Département de mathématiques de l'Université de Sherbrooke
Sylvain Bérubé, mai 2021

CHAPITRE 4
CHAÎNES DE MARKOV À TEMPS CONTINU

En étudiant les processus de Poisson, nous avons rencontré notre premier exemple de chaîne de Markov à temps continu. En effet, si $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ est un processus de Poisson d'intensité λ, et si on définit les états de la chaîne de Markov par les valeurs prises par N_t (c'est-à-dire $0, 1, 2, \dots$), alors on a une chaîne de Markov à temps continu.

4.1 Définitions

Définition 4.1 Soit $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ un processus stochastique prenant ses valeurs dans un ensemble $E \subseteq \mathbb{N}$, nommé l'**espace d'états**. On dit que ce processus est une **chaîne de Markov à temps continu** si, pour tout $s, t \in \mathbb{R}_+$, pour tout $i, j \in E$ et pour tout $x(u) \in E$ avec $u \in [0, s[$,

$$P(X_{s+t} = j \mid X_s = i, X_u = x(u) \text{ pour tout } u \in [0, s[) = P(X_{s+t} = j \mid X_s = i).$$

De plus, on fait l'hypothèse que les probabilités $P(X_{s+t} = j \mid X_s = i)$ sont indépendantes de s. Ainsi,

$$P(X_{s+t} = j \mid X_s = i) = P(X_t = j \mid X_0 = i)$$

pour tout s. On dit dans ce cas que la chaîne de Markov admet des **transitions homogènes**.

Exemple 4.2 Soit $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ une chaîne de Markov à temps continu ayant E pour espace d'états. Supposons que $X_0 = i$ et que $X_s = i$ pour tout $s \in [0, 10]$. Déterminer $P(X_t = i \text{ pour tout } t \in [10, 15])$.

Définition 4.3 Une chaîne de Markov à temps continu est un processus stochastique ayant la propriété qu'à chaque fois qu'il est dans l'état i :

a) le temps qu'il y séjourne avant de faire une transition dans un autre état, noté T_i, suit une loi exponentielle de paramètre v_i,

b) lorsqu'il le quitte, il le fait vers l'état j avec probabilité $p_{i,j}$, où $p_{i,i} = 0$ et $\sum_{j\in E} p_{i,j} = 1$,

c) les variables T_i et les prochains états visités sont des variables aléatoires indépendantes.

Exemple 4.4 Une chaîne de montage a deux postes de travail. Une pièce y entre lorsque la chaîne est vide, est modifiée au premier poste, puis au second. Supposons que les temps de modification aux deux postes sont indépendants de lois exponentielles de paramètres λ_1 et λ_2 respectivement. Supposons que l'arrivée des pièces suit un processus de Poisson d'intensité λ.

4.2 Processus de naissance (arrivée) et de mort (départ)

Définition 4.5 Une chaîne de Markov à temps continu $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ ayant $E = \mathbb{N}$ pour espace d'états est un **processus de naissance et de mort** si

a) $p_{i,j} = 0$ lorsque $j \notin \{i-1, i+1\}$,

b) lorsque $X_t = n$, le temps avant la prochaine arrivée suit une loi exponentielle de paramètre λ_n et est indépendante du temps avant le prochain départ, qui, lui, suit une loi exponentielle de paramètre μ_n.

Remarques

a) Le temps de séjour à l'état 0 suit une loi exponentielle de paramètre $v_0 = \lambda_0$. De plus, de l'état 0, le seul état accessible est l'état 1, d'où $p_{0,1} = 1$.

b) Pour tout état $i \neq 0$, le temps de séjour à l'état i suit une loi exponentielle de paramètre $v_i = \lambda_i + \mu_i$. De plus,

$$p_{i,i+1} = \frac{\lambda_i}{\lambda_i + \mu_i} \quad \text{et} \quad p_{i,i-1} = \frac{\mu_i}{\lambda_i + \mu_i}.$$

Exemple 4.6 (Processus de naissance pure) Pour tout n, $\mu_n = 0$ et $\lambda_n = \lambda$.

Exemple 4.7 (Processus de Yule) Une population est formée d'individus immortels, où chaque individu produit une naissance selon un temps suivant une loi exponentielle de paramètre λ, indépedants les uns des autres.

Exemple 4.8 (Modèle de croissance linéaire) Chaque individu produit une naissance selon un temps suivant une loi exponentielle de paramètre λ et meurt selon un temps suivant une loi exponentielle de paramètre μ.

Exemple 4.9 (Modèle de croissance linéaire avec immigration) Chaque individu produit une naissance selon un temps suivant une loi exponentielle de paramètre λ et meurt selon un temps suivant une loi exponentielle de paramètre μ. De plus, des naissances dues à un facteur externe (immigration) surviennent à un taux θ.

Exemple 4.10 (Modèle d'immigration/émigration)

Exemple 4.11 (File d'attente M|M|1) Un seul guichet, où les clients arrivent selon un processus de Poisson de paramètre λ et les temps de service sont indépendants de loi exponentielle μ.

Exemple 4.12 (File d'attente multiserveurs M|M|s) On a s guichets, où les clients arrivent selon un processus de Poisson de paramètre λ (file unique) et les temps de service sont indépendants de loi exponentielle μ.

4.3 Équations différentielles de Kolmogorov

Définition 4.13 Soit $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ une chaîne de Markov à temps continu ayant pour espace d'états E. Les **probabilités de transition** de cette chaîne de Markov sont $p_{i,j}(t) = P(X_t = j \mid X_0 = i)$, où $i, j \in E$ et $t \in \mathbb{R}_+$.

Les deux lemmes suivants vont nous permettre de construire un ensemble d'équations différentielles pour obtenir les valeurs $p_{i,j}(t)$. Afin d'en faciliter la démonstration, nous allons d'abord introduire une définition alternative aux processus de Poisson.

Définition 4.14 Le processus de comptage $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ est une processus de Poisson de paramètre λ si

a) $N_0 = 0$.
b) Le processus est à accroissements indépendants et stationnaires.
c) $P(N_h = 1) = \lambda h + o(h)$.
d) $P(N_h \geq 2) = o(h)$.

Lemme 4.15 Soit $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ une chaîne de Markov à temps continu ayant pour espace d'états E.

a) Pour tout $i \in E$,
$$v_i = \lim_{h\to 0} \frac{1 - p_{i,i}(h)}{h}.$$
b) Pour tout $i, j \in E$, si $i \neq j$, alors
$$v_i \cdot p_{i,j} = \lim_{h\to 0} \frac{p_{i,j}(h)}{h}.$$

Lemme 4.16 Soit $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ une chaîne de Markov à temps continu ayant pour espace d'états E. Pour tout $i, j \in E$ et pour tout $s, t \in \mathbb{R}_+$,
$$p_{i,j}(s+t) = \sum_{k=0}^{\infty} p_{i,k}(s) \cdot p_{k,j}(t)$$

Théorème 4.17 Soit $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ une chaîne de Markov à temps continu ayant pour espace d'états E. Pour tout $i, j \in E$ et pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,
$$\frac{d}{dt}\left(p_{i,j}(t)\right) = \sum_{k\in E\setminus\{j\}} v_k \cdot p_{k,j} \cdot p_{i,k}(t) - v_j \cdot p_{i,j}(t).$$

Proposition 4.18 Pour un processus de naissance pur,
$$\begin{cases} p_{i,i}(t) = e^{-\lambda_i t} & \text{pour tout } i \in \mathbb{N}, \\ p_{i,j}(t) = \lambda_{j-1} \cdot e^{-\lambda_j t} \cdot \displaystyle\int_0^t e^{\lambda_j t} \cdot p_{i,j-1}(s)\, ds & \text{pour tout } j > i. \end{cases}$$

Exemple 4.19 Des clients arrivent à une banque selon un processus de Poisson de paramètre $\lambda = 0{,}2$. Déterminer la probabilité pour que quinze minutes après l'ouverture des portes, il y ait deux clients qui soient entrés.

4.4 Probabilités limites

Dans cette section, on cherche la proportion de temps, à long terme, où une chaîne de Markov à temps continu $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ ayant E pour espace d'états se retrouve dans un état $j \in E$ donné.

Proposition 4.20 Soit $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ une chaîne de Markov à temps continu irréductible (tous les états communiquent) ayant pour espace d'états E, où tous les états sont récurrents positifs (le temps moyen de retour à l'état i si on part de i est fini). Alors, pour tout $i, j \in E$,

$$p_j = \lim_{t\to\infty} p_{i,j}(t)$$

existe et est indépendante de i. De plus, p_j est solution de

$$\begin{cases} v_j \cdot p_j = \displaystyle\sum_{k\in E\setminus\{j\}} v_k \cdot p_{k,j} \cdot p_k\,, \\ \displaystyle\sum_{j\in E} p_j = 1. \end{cases}$$

Exemple 4.21 Déterminer les probabilités limites p_j dans le cas d'un processus de naissance et de mort.

Exemple 4.22 Des étudiants travaillent sur des problèmes en classe. Chacun des $M = 9$ étudiants travaillent pendant un temps suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}1$ par minute avant de devoir s'arrêter et d'aller poser une question au chargé, qui y répond en un temps suivant une loi exponentielle de paramètre $\mu = 0{,}2$ par minute.

a) Déterminer le nombre moyen d'étudiants qui ne travaillent pas.

b) Déterminer la proportion du temps où chaque étudiant travaille.

c) À la fin d'une séance de 55 minutes, quelle est la probabilité qu'il y ait une file de deux étudiants ou plus au bureau du chargé ?

4.5 Exercices

Exercice 4.1 Une population est formée d'organismes sexués. La probabilité pour qu'un mâle spécifique ne s'accouple avec une femelle désignée dans un intervalle de temps de longueur h est de l'ordre de $\lambda h + o(h)$. Chaque accouplement produit instantanément un rejeton qui a autant de chance d'être un mâle qu'une femelle. Soient $N1_t$ et $N2_t$ les quantités de mâles et de femelles respectivement dans la population. Déterminer les valeurs des v_i et des $p_{i,j}$ pour la chaîne de Markov à temps continu $\{N1_t, N2_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$.

Exercice 4.2 Un organisme unicellulaire peut être dans un de deux états A ou B. Les individus de type A mutent en individus de type B à un taux exponentiel α. Les individus de type B mutent en deux individus de type A à un taux exponentiel β. Construire une chaîne de Markov à temps continu appropriée pour ce modèle et déterminer les valeurs des v_i et des $p_{i,j}$.

Exercice 4.3 Soit $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ une chaîne de Markov à temps continu. Soient i et j deux états de cette chaîne. Posons $p_{i,j}(t) = P(X_{s+t} = j \mid X_s = i)$. Justifier pourquoi l'équation de Kolmogorov pour le passé est vraie

$$p'_{i,j}(t) = \sum_{k\in E\setminus\{i\}} v_i \cdot p_{i,k} \cdot p_{k,j}(t) - v_i \cdot p_{i,j}(t).$$

Exercice 4.4 On opère une machine qui travaille selon un temps exponentiellement distribué avant de tomber en panne, avec moyenne $1/\lambda$. Supposons que le temps pour réparer la machine est exponentiellement distribué de moyenne $1/\mu$. Supposons que la machine est fonctionnelle au temps 0. On cherche la probabilité qu'elle le soit encore au temps $t = 10$.

a) Modéliser ce processus par un processus de naissance et de mort à deux états et déterminer les valeurs des paramètres μ_n et λ_n.

b) Montrer que les équations de Kolmogorov pour le passé dans le cas d'un processus de naissance et de mort deviennent

$$\begin{cases} p'_{0,j}(t) = \lambda_0 \cdot \left(p_{1,j}(t) - p_{0,j}(t)\right) \\ p'_{i,j}(t) = \lambda_i \cdot p_{i+1,j}(t) + \mu_i \cdot p_{i-1,j}(t) - (\lambda_i + \mu_i) \cdot p_{i,j}(t) \quad \text{pour } i \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

c) Écrire les équations de Kolmogorov du passé pour le problème sous étude.

d) Montrer que $\mu \cdot p'_{0,0}(t) + \lambda \cdot p'_{1,0}(t) = 0$.

e) En intégrant l'équation de d), montrer que $p'_{0,0}(t) = \mu - (\mu + \lambda) \cdot p_{0,0}(t)$.

f) Posons

$$h(t) = p_{0,0}(t) - \frac{\mu}{\mu + \lambda}.$$

En dérivant $h(t)$, montrer que $h(t) = K \cdot e^{-(\mu+\lambda)t}$ pour une constante K.

g) En déduire des formules pour $p_{0,0}(t)$ et $p_{1,0}(t)$, puis la solution à la question posée au départ.

Exercice 4.5 Montrer, pour un processus de naissance pur, que

$$\begin{cases} p_{i,i}(t) = e^{-\lambda_i t} & \text{pour } i \in \mathbb{N}, \\ p_{i,j}(t) = \lambda_{j-1} e^{-\lambda_j t} \int_0^t e^{\lambda_j s} \cdot p_{i,j-1}(s)\, ds & \text{pour } j \in \mathbb{N}, j > i. \end{cases}$$

Exercice 4.6 Montrer, dans le cas du modèle de croissance linéaire avec immigration, que les probabilités limites p_i existent lorsque $\lambda < \mu$.

Exercice 4.7 Montrer, dans le cas de la file d'attente (M/M/1), que les probabilités limites p_i existent lorsque $\lambda < \mu$. Déterminer alors les probabilités limites pour chacun des états.

Exercice 4.8 Une chaîne de montage a deux postes de travail. Une pièce y entre seulement lorsque la chaîne est vide, est modifiée au premier poste, puis au second. Supposons que les temps de modification aux deux postes soient indépendants de lois exponentielles de paramètres λ_1 et λ_2 respectivement. Supposons que l'arrivée des pièces suit un processus de Poisson d'intensité λ. On crée trois états correspondant respectivement au fait que la chaîne soit vide, qu'il y ait une pièce au premier poste ou qu'il y en ait une au second. Déterminer les probabilités limites pour chacun des états.

Exercice 4.9 Un salon de barbier est opéré par son propriétaire et par lui seul. Il possède sa chaise de coupe et une unique chaise pour un client en attente. Si un client se pointe et que la place d'attente est prise, il fait demi-tour. Sachant que les clients se présentent au salon selon un processus de Poisson à un rythme de trois à l'heure et que le barbier s'exécute en un temps exponentiellement distribué de moyenne un quart d'heure, déterminer le nombre moyen de clients dans son commerce.

Exercice 4.10 Des clients potentiels se pointent au service au volant d'un restaurant selon un processus de Poisson de taux λ. Cependant, si, au moment de son arrivé, un client aperçoit n voitures déjà dans la file d'attente, alors il joindra cette file avec une probabilité α_n. Assumant que le taux de service suit une loi exponentielle de paramètre μ, modéliser cette situation selon un processus de naissance et de mort, et déterminer les taux de naissance (d'arrivée) et de mort (de départ).

Exercice 4.11 Une population est composée de N individus. Certains d'entre eux ont une infection, laquelle se propage de la façon suivante. Les échanges entre deux membres de cette population se produisent en suivant un processus de Poisson de taux λ. Lorsqu'un contact se produit, il a autant de chance d'impliquer n'importe quelles des $\binom{N}{2}$ paires d'individus de la population. Si un contact implique un individu infecté et un individu non infecté, alors l'individu non infecté à une probabilité p de le devenir. Lorsqu'un individu est infecté, il le demeure pour toujours.

Soit X_t le nombre d'individus de la population infectés au temps t.

a) Expliquer pourquoi $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ est une chaîne de Markov à temps continu.

b) Si un seul individu est infecté au temps 0, combien de temps en moyenne cela prendra-t-il avant que toute la population soit infectée ?

Exercice 4.12 Soit un processus de naissance et de mort ayant pour taux de naissance $\lambda_n = (n+1)\lambda$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour taux de mort $\mu_n = n\mu$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Déterminer l'espérance du temps requis pour passer de l'état 0 à l'état 4.

Exercice 4.13 Deux machines opèrent pour une durée exponentielle de taux λ_i avant de se briser, et leur temps de réparation est exponentielle de taux μ_i. Le temps de fonctionnement des machines est indépendant l'un de l'autre. Déterminer une chaîne de Markov à temps continu à quatre états respectant les conditions des deux machines, et calculer les probabilités de transition pour cette chaîne.

Exercice 4.14 Des clients potentiels arrivent à une station-service « avec service » ayant une seule pompe selon un processus de Poisson ayant pour taux 20 voitures à l'heure. Cependant, un client entrera à la station seulement s'il n'y a pas plus de deux voitures (incluant celle en train de se faire remplir). Supposer que le temps requis pour se faire servir est distribué exponentiellement avec une moyenne de cinq minutes.

a) Quelle proportion du temps l'employé servira un client ?

b) Quelle fraction des clients potentiels rebrousseront chemin ?

Exercice 4.15 À une station de taxi, les taxis et les clients arrivent respectivement selon un processus de Poisson de taux de un et de deux par minute. Un taxi attendra peu importe le nombre de taxis déjà présents. Toutefois, un client ne trouvant pas de taxi en attente quittera la station.

a) Trouver le nombre moyen de taxis en attente.

b) Trouver la proportion de clients arrivant à la station qui aura un taxi.

Exercice 4.16 Soit $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ une chaîne de Markov à temps continu et soient $p_{i,j}(t)$ ses probabilités de transition. Montrer que, pour tout $s, t \in \mathbb{R}_+$,

$$p_{i,j}(s+t) = \sum_{k=0}^{\infty} p_{i,k}(s) \cdot p_{k,j}(t).$$

Exercice 4.17 Montrer, dans le cas de la file d'attente (M/M/1), que les probabilités limites p_i existent lorsque $\lambda < \mu$. Déterminer alors les probabilités limites pour chacun des états.