.9 La **fonction de densité conjointe** (ou **loi de probabilité conjointe**) de X et Y est la fonction $f_{X,Y}(x, y)$ telle que

$$P\big((x, y) \in D\big) = \iint_D f_{X,Y}(x, y)\, dA$$

pour tout $D \subset \mathbb{R}^2$.

Remarque On peut retrouver la fonction de densité conjointe de X et Y à partir de la fonction la fonction de répartition conjointe de X et Y via l'équation

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x\, \partial y} F_{X,Y}(x, y).$$

Remarque À noter que

$$P(x \leq X \leq x + dx,\ y \leq Y \leq y + dy) \approx f_{X,Y}(x, y) \cdot dx \cdot dy.$$

Remarque On peut retrouver la **fonction de densité marginale** de X à partir de la fonction de densité conjointe de X et Y via l'équation

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y)\ dy.$$

Similairement, on retrouve la **fonction de répartition marginale** de X à partir de la fonction de densité conjointe de X et Y via l'équation

$$\begin{aligned} F_X(x) &= F_{X,Y}(x, \infty) \\ &= \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(t, y)\, dydt. \end{aligned}$$

Définition 1.10 X et Y sont dites **indépendantes** si

$$f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) \quad \text{pour tout } x, y \in \mathbb{R}.$$

Par ailleurs, elles sont **identiquement distribuées** si elles ont la même loi, c'est-à-dire si

$$f_X(x) = f_Y(x) \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Définition 1.11 La **fonction de densité conditionnelle** (ou **loi de probabilité conditionnelle**) de X sachant que $Y = y$, où $f_Y(y) \neq 0$, est

$$\begin{aligned} f_{X|Y=y}(x) &= f_{X|Y}(x \mid y) \\ &= f_X(x \mid Y = y) \\ &= \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}. \end{aligned}$$

La **fonction de répartition conditionnelle** de X sachant que $Y = y$, où $p_Y(y) \neq 0$, est

$$\begin{aligned} F_{X|Y=y}(x) &= F_{X|Y}(x \mid y) \\ &= F_X(x \mid Y = y) \\ &= P(X \leq x \mid Y = y) \\ &= \int_{-\infty}^{x} f_{X|Y=y}(t)\, dt. \end{aligned}$$

Définition 1.12 L'**espérance conditionnelle** de X sachant que $Y = y$, où $f_Y(y) \neq 0$, est

$$E(X \mid Y = y) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_{X|Y=y}(x)\, dx.$$

La **variance conditionnelle** de X sachant que $Y = y$, où $p_Y(y) \neq 0$, est

$$\begin{aligned} Var(X \mid Y = y) &= E\left(\left(X - E(X \mid Y = y)\right)^2 \mid Y = y\right) \\ &= E(X^2 \mid Y = y) - \left(E(X \mid Y = y)\right)^2. \end{aligned}$$

L'**écart-type conditionnel** de X sachant que $Y = y$, où $p_Y(y) \neq 0$, est

$$\sigma(X \mid Y = y) = \sqrt{Var(X \mid Y = y)}.$$

Remarque À noter que

$$P(x \leq X \leq x + dx \mid y \leq Y \leq y + dy) \approx f_{X|Y=y}(x) \cdot dx.$$

Définition 1.13 X et Y sont dites **indépendantes** si

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y).$$

Par ailleurs, elles sont **identiquement distribuées** si elles ont la même loi, c'est-à-dire si

$$f_X(x) = f_Y(x) \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Proposition 1.14 Si X et Y sont indépendantes, alors

$$f_{X|Y=y}(x) = f_X(x).$$

Exemple 1.15 Supposons que

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 6xy(2 - x - y) & \text{si } x, y \in [0,\ 1], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Déterminer l'espérance conditionnelle de X sachant que $Y = y$, où $y \in [0,1]$.

Exemple 1.16 Supposons que

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{ye^{-xy}}{2} & \text{si } x\in\mathbb{R}_+, y\in[0,\ 2],\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

Calculer $E\left(e^{X/2}\mid Y=1\right)$.

1.3 Calcul d'espérances et de variances par conditionnement

Pour calculer une espérance ou une variance, il est parfois utile de conditionner sur une variable aléatoire appropriée. Cela demande toutefois un peu d'ingéniosité à l'occasion.

Exemple 1.17 On lance un équilibré. Si le résultat est n, alors on lance n pièces de monnaie et on compte le nombre de faces obtenu. On souhaite calculer le nombre de faces moyen espéré.

a) Quelle est la probabilité que le résultat du dé soit 5 ?

b) Sachant que le résultat du dé est 5, quelle est la probabilité d'obtenir 3 faces ?

c) Sachant que le résultat du dé est 5, quel est le nombre de faces espéré ?

d) Quelle est la probabilité que le résultat du dé soit 5 et d'obtenir 3 faces ?

e) Quelle est la probabilité d'obtenir 3 faces ?

f) Quel est le nombre de faces espéré ?

Remarque On peut voir $E(X\mid Y)$ comme une variable aléatoire :

$$\begin{aligned} E(X\mid Y):\ \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}\\ y &\longmapsto E(X\mid Y=y)\end{aligned}$$

De façon similaire, on peut voir $Var(X\mid Y)$ comme une variable aléatoire :

$$\begin{aligned} Var(X\mid Y):\ \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}\\ y &\longmapsto Var(X\mid Y=y)\end{aligned}$$

Proposition 1.18 (formule de l'espérance totale) Pour toutes variables aléatoires X et Y,

$$E(X)=E\big(E(X\mid Y)\big).$$

Proposition 1.19 (formule de la variance totale) Pour toutes variables aléatoires X et Y,

$$Var(X)=E\big(Var(X\mid Y)\big)+Var\big(E(X\mid Y)\big).$$

Remarques

Si Y est une variable aléatoire discrète ayant pour fonction de masse $p_Y(y)$, alors

$$E(X)=\sum_{y\in\mathbb{R}}E(X\mid Y=y)\cdot p_Y(y).$$

Si Y est une variable aléatoire continue ayant pour fonction de densité $f_Y(y)$, alors

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}E(X\mid Y=y)\cdot f_Y(y)\,dy.$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} Var(X) &= E(X^2) - E(X)^2 \\ &= E\big(E(X^2 \mid Y)\big) - E\big(E(X \mid Y)\big)^2. \end{aligned}$$

Exemple 1.20 On lance une pièce de monnaie qui donne « face » avec une probabilité p. Quel est le nombre moyen de lancers à effectuer avant d'obtenir une première fois « face » ?

Exemple 1.21 Le nombre moyen d'accidents de travail dans une semaine dans une industrie donnée est de 4. Supposons que les nombres de blessés à chaque accident sont des variables aléatoires indépendantes de moyenne 2. Supposons que le nombre de blessés est indépendant du nombre d'accidents. Quel est le nombre moyen de blessés durant une semaine ?

Exemple 1.22 Des épreuves indépendantes, chacune ayant p probabilité de succès, sont réalisées jusqu'à ce qu'il y ait k succès consécutif. Quel est le nombre moyen d'épreuves nécessaire ?

1.4 Calcul de probabilités par conditionnement

Il est également possible de calculer une probabilité en conditionnant sur une variable aléatoire appropriée.

Proposition 1.23 Soit E un évènement et Y une variable aléatoire. Si Y est discrète, alors

$$P(E) = \sum_{y=-\infty}^{\infty} P(E \mid Y = y) \cdot p_Y(y).$$

Si Y est continue, alors

$$P(E) = \int_{-\infty}^{\infty} P(E \mid Y = y) \cdot f_Y(y)\, dy.$$

Exemple 1.24 Supposons X et Y indépendantes et continues. Quel est la fonction de répartition de $X + Y$?

Exemple 1.25 Le nombre de clients entrant dans un magasin suit une loi de Poisson de paramètre λ. Chaque client achète un produit avec une probabilité p. Quelle est la probabilité de ne rien vendre ? Quelle est la loi de probabilité du nombre de ventes ?

Exemple 1.26 (Problème des votes) En 2018, la CAQ a gagné $n = 74$ sièges à l'Assemblée nationale alors que les autres partis réunis en ont eu $m = 51$. En supposant que tous les ordonnancements sont équiprobables, montrer que la probabilité que la CAQ ait toujours été en avance lors de la soirée électorale est $(n - m)/(n + m)$.

Exemple 1.27 On a n éléments qui sont ordonnés $e_1, \dots, e_n$. On choisit, à chaque seconde, un élément e_i (avec probabilité p_i) et on le place en tête de liste. Quelle est la position moyenne de l'élément choisi après une longue période d'opération ?

Définition 1.28 Un **graphe** G est une paire $G = (V, E)$ avec $V = \{1, \dots, n\}$ et $E \subset V \times V$. Soit $i, j \in V$ tels que $i \neq j$. On dit qu'il existe un **chemin** de i vers j s'il existe une suite

$$(i, i_1), (i_1, i_2), (i_2, i_3), \dots, (i_k, j)$$

d'éléments de E. Un graphe est **connexe** s'il existe un chemin entre chacune des paires de sommets.

Exemple 1.29 Un **graphe aléatoire** $G = (V, E)$ est tel que $V = \{1, \dots, n\}$ et

$$E = \{(i, X(i)) \mid i \in V\},$$

où $X(i)$ sont des variables aléatoires indépendantes telles que

$$P(X(i) = j) = \frac{1}{n}$$

pour tout $j \in V$. Quelle est la probabilité qu'un graphe aléatoire G soit connexe ?

Exemple 1.30 (Modèle des urnes de Polya) On choisit un nombre p de façon aléatoire (uniforme) sur l'intervalle unitaire. On réalise n épreuves indépendantes qui produisent un succès avec une probabilité p. Soit X le nombre de succès obtenus. Quelle est la loi de probabilité de X ?

1.5 Exercices supplémentaires

Exercice 1.1 Soient $X \sim \text{Bin}(n, p)$ et $Y \sim \text{Bin}(n, p)$ deux variables aléatoires indépendantes. Déterminer la fonction de masse conditionnelle de X sachant que $X + Y = m$. De quelle loi s'agit-il ?

Exercice 1.2 Soient X et Y deux variables aléatoires continues de densité conjointe

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 4y(x - y)e^{-(x+y)} & \text{si } 0 < x < \infty \quad \text{et} \quad 0 \leq y \leq x, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Calculer $E(X \mid Y = y)$.

Exercice 1.3 Dans un magasin, on observe deux types de clients. Le premier va acheter quelque chose alors que le deuxième type se contente de reluquer la marchandise. Sachant que le nombre de clients observés en une heure de chacun de ces deux types suit une loi de Poisson, que le nombre moyen d'acheteurs à l'heure est de 9 et que le nombre moyen de flâneurs est de 21, déterminer la loi du nombre d'acheteur si on sait qu'il y a eu 25 clients dans une heure. Déterminer en plus l'espérance du nombre d'acheteurs sous cette même hypothèse.

Exercice 1.4 Soient X et Y deux variables aléatoires de loi de probabilité conjointe

		Y	
	$P_{X,Y}(x, y)$	0	1
	0	0,2	0,1
X	1	0,4	0,2
	2	0,1	0,0

a) Déterminer la fonction de masse de X, $E(X)$ et $Var(X)$.

b) Déterminer la fonction de masse de $X \mid Y = 1$ puis calculer $E(X \mid Y = 1)$ et $Var(X \mid Y = 1)$.

c) Déterminer la fonction de masse de $X \mid Y = 0$ puis calculer $E(X \mid Y = 0)$ et $Var(X \mid Y = 0)$.

Exercice 1.5 Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes. Montrer que

$$\sum_{x \in \mathbb{R}} p_{X|Y=y}(x) = 1$$

pour toute valeur y telle que $p_Y(y) \neq 0$.

Exercice 1.6 Une urne contient trois boules blanches, six boules rouges et cinq boules noires. On tire au hasard et simultanément six boules de l'urne. Soient X et Y les nombres de boules blanches et noires tirées respectivement.

a) Déterminer la fonction de masse de X sachant que $Y = 3$.

b) Calculer $E(X \mid Y = 1)$ et $Var(X \mid Y = 1)$.

Exercice 1.7 Soit X une variable aléatoire uniforme sur l'intervalle $[0,\ 1]$. Déterminer $E(X \mid X < 0{,}5)$.

Exercice 1.8 On lance une pièce de monnaie qui donne « face » avec probabilité p. Déterminer la variance du nombre moyen de lancers à effectuer avant d'obtenir une première fois « face » en conditionnant par la variable

$$Y = \begin{cases} 1 & \text{si le } 1^{\text{er}} \text{ lancer est « face »,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exercice 1.9 Une souris est au centre d'un labyrinthe comportant trois chemins. Un seul de ces chemins mène à un morceau de fromage après deux minutes de marche. Les deux autres chemins reviennent au milieu après trois et cinq minutes de marche respectivement (les trajets sont en demi-cercle et la souris poursuit toujours son chemin droit devant elle). Sous l'hypothèse que la souris est incapable de se rappeler de ne pas prendre le même chemin lorsqu'elle revient, et que les choix de chemins sont faits au hasard avec probabilités égales, déterminer l'espérance et la variance de X, où X est le nombre de minutes nécessaires pour atteindre le fromage.

Exercice 1.10 (théorème de la variance totale) Soient X et Y deux variables aléatoires. Montrer que

$$Var(X) = E\big(Var(X \mid Y)\big) + Var\big(E(X \mid Y)\big).$$

Exercice 1.11 On choisit au hasard un nombre Y selon une loi uniforme sur l'intervalle $[0,\ 1]$. Ensuite, on choisit un nombre X selon une loi uniforme sur l'intervalle $[Y, 1]$.

a) Déterminer $E(X)$.

b) Déterminer $Var(X)$.

c) Déterminer les fonctions de masse de $Y \mid X = x$ et de X.

Exercice 1.12 Soient $X_1, X_2, \ldots$ une suite de variable aléatoires telles que $E(X_i) = \mu$ pour tout i. Soit N une variable aléatoire à valeurs entières. Supposons que les variables $N, X_1, X_2, \ldots$ soient mutuellement indépendantes. Montrer que

$$E\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right) = E(N) \cdot \mu.$$

C'est l'**identité de Wald**, du nom du mathématicien hongrois Abraham Wald (1902–1950).

Exercice 1.13 Soient $X_1, X_2, \ldots$ une suite de variable aléatoires telles que $E(X_i) = \mu$ et $Var(X_i) = \sigma^2$ pour tout i. Soit N une variable aléatoire à valeurs entières. Supposons que les variables $N, X_1, X_2, \ldots$ soient mutuellement indépendantes. Montrer que

$$Var\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right) = E(N) \cdot \sigma^2 + \mu^2 \cdot Var(N).$$

Exercice 1.14 Le nombre de retraits bancaires durant une heure à un guichet automatique suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 120$. Sachant que les montants retirés sont des variables aléatoires indépendantes d'espérance 55 \$ et de variance 900 $\$^2$, déterminer le montant total moyen retiré en une heure à ce guichet automatique et la variance de ce montant total.

Exercice 1.15 La loi de probabilité conjointe de X et Y est donnée par

	$p_{X,Y}(x,y)$	Y: 1	2	3
	1	1/12	1/12	0
X	2	1/2	0	1/10
	3	1/10	1/10	1/30

Calculer $E(X \mid Y = i)$ pour $i \in \{1,\ 2,\ 3\}$.

Exercice 1.16 Un dé équilibré est lancé successivement. Soit X et Y représentant, respectivement, le nombre de lancés nécessaire pour obtenir un six et un cinq.

a) Trouver $E(X)$.

b) Trouver $E(X \mid Y = 1)$.

c) Trouver $E(X \mid Y = 5)$.

Exercice 1.17 La fonction de densité conjointe de X et Y est

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{e^{-y}(y^2 - x^2)}{8} & \text{si } 0 < y < \infty \quad \text{et} \quad -y \leq x \leq y, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que $E(X \mid Y = y) = 0$.

Exercice 1.18 Montrer que si X et Y sont continues, alors

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} E(X \mid Y = y) \cdot f_Y(y)\, dy.$$

Exercice 1.19 Un parieur remporte chaque partie avec une probabilité p. Dans les deux cas suivants, déterminer le nombre moyen de victoires.

a) Le parieur jouera n parties. S'il remporte X de ces parties, alors il jouera X parties additionnelles avant d'arrêter.

b) Le parieur jouera jusqu'à ce qu'il remporte une partie. Si ça lui prend Y parties pour obtenir cette victoire, alors il jouera Y parties additionnelles avant d'arrêter.

Exercice 1.20 Chaque élément d'une suite de données binaires est soit 1 avec une probabilité p ou 0 avec une probabilité $1 - p$. Une sous-suite maximale de données consécutives ayant la même valeur est appelée une série. Par exemple, pour la suite 1, 1, 0, 1, 1, 1, 0, la première série est de longueur 2, la deuxième est de longueur 1, la troisième est de longueur 3 et la quatrième est de longueur 1.

a) Trouver la longueur moyenne de la première série.

b) Trouver la longueur moyenne de la deuxième série.

Exercice 1.21 Alice et Bob jouent une série de parties, au cours de laquelle Alice a une probabilité p de remporter chaque partie. Le gagnant est le premier joueur à remporter deux parties de plus que son adversaire.

a) Trouver la probabilité que Alice soit la vainqueur.

b) Trouver le nombre moyen de parties jouées.

Exercice 1.22 Une étude démontre que les jours de pluie, le nombre d'accidents de la route à Sherbrooke suit une loi de Poisson de moyenne 6, alors qu'il suit une loi de Poisson de moyenne 2 les autres jours. Les prévisions météorologiques nous indiquent que la probabilité d'avoir de la pluie demain est de 60 %. Posons X le nombre d'accidents de la route qui se produiront demain.

a) Calculer $E(X)$.

b) Calculer $p_X(0)$.

c) Calculer $Var(X)$.

Exercice 1.23 Albert et Bob s'affrontent à la finale de tennis du US Open. Albert remporte chaque échange avec une probabilité p lorsqu'il effectue le service, et avec une probabilité q lorsque c'est son adversaire qui effectue le service. Si Albert a le service lors du premier échange, quelle est la probabilité qu'il remporte le tournoi ?

Exercice 1.24 Soient X et Y deux variables discrètes indépendantes. Démontrer que

$$E(X \mid Y = y) = E(X)$$

pour tout y.

Exercice 1.25 Une souris est au centre d'un labyrinthe comportant $n + 1$ chemins. Un seul de ces chemins, le chemin $n + 1$, mène à un morceau de fromage après a_{n+1} minutes de marche. Les chemins $1, \dots, n$ reviennent au centre du labyrinthe après respectivement $a_1, \dots, a_n$ minutes de marche (les trajets sont en demi-cercle et la souris poursuit toujours son chemin droit devant elle). Sous l'hypothèse que la souris est incapable de se rappeler de ne pas prendre le même chemin lorsqu'elle revient au centre du labyrinthe, et que les choix de chemins sont faits au hasard avec probabilités égales, déterminer l'espérance de X, où X est le nombre de minutes nécessaires pour atteindre le fromage.

Exercice 1.26 Le nombre d'orages se produisant au cours du prochain mois, noté X, est distribué selon une loi de Poisson ayant comme paramètre une valeur uniformément distribuée sur l'intervalle $[0, 3]$. Autrement dit, λ suit une loi uniforme sur $[0, 3]$, et X suit une loi de Poisson de paramètre λ. Calculer la probabilité qu'il n'y ait aucun orage au cours du prochain mois.

Exercice 1.27 Un pion est promené au hasard sur les 12 cases d'un échiquier 3×4. Les cases sont numérotées selon l'illustration ci-dessous.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12

Au temps 0, le pion est sur la case 1. Puis, à chaque unité de temps, le pion est déplacé au hasard vers une des 2, 3 ou 4 cases voisines de celle où il était placé (avec des probabilités égales : 1/2, 1/3 ou 1/4 selon le cas). Les mouvements diagonaux sont interdits. Évaluez la probabilité que la case 4 soit visitée avant la case 12.