

CHAPITRE 4

CHAÎNES DE MARKOV À TEMPS CONTINU

Exercice 4.1 Une population est formée d'organismes sexués. La probabilité pour qu'un mâle spécifique ne s'accouple avec une femelle désignée dans un intervalle de temps de longueur h est de l'ordre de $\lambda h + o(h)$. Chaque accouplement produit instantanément un rejeton qui a autant de chance d'être un mâle qu'une femelle. Soient $N1_t$ et $N2_t$ les quantités de mâles et de femelles respectivement dans la population. Déterminer les valeurs des v_i et des $p_{i,j}$ pour la chaîne de Markov à temps continu $\{N1_t, N2_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$.

Puisqu'un enfant a autant de chance d'être un mâle qu'une femelle, alors

$$p_{(n,m),(n+1,m)} = p_{(n,m),(n,m+1)} = 1/2.$$

Par ailleurs, si on est à l'état (n, m) , alors il y a n mâles et m femelles, donc nm possibilités d'accouplement. Ainsi,

$$v_{(n,m)} = \lambda nm.$$

Exercice 4.2 Un organisme unicellulaire peut être dans un de deux états A ou B. Les individus de type A mutent en individus de type B à un taux exponentiel α . Les individus de type B mutent en deux individus de type A à un taux exponentiel β . Construire une chaîne de Markov à temps continu appropriée pour ce modèle et déterminer les valeurs des v_i et des $p_{i,j}$.

Soit $N1_t$ le nombre d'individus de type A au temps t et $N2_t$ le nombre d'individus de type B au temps t . Alors $\{N1_t, N2_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ est la chaîne de Markov à temps continu souhaité. De plus,

$$v_{(n,m)} = n\alpha + m\beta,$$

$$p_{(n,m),(n-1,m+1)} = \frac{n\alpha}{n\alpha + m\beta},$$

$$p_{(n,m),(n+2,m-1)} = \frac{m\beta}{n\alpha + m\beta}.$$

Exercice 4.3 Soit $\{X_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ une chaîne de Markov à temps continu. Soient i et j deux états de cette chaîne. Posons $p_{i,j}(t) = P(X_{s+t} = j \mid X_s = i)$. Justifier pourquoi l'équation de Kolmogorov pour le passé est vraie

$$p'_{i,j}(t) = \sum_{k \in E \setminus \{i\}} v_i \cdot p_{i,k} \cdot p_{k,j}(t) - v_i \cdot p_{i,j}(t).$$

Cet exercice est dans le devoir 5.

Exercice 4.4 On opère une machine qui travaille selon un temps exponentiellement distribué avant de tomber en panne, avec moyenne $1/\lambda$. Supposons que le temps pour réparer la machine est exponentiellement distribué de moyenne $1/\mu$. Supposons que la machine est fonctionnelle au temps 0. On cherche la probabilité qu'elle le soit encore au temps $t = 10$.

a) Modéliser ce processus par un processus de naissance et de mort à deux états et déterminer les valeurs des paramètres μ_n et λ_n .

b) Montrer que les équations de Kolmogorov pour le passé dans le cas d'un processus de naissance et de mort deviennent

$$\begin{cases} p'_{0,j}(t) = \lambda_0 \cdot (p_{1,j}(t) - p_{0,j}(t)) \\ p'_{i,j}(t) = \lambda_i \cdot p_{i+1,j}(t) + \mu_i \cdot p_{i-1,j}(t) - (\lambda_i + \mu_i) \cdot p_{i,j}(t) \quad \text{pour } i \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

c) Écrire les équations de Kolmogorov du passé pour le problème sous étude.

d) Montrer que $\mu \cdot p'_{0,0}(t) + \lambda \cdot p'_{1,0}(t) = 0$.

e) En intégrant l'équation de d), montrer que $p'_{0,0}(t) = \mu - (\mu + \lambda) \cdot p_{0,0}(t)$.

f) Posons

$$h(t) = p_{0,0}(t) - \frac{\mu}{\mu + \lambda}.$$

En dérivant $h(t)$, montrer que $h(t) = K \cdot e^{-(\mu+\lambda)t}$ pour une constante K .

g) En déduire des formules pour $p_{0,0}(t)$ et $p_{1,0}(t)$, puis la solution à la question posée au départ.

a) Soit X_t l'état de la machine au temps t , où

$$X_t = \begin{cases} 0 & \text{la machine fonctionne au temps } t, \\ 1 & \text{la machine ne fonctionne pas au temps } t. \end{cases}$$

La chaîne de Markov $\{X_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ modélisant la situation est un processus de naissance et de mort, avec

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= \lambda, \quad \lambda_n = 0 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \\ \mu_1 &= \mu, \quad \mu_n = 0 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}. \end{aligned}$$

b) De façon générale, les équations de Kolmogorov du passé sont

$$p'_{i,j}(t) = \left(\sum_{k \in E \setminus \{i\}} v_i \cdot p_{i,k} \cdot p_{k,j}(t) \right) - v_i \cdot p_{i,j}(t).$$

Dans un processus de naissance et de mort,

$$v_i = \lambda_i + \mu_i$$

et

$$p_{i,j} = \begin{cases} \frac{\lambda_i}{\lambda_i + \mu_i} & \text{si } j = i + 1, \\ \frac{\mu_i}{\lambda_i + \mu_i} & \text{si } j = i - 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
 p'_{0,j}(t) &= \left(\sum_{k \in E \setminus \{0\}} v_0 \cdot p_{0,k} \cdot p_{k,j}(t) \right) - v_0 \cdot p_{0,j}(t) \\
 &= v_0 \cdot p_{0,1} \cdot p_{1,j}(t) - v_0 \cdot p_{0,j}(t) \\
 &= \lambda_0 \cdot p_{1,j}(t) - \lambda_0 \cdot p_{0,j}(t) \\
 &= \lambda_0 \cdot (p_{1,j}(t) - p_{0,j}(t)).
 \end{aligned}$$

et, pour $i \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
 p'_{i,j}(t) &= \left(\sum_{k \in E \setminus \{i\}} v_i \cdot p_{i,k} \cdot p_{k,j}(t) \right) - v_i \cdot p_{i,j}(t) \\
 &= v_i \cdot p_{i,i+1} \cdot p_{i+1,j}(t) + v_i \cdot p_{i,i-1} \cdot p_{i-1,j}(t) - v_i \cdot p_{i,j}(t) \\
 &= \lambda_i \cdot p_{i+1,j}(t) + \mu_i \cdot p_{i-1,j}(t) - (\lambda_i + \mu_i) \cdot p_{i,j}(t).
 \end{aligned}$$

c) Directement,

$$\begin{aligned}
 p'_{0,0}(t) &= \lambda_0 \cdot (p_{1,0}(t) - p_{0,0}(t)) \\
 &= \lambda \cdot (p_{1,0}(t) - p_{0,0}(t))
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 p'_{1,0}(t) &= \mu_1 \cdot p_{0,0}(t) - (\lambda_1 + \mu_1) \cdot p_{1,0}(t) \\
 &= \mu \cdot (p_{0,0}(t) - p_{1,0}(t)).
 \end{aligned}$$

d) À partir des équations trouvées en c), on a

$$p_{1,0}(t) - p_{0,0}(t) = \frac{p'_{0,0}(t)}{\lambda} = \frac{-p'_{1,0}(t)}{\mu},$$

d'où

$$\mu \cdot p'_{0,0}(t) + \lambda \cdot p'_{1,0}(t) = 0.$$

e) En intégrant l'équation trouvée en d), on a

$$\mu \cdot p'_{0,0}(t) + \lambda \cdot p'_{1,0}(t) = 0 \Rightarrow \mu \cdot p_{0,0}(t) + \lambda \cdot p_{1,0}(t) = c,$$

où c est une constante. Or,

$$p_{0,0}(0) = 1 \quad \text{et} \quad p_{1,0}(0) = 0.$$

Donc

$$\begin{aligned}
 c &= \mu \cdot p_{0,0}(0) + \lambda \cdot p_{1,0}(0) \\
 &= \mu \cdot 1 + \lambda \cdot 0 \\
 &= \mu.
 \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\mu \cdot p_{0,0}(t) + \lambda \cdot p_{1,0}(t) = \mu,$$

d'où on tire

$$\lambda \cdot p_{1,0}(t) = \mu (1 - p_{0,0}(t)).$$

Mais alors

$$\begin{aligned} p'_{0,0}(t) &= \lambda \cdot (p_{1,0}(t) - p_{0,0}(t)) \\ &= \mu (1 - p_{0,0}(t)) + \lambda p_{0,0}(t) \\ &= \mu - p_{0,0}(t)(\mu + \lambda). \end{aligned}$$

f) La dérivée de $h(t)$ est

$$\begin{aligned} h'(t) &= \left(p_{0,0}(t) - \frac{\mu}{\mu + \lambda} \right)' \\ &= p'_{0,0}(t) \\ &= \mu - (\mu + \lambda) \cdot p_{0,0}(t) \\ &= \mu - (\mu + \lambda) \cdot \left(h(t) + \frac{\mu}{\mu + \lambda} \right) \\ &= \mu - (\mu + \lambda)h(t) - \mu \\ &= (\mu + \lambda)h(t). \end{aligned}$$

En solutionnant cette équation différentielle, on obtient

$$h(t) = K \cdot e^{-(\mu+\lambda)t}$$

pour une constante K . Or,

$$\begin{aligned} h(0) &= p_{0,0}(0) - \frac{\mu}{\mu + \lambda} \\ &= 1 - \frac{\mu}{\mu + \lambda} \\ &= \frac{\lambda}{\mu + \lambda}, \end{aligned}$$

d'où

$$K = \frac{\lambda}{\mu + \lambda}.$$

Par conséquent,

$$h(t) = \frac{\lambda}{\mu + \lambda} \cdot e^{-(\mu+\lambda)t}.$$

g) Directement,

$$\begin{aligned} p_{0,0}(t) &= \frac{\mu}{\mu + \lambda} + \frac{\lambda}{\mu + \lambda} \cdot e^{-(\mu+\lambda)t} \\ &= \frac{\mu + \lambda e^{-(\mu+\lambda)t}}{\mu + \lambda} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} p'_{1,0}(t) &= \frac{-\mu \cdot p'_{0,0}(t)}{\lambda} \\ &= \frac{-\mu \cdot (\mu - (\mu + \lambda) \cdot p_{0,0}(t))}{\lambda} \\ &= \frac{-\mu \cdot \left(\mu - (\mu + \lambda) \cdot \left(\frac{\mu + \lambda e^{-(\mu+\lambda)t}}{\mu + \lambda} \right) \right)}{\lambda} \end{aligned}$$

$$= \mu \cdot e^{-(\mu+\lambda)t},$$

d'où

$$\begin{aligned} p_{1,0}(t) &= \int_0^t \mu \cdot e^{-(\mu+\lambda)s} ds \\ &= -\left(\frac{\mu}{\mu+\lambda}\right) \cdot e^{-(\mu+\lambda)s} \Big|_{s=0}^{s=t} \\ &= -\left(\frac{\mu}{\mu+\lambda}\right) \cdot (e^{-(\mu+\lambda)t} - 1) \\ &= \left(\frac{\mu}{\mu+\lambda}\right) \cdot (1 - e^{-(\mu+\lambda)t}). \end{aligned}$$

La probabilité que la machine soit fonctionnelle au temps 10 si elle l'est initialement est

$$p_{0,0}(10) = \frac{\mu + \lambda e^{-10(\mu+\lambda)}}{\mu + \lambda}.$$

Exercice 4.5 Montrer, pour un processus de naissance pur, que

$$\begin{cases} p_{i,i}(t) = e^{-\lambda_i t} & \text{pour } i \in \mathbb{N}, \\ p_{i,j}(t) = \lambda_{j-1} e^{-\lambda_j t} \int_0^t e^{\lambda_j s} \cdot p_{i,j-1}(s) ds & \text{pour } j \in \mathbb{N}, j > i. \end{cases}$$

La démonstration a été effectuée en classe.

Exercice 4.6 Montrer, dans le cas du modèle de croissance linéaire avec immigration, que les probabilités limites p_i existent lorsque $\lambda < \mu$.

Cet exercice est dans le devoir 5.

Exercice 4.7 Montrer, dans le cas de la file d'attente (M/M/1), que les probabilités limites p_i existent lorsque $\lambda < \mu$. Déterminer alors les probabilités limites pour chacun des états.

Cet exercice est dans le devoir 5.

Exercice 4.8 Une chaîne de montage a deux postes de travail. Une pièce y entre seulement lorsque la chaîne est vide, est modifiée au premier poste, puis au second. Supposons que les temps de modification aux deux postes soient indépendants de lois exponentielles de paramètres λ_1 et λ_2 respectivement. Supposons que l'arrivée des pièces suit un processus de Poisson d'intensité λ . On crée trois états correspondant respectivement au fait que la chaîne soit vide, qu'il y ait une pièce au premier poste ou qu'il y en ait une au second. Déterminer les probabilités limites pour chacun des états.

Cet exercice a été résolu en classe.

Exercice 4.9 Un salon de barbier est opéré par son propriétaire et par lui seul. Il possède sa chaise de coupe et une unique chaise pour un client en attente. Si un client se pointe et que la place d'attente est prise, il fait demi-tour. Sachant que les clients se présentent au salon selon un processus de Poisson à un rythme de trois à l'heure et que le barbier s'exécute en un temps exponentiellement distribué de moyenne un quart d'heure, déterminer le nombre moyen de clients dans son commerce.

Cet exercice a été résolu en classe.

Exercice 4.10 Des clients potentiels se pointent au service au volant d'un restaurant selon un processus de Poisson de taux λ . Cependant, si, au moment de son arrivé, un client aperçoit n voitures déjà dans la file d'attente, alors il joindra cette file avec une probabilité α_n . Assumant que le taux de service suit une loi exponentielle de paramètre μ , modéliser cette situation selon un processus de naissance et de mort, et déterminer les taux de naissance (d'arrivée) et de mort (de départ).

Soit N_t le nombre de clients au restaurant au temps t . Alors $\{N_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ est un processus de naissance et de mort modélisant la situation, avec

$$\lambda_n = \lambda \alpha_n,$$

$$\mu_n = \mu.$$

Exercice 4.11 Une population est composée de N individus. Certains d'entre eux ont une infection, laquelle se propage de la façon suivante. Les échanges entre deux membres de cette population se produisent en suivant un processus de Poisson de taux λ . Lorsqu'un contact se produit, il a autant de chance d'impliquer n'importe quelles des $\binom{N}{2}$ paires d'individus de la population. Si un contact implique un individu infecté et un individu non infecté, alors l'individu non infecté à une probabilité p de le devenir. Lorsqu'un individu est infecté, il le demeure pour toujours.

Soit X_t le nombre d'individus de la population infectés au temps t .

- a) Expliquer pourquoi $\{X_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ est une chaîne de Markov à temps continu.
- b) Si un seul individu est infecté au temps 0, combien de temps en moyenne cela prendra-t-il avant que toute la population soit infectée ?

Cet exercice est dans le devoir 5.

Exercice 4.12 Soit un processus de naissance et de mort ayant pour taux de naissance $\lambda_n = (n + 1)\lambda$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour taux de mort $\mu_n = n\mu$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Déterminer l'espérance du temps requis pour passer de l'état 0 à l'état 4.

Considérons $\{X_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ la chaîne de Markov à temps continu modélisant le présent processus de naissance et de mort. Nous avons $v_n = (n + 1)\lambda + n\mu$, d'où

$$T_n \sim \text{Exp}((n + 1)\lambda + n\mu).$$

De plus,

$$p_{n,n+1} = \frac{(n + 1)\lambda}{(n + 1)\lambda + n\mu}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. Posons $T_{i,j}$ le temps nécessaire pour atteindre une première fois l'état j à partir de l'état i .

Formellement,

$$T_{i,j} = \min\{s \in \mathbb{R}_+ \mid X_0 = i, X_s = j, X_u \neq j \text{ pour tout } u \in [0, s[\}.$$

Nous cherchons $E(T_{0,4})$. Remarquons que pour un processus de naissance et de mort,

$$T_{0,4} = T_{0,1} + T_{1,2} + T_{2,3} + T_{3,4}.$$

En conditionnant le calcul d'espérance sur le prochain état visité,

$$E(T_{n,n+1}) = E(T_n) + p_{n,n-1} (E(T_{n-1,n}) + E(T_{n,n+1})),$$

ce qui se simplifie à

$$E(T_{n,n+1}) = \frac{1 + n\mu \cdot E(T_{n-1,n})}{(n + 1)\lambda}.$$

Ainsi,

$$E(T_{0,1}) = \frac{1}{\lambda},$$

$$E(T_{1,2}) = \frac{1}{2\lambda} + \frac{\mu}{2\lambda^2},$$

$$E(T_{2,3}) = \frac{1}{3\lambda} + \frac{\mu}{3\lambda^2} + \frac{\mu^2}{3\lambda^3},$$

$$E(T_{3,4}) = \frac{1}{4\lambda} + \frac{\mu}{4\lambda^2} + \frac{\mu^2}{4\lambda^3} + \frac{\mu^3}{4\lambda^4}.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} E(T_{0,4}) &= \sum_{n=0}^3 E(T_{n,n+1}) \\ &= \frac{1}{\lambda} \left(\frac{25}{12} + \frac{13}{12} \left(\frac{\mu}{\lambda} \right) + \frac{7}{12} \left(\frac{\mu}{\lambda} \right)^2 + \frac{3}{12} \left(\frac{\mu}{\lambda} \right)^3 \right). \end{aligned}$$

Exercice 4.13 Deux machines opèrent pour une durée exponentielle de taux λ_i avant de se briser, et leur temps de réparation est exponentielle de taux μ_i . Le temps de fonctionnement des machines est indépendant l'un de l'autre. Déterminer une chaîne de Markov à temps continu à quatre états respectant les conditions des deux machines, et calculer les probabilités de transition pour cette chaîne.

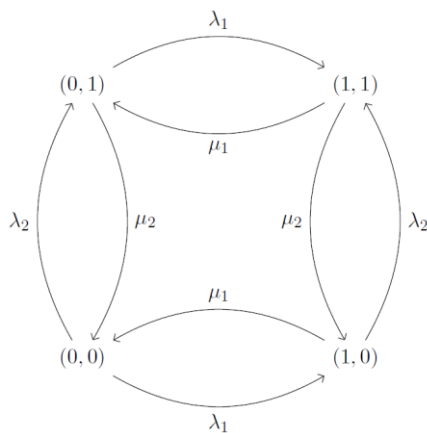
On pose

- état $(0, 0)$: machines 1 et 2 fonctionnelles,
- état $(0, 1)$: machine 1 fonctionnelle et machine 2 brisée,
- état $(1, 0)$: machine 1 brisée et machine 2 fonctionnelle,
- état $(1, 1)$: machines 1 et 2 brisées.

La chaîne de Markov à temps continu $\{X_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ ayant pour ensemble d'états

$$E = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\},$$

ayant pour diagramme de transition



et pour probabilités de transition

$p_{i,j}$	$(0, 0)$	$(0, 1)$	$(1, 0)$	$(1, 1)$
$(0, 0)$	0	$\frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}$	$\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$	0
$(0, 1)$	$\frac{\mu_2}{\lambda_1 + \mu_2}$	0	0	$\frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \mu_2}$
$(1, 0)$	$\frac{\mu_1}{\lambda_2 + \mu_1}$	0	0	$\frac{\lambda_2}{\lambda_2 + \mu_1}$
$(1, 1)$	0	$\frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2}$	$\frac{\mu_2}{\mu_1 + \mu_2}$	0

modélisent le fonctionnement des deux machines.

Exercice 4.14 Des clients potentiels arrivent à une station-service « avec service » ayant une seule pompe selon un processus de Poisson ayant pour taux 20 voitures à l'heure. Cependant, un client entrera à la station seulement s'il n'y a pas plus de deux voitures (incluant celle en train de se faire remplir). Supposer que le temps requis pour se faire servir est distribué exponentiellement avec une moyenne de cinq minutes.

- a) Quelle proportion du temps l'employé servira un client ?
b) Quelle fraction des clients potentiels rebrousseront chemin ?

Soit X_t le nombre de clients à la station service au temps t . $\{X_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ est un processus de naissance et de mort, où

$$\lambda_n = \begin{cases} 20 & \text{si } n \in \{0, 1, 2\}, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad \text{et} \quad \mu_n = \begin{cases} 12 & \text{si } n \in \{1, 2, 3\}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

De l'exemple 4.21, les probabilités limites pour ce processus sont

$$p_0 = \frac{1}{1 + \frac{20}{12} + \left(\frac{20}{12}\right)^2 + \left(\frac{20}{12}\right)^3} = \frac{27}{272} \approx 0,0993,$$

$$p_1 = \frac{20}{12} \cdot p_0 = \frac{45}{272} \approx 0,1654,$$

$$p_2 = \left(\frac{20}{12}\right)^2 \cdot p_0 = \frac{75}{272} \approx 0,2757,$$

$$p_3 = \left(\frac{20}{12}\right)^3 \cdot p_0 = \frac{125}{272} \approx 0,4596.$$

- a) La proportion du temps où l'employé ne sert pas un client est p_0 . Ainsi, la proportion du temps où il sert un client est

$$\begin{aligned} 1 - p_0 &= 1 - \frac{27}{272} \\ &= \frac{245}{272} \approx 0,9007. \end{aligned}$$

- b) La proportion des clients potentiels qui rebrousseront chemin est la proportion de clients arrivant trouvant 3 clients dans la station. Le taux d'arrivée de tels clients est $20 \cdot p_3$ et le taux d'arrivée des clients est 20. Ainsi, la proportion des clients potentiels qui rebrousseront chemin est

$$\begin{aligned} \frac{20 \cdot p_3}{20} &= p_3 \\ &= \frac{125}{272} \approx 0,4596. \end{aligned}$$

Exercice 4.15 À une station de taxi, les taxis et les clients arrivent respectivement selon un processus de Poisson de taux de un et de deux par minute. Un taxi attendra peu importe le nombre de taxis déjà présents. Toutefois, un client ne trouvant pas de taxi en attente quittera la station.

- a) Trouver le nombre moyen de taxis en attente.
- b) Trouver la proportion de clients arrivant à la station qui aura un taxi.

Soit $\{X_t\}$ le nombre de taxis en attente à la station. Alors $\{X_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ est un processus de naissance et de mort $M|M|1$, avec $\lambda_n = 1$ et $\mu_n = 2$.

- a) Le nombre moyen de taxis en attente est

$$\frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{2 - 1} = 1.$$

- b) La proportion de clients arrivant à la station qui aura un taxi est la proportion de clients arrivant à la station trouvant au moins un taxi en attente. Le taux d'arrivée de tels clients est $2 \cdot (1 - p_0)$. La proportion de telles arrivées est donc

$$\frac{2 \cdot (1 - p_0)}{2} = 1 - p_0 = 1 - \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{1}{2}.$$

Exercice 4.16 Soit $\{X_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ une chaîne de Markov à temps continu et soient $p_{i,j}(t)$ ses probabilités de transition. Montrer que, pour tout $s, t \in \mathbb{R}_+$,

$$p_{i,j}(s+t) = \sum_{k=0}^{\infty} p_{i,k}(s) \cdot p_{k,j}(t).$$

Ce résultat a été démontré au lemme 4.16.

Exercice 4.17 Montrer, dans le cas de la file d'attente (M/M/1), que les probabilités limites p_i existent lorsque $\lambda < \mu$. Déterminer alors les probabilités limites pour chacun des états.

Voir l'exercice 4.7.