Devoir 1

À remettre le mercredi 29 mai 2024 à 10h30 au début de la séance de cours.

Question 1 (3 + 3 + 3 + 3 = 12 points)
La fonction de masse conjointe des variables aléatoires X, Y et Z est donnée par

$$p_{X,Y,Z}(1,\ 1,\ 1) = \frac{1}{10}, \quad p_{X,Y,Z}(1,\ 2,\ 1) = 0, \quad p_{X,Y,Z}(2,\ 1,\ 1) = 0, \quad p_{X,Y,Z}(2,\ 2,\ 1) = \frac{1}{4},$$
$$p_{X,Y,Z}(1,\ 1,\ 2) = \frac{1}{20}, \quad p_{X,Y,Z}(1,\ 2,\ 2) = \frac{1}{24}, \quad p_{X,Y,Z}(2,\ 1,\ 2) = \frac{1}{8}, \quad p_{X,Y,Z}(2,\ 2,\ 2) = \frac{1}{8},$$
$$p_{X,Y,Z}(1,\ 1,\ 3) = \frac{1}{10}, \quad p_{X,Y,Z}(1,\ 2,\ 3) = \frac{1}{48}, \quad p_{X,Y,Z}(2,\ 1,\ 3) = \frac{1}{8}, \quad p_{X,Y,Z}(2,\ 2,\ 3) = \frac{1}{16}.$$

a) Calculer $E(Z)$.
b) Calculer $E(Z \mid X = 1)$.
c) Calculer $E(Z \mid X = 1, Y = 2)$.
d) Calculer $E(Z \mid X = 1, Z = 2)$.

Question 2 (12 points)
Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant chacune une loi géométrique de paramètre p. Trouver la loi de probabilité de $X \mid X + Y = n$, où $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

Question 3 (12 points)
La fonction de densité conjointe des variables aléatoires continues X, Y est

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \dfrac{e^{-y}(y^2 - x^2)}{8} & \text{si } 0 < y < \infty \quad \text{et} \quad -y \leq x \leq y, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Calculer $E(X \mid Y = y)$.

Question 4 (3 + 3 + 4 + 4 = 14 points)
Soit X, Y et Z trois variables aléatoires continues telles que X et Y sont indépendantes et

$$X \sim \text{Unif}(-1,\ 1), \quad Y \sim \text{Unif}(-1,\ 1), \quad Z = X + Y.$$

a) Montrer que

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 0{,}25 & \text{si } x, y \in [-1,\ 1], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

b) Calculer $f_{X,Z}(x, z)$.
c) Montrer que

$$f_Z(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} - \dfrac{|z|}{4} & \text{si } z \in [-2,\ 2], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

d) Montrer que

$$X \mid Z = 0{,}5 \sim \text{Unif}(-0{,}5,\ 1).$$

Question 5 (12 points)
Montrer que si X et Y sont deux variables aléatoires continues, alors

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} E(X \mid Y = y) \cdot f_Y(y)\, dy.$$

Question 6 (12 points)
Deux joueurs lancent à tour de rôle une pièce de monnaie ayant une probabilité p de tomber sur face. Le premier joueur à obtenir face est déclaré gagnant. Quelle est la probabilité que le premier joueur à lancer la pièce soit le gagnant ?

Question 7 (10 + 2 + 2 = 14 points)
Une pièce de monnaie ayant une probabilité p de tomber sur face est lancée jusqu'à ce que deux des trois plus récents lancés soient face. Soit N le nombre de lancés requis. À noter que si les deux premiers lancers tombent sur face, alors $N = 2$.

a) Calculer $E(N)$ en fonction de p.

b) Calculer $E(N)$ si la pièce de monnaie est équilibrée.

c) Calculer la valeur de p pour laquelle $E(N) = 25$.

Question 8 (8 + 4 = 12 points)
Un ensemble de n dés est lancé au premier tour. Chaque dé ayant 6 comme résultat est mis de côté et les autres sont lancés de nouveau au prochain tour. Ce processus est répété jusqu'à ce que tous les dés aient 6 comme résultat. Soit T_n le nombre de tours requis pour compléter le processus lorsqu'on a n dés et soit $m_n = E(T_n)$.

a) Trouver une formule récursive pour m_n et l'utiliser pour calculer m_1 à m_5.

b) Soit X_i le nombre de dés lancés au tour i. Calculer $E\left(\sum_{i=1}^{T_n} X_i\right)$.

Bonus 1
Dans un tournoi à élimination simple regroupant 2^n compétiteurs, les joueurs sont appariés aléatoirement et jouent une partie. Les perdants sont éliminés et les 2^{n-1} joueurs restant sont appariés aléatoirement et jouent une seconde partie. Ce processus se poursuit pendant n étapes, après quoi un seul joueur demeure invaincu et est déclaré le vainqueur. Supposons que les joueurs sont numérotés de 1 à 2^n, et que lorsque deux joueurs s'affrontent, celui ayant le plus petit numéro a une probabilité $p \in [0{,}5,\ 1]$ de l'emporter.

a) Quelle est la probabilité que le joueur 1 remporte le tournoi ?

b) Quelle est la probabilité que le joueur 2^n remporte le tournoi ?

c) Quelle est la probabilité que le joueur 2 remporte le tournoi ?

d) Calculer les probabilités en a), b) et c) lorsque $p = 0{,}8$ et qu'il y a 2^4 compétiteurs.

Bonus 2
Alexa et Bianca s'affrontent à la finale de tennis du US Open. Alexa remporte chaque échange avec une probabilité $p = 0{,}55$ lorsqu'elle effectue le service, et avec une probabilité $q = 0{,}47$ lorsque c'est son adversaire qui effectue le service. Si Alexa a le service lors du premier échange, quelle est la probabilité qu'elle remporte le tournoi ?