Département de mathématiques de l'Université de Sherbrooke
Sylvain Bérubé, mai 2021

Chapitre 5
Files d'attente

Dans cette section, on va étudier une classe de modèles dans lesquels des individus arrivent de façon aléatoire à un centre de service. À leur arrivée, ils attendent dans une file jusqu'à ce qu'ils soient servis. Lorsqu'ils sont servis, ils quittent le centre. Pour ces modèles, on est intéressé à obtenir certaines informations, comme le nombre moyen d'individus dans le système (ou dans la file d'attente) et le temps moyen qu'un individu passera dans le système (ou dans la file d'attente).

5.1 Équations de coût

Notation 5.1 Des quantités d'intérêts pour les modèles de file d'attente sont :

— L : le nombre moyen d'individus dans le système ;
— L_Q : le nombre moyen d'individus dans la queue ;
— W : le temps d'attente moyen d'un individu dans le système ;
— W_Q : le temps d'attente moyen d'un individu dans la queue.

Proposition 5.2 Soit λ_a le taux d'arrivée des individus. Si on fait payer les individus entrant dans le sytème, le taux moyen auquel le système amasse de l'argent est égal au produit du taux d'arrivé des individus λ_a par le montant moyen payé par individu.

Exemple 5.3 On fait payer 1 \$ à chaque individu pour chaque unité de temps dans le système. Alors

$$L = \lambda_a \cdot W.$$

Il s'agit de l'**équation de Little**.

Exemple 5.4 On fait payer 1 \$ à chaque individu pour chaque unité de temps dans la queue. Alors

$$L_Q = \lambda_a \cdot W_Q.$$

Exemple 5.5 On fait payer 1 \$ à chaque individu pour chaque unité de temps passée en traitement au guichet. Si S représente le temps d'un individu passé en service, alors

$$\text{Nombre moyen d'individus en service} = \lambda_a \cdot E(S).$$

5.2 Probabilité en régime stationnaire

Définition 5.6 Soit X_t le nombre d'individus dans le système au temps t. Posons

$$p_n = \lim_{t\to\infty} P(X_t = n)$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. On peut vérifier, si le processus est régénératif, que p_n représente la proportion du temps où le système contient exactement n individus. On l'appelle parfois la **probabilité stationnaire** d'avoir n individus dans le système.

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

— a_n : proportion d'individu qui trouvent n individus dans le système lorsqu'ils arrivent ;
— d_n : proportion d'individu qui laissent n individus dans le système lorsqu'ils quittent.

Exemple 5.7 Considérons un modèle de file d'attente dans lequel tous les individus ont un temps de service égal à 1, et où la durée entre l'arrivée de deux individus est toujours plus grande que 1. Ainsi, $a_0 = d_0 = 1$, mais $p_0 \neq 1$.

Proposition 5.8 Si les individus arrivent un à la fois et sont servis un à la fois, alors $a_n = d_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Proposition 5.9 Pour des arrivés selon un processus de Poisson, $p_n = a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

5.3 Modèles exponentiels

5.3.1 Système M|M|1 avec queue infinie

Rappel du modèle M|M|1 :

— les arrivés se font selon un processus de Poisson d'intensité λ ;
— les temps de service suivent des lois exponentielles de paramètre μ indépendantes les unes des autres ;
— il n'y a qu'un seul centre de service, et s'il est occupé, l'individu arrivant se place dans la file d'attente.

On a vu à la section 4.4 que les probabilités limites sont

$$p_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)$$

lorsque $\lambda/\mu < 1$.

Proposition 5.10 Le nombre moyen d'individus dans le système est

$$L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}.$$

De plus,

$$W = \frac{1}{\mu - \lambda}, \quad W_Q = \frac{\mu}{\mu(\mu - \lambda)}, \quad L_Q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)}.$$

Exemple 5.11 Des individus arrivent selon un processus de Poisson à un taux d'un aux douze minutes et le temps de service est exponentiel à un taux d'un aux huit minutes.

a) Déterminer L et W.

b) Déterminer L et W si on augmente de 20 % le taux d'arrivée.

Proposition 5.12 Soit W^* le temps passé dans le système par un individu arbitraire. Alors

$$W^* \sim \mathrm{Exp}(\mu - \lambda).$$

5.3.2 Système M|M|1 avec queue finie

On admet que le système ne peut contenir plus de N individus : tout individu arrivant lorsque le système contient N individus rebroussera chemin. On a vu à la section 4.4 que les probabilités limites sont

$$p_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \cdot \left(\frac{1 - \frac{\lambda}{\mu}}{1 - \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{N+1}}\right).$$

Proposition 5.13 Dans le cas M|M|1 borné à N individus dans le système, le nombre moyen d'individus dans le système est

$$L = \frac{\lambda\left(1 + N\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{N+1} - (N+1)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{N}\right)}{(\mu - \lambda)\left(1 - \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{N+1}\right)}.$$

Proposition 5.14 Dans le cas M|M|1 borné à N individus dans le système, le temps d'attente moyen d'un individu dans le système est

$$W = \begin{cases} \dfrac{L}{\lambda} & \text{si on prend en compte les individus rebroussant chemin,} \\ \dfrac{L}{\lambda(1 - p_N)} & \text{si on ne prend pas en compte les individus rebroussant chemin.} \end{cases}$$

Exemple 5.15 Supposons qu'il en coûte μ \$/h pour offrir un service à un taux μ, que chaque client rapporte 10 \$ de profit, et que les clients arrivent selon un processus de Poisson à un taux de 4 par heure. Sachant que le système a une capacité de 3 individus, déterminer la valeur de μ qui maximise le profit.

5.3.3 Système M|M|2 séquentiel avec queue finie

Exemple 5.16 Un petit salon de coiffure dispose de deux chaises. Un client entrant ira sur la chaine 1 et se fera laver les cheveux. Lorsque ce sera fait, il ira à la chaise 2 pour se faire couper les cheveux si elle est libre, ou attendra patiemment qu'elle se libère. Supposons qu'un client potentiel entre dans le salon de coiffure seulement si la chaise 1 est libre. Supposons que les arrivées des clients potentiels suivent un processus de Poisson de paramètre λ, et que les temps de service aux chaises 1 et 2 sont indépendants et ont respectivement des taux exponentiels de μ_1 et μ_2.

a) Déterminer la proportion des clients potentiels qui entrent dans le système.

b) Déterminer le nombre moyen de clients dans le système.

c) Déterminer le temps moyen passé dans le système pour un client qui y entre.

d) Calculer les réponses aux sous-questions précédentes si $\lambda = 2$, $\mu_1 = 10$ et $\mu_2 = 2$.

5.4 Exercices supplémentaires

Exercice 5.1 Des voitures de Formule 1 se présentent aux puits au plus à toutes les minutes. Supposons que le temps de service est constant à 10 secondes. Déterminer les valeurs de a_n, d_n et p_n pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour les variables où cela s'avèrerait impossible, déterminer seulement si elles sont nulles ou pas.

Exercice 5.2 Soit un système M|M|1 où les arrivés se font selon un processus de Poisson d'intensité λ et les temps de service suivent des lois exponentielles de paramètre μ indépendantes les unes des autres.

a) Calculer le nombre moyen d'arrivées pendant une période de service.

b) Calculer la probabilité qu'aucun individu arrive pendant une période de service.

Exercice 5.3 Dans une usine, les machines se brisent à un taux exponentiel de six par heure. Il y a un unique mécanicien pouvant réparer les machines défectueuses à un taux exponentiel de huit par heure. Le coût induit en production perdue lorsque les machines sont brisées est de 10 $ par heure par machine. Quel est le taux du coût moyen imputé aux machines brisées ?

Exercice 5.4 Deux individus utilisent trois serveurs. Lorsque le service au serveur i est complété, l'individu quitte ce serveur et se rend immédiatement au serveur non occupé par l'autre individu. Ainsi, deux serveurs sont toujours occupés pendant que l'autre est inactif. Si le temps de service au serveur i est exponentiel de taux μ_i, quelle proportion de temps le serveur i est-il inactif ?

Exercice 5.5 Montrer que W est plus petit dans un modèle M|M|1 ayant des arrivées au taux λ et des départs au taux 2μ que dans un modèle M|M|2 ayant des arrivées au taux λ et des départs au taux μ.

Exercice 5.6 Un groupe de n individus se déplacent entre deux serveurs. Lorsqu'un individu a été servi à un serveur, il se rend à l'autre, où il se joindra à la file d'attente si un individu est en train de se faire servir. Tous les temps de service sont exponentiels de paramètre μ. Trouver la proportion de temps où il y a j individus au serveur 1, où $j \in \{0, \dots, n\}$.

Exercice 5.7 Une boulangerie produit des baguettes de pain selon un processus de Poisson de taux λ. Cependant, elle a de l'espace pour entreposer au plus k baguettes, et ainsi arrête la production lorsque k baguettes sont dans les étagères. Les clients arrivent à la boulangerie selon un processus de Poisson de taux μ. Chaque client achète une baguette et quitte immédiatement après avec la baguette, ou les mains vides s'il n'y avait pas de baguette de prête.

a) Trouver la proportion de clients qui repartiront les mains vides.

b) Calculer le temps moyen qu'une baguette passera sur les étagères.

c) Calculer le nombre moyen de baguettes sur les étagères.

d) Calculer les réponses aux sous-questions précédentes si $\lambda = 30$, $\mu = 30$ et $k = 15$.

Exercice 5.8 Une épicerie dispose de deux caisses, chacune opérant au taux μ. Les caisses fonctionnent de la façon suivante :

— une file d'attente unique alimente les deux caisses ;

— la première caisse est opérée par un caissier permanent, et la seconde par un commis à l'entrepôt qui se rend immédiatement à la caisse lorsque deux clients ou plus se présentent aux caisses. Le commis retourne à l'entrepôt dès qu'il a complété son service et qu'il y a moins que deux clients aux caisses.

a) Soit p_n la proportion de temps où il y a n clients aux caisses. Établissez les équations pour p_n et résolvez-les.

b) À quel taux est-ce que le système va de 0 à 1 client ? De 2 à 1 client ?

c) Quelle est la proportion du temps passé par le commis à l'entrepôt à la caisse ?

Exercice 5.9 Une boulangerie produit des baguettes de pain selon un processus de Poisson de taux 45 par heure, et peut entreposer autant de baguettes qu'elle le souhaite. Les clients arrivent à la boulangerie selon un processus de Poisson de taux 50 par heure. Chaque client achète une baguette et quitte immédiatement après avec la baguette, ou alors il quitte les mains vides s'il n'y avait pas de baguette de prête.

a) Trouver la proportion de clients qui repartiront les mains vides.

b) Calculer le temps moyen qu'une baguette passera sur les étagères.

c) Calculer le nombre moyen de baguettes sur les étagères.

d) À l'ouverture du magasin, aucune baguette n'est produite. Quelle est la probabilité que les cinq premiers clients se présentant au magasin repartent les mains vides ?