CHAPITRE 2
CHAÎNES DE MARKOV

Exercice 2.1 Soit P la matrice de transition d'une chaîne de Markov $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Montrer que P^k est une matrice de transition pour la chaîne de Markov $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, où $Y_n = X_{kn}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Directement,

$$\begin{aligned} P(Y_{n+1} = j \mid Y_n = i) &= P(X_{kn+k} = j \mid X_{kn} = i) \\ &= p_{i,j}^{(k)} \\ &= \left(P^k\right)_{i,j}, \end{aligned}$$

où $\left(P^k\right)_{i,j}$ représente l'élément (i,j) de la matrice P^k. Ainsi, puisque l'élément (i,j) de la matrice P^k représente la probabilité de transition de l'état i à l'état j pour la chaîne de Markov $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, alors P^k est bien la matrice de transition de la chaîne de Markov $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 2.2 Soit P est une matrice de transition d'une chaîne de Markov $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Montrer que P^k est stochastique pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

On va montrer que le produit de deux matrices stochastiques est stochastique. Soit $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ deux matrices stochastiques réelles de dimension n. Par définition, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$,

$$A_{i,j} \geq 0, \quad B_{i,j} \geq 0 \quad \text{et} \quad \sum_{j=1}^{n} A_{i,j} = \sum_{j=1}^{n} B_{i,j} = 1.$$

Ainsi, l'élément (k, l) de la matrice AB est

$$[AB]_{k,l} = \left(\sum_{j=1}^{n} A_{k,j} B_{j,l}\right) \geq 0.$$

Par ailleurs, la somme de la ligne $k \in \{1, \dots, n\}$ de la matrice produit AB est

$$\begin{aligned}
\sum_{l=1}^{n} [AB]_{k,l} &= \sum_{l=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} A_{k,j} B_{j,l}\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} A_{k,j} \left(\sum_{l=1}^{n} B_{j,l}\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} A_{k,j} \quad \text{(car } B \text{ est stochastique)} \\
&= 1. \quad \text{(car } A \text{ est stochastique)}
\end{aligned}$$

Donc la produit de deux matrices stochastiques est stochastique. Par conséquent, en procédant par récurrence, on démontre que P^k est stochastique.

Exercice 2.3 Soit $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov. Supposons que $X_0 = i$ pour un état i. Soit N_i le nombre de fois où le processus va retourner en l'état i après l'avoir quitté pour la première fois. Déterminer $E(N_i)$.

Si i est récurrent, alors $E(N_i) = \infty$.
Si i est transitoire, alors $N_i + 1 \sim \text{Geom}(1 - f_i)$. Ainsi,

$$E(N_i + 1) = \frac{1}{1 - f_i} \Longrightarrow E(N_i) = \frac{f_i}{1 - f_i}.$$

À noter que le N_i tel que défini à cet exercice n'est pas que celui introduit à la notation 2.26 (après la correction).

Exercice 2.4 Soit i un état transitoire d'une chaîne de Markov $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ et soit N_i le nombre de fois où le processus est dans l'état i si $X_0 = i$.

a) Déterminer $E(N_i)$.

b) Déterminer $P(N_i > k)$ pour $k \in \mathbb{N}$.

a) On a vu que $N_i \sim \text{Geom}(1 - f_i)$. Ainsi,

$$E(N_i) = \frac{1}{1 - f_i}.$$

b) Directement, $P(N_i > k) = (f_i)^k$.

Exercice 2.5 Considérons la chaîne de Markov ayant pour espace d'états $E = \{0, 1, 2, 3\}$ et pour matrice de transition

$$P = \begin{bmatrix} 0{,}25 & 0{,}25 & 0{,}25 & 0{,}25 \\ 0{,}10 & 0{,}50 & 0 & 0{,}40 \\ 0 & 0 & 0{,}60 & 0{,}40 \\ 0 & 0 & 0{,}50 & 0{,}50 \end{bmatrix}.$$

a) Identifier les états récurrents et les états transitoires.

b) Déterminer $P(N_i \geq n)$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $E(N_i)$ pour toute valeur $i \in \{0, 1, 2, 3\}$.

a) Les états 0 et 1 sont transitoires alors que les états 2 et 3 sont récurrents.

b) $f_0 = 0{,}3$ et $E(N_0) = 10/7$.

Exercice 2.6 Montrer que dans une chaîne de Markov ayant un nombre fini d’états, les états ne peuvent pas tous être transitoires.

Supposons au contraire que tous états les transitoires. Ainsi, chacun des états n'est visité qu'un nombre fini de fois. Donc, après un certain temps, on ne peut plus visiter aucun état, ce qui est absurde.

Autrement dit, si la chaîne de Markov a un nombre fini d’états, alors il existe au moins un état étant visité un nombre infini de fois. Cet état est récurrent.

Exercice 2.7 Une compagnie d'assurance classe les niveaux de bonus-malus de ses clients suivant les entiers naturels : $0, 1, 2, \ldots$. Le niveau 0 est le plus avantageux pour l'assuré. Soient $i, j \in \mathbb{N}$ tels que $0 \leq i \leq j$. Notons le niveau de bonus-malus d'un assuré à l'année n par X_n, où $n \in \mathbb{N}$. Si ce niveau est i à l'année n, l'assureur le dévaluera au niveau j l'année suivante si, entre temps, l'assuré a eu $j - i$ accidents. Supposons que le nombre d'accidents subis par l'assuré suit une loi de Poisson de paramètre λ.

a) Donner les états de la chaîne de Markov $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

b) Donner la matrice de transition de cette chaîne.

c) Déterminer les classes d'équivalence pour la relation de communication.

d) Déterminer si les états sont récurrents ou transitoires.

a) L'espace d'états est $E = \mathbb{N}$.

b) Soit $Y \sim \text{Poisson}(\lambda)$. La fonction de masse de Y est

$$P(Y = k) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^k}{k!} & \text{si } k \in \mathbb{N}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On a $p_{i,j} = P(Y = j - i)$. Ainsi, la matrice de transition est

$$P = \begin{bmatrix} P(Y=0) & P(Y=1) & P(Y=2) & P(Y=3) & \cdots \\ 0 & P(Y=0) & P(Y=1) & P(Y=2) & \cdots \\ 0 & 0 & P(Y=0) & P(Y=1) & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & P(Y=0) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

c) Puisque $i \nrightarrow j$ lorsque $i > j$, alors aucun états communiquent. Ainsi, les classes d'équivalence pour la relation de communication sont tous les singletons $\{i\}$ avec $i \in \mathbb{N}$.

d) Les états sont tous transitoires. En fait, $f_i = e^{-\lambda} < 1$ pour tout $i \in \mathbb{N}$.

Exercice 2.8 Considérons la marche aléatoire symétrique dans $\mathbb{Z}^m$ avec probabilité $1/m$ de se déplacer vers une des directions canoniques d'une valeur à la fois. Soit 0 l'état correspondant à l'origine du repère. On peut montrer que $P_{0,0}^{(n)} \approx k \cdot n^{-m/2}$ pour une constante k. Déterminer si les marches aléatoires symétriques dans $\mathbb{Z}^m$ sont récurrentes ou transitoires.

Pour le cas $m = 1$, on a démontré à l'exemple 2.31 que les marches aléatoire sont récurrentes.

Pour $m = 2$, on a

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} p_{0,0}^{(n)} &\approx 1 + \sum_{n=1}^{\infty} k \cdot n^{-1} \\ &= 1 + k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \\ &= \infty \quad \text{(car c'est la série harmonique)}\end{aligned}$$

Ainsi, selon la proposition 2.28, l'état 0 est récurrent. Or, la chaîne est irréductible, donc selon la proposition 2.29, tous les états sont récurrents.

Pour $m > 2$, on a

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} p_{0,0}^{(n)} &\approx 1 + \sum_{n=1}^{\infty} k \cdot n^{-m/2} \\ &= 1 + k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{m/2}} \\ &< \infty.\end{aligned}$$

Ainsi, selon la proposition 2.28, l'état 0 est transitoire. Or, la chaîne est irréductible, donc selon la proposition 2.29, tous les états sont transitoires.

Exercice 2.9 Chaque citoyen adulte d'une ville travaille dans l'une des trois professions: A, B ou C. De père en fils, les professions des pères sont retenues avec probabilités respectives de $3/5$, $2/3$ et $1/4$. Par ailleurs, si un fils ne retient pas la profession du père, il accède avec probabilités égales à l'une des deux autres professions. Supposons que la répartition des professions pour la génération actuelle est de 20 % pour la profession A, 30 % pour la profession B et de 50 % pour la profession C.

a) Déterminer la distribution des citoyens mâles par profession pour la prochaine génération.

b) Déterminer la distribution des citoyens mâles par profession dans deux générations.

c) Déterminer la distribution limite des citoyens mâles par profession pour la $n^{\text{ième}}$ génération future lorsque $n \to \infty$.

Soit X_n la profession du n$^{\text{ième}}$ descendant. La matrice de transition de la chaîne de Markov $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est

$$P = \begin{bmatrix} 6/10 & 2/10 & 2/10 \\ 1/6 & 4/6 & 1/6 \\ 3/8 & 3/8 & 2/8 \end{bmatrix},$$

où l'espace d'états est $\{1, 2, 3\}$, avec l'état 1 représentant la profession A, l'état 2 représentant la profession B et l'état 3 représentant la profession C.

a) On cherche la distribution de X_1. En conditionnant sur X_0, on obtient

$$\begin{aligned} P(X_1 = j) &= \sum_{i=1}^{3} P(X_1 = j \mid X_0 = i) \cdot P(X_0 = i) \\ &= p_{1,j} \cdot 0{,}20 + p_{2,j} \cdot 0{,}30 + p_{3,j} \cdot 0{,}50. \end{aligned}$$

Pour $j = 1$, on obtient

$$\begin{aligned} P(X_1 = 1) &= \frac{6}{10} \cdot 0{,}20 + \frac{1}{6} \cdot 0{,}30 + \frac{3}{8} \cdot 0{,}50 \\ &= \frac{143}{400} = 0{,}3575. \end{aligned}$$

En procédant de façon similaire, on obtient

$$P(X_1 = 2) = 171/400 = 0{,}4275$$

et

$$P(X_1 = 3) = 86/400 = 0{,}2150.$$

Par conséquent, la distribution est de 35,75 % pour la profession A, 42,75 % pour la profession B et 21,50 % pour la profession C.

b) On cherche la distribution de X_2. En conditionnant sur X_0, on obtient

$$\begin{aligned} P(X_2 = j) &= \sum_{i=1}^{3} P(X_2 = j \mid X_0 = i) \cdot P(X_0 = i) \\ &= p_{1,j}^{(2)} \cdot 0{,}20 + p_{2,j}^{(2)} \cdot 0{,}30 + p_{3,j}^{(2)} \cdot 0{,}50. \end{aligned}$$

La matrice des 2-transition est

$$P^{(2)} = P^2 = \begin{bmatrix} 0{,}4683 & 0{,}3283 & 0{,}2033 \\ 0{,}2736 & 0{,}5403 & 0{,}1861 \\ 0{,}3813 & 0{,}4186 & 0{,}2000 \end{bmatrix},$$

Pour $j = 1$, on obtient

$$P(X_2 = 1) = 0{,}4683 \cdot 0{,}20 + 0{,}2736 \cdot 0{,}30 + 0{,}3813 \cdot 0{,}50 = 0{,}3664.$$

En procédant de façon similaire, on obtient

$$P(X_2 = 2) = 0{,}4371$$

et

$$P(X_2 = 3) = 0{,}1965.$$

Par conséquent, la distribution est de 36,64 % pour la profession A, 43,71 % pour la profession B et 19,65 % pour la profession C.

c) On vérifie que la chaîne de Markov est irréductible et que tous ses états sont ergodiques. Ainsi, d'après le théorème 2.44, la distribution limite des citoyens mâles par profession sera la solution au système d'équations suivant :

$$\pi_1 = \frac{6}{10} \cdot \pi_1 + \frac{1}{6} \cdot \pi_2 + \frac{3}{8} \cdot \pi_3$$
$$\pi_2 = \frac{2}{10} \cdot \pi_1 + \frac{4}{6} \cdot \pi_2 + \frac{3}{8} \cdot \pi_3$$
$$\pi_3 = \frac{2}{10} \cdot \pi_1 + \frac{1}{6} \cdot \pi_2 + \frac{2}{8} \cdot \pi_3$$
$$1 = \pi_1 + \pi_2 + \pi_3$$

En solutionnant on obtient $\pi_1 = 15/41 = 0{,}3659$, $\pi_2 = 18/41 = 0{,}4390$ et $\pi_1 = 8/41 = 0{,}1951$. Par conséquent, à long terme, la distribution est de 36,59 % pour la profession A, 43,90 % pour la profession B et 19,51 % pour la profession C.

Exercice 2.10 Soient i et j deux états d'une chaîne de Markov $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de périodes finies. Montrer que si i communique avec j, alors i et j ont la même période.

Voir la proposition 2.38 des notes de cours.

(Preuve par l'absurde) Supposons que $d(j) < d(i)$. Si $i \leftrightarrow j$, alors il existe $n, m \in \mathbb{N}$ tels que $p_{i,j}^{(n)} > 0$ et $p_{j,i}^{(m)} > 0$. On remarque que i est un état de retour car $p_{i,i}^{(n+m)} \geq p_{i,j}^{(n)} \cdot p_{j,i}^{(m)} > 0$. De plus, $d(i) \mid n + m$.
Maintenant, soit $a \in \mathbb{N}^*$ tel que $p_{j,j}^{(a)} > 0$. Alors $p_{i,i}^{(n+a+m)} \geq p_{i,j}^{(n)} \cdot p_{j,j}^{(a)} \cdot p_{j,i}^{(m)} > 0$. Ainsi, $d(i) \mid n + a + m$. Or, $d(i) \mid n + m$, donc $d(i) \mid a$. Ainsi, $d(i)$ est un diviseur de tous les nombres a tels que $p_{j,j}^{(a)}$>0, mais $d(j) < d(i)$ est supposé être le pgcd de ces nombres. On a une contradiction.
On arrive à une contradiction similaire si un suppose que $d(i) < d(j)$. Par conséquent, $d(i) = d(j)$.

Exercice 2.11 Soit $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov irréductible d'espace d'états fini E où tous les états sont ergodiques. Supposons que la matrice de transition de cette chaîne soit bistochastique. Montrer que $\pi_j = 1/|E|$ pour $j \in E$ est la distribution stationnaire de cette chaîne de Markov.

Cet exercice se retrouve dans le devoir 2.

Exercice 2.12 Considérons la chaîne de Markov $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ayant pour espace états $E = \mathbb{N}$ et où les probabilités de transition sont

$$p_{i,i+1} = \frac{i}{i+1} \quad \text{et} \quad p_{i,0} = \frac{1}{i+1}.$$

Posons $T_i = \min\{n \geq 1 \mid X_0 = i, X_n = i\}$ et Posons $f_{i,i}^{(n)} = P(T_i = n \mid X_0 = i)$.

a) Calculer $f_{0,0}^{(1)}$, puis $f_{0,0}^{(2)}$, $f_{0,0}^{(3)}$, $f_{0,0}^{(4)}$ et $f_{0,0}^{(5)}$, puis en déduire une formule pour $f_{0,0}^{(n)}$ avec $n \geq 2$.

b) En déduire que 0 est un état récurrent.

c) Montrer que 0 est un état récurrent nul.

Cet exercice se retrouve dans le devoir 2.

Exercice 2.13 Soit $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov. Posons $T_{i,j} = \min\{n \geq 1 \mid X_0 = i, X_n = j\}$ et posons $f_{i,j}^{(n)} = P\big(T_{i,j} = n\big)$.

a) Expliquer intuitivement pourquoi, pour tout entier $n \geq 1$, on a $p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=0}^{\infty} f_{i,j}^{(k)} \cdot p_{j,j}^{(n-k)}$.

b) En déduire une formule de récurrence pour les $f_{i,j}^{(n)}$.

a) Le processus, en partant de l'état i, se rend à l'état j en n étapes si et seulement si (i) il passe de i à j pour la première fois en k étapes, puis (ii) il boucle sur j en $n-k$ étapes. Il suffit de regarder toutes les valeurs de k et, comme ces chemins sont distincts, on peut sommer.

b) On note que $p_{j,j}^{n-k} = 0$ si $k > n$. Ainsi, pour $n \geq 2$,

$$f_{i,j}^{(n)} = p_{i,j}^{(n)} - \sum_{k=0}^{n-1} f_{i,j}^{(k)} \cdot p_{j,j}^{(n-k)}.$$

À noter que $p_{j,j}^{n-k} = 0$ si $k > n$.

Exercice 2.14 Montrer que tout état de non-retour est transitoire et que tout état absorbant est récurrent.

Cet exercice se retrouve dans le devoir 2.

Exercice 2.15 Un joueur joue à un jeu de roulette. La roulette est formée de 38 cases : 18 rouges, 18 noires, une case marquée 0 et une case marquée 00. Le joueur gagne si la bille s'arrête sur une case rouge. Le joueur possède une fortune initiale de 10 $. S'il gagne, il remporte un dollars et s'il perd, il le débourse. Le joueur se fixe comme but de doubler sa mise initiale.

a) Déterminer la probabilité que le joueur atteigne sa cible.

b) Déterminer le profit (ou la perte) espérée.

c) Reprendre l'exercice b) en supposant cette fois que le joueur ne fait qu'un seul paris de 10 $. Déterminer la stratégie optimale.

Il s'agit d'un problème de ruine du joueur avec $N = 20$, $p = 18/38$ et $X_0 = 10$.

a) Selon un résultat démontré à l'exemple 2.49, la probabilité qu'il termine le jeu avec 20 $ est

$$\frac{1-\left(\frac{20/38}{18/38}\right)^{10}}{1-\left(\frac{20/38}{18/38}\right)^{20}} = \frac{1-(20/18)^{10}}{1-(20/18)^{20}} = 0{,}2585.$$

b) La probabilité qu'il termine le jeu avec 0 $ est $1 - 0{,}2585 = 0{,}7415$. Ainsi, le profit espéré est

$$-10 \cdot 0{,}7415 + 10 \cdot 0{,}2585 = -4{,}83\ \$$$

c) S'il ne fait qu'un seul pari de 10 $, alors le profit espéré est

$$-10 \cdot \frac{20}{38} + 10 \cdot \frac{18}{38} = -\frac{20}{38} = -0{,}53\ \$$$

Cette stratégie est préférable à celle consistant à miser 1 $ par tour.

Exercice 2.16 L'humeur d'un individu peut être considérée comme une chaîne de Markov à trois états. Supposons que la matrice de transition est donnée par

$$P = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,4 & 0,1 \\ 0,3 & 0,4 & 0,3 \\ 0,2 & 0,3 & 0,5 \end{bmatrix}.$$

Déterminer la proportion, à long terme, du temps que passe l'individu dans chacun des états.

On vérifie que la chaîne de Markov est irréductible et que tous ses états sont ergodiques. Ainsi, d'après le théorème 2.44, la proportion du temps que passe l'individu dans l'état j est la valeur π_j satisfaisant au système d'équations suivant :

$$\pi_0 = 0,5 \cdot \pi_0 + 0,3 \cdot \pi_1 + 0,2 \cdot \pi_2$$
$$\pi_0 = 0,4 \cdot \pi_0 + 0,4 \cdot \pi_1 + 0,3 \cdot \pi_2$$
$$\pi_0 = 0,1 \cdot \pi_0 + 0,3 \cdot \pi_1 + 0,5 \cdot \pi_2$$
$$1 = \pi_0 + \pi_1 + \pi_2$$

En solutionnant ce système, on trouve

$$\pi_0 = 21/62 = 0,3387,$$
$$\pi_1 = 23/62 = 0,3710,$$
$$\pi_2 = 18/62 = 0,2903.$$

Exercice 2.17 Une chaîne de montage comporte plusieurs machines. Si certaines d'entre elles ne sont pas en opération, la chaîne peut quand même continuer à avancer alors que d'autres sont critiques et que la chaîne doit arrêter si une d'elles fait défaillance. On peut modéliser la chaîne par un processus de Markov où chaque état représente une configuration (marche/marche pas) des différentes machines. Soit P la matrice de transition. Soient A l'ensemble des états qui permettent à la chaîne d'avancer et A^c l'ensemble des états où la chaîne arrête. Soit π_k la proportion du temps où la chaîne est dans l'état k pour $k = 1, \dots, n$.

a) Soient $i \in A$ et $j \in A^c$. Déterminer la proportion du temps où le processus passe de l'état i à l'état j.

b) Déterminer la proportion du temps où le processus passe d'un état où la chaîne avance à l'état j.

c) Déterminer la proportion du temps où le processus tombe en panne.

d) Soient F le temps moyen où la chaîne de montage demeure en fonction après une remise en service et D le temps moyen où la chaîne de montage demeure en défaillance après une panne. Déterminer la proportion du temps où le processus tombe en panne en fonction de F et de D.

e) Expliquer, dans le contexte du problème, pourquoi

$$\frac{F}{F+D} = \sum_{i \in A} \pi_i.$$

f) Déterminer les valeurs de F et de D.

g) Supposons que P est donnée par la matrice

$$P = \begin{bmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{bmatrix}.$$

On admettra que la chaîne avance si elle est dans les états 1 et 2 et qu'elle s'arrête dans les états 3 et 4. Déterminer les proportions du temps que le système passe dans chacun des quatre états, puis déterminer le taux de panne, la durée moyenne de celles-ci puis la durée de fonctionnement moyenne entre deux pannes.

a) La proportion du temps où le processus est dans l'état i est π_i. Par ailleurs, lorsque le processus est dans l'état i, il transitionnera vers l'état j avec une probabilité de $p_{i,j}$. Ainsi, la proportion du temps où le processus passe de l'état i à l'état j est $\pi_i \cdot p_{i,j}$.

b) La proportion du temps où le processus passe d'un état où la chaîne avance à l'état j est

$$\sum_{i \in A} \pi_i \cdot p_{i,j}.$$

c) La proportion du temps où le processus tombe en panne est

$$\sum_{j \in A^c} \sum_{i \in A} \pi_i \cdot p_{i,j}.$$

d) À chaque $D + F$ unité de temps, il y a une panne. La proportion est donc

$$\frac{1}{F+D}.$$

e) $\sum_{i \in A} \pi_i$ représente la proportion du temps où la chaîne avance et $F/(F+D)$ représente le temps de fonctionnement de la chaîne sur le temps total d'un cycle fonctionne/panne/fonctionne.

f) On résout

$$\begin{cases} \dfrac{1}{F+D} = \sum_{j\in A^c}\sum_{i\in A} \pi_i \cdot p_{i,j} \\ \dfrac{F}{F+D} = \sum_{i\in A} \pi_i \end{cases}$$

et on trouve

$$F = \left(\sum_{i\in A} \pi_i\right) \Big/ \left(\sum_{j\in A^c}\sum_{i\in A} \pi_i \cdot p_{i,j}\right)$$

et

$$D = \left(\sum_{i\in A^c} \pi_i\right) \Big/ \left(\sum_{j\in A^c}\sum_{i\in A} \pi_i \cdot p_{i,j}\right).$$

g) On vérifie que la chaîne de Markov est irréductible et que tous ses états sont ergodiques. Ainsi, d'après le théorème 2.44, la proportion du temps que passe l'individu dans l'état j est la valeur π_j satisfaisant au système d'équations suivant :

$$\pi_1 = \frac{1}{4}\cdot\pi_1 + 0\cdot\pi_2 + 0\cdot\pi_3 + \frac{1}{4}\cdot\pi_4$$

$$\pi_2 = \frac{1}{4}\cdot\pi_1 + \frac{1}{4}\cdot\pi_2 + \frac{1}{4}\cdot\pi_3 + \frac{1}{4}\cdot\pi_4$$

$$\pi_3 = \frac{1}{2}\cdot\pi_1 + \frac{1}{2}\cdot\pi_2 + \frac{1}{2}\cdot\pi_3 + \frac{1}{4}\cdot\pi_4$$

$$\pi_4 = 0\cdot\pi_1 + \frac{1}{4}\cdot\pi_2 + \frac{1}{4}\cdot\pi_3 + \frac{1}{4}\cdot\pi_4$$

$$1 = \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4$$

En solutionnant ce système, on trouve

$\pi_1 = 4/52 = 0{,}0769,$

$\pi_2 = 13/52 = 0{,}2500,$

$\pi_3 = 23/52 = 0{,}4423,$

$\pi_4 = 12/52 = 0{,}2308,$

On a $A = \{1, 2\}$ et $A^c = \{3, 4\}$. Donc le taux de panne est

$$\begin{aligned} \sum_{j\in A^c}\sum_{i\in A} \pi_i \cdot p_{i,j} &= \pi_1\cdot p_{1,3} + \pi_2\cdot p_{2,3} + \pi_1\cdot p_{1,4} + \pi_2\cdot p_{2,4} \\ &= \frac{4}{52}\cdot\frac{1}{2} + \frac{13}{52}\cdot\frac{1}{2} + \frac{4}{52}\cdot 0 + \frac{13}{52}\cdot\frac{1}{4} \\ &= \frac{47}{208} = 0{,}2260. \end{aligned}$$

Alors,

$$F = \frac{\pi_1 + \pi_2}{47/208} = \frac{4/52 + 13/52}{47/208} = \frac{68}{47} = 1{,}45$$

et

$$D = \frac{\pi_3 + \pi_4}{47/208} = \frac{23/52 + 12/52}{47/208} = \frac{140}{47} = 2{,}98.$$

Exercice 2.18 On considère une population où chaque individu est porteur de deux gènes qui peuvent chacun être du type A ou a. Un individu sera porteur de la caractéristique a si et seulement s'il est porteur de la paire aa. On dit alors que le gène A est dominant et que le gène a est récessif. Supposons que les pourcentages de gens de la population ayant les paires de gènes AA, aa et aA se sont stabilisées et prennent les valeurs p, q et r respectivement. On dira qu'un individu est dominant s'il possède au moins un gène dominant et qu'il est récessif sinon.

a) Soit S_{11} la probabilité qu'un enfant d'un couple de dominants soit récessif. Déterminer S_{11}.

b) Soit S_{10} la probabilité qu'un enfant d'un couple formé d'un parent dominant et d'un parent récessif soit récessif. Déterminer S_{10}.

c) En déduire que $S_{11} = S_{10}^2$.

En génétique ces rapports sont appelés **ratio de Snyder**.

a) Directement,

$$\begin{aligned}
S_{11} &= P(\text{enfant } aa \mid \text{parents } AA \text{ ou } aA) \\
&= \frac{P(\text{enfant } aa, \text{parents } AA \text{ ou } aA)}{P(\text{parents } AA \text{ ou } aA)} \\
&= \frac{r^2}{4} \cdot \frac{1}{(1-q)^2} \\
&= \frac{r^2}{4(1-q)^2}.
\end{aligned}$$

b) Directement,

$$\begin{aligned}
S_{10} &= P(\text{enfant } aa \mid \text{parents } (AA \text{ ou } Aa) \text{ et } aa) \\
&= \frac{P(\text{enfant } aa, \text{parents } (AA \text{ ou } Aa) \text{ et } aa)}{P(\text{parents } (AA \text{ ou } Aa) \text{ et } aa)} \\
&= \frac{qr}{2} \cdot \frac{1}{q \cdot (1-q)} \\
&= \frac{r}{2(1-q)}.
\end{aligned}$$

c) Directement,

$$\begin{aligned}
(S_{10})^2 &= \left(\frac{r}{2(1-q)}\right)^2 \\
&= \frac{r^2}{4(1-q)^2} \\
&= S_{11}.
\end{aligned}$$

Exercice 2.19 Reprenons le problème de la ruine du joueur (voir exemple 2.11) où le jeu s'arrête lorsque le joueur a soit tout perdu ou soit tout gagné les N dollars. Soit M_i le nombre moyen de parties qui doivent être complétées pour que le jeu se termine si le joueur possède au départ i dollars. Montrer que

$$M_0 = M_N = 0 \quad \text{et} \quad M_i = 1 + pM_{i+1} + qM_{i-1}$$

pour $i \in \{1, \dots, N-1\}$.

Soit X_n la fortune du joueur au tour n. En conditionnant le calcul de l'espérance de M_i sur X_1, on obtient

$$\begin{aligned}
E(M_i) &= E\big(E(M_i \mid X_1)\big) \\
&= E(M_i \mid X_1 = i+1) \cdot P(X_1 = i+1 \mid X_0 = i) + E(M_i \mid X_1 = i-1) \cdot P(X_1 = i-1 \mid X_0 = i) \\
&= (1 + M_{i+1}) \cdot p + (1 + M_{i-1}) \cdot q \\
&= 1 + pM_{i+1} + qM_{i-1}.
\end{aligned}$$

Exercice 2.20 Quatre balles blanches et quatre balles noires sont distribuées dans deux urnes de sorte que chaque urne contient quatre balles. On dit que le système est dans l'état i, $i \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, si la première urne contient i balles blanches. À chaque étape, on prend une balle de chaque urne et on les interchange. Soit X_n l'état du système après l'étape n, c'est-à-dire après n interchangements de balles. Expliquez pourquoi $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov et calculez sa matrice de transition.

Il s'agit d'une chaîne de Markov car la prédiction des états futurs du système ne dépend que du présent. En effet, pour calculer les probabilités d'avoir i balles blanches dans la première urne à l'étape $n + 1$, la connaissance du nombre de balles blanches dans la première urne à l'étape n est suffisante, et la connaissance du nombre de balles blanches dans la première urne aux étapes précédentes ne modifiera pas cette probabilité.

La matrice de transition est

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/16 & 6/16 & 9/16 & 0 & 0 \\ 0 & 4/16 & 8/16 & 4/16 & 0 \\ 0 & 0 & 9/16 & 6/16 & 1/16 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Exercice 2.21 Une chaîne de Markov $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ayant pour espace d'états $E = \{0, 1, 2\}$ a pour matrice de transition

$$P = \begin{bmatrix} 3/6 & 2/6 & 1/6 \\ 0 & 2/6 & 4/6 \\ 3/6 & 0 & 3/6 \end{bmatrix}.$$

Si

$$P(X_0 = 0) = \frac{1}{4}, \quad P(X_0 = 1) = \frac{1}{4}, \quad P(X_0 = 2) = \frac{2}{4},$$

calculez $E(X_3)$.

Par définition,

$$\begin{aligned} E(X_3) &= 0 \cdot P(X_3 = 0) + 1 \cdot P(X_3 = 1) + 2 \cdot P(X_3 = 2) \\ &= P(X_3 = 1) + 2 \cdot P(X_3 = 2). \end{aligned}$$

Pour calculer les probabilités que la chaîne de Markov soit dans les états 1 et 2 après trois transitions, nous allons conditionner ce calcul sur l'état initial de la chaîne de Markov.

$$\begin{aligned} P(X_3 = 1) &= \sum_{i=0}^{2} P(X_3 = 1 \mid X_0 = i) \cdot P(X_0 = i) \\ &= p_{0,1}^{(3)} \cdot \frac{1}{4} + p_{1,1}^{(3)} \cdot \frac{1}{4} + p_{2,1}^{(3)} \cdot \frac{2}{4}. \end{aligned}$$

Pour poursuivre ce calcul, nous avons besoin de connaître la matrice de 3-transitions de la chaîne de Markov.

$$P^{(3)} = P^3 = \begin{bmatrix} 39/108 & 22/108 & 47/108 \\ 12/27 & 4/27 & 11/27 \\ 15/36 & 8/36 & 13/36 \end{bmatrix}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} P(X_3 = 1) &= \frac{22}{108} \cdot \frac{1}{4} + \frac{4}{27} \cdot \frac{1}{4} + \frac{8}{36} \cdot \frac{2}{4} \\ &= \frac{43}{216} \approx 0{,}1991. \end{aligned}$$

En procédant de façon similaire, nous obtenons

$$P(X_3 = 2) = \frac{169}{432} \approx 0{,}3912.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} E(X_3) &= P(X_3 = 1) + 2 \cdot P(X_3 = 2) \\ &= \frac{43}{216} + 2 \cdot \frac{169}{432} \\ &= \frac{53}{54} \approx 0{,}9815. \end{aligned}$$

Exercice 2.22 On considère le problème de la ruine du joueur (voir exemple 2.11) avec $M = 6$ et $p = 0{,}60$. On suppose que le joueur débute la partie avec 3 \$.

a) Quelle est la probabilité que le joueur ait 4 \$ après 3 parties ?

b) Sachant que le joueur a 3 \$ après 12 parties, quelle est la probabilité qu'il ait 4 \$ après 15 parties ?

c) Quelle est la probabilité que le jeu se termine en 5 parties ou moins ?

d) Si le joueur a entre 1 \$ et 5\$ après 10 parties, quelle est la probabilité qu'à ce moment, le joueur ait 3 \$?

Établissons d'abord la matrice de transition P de cette chaîne de Markov :

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{5} & 0 & \frac{3}{5} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} & 0 & \frac{3}{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{5} & 0 & \frac{3}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{5} & 0 & \frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{5} & 0 & \frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Puisque le joueur débute la partie avec 3 \$, la probabilité qu'il ait 4 \$ après trois parties est donnée par

$$\begin{aligned} P(X_3 = 4 \mid X_0 = 3) &= p_{3,4}^{(3)} \\ &= 54/125 \approx 0{,}432 \end{aligned}$$

car la matrice des 3-transitions est

$$P^{(3)} = P^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{62}{125} & 0 & \frac{36}{125} & 0 & \frac{27}{125} & 0 & 0 \\ \frac{4}{25} & \frac{24}{125} & 0 & \frac{54}{125} & 0 & \frac{27}{125} & 0 \\ \frac{8}{125} & 0 & \frac{36}{125} & 0 & \frac{54}{125} & 0 & \frac{27}{125} \\ 0 & \frac{8}{125} & 0 & \frac{36}{125} & 0 & \frac{36}{125} & \frac{9}{25} \\ 0 & 0 & \frac{8}{125} & 0 & \frac{24}{125} & 0 & \frac{93}{125} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b) La chaîne de Markov est homogène car la matrice de transition P demeure la même tout au long du processus. Ainsi,

$$\begin{aligned} P(X_{15} = 4 \mid X_{12} = 3) &= P(X_3 = 4 \mid X_0 = 3) \\ &= p_{3,4}^{(3)} \\ &= 54/125 \approx 0{,}432. \end{aligned}$$

c) La partie se terminera en cinq parties ou moins si, après cinq parties, le processus est à l'état 0 ou à l'état 6. Ainsi, la probabilité que la partie se termine en cinq parties ou moins est

$$\begin{aligned} p_{3,0}^{(5)} + p_{3,6}^{(5)} &= \frac{344}{3\,125} + \frac{1\,161}{3\,125} \\ &= \frac{301}{625} \approx 0{,}4816. \end{aligned}$$

car la matrice des 5-transitions est

$$P^{(5)} = P^5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1\,694}{3\,125} & 0 & \frac{108}{625} & 0 & \frac{648}{3\,125} & 0 & \frac{243}{3\,125} \\ \frac{148}{625} & \frac{72}{625} & 0 & \frac{972}{3\,125} & 0 & \frac{648}{3\,125} & \frac{81}{625} \\ \frac{344}{3\,125} & 0 & \frac{648}{3\,125} & 0 & \frac{972}{3\,125} & 0 & \frac{1\,161}{3\,125} \\ \frac{16}{625} & \frac{192}{3\,125} & 0 & \frac{648}{3\,125} & 0 & \frac{108}{625} & \frac{333}{625} \\ \frac{32}{3\,125} & 0 & \frac{192}{3\,125} & 0 & \frac{72}{625} & 0 & \frac{2541}{3\,125} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

d) Si le joueur a entre 1 \$ et 5 \$ après 10 parties, alors $X_{10} \in \{1, \dots, 5\}$. Ainsi, la probabilité qu'à ce moment le joueur ait 3 \$ est

$$\begin{aligned} P(X_{10} = 3 \mid X_{10} \in \{1,\dots,5\}, X_0 = 3) &= \frac{P(X_{10} = 3, X_{10} \in \{1,\dots,5\}, X_0 = 3)}{P(X_{10} \in \{1,\dots,5\})} \\ &= \frac{P(X_{10} = 3, X_0 = 3)}{P(X_{10} \in \{1,\dots,5\}, X_0 = 3)} \\ &= \frac{P(X_0 = 3) \cdot P(X_{10} = 3 \mid X_0 = 3)}{P(X_0 = 3) \cdot P(X_{10} \in \{1,\dots,5\} \mid X_0 = 3)} \\ &= \frac{P(X_{10} = 3 \mid X_0 = 3)}{P(X_{10} \in \{1,\dots,5\} \mid X_0 = 3)} \\ &= \frac{p_{3,3}^{(10)}}{p_{3,1}^{(10)} + p_{3,2}^{(10)} + p_{3,3}^{(10)} + p_{3,4}^{(10)} + p_{3,5}^{(10)}} \\ &= \frac{0{,}1290}{0{,}0430 + 0 + 0{,}1290 + 0 + 0{,}0967} \\ &= 0{,}4801. \end{aligned}$$

car la matrice des 10-transitions est

$$P^{(10)} = P^{10} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}5883 & 0{,}0326 & 0 & 0{,}0967 & 0 & 0{,}0717 & 0{,}2106 \\ 0{,}3356 & 0 & 0{,}0971 & 0 & 0{,}1445 & 0 & 0{,}4227 \\ 0{,}1671 & 0{,}0430 & 0 & 0{,}1290 & 0 & 0{,}0967 & 0{,}5641 \\ 0{,}0835 & 0 & 0{,}0642 & 0 & 0{,}0971 & 0 & 0{,}7551 \\ 0{,}0277 & 0{,}0142 & 0 & 0{,}0430 & 0 & 0{,}0326 & 0{,}8825 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exercice 2.23 Montrer que dans une chaîne de Markov irréductible avec un nombre fini d'états, tous les états sont récurrents.

Supposons au contraire qu'il existe un état transitoire. Comme la chaîne est irréductible, tous les états sont dans la même classe d'équivalence pour la relation de communication. Puisque la relation de communication préserve la transience (proposition 2.29), alors tous les états sont transitoires. Ainsi, chacun des états n'est visité qu'un nombre fini de fois. Donc, après un certain temps, on ne peut plus visiter aucun état, ce qui est absurde.

Exercice 2.24 Six enfants (Alice, Bob, Carl, Diane, Ève, Franck) jouent à se lancer une balle.

- Si Alice a la balle, elle a autant de chance de la lancer à Bob, Diane, Ève et Franck.
- Si Bob a la balle, il a autant de chance de la lancer à Alice, Carl, Ève et Franck.
- Si Ève a la balle, elle a autant de chance de la lancer à Alice, Bob, Diane et Franck.
- Si Carl ou Franck ont la balle, ils vont se la lancer à répétition.
- Si Diane a la balle, elle s'enfuit avec.

a) Modéliser ce jeu à l'aide d'une chaîne de Markov et trouver la matrice de transition de cette chaîne de Markov.

b) Identifier ses états récurrents et ses états transitoires.

a) Soit X_n représentant la personne ayant la balle au temps n.

$$X_n = \begin{cases} 0 & \text{si Alice a la balle au temps } n, \\ 1 & \text{si Bob a la balle au temps } n, \\ 2 & \text{si Carl a la balle au temps } n, \\ 3 & \text{si Diane a la balle au temps } n, \\ 4 & \text{si Ève a la balle au temps } n, \\ 5 & \text{si Franck a la balle au temps } n. \end{cases}$$

Alors $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov et sa matrice de transition est

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1/4 & 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 0 & 1/4 & 0 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 1/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

b) Les états 0, 1, 4 sont transitoires et les états 2, 3, 5 sont récurrents.

Exercice 2.25 Soit une chaîne de Markov $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ayant un nombre fini d'états. Montrez que si l'état j est accessible depuis l'état i, alors il peut l'être en $|E|-1$ étapes ou moins.

Soient $i, j \in E$ tels que $i \to j$. Par définition, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $p_{i,j}^{(n)} > 0$. Posons $k \in \mathbb{N}$ le plus petit entier tel que $p_{i,j}^{(k)} > 0$. Nous voulons démontrer que k est plus petit que $|E|$, ce qui revient à dire que l'état j est accessible depuis l'état i en $|E|-1$ étapes au moins.

(Démonstration par l'absurde) Supposons $k \geq |E|$. Puisque $p_{i,j}^{(k)} > 0$, il existe une suite de $k-1$ états $\{i_1, \dots, i_{k-1}\}$ telle que

$$p_{i,i_1} > 0, \quad p_{i_1,i_2} > 0, \quad \dots, \quad p_{i_{k-2},i_{k-1}} > 0, \quad p_{i_{k-1},j} > 0.$$

Or, la suite d'états $\{i_0 = i, i_1, \dots, i_{k-1}, i_k = j\}$ contient $k+1 > |E|$ états. Ainsi, selon le principe de Dirichlet (également appelé « principe du pigeonnier » ou « principe des tiroirs »), deux de ces états sont les mêmes. Il existe donc deux entiers $a < b$ tels que $i_a = i_b$. Cela implique qu'il est possible de passer de l'état i à l'état j en $k-(b-a)$ étapes. Autrement dit, $p_{i,j}^{(k-(b-a))} > 0$. Ceci contredit le fait que k est le plus petit entier tel que $p_{i,j}^{(k)} > 0$. Il était donc faux de supposer que $k \geq |E|$. Par conséquent, $k < |E|$ et l'état j est accessible à partir de l'état i en $|E|-1$ étapes ou moins.

Exercice 2.26 Soit une chaîne de Markov $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Montrez que si un état i est récurrent et que l'état i ne communique pas avec l'état j, alors $p_{i,j} = 0$.

Note : Ce résultat implique que lorsqu'un processus entre dans une classe d'états récurrents, elle ne peut jamais en sortir. Pour cette raison, une classe récurrente est aussi appelée une classe fermée.

Supposons que $p_{i,j} > 0$. Ceci implique que $i \to j$. Or, par hypothèse, $i \nleftrightarrow j$, donc $j \nrightarrow i$. Ainsi, $f_i \leq 1 - p_{i,j} < 1$, ce qui implique que i est transitoire, une contradiction avec le fait qu'il soit récurrent.

Exercice 2.27 Des épreuves sont performées en série. Si les deux dernières épreuves sont des succès, alors la prochaine épreuve sera un succès avec une probabilité de 0,8. Sinon, la prochaine épreuve sera un succès avec une probabilité de 0,5. À long terme (c'est-à-dire après plusieurs épreuves), quelle sera la proportion d'épreuves étant des succès ?

Soit X_n le résultat de l'épreuve n (1 : succès ; 0 : échec) et

$$Y_n = \begin{cases} 1 & \text{si } X_{n-1} = 0 \text{ et } X_n = 0, \\ 2 & \text{si } X_{n-1} = 0 \text{ et } X_n = 1, \\ 3 & \text{si } X_{n-1} = 1 \text{ et } X_n = 0, \\ 4 & \text{si } X_{n-1} = 1 \text{ et } X_n = 1. \end{cases}$$

La matrice de transition de Y_n est

$$P = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}2 & 0{,}8 \end{bmatrix}.$$

On vérifie que la chaîne de Markov est irréductible et que tous ses états sont ergodiques. Ainsi, d'après le théorème 2.44, les proportions stationnaires π_j satisfont au système d'équations suivant :

$$\pi_1 = 0{,}5 \cdot \pi_1 + 0{,}5 \cdot \pi_3$$
$$\pi_2 = 0{,}5 \cdot \pi_1 + 0{,}5 \cdot \pi_3$$
$$\pi_3 = 0{,}5 \cdot \pi_2 + 0{,}2 \cdot \pi_4$$
$$\pi_4 = 0{,}5 \cdot \pi_2 + 0{,}8 \cdot \pi_4$$
$$1 = \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4$$

En solutionnant ce système on obtient

$$\pi_1 = \pi_2 = \pi_3 = \frac{2}{11}, \quad \pi_4 = \frac{5}{11}$$

Puisque $X_n = 1 \Leftrightarrow Y_n \in \{2, 4\}$, alors à long terme, la proportion d'épreuves étant des succès sera

$$\pi_2 + \pi_4 = \frac{7}{11} = 0{,}6363.$$

Exercice 2.28 Soit une chaîne de Markov $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Considérons A un ensemble d'états, et A^c les états restant.

a) Quelle est l'interprétation de

$$\sum_{i\in A}\sum_{j\in A^c}\pi_i P_{i,j}\ ?$$

b) Quelle est l'interprétation de

$$\sum_{i\in A^c}\sum_{j\in A}\pi_i P_{i,j}\ ?$$

c) Expliquez l'identité

$$\sum_{i\in A}\sum_{j\in A^c}\pi_i P_{i,j}=\sum_{i\in A^c}\sum_{j\in A}\pi_i P_{i,j}.$$

a) La proportion de temps qu'on passe d'un état appartenant à A à un état ne lui appartenant pas.

b) La proportion de temps qu'on passe d'un état n'appartenant pas à A à un état lui appartenant.

c) La proportion de temps qu'on passe d'un état appartenant à A à un état ne lui appartenant pas est la même que celle où on passe d'un état n'appartenant pas à A à un état lui appartenant.

Exercice 2.29 Anna, Billie, Claire, David et Enzo se rendent au casino et jouent à la roulette en misant à chaque tour sur une couleur, ce qui leur donne chacun une probabilité $p = 18/38$ de doubler leur mise et $q = 20/38$ de la perdre.

a) Anna dispose de 190 \$. Elle parie 1 \$ à chaque tour. Elle quittera la table de jeu lorsqu'elle aura 200 \$ ou lorsqu'elle sera fauchée. Quelle est la probabilité qu'Anna quitte la table de jeu avec 200 \$?

b) Billie dispose de 10 \$. Elle parie 10 \$ à chaque tour. Elle quittera la table de jeu lorsqu'elle aura 200 \$ ou lorsqu'elle sera fauchée. Quelle est la probabilité que Billie quitte le casino avec 200 \$?

c) Claire dispose de 3,125 \$ (pourquoi pas !). Elle parie tout son argent à chaque tour. Elle quittera la table de jeu lorsqu'elle aura 200 \$ ou lorsqu'elle sera fauchée. Quelle est la probabilité que Claire quitte la table de jeu avec 200 \$?

d) David dispose de 180 \$. Il parie 2 \$ à chaque tour. Il quittera la table de jeu lorsqu'il aura 200 \$ ou lorsqu'il sera fauché. Quelle est la probabilité que David quitte la table de jeu avec 200 \$?

e) Enzo dispose de 20 \$. Il s'achète une limonade, et, pour passer le temps, décide de calculer le temps que passeront chacun de ses amis (Anna, Billie, Claire et David) à la table de jeu avant de la quitter. Sachant qu'un tour de roulette dure une minute, à quels résultats arrivera-t-elle ?

a) Il s'agit d'un problème de ruine du joueur avec $N = 200$, $p = 18/38$ et $X_0 = 190$. Selon un résultat démontré à l'exemple 2.49, la probabilité qu'Anna termine le jeu avec 200 \$ est

$$\frac{1-\left(\frac{20/38}{18/38}\right)^{190}}{1-\left(\frac{20/38}{18/38}\right)^{200}} = \frac{1-(20/18)^{190}}{1-(20/18)^{200}} = 0{,}3487.$$

b) On peut voir ce jeu comme un problème de ruine du joueur avec $N = 20$, $p = 18/38$ et $X_0 = 1$. Selon un résultat démontré à l'exemple 2.49, la probabilité que Billie termine le jeu avec 200 \$ est

$$\frac{1-\left(\frac{20/38}{18/38}\right)^{1}}{1-\left(\frac{20/38}{18/38}\right)^{20}} = \frac{1-(20/18)^{1}}{1-(20/18)^{20}} = 0{,}0154.$$

c) Claire quittera la table de jeu avec 200 \$ si elle remporte 6 tours consécutifs. La probabilité que cela se produise est

$$\left(\frac{18}{38}\right)^{6} = 0{,}0113.$$

d) On peut voir ce jeu comme un problème de ruine du joueur avec $N = 100$, $p = 18/38$ et $X_0 = 90$. Selon un résultat démontré à l'exemple 2.49, la probabilité que David termine le jeu avec 200 \$ est

$$\frac{1-\left(\frac{20/38}{18/38}\right)^{90}}{1-\left(\frac{20/38}{18/38}\right)^{100}} = \frac{1-(20/18)^{90}}{1-(20/18)^{100}} = 0{,}3487.$$

e) Considérons un problème de ruine du joueur et soit E_i le nombre moyen de parties devant être joué avant que la partie se termine si la personne dispose initialement de i \$. On a $E_0 = E_N = 0$, puis en conditionnant sur la première partie, on obtient pour $i \in \{1, \dots, N-1\}$

$$E_i = 1 + p \cdot E_{i+1} + (1-p) \cdot E_{i-1}.$$

En solutionnant ce système (avec « un peu » d'effort !), on obtient

$$M_i = \begin{cases} i \cdot (N-i) & \text{si } p = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{i}{q-p} - \left(\dfrac{N}{q-p}\right) \cdot \left(\dfrac{1-(q/p)^i}{1-(q/p)^N}\right) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ainsi, pour Anna, le nombre de parties moyen est

$$\begin{aligned} M_{190} &= \frac{190}{\frac{20}{38} - \frac{18}{38}} - \left(\frac{200}{\frac{20}{38} - \frac{18}{38}}\right) \cdot \left(\frac{1-(20/18)^{190}}{1-(20/18)^{200}}\right) \\ &= 190 \cdot 19 - 200 \cdot 19 \cdot \left(\frac{1-(20/18)^{190}}{1-(20/18)^{200}}\right) \\ &= 3\,610 - 3800 \cdot 0{,}3487 \\ &= 2\,285{,}02. \end{aligned}$$

Exercice 2.30 Soit $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov ayant pour ensemble d'états $E = \{0, \dots, 9\}$ et pour matrice de transition

$$P = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}.$$

a) Démontrer que les états 0, 1 et 2 forment une classe d'équivalence pour la relation $\leftrightarrow$ (communication entre deux états).

b) Quelle est la période de l'état 3 ?

c) Prouver que l'état 0 est récurrent.

d) Prouver que l'état 8 est transitoire.

a) Puisque $p_{0,1} = 1/4 > 0$ et $p_{1,0} = 1/2 > 0$, alors $0 \leftrightarrow 1$. De même, puisque $p_{0,2} = 1/4 > 0$ et $p_{2,0} = 1/2 > 0$, alors $0 \leftrightarrow 2$. La relation $\leftrightarrow$ étant réflexive et transitive, alors $0 \leftrightarrow 1$ et $0 \leftrightarrow 2$ entraînent $1 \leftrightarrow 2$. Donc, les états 0, 1, 2 communiquent ensembles, et font ainsi partis de la même classe d'équivalence pour la relation $\leftrightarrow$. De plus, aucun autre état n'est accessible depuis cet ensemble d'état. Par conséquence, ils forment une classe d'équivalence.

b) On remarque que l'état 3 mène seulement aux états 4 et 6, que l'état 6 mène seulement à l'état 7, puis que l'état 7 mène seulement aux états 3 et 4. De plus, l'état 4 est absorbant car $p_{4,4} = 1$. Ainsi, en partant de l'état 3, la seule façon d'y revenir est de passer par les états 6 et 7 une seule fois. On a donc $p_{3,3}^{(n)} > 0$ si et seulement si $3|n$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} d(3) &= \text{pgcd}\{3, 6, 9, \dots\} \\ &= 3. \end{aligned}$$

c) Soit

$$f_{i,0} = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{X_n = 0\} \mid X_0 = i\right)$$

Alors, en conditionnant le calcul de probabilité sur la première transition, on obtient le système d'équations suivant :

$$f_{0,0} = p_{0,0} + p_{0,1} \cdot f_{1,0} + p_{0,2} \cdot f_{2,0} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot f_{1,0} + \frac{1}{4} \cdot f_{2,0},$$

$$f_{1,0} = p_{1,0} + p_{1,1} \cdot f_{1,0} + p_{1,2} \cdot f_{2,0} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot f_{1,0} + 0 \cdot f_{2,0},$$

$$f_{2,0} = p_{2,0} + p_{2,1} \cdot f_{1,0} + p_{2,2} \cdot f_{2,0} = \frac{1}{2} + 0 \cdot f_{1,0} + \frac{1}{2} \cdot f_{2,0},$$

La solution de ce système est $f_{0,0} = f_{1,0} = f_{2,0} = 1$. Ainsi, puisque $f_{0,0} = f_0 = 1$, l'état 0 est récurrent.

d) On remarque que $P(X_2 = 0, X_1 = 9 \mid X_0 = 8) = 1/6$. Or, $0 \nrightarrow 8$. Ceci implique que $f_8 \leq 1 - 1/6 < 1$. Par conséquent, par définition, l'état 8 est transitoire.

Exercice 2.31 Démontrer que la relation $\leftrightarrow$ (communication entre deux états) est une relation d'équivalence (réflexive, transitive et symétrique).

[Réflexive] Pour tout état i, $p_{i,i}^{(0)} = 1$. Ainsi, $i \leftrightarrow i$ pour tout i, ce qui implique que la relation $\leftrightarrow$ est réflexive.

[Symétrique] Soit i, j des états tels que $i \leftrightarrow j$. Par définition, on a $i \rightarrow j$ et $j \rightarrow i$, ce qui implique $j \leftrightarrow i$. Ainsi, la relation $\leftrightarrow$ est symétrique.

[Transitive] Soit i, j, k des états tels que $i \leftrightarrow j$ et $j \leftrightarrow k$. Par définition, on a $i \rightarrow j$ et $j \rightarrow k$. Or, selon la proposition 2.20, la relation $\rightarrow$ est transitive, d'où $i \rightarrow k$. De même, on a $k \rightarrow j$ et $j \rightarrow i$, d'où $k \rightarrow i$. Ainsi, $i \leftrightarrow k$, ce qui implique que la relation $\leftrightarrow$ est transitive.

Exercice 2.32 Dans une ville, un système de vélos en libre-service a été implanté. À la fin du premier mois d'opération, 10 % de la population l'a utilisé, alors que 90 % de la population a utilisé sa voiture. Supposons qu'à chaque mois, 10 % des utilisateurs de ce système de vélos retournent à leur voiture, alors que 5 % des automobilistes transfèrent vers le système de vélo.

a) Si une personne utilisait sa voiture à la fin du premier mois, quelle est la probabilité qu'elle utilise le système de vélos à la fin du troisième mois ?

b) À la fin du troisième mois, quel sera le pourcentage de gens utilisant le système de vélos ?

c) À long terme, quelle proportion de la population utilisera le système de vélos ?

Soit

$$X_n = \begin{cases} 0 & \text{si la personne utilise sa voiture après } n \text{ mois,} \\ 1 & \text{si la personne utilise le système de vélos après } n \text{ mois.} \end{cases}$$

La chaîne de Markov $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ a pour matrice de transition et de 2-transition

$$P = \begin{bmatrix} 19/20 & 1/20 \\ 1/10 & 9/10 \end{bmatrix} \text{ et } P^{(2)} = P^2 = \begin{bmatrix} 363/400 & 37/400 \\ 37/200 & 163/200 \end{bmatrix}.$$

a) Directement,

$$\begin{aligned} P(X_3 = 1 \mid X_1 = 0) &= p_{0,1}^{(2)} \\ &= 37/400 \approx 0{,}0925. \end{aligned}$$

b) Selon les données du problème, $P(X_1 = 0) = 9/10$ et $P(X_1 = 1) = 1/10$. Ainsi, en conditionnant le calcul de probabilité sur X_1, on obtient

$$\begin{aligned} P(X_3 = 1) &= P(X_3 = 1 \mid X_1 = 0) \cdot P(X_1 = 0) + P(X_3 = 1 \mid X_1 = 1) \cdot P(X_1 = 1) \\ &= p_{0,1}^{(2)} \cdot P(X_1 = 0) + p_{1,1}^{(2)} \cdot P(X_1 = 1) \\ &= \frac{37}{400} \cdot \frac{9}{10} + \frac{163}{200} \cdot \frac{1}{10} \\ &= \frac{659}{4\,000} \approx 0{,}1648. \end{aligned}$$

c) On vérifie que la chaîne de Markov est irréductible et que tous ses états sont ergodiques. Ainsi, d'après le théorème 2.44, la proportion de la population qui utilisera le système de vélos à long terme sera la valeur π_1 satisfaisant au système d'équations suivant :

$$\begin{aligned} \pi_0 &= \frac{19}{20} \cdot \pi_0 + \frac{1}{10} \cdot \pi_1 \\ \pi_1 &= \frac{1}{20} \cdot \pi_0 + \frac{9}{10} \cdot \pi_1 \\ 1 &= \pi_0 + \pi_1 \end{aligned}$$

De l'équation 1, $\pi_0 = 2\pi_1$. Ainsi, de l'équation 3, $\pi_1 = 1/3$.

Exercice 2.33 Lors du carnaval de l'Université de Sherbrooke, Alice décide de jouer à un jeu, lequel nécessite l'achat d'un coupon au coût de 1 $. À chaque tour de jeu, elle a 60 % de chance de gagner un coupon et 40 % de chance d'en perdre un. Le jeu prend fin lorsqu'elle n'a plus de coupons, auquel cas elle repart les mains vides, ou lorsqu'elle réussit à accumuler trois coupons, auquel cas elle remporte un gros toutou.

a) Quelle est la probabilité qu'Alice remporte un gros toutou ?

b) En moyenne, combien de tours de jeu seront nécessaires avant que la partie prenne fin ?

Soit X_n le nombre de coupons qu'a Alice après n tours de jeu. La collection $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov ayant $E = \{0,1,2,3\}$ pour espace d'états. La matrice de transition est

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}40 & 0 & 0{,}60 & 0 \\ 0 & 0{,}40 & 0 & 0{,}60 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) Pour tout $i, j \in E$, on définit la probabilité d'atteindre l'état j en partant de i par

$$f_{i,j} = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\{X_n = j\} \mid X_0 = i\right).$$

La probabilité qu'Alice remporte un toutou est $f_{1,3}$. En conditionnant le calcul de $f_{i,j}$ sur X_1, on obtient

$$f_{i,j} = p_{i,j} + \sum_{\substack{k\in E \\ k\neq j}} p_{i,k} \cdot f_{k,j}.$$

En fixant $j = 3$, on obtient

$f_{0,3} = 0$ (car 0 est un état absorbant)

$f_{1,3} = 0{,}40 \cdot f_{0,3} + 0{,}60 \cdot f_{2,3} = 0{,}60 \cdot f_{2,3}$

$f_{2,3} = 0{,}40 \cdot f_{1,3} + 0{,}60$

$f_{3,3} = 1$ (car 1 est un état absorbant)

En solutionnant ce système, on obtient $f_{1,3} = 9/19 = 0{,}4737$.

b) Soit M_i le nombre de tours de jeu nécessaires avant que la partie prenne fin si Alice commence la partie avec i coupons. On remarque que $M_0 = M_3 = 0$. De plus, en conditionnant le calcul de $E(M_i)$ sur X_1, on obtient

$E(M_1) = 1 + 0{,}40 \cdot E(M_0) + 0{,}60 \cdot E(M_2) = 1 + 0{,}60 \cdot E(M_2)$,

$E(M_2) = 1 + 0{,}40 \cdot E(M_1) + 0{,}60 \cdot E(M_3) = 1 + 0{,}40 \cdot E(M_1)$.

En solutionnant ce système, on obtient $E(M_1) = 40/19 = 2{,}105$ tours.

Exercice 2.34 Pour chacune des affirmations suivantes, déterminer si elle est vraie ou fausse. Justifier votre réponse par une preuve complète si l'affirmation est vraie, ou par un contre-exemple si elle fausse.

a) Toute chaîne de Markov a au moins un état récurrent.

b) Toute chaîne de Markov a au moins un état transitoire.

c) Soit i un état d'une chaîne de Markov ayant P pour matrice de transition. Si $d(i) = 2$, alors $P_{i,i}^{(2)} > 0$.

Cet exercice se retrouve dans le devoir 2.

Exercice 2.35 Soit $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov à temps discret ayant pour espace d'états $E = \{0, 1, 2, 3\}$ et dont la matrice de transition est

$$P = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}4 & 0{,}1 & 0 \\ 0{,}3 & 0{,}5 & 0 & 0{,}2 \\ 0 & 0 & 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0 & 0 & 0{,}5 & 0{,}5 \end{bmatrix}.$$

Supposons que $X_0 = 0$. Soit M le nombre de fois où le processus est à l'état 0, incluant au temps 0. Déterminer $E(M)$.

Solution 1

Les états 0 et 1 sont transitoires. En utilisant la notation de la proposition 2.50, on a

$$P_T = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}4 \\ 0{,}3 & 0{,}5 \end{bmatrix}.$$

Ainsi,

$$S = (I - P_T)^{-1} = \begin{bmatrix} 3{,}85 & 3{,}08 \\ 2{,}31 & 3{,}85 \end{bmatrix}.$$

Par conséquent,

$$E(M) = s_{1,1} = 3{,}85.$$

Solution 2

En conditionnant sur X_1, on a

$$f_0 = 0{,}5 + 0{,}4 \cdot f_{1,0} + 0{,}1 \cdot f_{2,0} \Longrightarrow f_0 = 0{,}5 + 0{,}4 \cdot f_{1,0}.$$

$$f_{1,0} = 0{,}3 + 0{,}5 \cdot f_{1,0} + 0{,}2 \cdot f_{3,0} \Longrightarrow f_{1,0} = 0{,}6.$$

En solutionnant ce système, on obtient

$$f_0 = 0{,}74.$$

Puisque $M \sim \text{Geom}(1 - 0{,}74)$, alors $E(M) = 1/0{,}26 = 3{,}85$.

Exercice 2.36 Une population est formée d'individus tous identiques qui donnent naissance à des individus de même type. Chaque individu produit dans sa vie j enfants avec probabilité P_j, où $P_0 = 0{,}25$, $P_1 = 0{,}25$ et $P_2 = 0{,}50$. Soit X_n le nombre d'individus de la génération n.

a) Montrer que $E(X_n) = (5/4)^n \cdot E(X_0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) Sachant que la population comprenait deux individus au temps 0, calculez la probabilité qu'elle s'éteigne.

a) Soit Z_i représentant le nombre d'enfants de l'individu i de la génération $n-1$. On a vu à la section 2.6 que

$$E(X_n) = E(X_0) \cdot \big(E(Z_i)\big)^2.$$

Or,

$$\begin{aligned} E(Z_i) &= 0 \cdot 0{,}25 + 1 \cdot 0{,}25 + 2 \cdot 0{,}5 \\ &= 1{,}25. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$E(X_n) = (5/4)^n \cdot E(X_0).$$

b) On a vu à la section 2.6 que pour un individu, la probabilité π_0 que la population s'éteigne satisfait à l'équation

$$\begin{aligned} \pi_0 = \pi_0^0 P_0 + \pi_0^1 P_1 + \pi_0^2 P_2 &\Longrightarrow \pi_0 = \frac{1}{4} + \frac{\pi_0}{4} + \frac{\pi_0^2}{2} \\ &\Longrightarrow 2\pi_0^2 - 3\pi_0 + 1 = 0 \\ &\Longrightarrow \cancel{\pi_0 = 1} \ \text{ ou } \ \pi_0 = 0{,}5. \end{aligned}$$

Ainsi, pour deux individus au temps 0, la probabilité que la population s'éteigne est $0{,}5^2 = 0{,}25$.