Prénom : ______________________ **Nom :** ______________________

Université de Sherbrooke
Faculté des sciences
Département de mathématiques

Processus stochastiques
STT489

Examen intratrimestriel
Trimestre d'été 2024

Date : Mardi 25 juin 2024 **Enseignant :** Sylvain Bérubé

Heure : 13h30 à 15h20 (110 minutes) **Local :** D3-2031

Consignes

- Répondre directement sur le questionnaire. Au besoin, utiliser la page 12 pour compléter vos démarches.
- L'examen est sur 110 points : l'accumulation de n points correspond à une note finale de $\min\{n, 100\}$.
- Justifier toutes vos réponses.
- L'usage de la calculatrice est autorisé.
- Vous avez droit à un résumé n'excédant pas une page (recto verso). Ce résumé peut contenir des parties théoriques du cours, des définitions, des formules mathématiques de même que des techniques de résolution. Cependant, aucun exemple complet ne peut y apparaitre, ni preuve.
- Pendant l'examen, la communication entre personnes étudiantes ou avec toute autre personne au sujet de l'examen ou du contenu du cours est interdite. En remettant votre examen, vous certifiez être l'unique auteur du contenu présenté.

Pondération

Cet examen compte pour 30 % de la note finale.

Question 1 : ________ / 08	Question 4 : ________ / 16	Question 7 : ________ / 14
Question 2 : ________ / 10	Question 5 : ________ / 12	
Question 3 : ________ / 20	Question 6 : ________ / 30	**Total : ________ / 110**

Note

Cet examen comprend en tout 12 pages et 7 questions. Vérifier si vous avez en main le texte complet avant de commencer à répondre aux questions.

Question 1 **8 points**

Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes et soit $y \in \mathbb{R}$ tel que $p_Y(y) \neq 0$. Montrer que

$$\sum_x p_{X|Y}(x \mid y) = 1.$$

Question 2 **10 points**

Soit $X_1, X_2, \dots$ une suite de variables aléatoires discrètes telles que $E(X_i) = \mu$ pour tout i et soit N une variable aléatoire à valeurs entières positives, où les variables $N, X_1, X_2, \dots$ sont mutuellement indépendantes. Montrer que

$$E\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right) = E(N) \cdot \mu.$$

Note : Il s'agit de l'identité de Wald.

Question 3 **4 + 8 + 8 = 20 points**

On choisit au hasard un nombre Y selon une loi uniforme discrète ayant pour support l'ensemble $\{1, 2, \dots, 10\}$. Autrement dit,

$$P(Y = y) = \begin{cases} 1/10 & \text{si } y \in \{1, 2, \dots, 10\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Ensuite, on choisit un nombre X selon une loi uniforme continue sur l'intervalle $[0, Y]$.

Rappel :

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

a) Donner l'espérance et la variance de $X \mid Y = y$, où $y \in \{1, 2, \dots, 10\}$.

b) Démontrer que $E(X) = 2{,}75$ en effectuant un calcul d'espérance par conditionnement sur Y, c'est-à-dire en utilisant la formule $E(X) = E\big(E(X \mid Y)\big)$.

c) Démontrer que $Var(X) \approx 5{,}2708$ en utilisant au besoin la formule

$$Var(X) = E(Var(X \mid Y)) + Var\big(E(X \mid Y)\big).$$

Question 4 **$2 + 8 + 6 = 16$ points**

Un dé équilibré jaune à 6 faces est lancé successivement. Soit X le nombre de lancers nécessaires avant d'obtenir le nombre quatre pour la première fois et soit Y le nombre de lancers nécessaires avant d'obtenir un nombre pair pour la première fois. Note : Au besoin, utiliser J_i pour représenter la valeur du dé jaune lors du lancer i.

a) Calculer les espérances $E(X)$ et $E(Y)$.

b) Calculer $E(X \mid Y = 1)$.

c) On décide de lancer $10X$ dés équilibrés rouges à 6 faces et d'additionner les valeurs indiquées sur l'ensemble des dés. Par exemple, si ça a pris 7 lancers du dé jaune avant d'obtenir un quatre pour la première fois, alors $X = 7$, ce qui signifie qu'on lancera $10 \cdot 7 = 70$ dés rouges puis on additionnera les valeurs indiquées par ces 70 dés rouges. Calculer l'espérance de la somme des $10X$ dés rouges lancés (dans le cas général et non dans le cas où $X = 7$). Note : Au besoin, utiliser R_i pour représenter la valeur du dé rouge i.

Question 5 **12 points**

Soit $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une chaine de Markov homogène ayant E pour espace d'états et P comme matrice de transition. Pour $a \in \mathbb{N}$, $b, c \in \mathbb{N}^*$ et $i, j, k \in E$, démontrer que

$$P(X_{a+b+c} = k, X_{a+b} = j \mid X_a = i) = p_{i,j}^{(b)} \cdot p_{j,k}^{(c)}.$$

sans vous référer à l'équation de Chapman-Kolmogorov ni à ses corolaires.

Question 6 **2 + 4 + 2 + 4 + 4 + 4 + 5 + 5 = 30 points**

Considérer la chaine de Markov $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ayant pour espace d'états $E = \mathbb{N}$ et dont les probabilités de transition sont

$$p_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 0 \text{ et } j = 1 \\ \dfrac{1}{i+1} & \text{si } j = i + 1 \text{ et } i \neq 0 \\ \dfrac{i}{i+1} & \text{si } j = 0 \text{ et } i \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Autrement dit, $p_{0,1} = 1$, et pour $i \in \mathbb{N}^*$, $p_{i,i+1} = 1/(i+1)$ et $p_{i,0} = i/(i+1)$.

Posons $T_{i,j} = \min\{n \in \mathbb{N}^* \mid X_n = j, X_0 = i\}$ et $f_{i,j}^{(n)} = P(T_{i,j} = n)$.

Attention : Il ne s'agit pas de la même question que la question 7 du devoir 2.

a) Dessiner le diagramme de transition de cette chaine de Markov (inclure minimalement les états 0 à 4).

b) Démontrer que cette chaine est irréductible.

c) L'état 0 est-il un état de retour ou un état de non-retour ? Justifier votre réponse.

d) L'état 0 est-il périodique ou apériodique ? S'il est périodique, quelle est sa période ? Justifier votre réponse.

e) Calculer $p_{1,1}^{(4)}$.

f) Montrer que $f_{0,0}^{(n)} = \frac{n-1}{n!}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

g) Démontrer que l'état 0 est récurrent.

h) L'état 0 est-il récurrent positif ou récurrent nul ? Justifier votre réponse.

Question 7 **2 + 2 + 2 + 8 = 14 points**

Une compagnie d'assurance classifie ses clients en trois catégories : 1 (mauvais), 2 (satisfaisant), 3 (excellent). D'une année à l'autre, les clients changent de catégorie selon le tableau suivant :

	1	**2**	**3**
1	0,6	0,4	0
2	0,1	0,8	0,1
3	0	0,4	0,6

Par exemple, un assuré catégorisé 1 (mauvais) a 60 % de chance de demeurer dans cette catégorie l'année suivante, 40 % de chance de transiter vers la catégorie 2 (satisfaisant) et aucune chance de transiter vers la catégorie 3 (excellent). Soit X_n la catégorie d'un client au début de l'année n.

a) Expliquer pourquoi $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaine de Markov.

b) Montrer que la chaine est irréductible.

c) Montrer que tous les états sont ergodiques.

d) À long terme, quelle sera la proportion des assurés dans chaque catégorie ?