Prénom : ______________________________ **Nom :** ______________________________

Université de Sherbrooke

Faculté des sciences

Département de mathématiques

Processus stochastiques

STT489

Examen final

Trimestre d'été 2024

Date : Jeudi 8 aout 2024 **Enseignant :** Sylvain Bérubé

Heure : 13h30 à 16h30 (180 minutes) **Local :** D3-2032

Consignes

— Répondre directement sur le questionnaire.
— Justifier toutes vos réponses.
— L'usage de la calculatrice est autorisé.
— Vous avez droit à un résumé n'excédant pas deux pages recto verso (ou quatre pages recto seulement). Ce résumé peut contenir des parties théoriques du cours, des définitions, des formules mathématiques de même que des techniques de résolution. Cependant, aucun exemple complet ne peut y apparaitre, ni démonstration détaillée.
— Pendant l'examen, la communication entre personnes étudiantes ou avec toute autre personne au sujet de l'examen ou du contenu du cours est interdite. En remettant votre examen, vous certifiez être l'unique auteur du contenu présenté.

Pondération

Cet examen compte pour 40 % de la note finale.

Question 1 : __________ / 12	Question 4 : __________ / 12	Question 7 : __________ / 14
Question 2 : __________ / 12	Question 5 : __________ / 06	Question 8 : __________ / 12
Question 3 : __________ / 12	Question 6 : __________ / 08	Question 9 : __________ / 12

Total : __________ / 100

Note

Cet examen comprend en tout 16 pages et 9 questions. Vérifier si vous avez en main le texte complet avant de commencer à répondre aux questions.

Question 1 **4 + 4 + 4 = 12 points**

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes telles que $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ et $Y \sim \text{Exp}(\mu)$.

a) Montrer que X est sans mémoire. Autrement dit, montrer que pour tout $x, y \in \mathbb{R}_+$,

$$P(X > x + y \mid X > y) = P(X > x).$$

b) Soit $Z = \min\{X, Y\}$. Montrer que $Z \sim \text{Exp}(\lambda + \mu)$. Indice : Calculer la fonction de répartition ou la fonction de survie de Z.

c) Montrer que $P(X < Y) = \lambda/(\lambda + \mu)$.

Question 2 **6 + 3 + 3 = 12 points**

a) Soit $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ un processus de naissance et de mort, c'est-à-dire une chaine de Markov à temps continu ayant $E = \mathbb{N}$ pour espace d'états et tel que

- $p_{i,j} = 0$ lorsque $j \notin \{i-1, i+1\}$
- lorsque $X_t = n$, le temps avant la prochaine arrivée suit une loi exponentielle de paramètre λ_n et est indépendante du temps avant le prochain départ, qui, lui, suit une loi exponentielle de paramètre μ_n.

Montrer que les probabilités limites p_j d'un processus de naissance et de mort, lorsqu'elles existent, sont

$$p_0 = \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\prod_{i=0}^{k-1}\frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}}\right)\right)^{-1} \qquad \text{et} \qquad p_n = p_0 \cdot \prod_{i=0}^{n-1}\frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

b) Soit $\{X_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ un processus de naissance et de mort où $\lambda_n = \lambda$ et $\mu_n = n\mu$, avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}_+^*$.

i) Démontrer que les probabilités limites p_i existent.

ii) Déterminer les probabilités limites pour chacun des états si $\lambda = \mu = 1$.

Question 3 **3 + 3 + 3 + 3 = 12 points**

Aujourd'hui, entre 6h et 21h, des visiteurs se présenteront au parc national du Mont-Mégantic selon un processus de Poisson $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ d'intensité $\lambda = 16$ visiteurs par heure, où t représente le temps écoulé depuis 6h du matin (autrement dit, $t = 0$ représente 6h du matin).

a) Déterminer la probabilité qu'exactement 30 visiteurs se présentent au parc entre 13h et 15h30.

b) En supposant qu'il y a eu au moins 21 visiteurs dans la journée, déterminer la probabilité que le temps écoulé entre l'arrivée du 20^{e} visiteur et du 21^{e} visiteur soit de plus de 10 minutes.

c) On suppose que la probabilité qu'un visiteur soit âgé de plus de 60 ans est de $p = 10$ %. Quelle est la probabilité qu'entre 10h et 11h, il y ait à la fois exactement 2 visiteurs âgés de plus de 60 ans et exactement 10 visiteurs âgés de 60 ans et moins ?

d) Soit $s, t \in [0, 15]$ avec $s < t$ et soit $k, n \in \mathbb{N}$ avec $k \leq n$. Calculer $P(N_s = k \mid N_t = n)$.

Question 4 **2 + 8 + 2 = 12 points**

Un petit magasin d'informatique dispose d'un espace pour exposer jusqu'à trois ordinateurs à vendre. Les clients viennent à certains moments selon un processus de Poisson avec un taux de 2 par semaine pour acheter un ordinateur et en achèteront un si au moins un est disponible en magasin (si aucun ordinateur n'est disponible en magasin, le client quitte le magasin sans effectuer d'achat). Lorsque le magasin n'a plus qu'un seul ordinateur, il passe une commande pour deux ordinateurs supplémentaires. La commande prend un temps exponentiellement distribué avec une moyenne de 1 semaine pour arriver. Bien entendu, pendant que le magasin attend la livraison, une vente peut survenir, épuisant ainsi momentanément le stock en magasin.

a) Modéliser cette situation à l'aide d'une chaine de Markov à temps continu. Votre modélisation doit comprendre la définition des variables, l'identification des états puis la présentation des taux de transition de l'état i vers l'état j (idéalement à l'aide d'un diagramme).

b) Déterminer les probabilités limites pour chacun des états de ce processus.

c) À quel taux le magasin effectue-t-il des ventes ?

Question 5 **6 points**

Un petit atelier de réparation de vélo ne comprenant qu'un mécanicien dispose de deux postes de travail : le poste 1 pour le diagnostic et le poste 2 pour la réparation. Lorsque le mécanicien prend en charge le vélo d'un client, il va d'abord effectuer un diagnostic au poste 1, puis il va immédiatement procéder à la réparation au poste 2. À noter que les postes 1 et 2 ne peuvent pas simultanément être occupés, car il y a un seul mécanicien. Le temps de réalisation d'un diagnostic suit une loi exponentielle de paramètre μ_1, puis le temps de réparation suit une loi exponentielle de paramètre μ_2. Les arrivées des clients potentiels suivent un processus de Poisson de paramètre λ. Il faut toutefois noter qu'un client potentiel va entrer dans la boutique seulement si le poste 1 est libre et qu'il y a moins de 3 clients dans le magasin. Autrement dit, un client potentiel ne va pas entrer dans l'atelier si le mécanicien est en train d'effectuer un diagnostic au poste 1; il ne va pas entrer non plus s'il y a déjà 3 clients dans le magasin.

Modéliser cette situation à l'aide d'une chaine de Markov à temps continu. Votre modélisation doit comprendre la définition des variables, l'identification des états puis la présentation des taux de transition de l'état i vers l'état j (idéalement à l'aide d'un diagramme).

Question 6 **8 points**

Soit $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ une chaine de Markov homogène à temps continu ayant E pour espace d'états et soit $p_{i,j}(t)$ ses probabilités de transition. Montrer que, pour tout $s, t > 0$,

$$p_{i,j}(s+t) = \sum_{k\in E} p_{i,k}(s)p_{k,j}(t)$$

Question 7 **2 + 2 + 4 + 6 = 14 points**

Des joueurs de l'équipe de ultimate frisbee Amatheus ont remarqué que la probabilité de remporter une partie dépend de leur série de victoires ou de défaites en cours. En effet, la probabilité de remporter la prochaine partie est de :

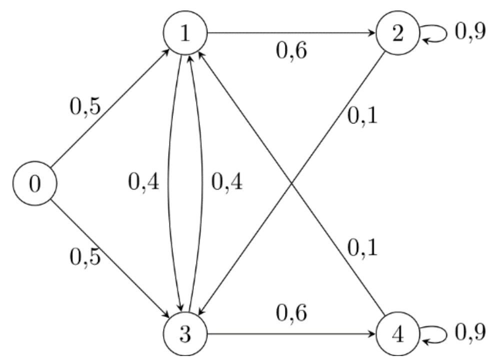
— 50 % si elle n'a aucune série en cours (première partie),
— 60 % si elle a une série d'une victoire consécutive en cours,
— 90 % si elle a une série de deux victoires consécutives ou plus en cours,
— 40 % si elle a une série d'une défaite consécutive en cours,
— 10 % si elle a une série de deux défaites consécutives ou plus en cours.

Soit X_n : « Série de victoires ou de défaites en cours après n parties », où

$$X_n = \begin{cases} 0 & \text{si l'équipe n'a aucune série après } n \text{ parties} \\ 1 & \text{si l'équipe a une série d'une victoire consécutive en cours après } n \text{ parties} \\ 2 & \text{si l'équipe a une série de deux victoires consécutives ou plus en cours après } n \text{ parties} \\ 3 & \text{si l'équipe a une série d'une défaite consécutive en cours après } n \text{ parties} \\ 4 & \text{si l'équipe a une série de deux défaites consécutives ou plus en cours après } n \text{ parties} \end{cases}$$

Notons que $X_0 = 0$. La chaine de Markov $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ a pour espace d'états $E = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Voici sa matrice de transition et son diagramme de transition.

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0{,}5 & 0 & 0{,}5 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}6 & 0{,}4 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}9 & 0{,}1 & 0 \\ 0 & 0{,}4 & 0 & 0 & 0{,}6 \\ 0 & 0{,}1 & 0 & 0 & 0{,}9 \end{bmatrix}$$



a) Quelle est la période de l'état 1 ?

b) Quelle est la probabilité que l'équipe Amatheus remporte ses quatre premières parties ?

c) Après la partie 20, l'équipe Amatheus a une série d'une défaite consécutive. Quelle est la probabilité qu'après la partie 24, elle ait une série d'au moins deux victoires consécutives ?

d) Une saison comporte un très grand nombre de parties. Quelle proportion du temps l'équipe Amatheus aura-t-elle une série d'au moins 2 victoires consécutives ? Autrement dit, calculer la probabilité limite $\pi_4 = \lim_{n\to\infty} p_{i,j}^{(n)}$. Pour simplifier les calculs, noter par symétrie que $\pi_1 = \pi_3$ et $\pi_2 = \pi_4$.

Question 8 **6 + 6 = 12 points**

Un manuscrit est envoyé à une entreprise de révision ayant pour employés Albert, Béatrice et Carole. L'un de ces trois employés sera sélectionné pour effectuer la révision du manuscrit.

— Si le manuscrit est révisé par Albert, alors le nombre d'erreurs non détectées suit une variable aléatoire de Poisson avec une moyenne de 2.
— Si le manuscrit est révisé par Béatrice, alors le nombre d'erreurs non détectées suit une variable aléatoire uniforme discrète variant entre 1 et 5 (en incluant les bornes).
— Si le manuscrit est révisé par Carole, alors le nombre d'erreurs non détectées suit une variable aléatoire binomiale de paramètres $n = 6$ et $p = 1/2$.

Soit X le nombre d'erreurs non détectées dans le manuscrit révisé et soit Y la variable identifiant à qui a été attitré le travail de révision ($Y = 1$ pour Albert, $Y = 2$ pour Béatrice, $Y = 3$ pour Carole). Supposons que Albert a 50 % d'effectuer le travail de révision, alors que cette probabilité est de 25 % pour Béatrice et Carole.

a) Démontrer que $E(X) = 2{,}5$ en effectuant un calcul d'espérance par conditionnement sur Y.

b) Démontrer que $Var(X) \approx 2{,}125$ en utilisant au besoin la formule
$$Var(X) = E(Var(X \mid Y)) + Var\big(E(X \mid Y)\big).$$

Question 9 **6 + 6 = 12 points**

Une population est formée d'individus tous identiques qui donnent naissance à des individus de même type. Chaque individu produit dans sa vie j enfants avec probabilité p_j, où $p_0 = 0{,}4$, $p_1 = 0{,}2$, $p_2 = 0{,}2$ et $p_3 = 0{,}2$. Soit X_n le nombre d'individus de la génération $n \in \mathbb{N}$.

a) Montrer que $E(X_n) = (1{,}2)^n \cdot E(X_0)$. Note : une démonstration complète est requise (et non la simple énonciation d'un résultat vu en classe).

b) Sachant que la population comprend trois individus au temps 0, calculer la probabilité qu'elle s'éteigne.