**Exemple 1.26 (Problème des votes)** En 2018, la CAQ a gagné $n = 74$ sièges à l'Assemblée nationale alors que les autres partis réunis en ont eu $m = 51$. En supposant que tous les ordonnancements sont équiprobables, montrer que la probabilité que la CAQ ait toujours été en avance lors de la soirée électorale est $(n-m)/(n+m)$.

$A$ : Parti gagnant $\qquad$ $B$ : Parti perdant

On pose

$E_{a,b}$ : $A$ est toujours en avance, A a gagné $a$ sièges, $B$ a gagné $b$ sièges

$$P(E_{a,b}) = P_{a,b}$$

On veut montrer que

$$P_{a,b} = \frac{a-b}{a+b}.$$

On pose

$$S_i = \begin{cases} 1 & A \text{ a gagné le siège } i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

En conditionnant sur le parti ayant remporté le dernier siège, on obtient

$$\begin{aligned} P_{a,b} &= P(E_{a,b}) \\ &= P(E_{a,b} \mid S_{a+b} = 1) \cdot P(S_{a+b} = 1) + P(E_{a,b} \mid S_{a+b} = 0) \cdot P(S_{a+b} = 0) \\ &= P(E_{a-1,b}) \cdot \frac{a}{a+b} = P(E_{a,b-1}) \cdot \frac{b}{a+b} \\ &= P_{a-1,b} \cdot \frac{a}{a+b} + P_{a,b-1} \cdot \frac{b}{a+b} \end{aligned}$$

On a donc la formule de récurrence

$$P_{a,b} = P_{a-1,b} \cdot \frac{a}{a+b} + P_{a,b-1} \cdot \frac{b}{a+b}$$

On montre que $P_{a,b} = \frac{a-b}{a+b}$ par récurrence sur $a+b$

(BASE) Pour $a+b=1$, on a $a=1$, $b=0$, d'où

$$P_{1,0} = 1 = \frac{1-0}{1+0} = \frac{a-b}{a+b}$$

(HYPOTHÈSE) Supposons $P_{a,b} = \frac{a-b}{a+b}$ lorsque $a+b=k$, $k \in \mathbb{N}^*$

(PAS) Si $a+b=k+1$, alors

$$\begin{aligned} P_{a,b} &= P_{a-1,b} \cdot \frac{a}{a+b} + P_{a,b-1} \cdot \frac{b}{a+b} \\ &= \frac{(a-1)-b}{(a-1)+b} \cdot \frac{a}{a+b} + \frac{a-(b-1)}{a+(b-1)} \cdot \frac{b}{a+b} \\ &= \frac{a^2 - a - ab + ab - b^2 + b}{(a+b-1)(a+b)} \\ &= \frac{(a-b)(a+b) - (a-b)}{(a+b-1)(a+b)} \\ &= \frac{(a-b)(a+b-1)}{(a+b-1)(a+b)} \\ &= \frac{a-b}{a+b} \end{aligned}$$

(CONCLUSION) La base et le pas de récurrence ayant été démontré, l'affirmation suit pour tout affirmation suit pour tout $a+b \in \mathbb{N}^*$.