Devoir 2

À remettre le vendredi 14 juin 2024 à 8h30 au début de la séance de cours.

Question 1 (2 + 2 + 4 + 2 + 4 = 14 points)

Considérer trois boîte: une rouge, une verte et une bleue. Chaque boîte contient des balles de différentes couleurs selon la distribution suivante:

- boîte rouge : 1 rouges, 2 vertes et 3 bleues,
- boîte verte : 3 rouges, 2 vertes et 2 bleues,
- boîte bleue : 4 rouges, 5 vertes et 2 bleues.

À l'étape initiale (étape 0), une balle de la boîte rouge est sélectionnée aléatoirement, puis est replacée dans cette boîte. À chaque étape ultérieure (étape $n+1$), une balle est sélectionnée aléatoirement dans la boîte de la couleur de la balle choisie à l'étape précédente (étape n), puis est replacée dans cette même boîte.

Soit X_n représentant la couleur de la balle choisie à l'étape n.

a) Expliquer pourquoi $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov.

b) Trouver la matrice de transition P de $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

c) Quelle est la probabilité de sélectionner une balle verte à la quatrième étape ?

d) Si une balle bleue a été sélectionnée à la troisième étape, quelle est la probabilité de sélectionner une balle rouge à la huitième étape ?

e) Sur le long terme, quelle proportion des balles sélectionnées sont rouges ? Quelle proportion sont vertes ? Quelle proportion sont bleues ?

Question 2 (4 + 6 = 10 points)

Considérer la chaîne de Markov $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ayant pour espace d'états $E = \{0, 1, 2, 3\}$ et pour matrice de transition

$$P = \begin{bmatrix} 0{,}25 & 0{,}25 & 0{,}25 & 0{,}25 \\ 0{,}40 & 0{,}50 & 0 & 0{,}10 \\ 0 & 0 & 0{,}60 & 0{,}40 \\ 0 & 0 & 0{,}50 & 0{,}50 \end{bmatrix}.$$

a) Pour chaque état de cette chaîne de Markov, déterminer s'il est récurrent ou transitoire.

b) Sachant que

$$P(X_0 = 0) = \frac{1}{2}, \quad P(X_0 = 1) = \frac{1}{3}, \quad P(X_0 = 2) = \frac{1}{12}, \quad P(X_0 = 3) = \frac{1}{12},$$

calculer $E(X_5)$.

Question 3 (8 points)

Soient i et j deux états de la chaîne de Markov $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Montrer que si i est récurrent et si i ne communique pas avec j, alors $P_{i,j} = 0$.

Question 4 (4 + 4 + 4 = 12 points)

Pour chacune des affirmations suivantes, déterminer si elle est vraie ou fausse, avec justification complète.

a) Toute chaîne de Markov a au moins un état récurrent.

b) Toute chaîne de Markov a au moins un état transitoire.

c) Soit i un état d'une chaîne de Markov ayant P pour matrice de transition. Si $d(i) = 3$, alors $P_{i,i}^{(3)} > 0$.

Question 5 (4 + 4 = 8 points)

a) Montrer que tout état de non-retour est transitoire.

b) Montrer que tout état absorbant est récurrent.

Question 6 (2 + 4 + 4 + 4 + 2 + 4 + 4 = 24 points)

La plupart des compagnies d'assurance classent les primes d'assurance de ses clients selon un système de bonus-malus. Chaque assuré se voit décerner une cote (un entier positif), et la prime d'assurance dépend de cette cote. La cote d'un assuré évoluera d'année en année selon le nombre de réclamation qu'il fera. Puisqu'une cote plus petite correspond à une plus petite prime annuelle, l'assuré verra sa cote diminuer s'il ne fait aucune déclaration, et augmentera possiblement sinon.

La compagnie d'assurance ABCD a adopté un tel système de bonus-malus, dans lequel les cotes des clients peuvent varier de 0 à 6. La prime annuelle associée à une cote de k est de $25k^2 + 25k + 200$ \$. De plus, si un assuré ayant une cote de k déclare j accidents au cours de l'année, sa nouvelle cote sera $\max\{\min\{k + j - 1, 6\}, 0\}$. Autrement dit, la cote passera de k à $k + j - 1$ sans toutefois prendre une valeur plus petite que 0 ni plus grande que 6. Un nouveau client se voit attribuer la cote de 0, et l'ajustement des cotes s'effectue en tout début d'année.

Supposer que le nombre de réclamations annuel du nouveau client Xavier suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 1$, et poser X_n pour représenter la cote de Xavier au début de l'année n.

a) Donner l'ensemble E des états de la chaîne de Markov $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

b) Pour tous les états i et j, calculer $p_{i,j}$.

c) Déterminer les classes d'équivalence pour la relation de communication de cette chaîne de Markov.

d) Pour chaque état de cette chaîne de Markov, déterminer s'il est récurrent ou transitoire.

e) Quel est la probabilité que la cote de Xavier soit de 0 au début de l'année 4 ?

f) Quel est la probabilité que la prime annuelle de Xavier soit de plus de 900 \$ à l'année 5, sachant qu'elle était de moins de 500 \$ à l'année 3 ?

g) Si Xavier conserve son assurance pendant 35 ans, quelle est la probabilité que sa cote soit de 6 au moins une fois ?

Question 7 (2 + 4 + 4 + 4 = 14 points)

Considérons la chaîne de Markov $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ayant pour espace états $E = \mathbb{N}$ et où les probabilités de transition sont

$$P_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } (i,j) = (0,1), \\ \dfrac{i}{i+1} & \text{si } j = i+1 \text{ et } i \neq 0, \\ \dfrac{1}{i+1} & \text{si } j = 0 \text{ et } i \neq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Posons $T_{i,j} = \min\{n \in \mathbb{N}^* \mid X_n = j, X_0 = i\}$ et $f_{i,j}^{(n)} = P(T_{i,j} = n)$.

a) Dessiner le diagramme de transition de la chaîne de Markov $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

b) Calculer $f_{0,0}^{(1)}, f_{0,0}^{(2)}, f_{0,0}^{(3)}, f_{0,0}^{(4)}, f_{0,0}^{(5)}$ puis en déduire une formule pour $f_{0,0}^{(n)}$ où $n \geq 2$.

c) En déduire que 0 est un état récurrent.

d) Montrer que 0 est un état récurrent nul.

Question 8 (10 points)

Considérons la chaîne de Markov $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ayant pour espace états $E = \{0, \dots, 9\}$. Supposons $P_{0,9} = 1$, et supposons que lorsque la chaîne est à l'état $i > 0$, alors le prochain état a autant de chance d'être n'importe quel des états $0, \dots, i - 1$. Trouver les probabilités limites de cette chaîne de Markov.