Exemple 1.27 On a n éléments qui sont ordonnés $e_1, \dots, e_n$. On choisit, à chaque seconde, un élément e_i (avec probabilité p_i) et on le place en tête de liste. Quelle est la position moyenne de l'élément choisi après une longue période d'opération ?

Avant toute chose, la formulation de l’énoncé laisse à désirer. Il faut comprendre qu’on laisse d’abord le processus évoluer pendant une longue période d’opération, ce qui sous-entend que chaque élément sera sélectionné au moins une fois. Après cette longue période d’opération, on choisit un élément. On s’intéresse à la position moyenne de cet élément choisi.

Soit

X : position de l’élément choisi,

Y : numéro (i) de l’élément (e_i) sélectionné.

On cherche $E(X)$. En conditionnant sur Y, on obtient

$$\begin{aligned} E(X) &= E\big(E(X \mid Y)\big) \\ &= \sum_{i=1}^{n} E(X \mid Y = i) \cdot P(Y = i) \end{aligned}$$

Maintenant, on a

$$(X \mid Y = i) = 1 + \sum_{j=1}^{n} I_j,$$

où

$$I_j = \begin{cases} 1 & \text{si } e_j \text{ est placé avant } e_i \text{ dans la liste,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Par ailleurs, $E\big(I_J\big) = P\big(e_j \text{ est placé avant } e_i \text{ dans la liste}\big)$ car I_j est la variable indicatrice de l’évènement « e_j est placé avant e_i dans la liste ». De plus,

$$P\big(e_j \text{ est placé avant } e_i \text{ dans la liste}\big) = \begin{cases} \dfrac{p_j}{p_i + p_j} & \text{si } j \neq i, \\ 0 & \text{si } j = i. \end{cases}$$

On obtient cette dernière probabilité car e_j sera placé avant e_i si le choix le plus récent entre les deux est e_j. Étant donné un choix entre e_j et e_i (avec $i \neq j$), la probabilité que e_j soit choisi est

$$\begin{aligned} P\big(e_j \text{ est choisi} \mid e_i \text{ ou } e_j \text{ est choisi}\big) &= \frac{P\big(e_j \text{ est choisi}\big)}{P\big(e_i \text{ ou } e_j \text{ est choisi}\big)} \\ &= \frac{p_j}{p_i + p_j}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} E(X \mid Y = i) &= 1 + \sum_{j=1}^{n} E\big(I_j\big) \\ &= 1 + \sum_{j=1}^{n} P\big(e_j \text{ est placé avant } e_i \text{ dans la liste}\big) \\ &= 1 + \sum_{j \neq i} \frac{p_j}{p_i + p_j}. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{i=1}^{n} E(X \mid Y = i) \cdot P(Y = i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(1 + \sum_{j \neq i} \frac{p_j}{p_i + p_j} \right) \cdot p_i \\ &= 1 + \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot \left(\sum_{j \neq i} \frac{p_j}{p_i + p_j} \right). \end{aligned}$$

Si $n = 4$ et $p_i = 0{,}25$ pour tout i, alors

$$\begin{aligned} E(X) &= 1 + \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{4} \left(\sum_{j \neq i} \frac{1}{2} \right) \\ &= 1 + \frac{1}{4} \cdot 4 \cdot \frac{3}{2} \\ &= \frac{5}{2} = 2{,}5. \end{aligned}$$

Si $n = 4$ et $p_1 = 0{,}7$, $p_2 = p_3 = p_4 = 0{,}1$, alors

$$\begin{aligned} E(X) &= 1 + \sum_{i=1}^{4} p_i \cdot \left(\sum_{j \neq i} \frac{p_j}{p_i + p_j} \right) \\ &= 1 + 0{,}7 \cdot 3 \cdot \frac{0{,}1}{0{,}8} + 3 \cdot 0{,}1 \cdot \left(\frac{0{,}7}{0{,}8} + 2 \cdot \frac{0{,}1}{0{,}2} \right) \\ &= 1 + 0{,}2625 + 0{,}5625 \\ &= 1{,}825. \end{aligned}$$

Si $n = 4$ et $p_1 = 0{,}97$, $p_2 = p_3 = p_4 = 0{,}01$, alors

$$\begin{aligned} E(X) &= 1 + \sum_{i=1}^{4} p_i \cdot \left(\sum_{j \neq i} \frac{p_j}{p_i + p_j} \right) \\ &= 1 + 0{,}97 \cdot 3 \cdot \frac{0{,}01}{0{,}98} + 3 \cdot 0{,}01 \cdot \left(\frac{0{,}97}{0{,}98} + 2 \cdot \frac{0{,}01}{0{,}02} \right) \\ &= 1 + 0{,}2625 + 0{,}5625 \\ &= 1{,}0894. \end{aligned}$$