Université de Sherbrooke
Faculté des sciences
Département de mathématiques

Processus stochastiques
STT489

Examen intratrimestriel — Solutions
Trimestre d'été 2024

Question 1 **8 points**

Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes et soit $y \in \mathbb{R}$ tel que $p_Y(y) \neq 0$. Montrer que

$$\sum_{x \in S_X} p_{X|Y}(x \mid y) = 1.$$

Directement,

$$\begin{aligned}
\sum_{x} p_{X|Y}(x \mid y) &= \sum_{x} P(X = x \mid Y = y) \\
&= \sum_{x} \frac{P(X = x, Y = y)}{P(Y = y)} \\
&= \frac{1}{P(Y = y)} \sum_{x} P(X = x, Y = y) \\
&= \frac{1}{P(Y = y)} \cdot P(Y = y) \\
&= 1
\end{aligned}$$

Question 2 **10 points**

Soit $X_1, X_2, \ldots$ une suite de variables aléatoires telles que $E(X_i) = \mu$ pour tout i et soit N une variable aléatoire à valeurs entières, où les variables $N, X_1, X_2, \ldots$ sont mutuellement indépendantes. Montrer que

$$E\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right) = E(N) \cdot \mu.$$

Note : Il s'agit de l'identité de Wald.

En conditionnant sur N, on obtient

$$\begin{aligned}
E\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right) &= \mathrm{E}\left(E\left(\sum_{i=1}^{N} X_i \mid N\right)\right) \\
&= \sum_{n} E\left(\sum_{i=1}^{N} X_i \mid N = n\right) \cdot P(N = n) \\
&= \sum_{n} \sum_{i=1}^{n} E(X_i \mid N = n) \cdot P(N = n) \\
&= \sum_{n} \sum_{i=1}^{n} E(X_i) \cdot P(N = n) \quad \text{(car } X_i \text{ et } N \text{ sont indépendantes)} \\
&= \sum_{n} \sum_{i=1}^{n} \mu \cdot P(N = n) \\
&= \mu \sum_{n} n \cdot P(N = n) \\
&= \mu \cdot E(N).
\end{aligned}$$

Question 3 **4 + 8 + 8 = 20 points**

On choisit au hasard un nombre Y selon une loi uniforme discrète ayant pour support l'ensemble $\{1, 2, \dots, 10\}$. Autrement dit,

$$P(Y = y) = \begin{cases} 1/10 & \text{si } y \in \{1, 2, \dots, 10\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Ensuite, on choisit un nombre X selon une loi uniforme continue sur l'intervalle $[0, Y]$.

a) Donner l'espérance et la variance de $X \mid Y = y$, où $y \in \{1, 2, \dots, 10\}$.

On sait que $X \mid Y = y \sim \text{Unif}[0, y]$. Ainsi,

$$E(X \mid Y = y) = \frac{y}{2} \quad \text{et} \quad Var(X \mid Y = y) = \frac{y^2}{12}.$$

b) Démontrer que $E(X) = 2{,}75$ en effectuant un calcul d'espérance par conditionnement sur Y.

Directement,

$$\begin{aligned} E(X) &= E\big(E(X \mid Y)\big) \\ &= \sum_{y=1}^{10} E(X \mid Y = y) \cdot P(Y = y) \\ &= \sum_{y=1}^{10} \frac{y}{2} \cdot \frac{1}{10} \\ &= \frac{1}{20} \cdot \frac{10 \cdot 11}{2} \\ &= \frac{11}{4} = 2{,}75. \end{aligned}$$

c) Démontrer que $Var(X) \approx 5{,}2708$ en utilisant au besoin la formule

$$Var(X) = E(Var(X \mid Y)) + Var\big(E(X \mid Y)\big).$$

Rappel :

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

On a

$$\begin{aligned} E\big(Var(X \mid Y)\big) &= \sum_{y=1}^{10} Var(X \mid Y = y) \cdot P(Y = y) \\ &= \sum_{y=1}^{10} \frac{y^2}{12} \cdot \frac{1}{10} \\ &= \frac{1}{120} \cdot \frac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6} \\ &= \frac{77}{24} \approx 3{,}2083 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} Var\big(E(X \mid Y)\big) &= \sum_{y=1}^{10} \left(E(X \mid Y = y) - \underbrace{E\big(E(X \mid Y)\big)}_{=E(X)} \right)^2 \cdot P(Y = y) \\ &= \sum_{y=1}^{10} \left(\frac{y}{2} - \frac{11}{4} \right)^2 \cdot \frac{1}{10} \\ &= \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{16} \sum_{y=1}^{10} (4y^2 - 44y + 121) \\ &= \frac{1}{160} \left(\frac{4 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 21}{6} - 44 \cdot \frac{10 \cdot 11}{2} + 121 \cdot 10 \right) \\ &= \frac{330}{160} = \frac{33}{16} = 2{,}0625. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} Var(X) &= E\big(Var(X \mid Y)\big) + Var\big(E(X \mid Y)\big) \\ &= \frac{77}{24} + \frac{33}{16} \\ &= \frac{253}{48} \approx 5{,}2708. \end{aligned}$$

Question 4 **$2+8+6=16$ points**

Un dé équilibré jaune à 6 faces est lancé successivement. Soit X le nombre de lancers nécessaires avant d'obtenir le nombre quatre pour la première fois et soit Y le nombre de lancers nécessaires avant d'obtenir un nombre pair pour la première fois. Note : Au besoin, utiliser J_i pour représenter la valeur du dé jaune lors du lancer i.

a) Calculer les espérances $E(X)$ et $E(Y)$.

Puisque $X \sim \text{Geom}\left(\frac{1}{6}\right)$ et $Y \sim \text{Geom}\left(\frac{1}{2}\right)$, alors

$$E(X) = 6 \quad \text{et} \quad E(Y) = 2.$$

b) Calculer $E(X \mid Y = 1)$.

On remarque que

$$P(J_1 = z \mid Y = 1) = \begin{cases} 1/3 & \text{si } z \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } z \text{ est impair} \end{cases}$$

Ainsi, en conditionnant le calcul d'espérance sur J_1, on obtient

$$\begin{aligned} E(X \mid Y = 1) &= \sum_{z=1}^{6} E(X \mid Y = 1, J_1 = z) \cdot P(J_1 = z \mid Y = 1) \\ &= E(X \mid J_1 = 2) \cdot \frac{1}{3} + E(X \mid J_1 = 4) \cdot \frac{1}{3} + E(X \mid J_1 = 6) \cdot \frac{1}{3} \\ &= \big(1 + E(X)\big) \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} + \big(1 + E(X)\big) \cdot \frac{1}{3} \\ &= \frac{7}{3} + \frac{1}{3} + \frac{7}{3} \\ &= \frac{15}{3} = 5 \end{aligned}$$

c) On décide de lancer $10X$ dés équilibrés rouges à 6 faces et d'additionner les valeurs indiquées sur l'ensemble des dés. Par exemple, si ça a pris 5 lancers du dé jaune avant d'obtenir un quatre pour la première fois, alors $X = 7$, ce qui signifie qu'on lancera $10 \cdot 7 = 70$ dés rouges puis on additionnera les valeurs indiquées par ces 70 dés. Calculer l'espérance de la somme des $10X$ dés lancés (dans le cas général). Note : Au besoin, utiliser R_i pour représenter la valeur du dé rouge i.

On note que les variables R_i sont indépendantes et identiquement distribuées. Elles suivent une loi uniforme discrète ayant pour support l'ensemble $\{1, 2, \dots, 6\}$. Ainsi,

$$E(R_i) = \frac{1+6}{2} = \frac{7}{2} = 3{,}5.$$

Ainsi, en utilisant l'identité de Wald, on a

$$E\left(\sum_{n=1}^{10X} R_n\right) = E(10X) \cdot E(R_1) = 10 \cdot E(X) \cdot E(R_1) = 10 \cdot 6 \cdot 3{,}5 = 210.$$

Question 5 **12 points**

Soit $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov homogène ayant E pour espace d'états et P comme matrice de transition. Pour $a \in \mathbb{N}$, $b, c \in \mathbb{N}^*$ et $i, j, k \in E$, démontrer que

$$P(X_{a+b+c} = k, X_{a+b} = j \mid X_a = i) = p_{i,j}^{(b)} \cdot p_{j,k}^{(c)}.$$

sans vous référer à l'équation de Chapman-Kolmogorov ni à ses corollaires.

Directement,

$$\begin{aligned}
&P(X_{a+b+c} = k, X_{a+b} = j \mid X_a = i) \\
&= \frac{P(X_{a+b+c} = k, X_{a+b} = j, X_a = i)}{P(X_a = i)} \quad \text{(déf. d'une prob. cond.)} \\
&= \frac{P(X_{a+b+c} = k \mid X_{a+b} = j, X_a = i) \cdot P(X_{a+b} = j, X_a = i)}{P(X_a = i)} \quad \text{(déf. d'une prob. cond.)} \\
&= \frac{P(X_{a+b+c} = k \mid X_{a+b} = j) \cdot P(X_{a+b} = j, X_a = i)}{P(X_a = i)} \quad \text{(propriété markovienne)} \\
&= \frac{P(X_{a+b+c} = k \mid X_{a+b} = j) \cdot P(X_{a+b} = j \mid X_a = i) \cdot P(X_a = i)}{P(X_a = i)} \quad \text{(déf. d'une prob. cond.)} \\
&= P(X_{a+b+c} = k \mid X_{a+b} = j) \cdot P(X_{a+b} = j \mid X_a = i) \\
&= P(X_c = k \mid X_0 = j) \cdot P(X_b = j \mid X_0 = i) \quad \text{(chaîne de Markov homogène)} \\
&= p_{j,k}^{(c)} \cdot p_{i,j}^{(b)} \quad (\text{déf. d'une } n\text{-transition}) \\
&= p_{i,j}^{(b)} \cdot p_{j,k}^{(c)}
\end{aligned}$$

Question 6 **2 + 4 + 2 + 4 + 4 + 4 + 5 + 5 = 30 points**

Considérer la chaine de Markov $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ayant pour espace d'états $E = \mathbb{N}$ et dont les probabilités de transition sont

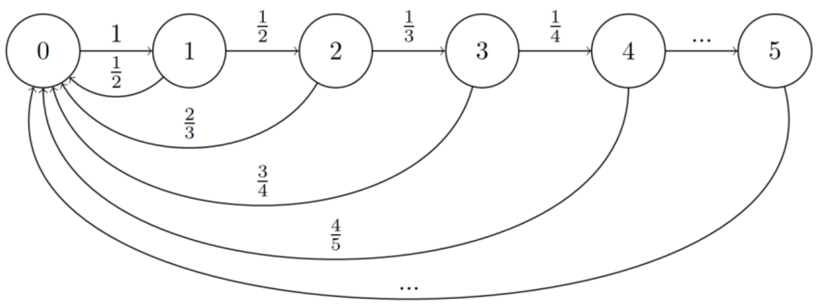
$$p_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 0 \text{ et } j = 1 \\ \dfrac{1}{i+1} & \text{si } j = i+1 \text{ et } i \neq 0 \\ \dfrac{i}{i+1} & \text{si } j = 0 \text{ et } i \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Autrement dit, $p_{0,1} = 1$, et pour $i \in \mathbb{N}^*$, $p_{i,i+1} = 1/(i+1)$ et $p_{i,0} = i/(i+1)$.

Posons $T_{i,j} = \min\{n \in \mathbb{N}^* \mid X_n = j, X_0 = i\}$ et $f_{i,j}^{(n)} = P\big(T_{i,j} = n\big)$.

Attention : Il ne s'agit pas de la même question que la question 7 du devoir 2.

a) Dessiner le diagramme de transition de cette chaine de Markov (inclure minimalement les états 0 à 4).



b) Démontrer que cette chaine est irréductible.

Soit $i \in \mathbb{N}^*$. Puisque $p_{i,0} = \frac{i}{i+1} > 0$, alors $i \to 0$. Par ailleurs, puisque $p_{0,i}^{(i)} = 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{i} > 0$, alors $0 \to i$. Par conséquent, $0 \leftrightarrow i$. Par transitivité, $i \leftrightarrow j$ pour tout $i, j \in \mathbb{N}$, car $i \leftrightarrow 0 \leftrightarrow j$. Par conséquent, la chaine est irréductible.

c) L'état 0 est-il un état de retour ou un état de non-retour ? Justifier votre réponse.

Puisque $p_{0,0}^{(2)} = 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} > 0$, alors l'état 0 est un état de retour.

d) L'état 0 est-il périodique ou apériodique ? S'il est périodique, qu'elle est sa période ? Justifier votre réponse.

Puisque $p_{0,0}^{(2)} = \frac{1}{2} > 0$ et $p_{0,0}^{(3)} = 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6} > 0$, alors la période de l'état 0 est $\text{pgcd}\{2, 3, \ldots\} = 1$. L'état 0 est donc apériodique.

e) Calculer $p_{1,1}^{(4)}$.

Les deux seuls chemins menant de l'état 1 à l'état 1 en 4 coups sont $1 \to 0 \to 1 \to 0 \to 1$ et $1 \to 2 \to 3 \to 0 \to 1$. Les probabilités de ces chemins sont

$$\begin{aligned} p_{1,1}^{(4)} &= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot 1 \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \\ &= \frac{3}{8} = 0{,}375. \end{aligned}$$

f) Montrer que $f_{0,0}^{(n)} = \frac{n-1}{n!}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

En partant de l'état 0, on reviendra une première fois à l'état 0 au temps $n > 1$ si notre chaine a pour valeurs successives

$$0 \to 1 \to 2 \to \cdots \to n-1 \to 0$$

Ainsi, pour $n > 1$, on a

$$f_{0,0}^{(n)} = 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{n-2} \cdot \frac{1}{n-1} \cdot \frac{n-1}{n} = \frac{n-1}{n!}$$

g) Démontrer que l'état 0 est récurrent.

Directement,

$$f_0 = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} f_{0,0}^{(n)} \right) = \sum_{k=2}^{n} \frac{n-1}{n!} = \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{n!} \right) = \lim_{k\to\infty} \left(1 - \frac{1}{k!} \right) = 1,$$

ce qui montre que l'état 0 est récurrent.

h) L'état 0 est-il récurrent positif ou récurrent nul ? Justifier votre réponse.

Puisque

$$\begin{aligned} E(T_{0,0}) &= \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot f_{0,0}^{(n)} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{n-1}{n!} \right) \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-2)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \\ &= e < \infty, \end{aligned}$$

alors l'état 0 est récurrent positif.

Question 7 **2 + 2 + 2 + 8 = 14 points**

Une compagnie d'assurance classifie ses clients en trois catégories : 1 (mauvais), 2 (satisfaisant), 3 (excellent). D'une année à l'autre, les clients changent de catégorie selon le tableau suivant :

	1	**2**	**3**
1	0,6	0,4	0
2	0,1	0,8	0,1
3	0	0,4	0,6

Par exemple, un assuré catégorisé 1 (mauvais) a 60 % de chance de demeurer dans cette catégorie l'année suivante, 30 % de chance de transiter vers la catégorie 2 (satisfaisant) et 10 % de chance de transiter vers la catégorie 3 (excellent). Soit X_n la catégorie d'un client au début de l'année n.

a) Expliquer pourquoi $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov.

Puisque la bonne prédiction de la catégorie d'une assuré au temps $n+1$ ne dépend que de sa catégorie au temps n, alors la connaissance du passé n'influence pas les prédictions du futur si on connait le présent. Autrement dit,

$$P(X_{n+1} = j \mid X_0 = i_0, \dots, X_n = i) = P(X_{n+1} = j \mid X_n = i).$$

b) Montrer que la chaîne est irréductible.

On a $1 \leftrightarrow 2$ car $p_{1,2} = 0{,}4 > 0$ et $p_{2,1} = 0{,}1 > 0$. De même, $2 \leftrightarrow 3$ car $p_{2,3} = 0{,}1 > 0$ et $p_{3,2} = 0{,}4 > 0$. Ainsi, $1 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 3$, donc tous les états communiquent et se retrouvent dans la même classe d'équivalence pour la relation $\leftrightarrow$. Par conséquent, la chaîne est irréductible.

c) Montrer que tous les états sont ergodiques.

Puisque la chaîne a un nombre fini d'états, alors elle a au moins un état récurrent positif. Et puisque la propriété de récurrence est invariante sous la relation $\leftrightarrow$, alors tous les états sont récurrents positifs. Par ailleurs, $p_{1,1}^{(1)} = 0{,}6 > 0$, d'où $d(1) = 1$. Et puisque la période d'un état est invariante sous la relation $\leftrightarrow$, alors $d(2) = d(3) = 1$. Par conséquent, tous les états sont ergodiques.

d) À long terme, quelle sera la proportion des assurés dans chaque catégorie ?

Selon un théorème vu en classe, les proportions limites π_1, π_2, π_3 satisfont au système d'équations

$$\pi_1 = 0{,}6\pi_1 + 0{,}1\pi_2 \Longrightarrow \pi_1 = \frac{\pi_2}{4}$$

$$\pi_2 = 0{,}4\pi_1 + 0{,}8\pi_2 + 0{,}4\pi_3 \Longrightarrow \pi_2 = 2\pi_1 + 2\pi_3$$

$$\pi_3 = 0{,}1\pi_2 + 0{,}6\pi_3 \Longrightarrow \pi_3 = \frac{\pi_2}{4} = \pi_1$$

$$\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$$

À partir des équations 1, 3 et 4, on trouve

$$\frac{\pi_2}{4} + \pi_2 + \frac{\pi_2}{4} = 1 \Longrightarrow \pi_2 = \frac{2}{3}$$

À partir de l'équation 3, on trouve

$$\pi_3 = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{6} = \pi_1$$

Par conséquent,

$$\pi_1 = 1/6 \approx 0{,}1667\,, \quad \pi_2 = 4/6 \approx 0{,}6667 \quad \pi_3 = 1/6 \approx 0{,}1667.$$