

CHAPITRE 3

PROCESSUS DE POISSON

Un processus de Poisson est un processus stochastique comptant le nombre d'événements et le moment d'occurrence de ces événements sur un intervalle de temps. Le temps écoulé entre chaque paire d'événements successifs suit une distribution exponentielle.

3.1 La loi exponentielle

Rappels (loi exponentielle)

Une variable aléatoire continue X suit une **loi exponentielle** de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, notée $X \sim \text{Exp}(\lambda)$, si sa fonction de densité est

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \in \mathbb{R}_+^* \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Sa fonction de répartition de $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ est

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

Son espérance est $E(X) = 1/\lambda$ et sa variance est $\text{Var}(X) = 1/\lambda^2$.

Sa fonction génératrice des moments est

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= E(e^{tX}) \\ &= \int_0^{\infty} e^{tx} \lambda e^{-\lambda x} dx \\ &= \frac{\lambda}{\lambda - t} \quad \text{pour } t < \lambda. \end{aligned}$$

Exemple 3.1 Soit X le temps d'attente à un guichet automatique. Si $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ et si le temps d'attente moyen est de deux minutes, déterminer $P(X > 5)$ et $P(X > 9 \mid X > 4)$.

Définition 3.2 Une variable aléatoire X est dite **sans mémoire** si, pour tout $s, t \geq 0$,

$$P(X > s + t \mid X > t) = P(X > s).$$

Théorème 3.3 Une variable aléatoire est sans mémoire si et seulement si elle suit une loi exponentielle.

Proposition 3.4 Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes avec $X_1 \sim \text{Exp}(\lambda_1)$ et $X_2 \sim \text{Exp}(\lambda_2)$. Alors

$$P(X_1 < X_2) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}.$$

Exemple 3.5 Trois individus attendent à un guichet. Bob attend au guichet 1 et Carlos attend au guichet 2. Alice se rendra au guichet libéré en premier. Le temps d'attente au guichet 1 suit une loi exponentielle de moyenne 3 minutes et le temps d'attente au guichet 2 suit une loi exponentielle de moyenne 4 minutes. Déterminer les probabilités suivantes.

- a) Bob soit servi avant Carl.
- b) Alice soit servie avant Carl.
- c) Alice soit servie avant Bob.
- d) Alice soit servie la dernière.

Proposition 3.6 Soit X_1, \dots, X_n des variables aléatoires indépendantes telles que $X_i \sim \text{Exp}(\lambda_i)$ pour tout i . Si $Y = \min\{X_1, \dots, X_n\}$, alors

$$Y \sim \text{Exp}\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i\right).$$

Rappels (loi gamma)

Une variable aléatoire continue X suit une **loi gamma** de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, notée $X \sim \Gamma(k, \theta)$, si

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{x^{k-1} e^{-x/\theta}}{\Gamma(k)\theta^k} & \text{si } x \in \mathbb{R}_+^*. \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où $\Gamma(k)$ est la fonction gamma. Dans ce cas,

$$E(X) = k\theta \quad \text{et} \quad \text{Var}(X) = k\theta^2.$$

Alternativement, la loi gamma peut être paramétrée à l'aide d'un paramètre de forme $\alpha = k$ et d'un paramètre d'intensité $\beta = 1/\theta$, notée $X \sim \Gamma(\alpha, \beta)$. Dans ce cas la fonction de densité est

$$f_X(x) = \begin{cases} x^{\alpha-1} \frac{\beta^\alpha e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha)} & \text{si } x \in \mathbb{R}_+^*. \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où $\Gamma(k)$ est la fonction gamma. Dans ce cas,

$$E(X) = k/\beta \quad \text{et} \quad \text{Var}(X) = k/\beta^2.$$

Proposition 3.7 Soit X_1, \dots, X_n des variables aléatoires indépendantes telles que $X_i \sim \text{Exp}(\lambda_i)$ pour tout i . Si $Y = \sum_{i=1}^n X_i$, alors

$$Y \sim \Gamma(\alpha = n, \beta = \lambda).$$

Exemple 3.8 Deux clients attendent dans une file où le temps d'attente suit une loi exponentielle de moyenne cinq minutes. Soit X_i le temps d'attente du client i , pour $i \in \{1, 2\}$. Posons $T = X_1 + X_2$. Quelle est la probabilité que le temps d'attente global excède 20 minutes ? Excède 10 minutes ?

3.2 Processus de Poisson

Définition 3.9 Un processus stochastique $\{N_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ est un **processus de comptage** lorsque N_t représente le nombre d'événements observés jusqu'à l'instant t . Il satisfait aux propriétés suivantes :

- a) $N_t \in \mathbb{N}$,
- b) Si $s < t$, alors $N_s < N_t$.
- c) Si $s < t$, alors $N_t - N_s$ représente le nombre d'événements observés dans l'intervalle $]s, t]$.

Exemple 3.10

- a) Le nombre de personnes qui sont entrées dans un magasin particulier à, ou avant, un certain temps t .
- b) Le nombre de personnes dans le magasin au moment t ne serait pas un processus de comptage.
- c) Le nombre de personnes qui sont nées avant l'instant t .
- d) Le nombre d'arrivés à un guichet.
- e) Le nombre d'émissions radioactives.
- f) Le nombre de buts en carrière au moment t .

Définition 3.11 Un processus de comptage est à **accroissements stationnaires** si, pour tous $t_1 < t_2$ et pour tout $s > 0$, la loi de probabilité de $N_{t_2+s} - N_{t_1+s}$ est la même que celle de $N_{t_2} - N_{t_1}$.

Définition 3.12 Un processus de comptage est à **accroissements indépendants** si, pour toutes valeurs $a_1 < b_1$ et $a_2 < b_2$, le nombre d'événements $N_{b_2} - N_{a_2}$ est indépendant du nombre d'événements $N_{b_1} - N_{a_1}$ lorsque $[a_1, b_1]$ et $[a_2, b_2]$ sont disjoints.

Définition 3.13 Un processus de comptage $\{N_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ est un **processus de Poisson** avec paramètre d'intensité λ si

- a) $N_0 = 0$,
- b) le processus est à accroissements indépendants,
- c) $N_{t+s} - N_s \sim \text{Poisson}(\lambda t)$ pour toutes valeurs $s, t \geq 0$.

Remarques

- a) Soit $\{N_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ un processus de Poisson avec paramètre d'intensité λ . Le nombre d'événements dans l'intervalle $[0, t]$ est en moyenne λt .
- b) Tout processus de Poisson est à accroissements stationnaires.

Exemple 3.14 Une compagnie d'assurance a 240 000 clients entre 50 et 60 ans. Supposons que N_t , le nombre de décès à l'instant t , est un processus de Poisson et que le taux annuel de mortalité est de 1 sur 10 000.

- a) Quelle est la probabilité qu'il y ait plus de deux décès dans un mois ?
- b) Quelle est la probabilité qu'il y ait deux décès ou plus dans une semaine ?
- c) Quelle est la probabilité qu'il y ait deux décès ou plus la semaine prochaine sachant qu'il y en a eu trois la semaine passée ?
- d) Quelle est la probabilité qu'il y ait plus d'une semaine d'attente avant le prochain décès ?
- e) Quel est le temps moyen à partir d'aujourd'hui pour qu'il y ait quatre décès ?

- f) En supposant que 60 % des décès sont dus à une maladie A, quelle est la probabilité pour qu'il y ait deux décès ou plus dans un mois qui soit attribuables à la maladie A ?
- g) Quelle est la probabilité qu'il y ait deux décès ou plus dus à la maladie A le mois prochain, étant donné qu'il y en a trois le mois passé qui n'étaient pas attribuables à A ?

Exemple 3.15 Une crèmerie doit liquider son inventaire de crème glacée. En stock, il y a un pot de chacune des saveurs $1, \dots, M$. Les clients arrivent selon un processus de Poisson d'intensité λ et chacun achète la saveur j avec probabilité p_j (et n'achète rien s'il n'en reste plus). Déterminer le temps moyen pour tout vendre.

Remarque Supposons que $N_t = 1$. C'est donc dire que dans l'intervalle $[0, t]$, il s'est réalisé un unique évènement. Soit T_1 le moment où cet évènement s'est réalisé. Alors la distribution de $T_1 \mid N_t = 1$ est uniforme sur $[0, t]$.

Proposition 3.16 Supposons que des évènements se produisent selon un processus de Poisson d'intensité λ . Posons $\{N_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ ce processus de Poisson. Lorsqu'un évènement se produit au temps s , il a une probabilité $P(s)$ d'être classé de type A. Sinon, il est de type B. Soient NA_t et NB_t le nombre d'évènements de type A (respectivement de type B) qui se sont produits jusqu'au temps t . Alors $NA_t \sim \text{Poisson}(\lambda t p)$ et $NB_t \sim \text{Poisson}(\lambda t(1 - p))$, où

$$p = \frac{1}{t} \int_0^t P(s) ds.$$

De plus, NA_t et NB_t sont indépendantes.

Exemple 3.17 On suppose que le nombre de personnes contractant le VIH suit un processus de Poisson d'intensité $\lambda \in \mathbb{R}_+$, avec λ inconnu. On suppose que le temps d'incubation du VIH-SIDA est une variable aléatoire de fonction de répartition G connue. On admet que les temps d'incubation sont indépendants d'un individu à l'autre. Posons $N1_t$ le nombre de sidatiques au temps t et $N2_t$ le nombre de porteurs du VIH non sidatiques (aucun symptôme observable) au temps t . On veut estimer $N2_t$ à un temps t_0 .

3.3 Exercices supplémentaires

Exercice 3.1 Deux personnes sont en attente à un guichet. Les temps d'attente sont indépendants et de loi $X_1 \sim \text{Exp}(\lambda_1)$ et $X_2 \sim \text{Exp}(\lambda_2)$.

- Déterminer $E(\min(X_1, X_2))$.
- Déterminer $E(\max(X_1, X_2))$.
- Déterminer la fonction de masse et la fonction de répartition de $X_1 \mid X_1 < c$.
- Déterminer $E(X_1 \mid X_1 < c)$.

Exercice 3.2 On dit qu'une variable aléatoire non négative X est **sans mémoire** si, pour toutes valeurs $s, t \geq 0$, $P(X > s + t | X > t) = P(X > s)$. Si X représente la durée de vie d'un certain objet, alors si l'objet est toujours fonctionnel au temps t , la distribution du temps restant avant sa mort est la même que la distribution du temps depuis l'origine (un peu comme si l'objet avait « oublié » qu'il était utilisé depuis un temps t).

a) Montrer que les variables aléatoires exponentielles sont sans mémoire.

b) On va montrer ici que ce sont les seules variables aléatoires continues sans mémoire.

1) Soit g une fonction continue à droite telle que $g(s + t) = g(s)g(t)$. Montrer que $g(m/n) = (g(1/n))^m$ pour toutes valeurs $m, n \in \mathbb{Z}$ avec $n \neq 0$.

2) En déduire que $g(1/n) = (g(1))^{1/n}$.

3) Montrer que $g(x) = (g(1))^x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

4) Montrer que $g(1) \geq 0$.

5) En déduire que $g(x) = e^{-\lambda x}$, où $\lambda = -\ln(g(1))$.

6) Soit X une variable aléatoire sans mémoire. Posons $\bar{F}(x) = P(X > x)$. Montrer que

$$\bar{F}(s + t) = \bar{F}(s)\bar{F}(t).$$

7) En déduire que X suit une loi exponentielle.

Exercice 3.3 Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes telles que $X_1 \sim \text{Exp}(\lambda_1)$ et $X_2 \sim \text{Exp}(\lambda_2)$. Montrer que

$$P(X_2 > X_1 + t | X_2 > X_1) = P(X_2 > t).$$

Exercice 3.4 Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes, où $Y \sim \text{Exp}(\lambda)$. Montrer que la distribution conditionnelle de $Y - X | X < Y$ est aussi exponentielle de paramètre λ .

Exercice 3.5 Soit X une variable aléatoire continue de densité f et de fonction de répartition F , représentant la durée de vie d'un certain composant. On appelle **fonction taux de panne** de X , notée $\lambda(t)$, la fonction $\lambda(t) = f(t)/(1 - F(t))$.

a) Montrer que $P(X \in]t, t + dt[| X > t) \approx \lambda(t)dt$.

b) Montrer que la fonction taux de panne d'une distribution exponentielle est constante.

c) Montrer que la fonction taux de panne détermine uniquement la distribution d'une variable aléatoire, c'est-à-dire que si $\lambda(t)$ est connue, il n'y a qu'un seul choix pour la loi de X .

d) En déduire que l'unique distribution ayant un taux de panne constant est la distribution exponentielle.

e) Supposons que le taux de mortalité pour un fumeur de t années est donné par $\lambda_f(t)$ tandis que le taux de mortalité pour un non fumeur du même âge est donné par $\lambda_n(t)$. Admettons que le taux de mortalité pour un fumeur est le double de celui d'un non fumeur.

1) Déterminer la probabilité pour qu'un non fumeur d'âge A atteigne l'âge B sous l'hypothèse que $A < B$.

2) Faire le même calcul pour un fumeur.

3) En déduire que si on a deux individus du même âge dont l'un est fumeur et l'autre pas, la probabilité que le fumeur survive à un âge donné est le carré de celle du non fumeur.

4) Déterminer la probabilité pour qu'un individu âgé de 50 ans survive jusqu'à l'âge de 60 ans selon qu'il est fumeur ou non en supposant que $\lambda_n(t) = 1/30$ pour $50 \leq t \leq 60$.

Exercice 3.6 Deux individus, A et B, attendent un rein pour une transplantation. Si l'individu A ne reçoit pas de rein, son temps de survie suit une loi exponentielle avec paramètre λ_A . Pour l'individu B, ce temps de survie est de loi exponentielle avec paramètre λ_B . Les reins deviennent disponibles selon un processus de Poisson d'intensité λ . Le premier rein ira à A s'il est en vie, sinon à B s'il est toujours vivant. Les autres causes de décès sont négligeables.

- a) Quelle est la probabilité que A reçoive un rein ?
- b) Quelle est la probabilité que B reçoive un rein ?

Exercice 3.7 Les espacements T entre les temps d'arrivée des trains à une gare obéissent à une loi de probabilité quelconque de moyenne 30 minutes et d'écart-type 4 minutes. Des passagers arrivent à cette gare selon un processus de Poisson avec une moyenne de 70 par heure. Supposons qu'un train vient de quitter la gare. Posons X le nombre de passagers qui prendront le prochain train. Déterminer $E(X)$ et $Var(X)$.

Exercice 3.8 Des patients se présentent à l'unité mobile de service à la collectivité de l'Ambulance Saint-Jean selon un processus de Poisson d'intensité $\lambda = 1$ par heure.

- a) Déterminer le temps moyen pour que le dixième patient se présente pour recevoir des soins.
- b) Déterminer la probabilité pour que le temps écoulé entre l'arrivée du dixième patient et celle du onzième soit de plus de trois heures.
- c) Sachant que chaque patient a une probabilité de 10 % de s'y présenter pour un problème traumatique, déterminer la probabilité pour que personne ne se pointe à l'unité au cours des six prochaines heures pour un problème de ce type.

Exercice 3.9 Des enfants se présentent à un manège selon un processus de Poisson d'intensité λ . L'opérateur du manège le lance à toutes les 15 minutes. De façon à minimiser le temps d'attente total des enfants, il souhaite le lancer à nouveau en un temps t entre les démarrages habituels.

- a) Déterminer le nombre moyen d'enfants qui se pointent au manège dans l'intervalle $]0, t[$.
- b) Quel est le temps moyen d'attente pour un enfant qui s'est présenté au manège dans l'intervalle $]0, t[$?
- c) Quel est le temps d'attente total moyen des enfants ?
- d) Déterminer la valeur de t qui minimise ce temps total moyen.

Exercice 3.10 Les automobiles passent à un passage piétonnier selon un processus de Poisson d'intensité $\lambda = 3$ par minute. Un piéton veut déjouer la mort et traverse le passage clouté les yeux fermés.

- a) S'il lui faut s secondes pour le faire, déterminer la probabilité pour qu'il s'en sorte indemne.
- b) Supposons que le piéton peut éviter une automobile qui passe mais ne peut éviter l'accident s'il y en a deux ou plus qui passent en même temps que lui. Déterminer la probabilité pour qu'il s'en sorte indemne s'il lui faut s secondes pour traverser.

Exercice 3.11 Supposons que $\{N1_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ et $\{N2_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ sont des processus de Poisson indépendants de paramètres λ_1 et λ_2 respectivement. Montrer que $N_t = N1_t + N2_t$ est un processus de Poisson de paramètre $\lambda_1 + \lambda_2$.

Exercice 3.12 L'appareil 1 fonctionne présentement. L'appareil 2 sera mis en fonction dans t minutes. Si la durée de vie de l'appareil i suit une loi exponentielle de taux λ_i , quelle est la probabilité que l'appareil 1 soit le premier à s'arrêter ?

Exercice 3.13 Un médecin a établi deux rendez-vous, l'un à 13 h et l'autre à 13 h 30. Les durées de ces rendez-vous suivent des variables aléatoires exponentielles indépendantes de moyennes 30 minutes. En assumant que les deux patients sont à l'heure, calculer le temps moyen que passera au bureau du médecin le patient ayant son rendez-vous à 13 h 30.

Exercice 3.14 Une théorie scientifique suppose que des erreurs dans la division cellulaire se produisent selon un processus de Poisson avec un taux de 2,5 par année, et qu'un individu meurt lorsque 196 de ces erreurs se produisent. Assumer l'exactitude de cette théorie.

- a) Calculer l'espérance de vie d'un individu.
- b) Calculer la probabilité qu'un individu vive plus de 90 ans.

Exercice 3.15 Des voitures circulent sur une rue selon un processus de Poisson de taux λ par minute. Une femme souhaitant traverser la rue à un certain endroit attend jusqu'à ce qu'elle ne voit qu'aucune voiture ne viendra dans les T prochaines minutes.

- a) Calculer la probabilité que son temps d'attente soit de 0.
- b) Calculer l'espérance de son temps d'attente.

Exercice 3.16 Le coût engendré par un accident de voiture est une variable aléatoire exponentielle de moyenne 1 500 \$. De ce montant, la compagnie d'assurance paie seulement le montant excédant 500 \$. Calculer le montant moyen que paie la compagnie d'assurance par accident.

Exercice 3.17 Les espacements entre les temps d'arrivée des trains à une gare obéissent à une loi de probabilité quelconque de moyenne μ minutes. Des passagers arrivent à cette gare selon un processus de Poisson avec une moyenne de α par heure. Supposons qu'un train vient de quitter la gare. Posons X le nombre de passagers qui prendront le prochain train. Déterminer $E(X)$.