Processus stochastiques (STT489) – Sylvain Bérubé – Été 2024

Département de mathématiques de l'Université de Sherbrooke

Devoir 0

À remettre le vendredi 10 mai 2024 à 8h30 au début de la séance de cours.

Question 1 (5 + 5 + 5 = 15 points)

Le quotient intellectuel suit une loi normale d'espérance 100 et d'écart-type 15. Dans le film Forrest Gump, le personnage principal est d'abord taxé d'un QI 75 par le système scolaire, pour ensuite être revu à 160 alors qu'il évolue dans l'armée.

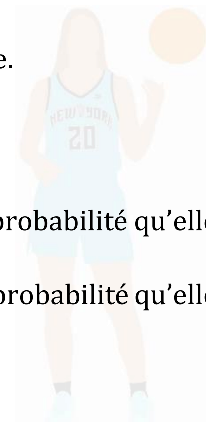
a) Quelle est la probabilité qu'un individu ait un QI inférieur à 75 ? Arrondissez à 4 décimales.

b) Quelle est la probabilité qu'un individu ait un QI supérieur à 160 ? Exprimez votre réponse sous la forme 1 sur x, où x est arrondi à l'unité.

c) Quel doit être son QI pour être dans le top 2 % ? Arrondissez votre réponse au dixième.

Question 2 (8 + 8 = 16 points)

La joueuse de basketball Sabrina Ionescu réussit 44,8 % de ses lancés de 3 points.



a) Lors d'une partie au cours de laquelle elle effectue 15 lancés de 3 points, quelle est la probabilité qu'elle en réussisse exactement 10 ?

b) Lors d'une saison au cours de laquelle elle effectue 284 lancés de 3 points, quelle est la probabilité qu'elle en réussisse au moins 142 ?

Question 3 (6 + 6 + 6 + 6 = 24 points)

Une roulette française est composée de 37 cases comprenant les numéros allant de 0 à 36. Si un joueur mise sur un numéro et l'emporte, alors il reçoit 35 fois sa mise en plus de conserver sa mise, autrement il perd sa mise.

a) Si un joueur mise 10 $ sur une case pour une partie, quels sont l'espérance et l'écart-type de son profit ?

b) Si un joueur mise 10 $ sur une case pour 100 parties, quels sont l'espérance et l'écart-type de son profit ?

c) Si un joueur décide de jouer jusqu'à ce qu'il ait un premier gain, quelles sont l'espérance et l'écart-type du nombre de parties qu'il devra jouer ?

d) Si un joueur décide de jouer jusqu'à ce qu'il ait un premier gain, quelle est la probabilité qu'il ait perdu plus de 1 000 $ avant son premier gain ?

Question 4 (15 points)

Soit X une variable aléatoire continue telle que $X \sim \mathrm{Unif}(a, b)$. Démontrez que

$$E(X) = (a+b)/2 \quad \text{et} \quad \sigma(X) = (b-a)/\sqrt{12}.$$

Question 5 (10 points)

Soit X une variable aléatoire continue exponentielle de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. À partir de sa fonction de densité, démontrez que sa fonction de répartition est

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

Question 6 (20 points)

Soit X et Y deux variables aléatoires continues et indépendantes suivant chacune une loi de Poisson, respectivement de paramètres λ_1 et λ_2. Démontrez que $X + Y \sim \mathrm{Poisson}(\lambda_1 + \lambda_2)$.