Devoir 3

À remettre le vendredi 12 juillet 2024 à 8h30 au début de la séance de cours.

Question 1 (4 + 6 + 4 = 14 points)

Soit X_1, X_2, X_3 des variables aléatoires exponentielles indépendantes de paramètre λ_1, λ_2, λ_3 respectivement.

a) Calculer $P(X_1 < X_2 < X_3)$.

b) Calculer $P(X_1 < X_2 \mid \max(X_1, X_2, X_3) = X_3)$.

c) Calculer $E\big(\max(X_1, X_2, X_3)\big)$.

Question 2 (6 + 6 = 12 points)

Une centrale électrique dispose de trois générateurs (A, B et C) qui doivent fonctionner de manière fiable pour assurer l'alimentation continue en électricité. La centrale peut continuer à fonctionner de manière optimale tant que deux des trois générateurs sont opérationnels. Les générateurs ont des temps de défaillance qui suivent des lois exponentielles avec des moyennes de 2 ans, 3 ans et 6 ans respectivement.

a) Quelle est la durée moyenne pendant laquelle la centrale électrique peut continuer à fonctionner de manière optimale ?

b) Trouver les probabilités pour les six ordres (ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA) dans lesquels les défaillances des générateurs peuvent se produire.

Question 3 (4 + 6 + 10 = 20 points)

Un système a deux serveurs. Un client entrant dans le système est d'abord servi par le serveur 1, puis par le serveur 2, et ensuite il quitte le système. Les temps de service aux serveurs 1 et 2 suivent des lois exponentielles de paramètres $\lambda_1 = 1/2$ et $\lambda_2 = 1/3$ respectivement. Lorsque vous arrivez dans le système, vous constatez que le serveur 1 est libre et qu'il y a 2 clients au serveur 2 : le client A est en service et le client B en attente.

a) Calculer P_A, la probabilité que le client A soit toujours en service lorsque vous arriverez au serveur 2.

b) Calculer P_B, la probabilité que le client B soit toujours dans le système lorsque vous arriverez au serveur 2.

c) Calculer $E(T)$, où T est le temps que vous passez dans le système.

Question 4 (4 + 4 + 4 + 6 + 6 + 4 = 28 points)

Les appels téléphoniques à un centre d'aide arrivent selon un processus de Poisson $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$, où N_t représente le nombre d'appels reçus au temps t. Le centre d'aide reçoit en moyenne λ appels par heure. Un appel est jugé « urgent » avec une probabilité p et « non urgent » avec une probabilité $1 \; - p$.

a) Quelle est la probabilité que le centre d'aide reçoive exactement 4 appels entre 12h et 12h45 ?

b) Quelle est la probabilité que dans la prochaine heure, le centre d'aide reçoive à la fois au moins 1 appel urgent et au moins 2 appels non urgents ?

c) Supposons que le 10e appel s'est réalisé au temps $t = 2$. Quelle est l'espérance du temps de réalisation du 20e appel ?

d) Pour $n > k$, où $n, k \in \mathbb{N}$, calculer $P(N_2 = n \mid N_1 = k)$.

e) Pour $n > k$, où $n, k \in \mathbb{N}$, calculer $P(N_1 = k \mid N_2 = n)$.

f) En posant $\lambda = 6, p = 0{,}2, n = 8, k = 3$, effectuer les calculs des sous-questions a) à e).

Question 5 (8 + 6 = 14 points)

Les équipes 1 et 2 jouent une partie. Les équipes marquent des points selon des processus de Poisson indépendants avec des taux respectifs $\lambda_1 = 3$ et $\lambda_2 = 4$ (temps en minutes).

a) La partie se termine lorsqu'une des équipes a marqué 8 points. Calculer la probabilité que l'équipe 1 remporte la partie.

b) La partie se termine lorsqu'une des équipes a marqué 8 points de plus que l'autre. Calculer la probabilité que l'équipe 1 remporte la partie.

Question 6 (12 points)

Considérer un grand récipient avec un trou au fond, d'où l'eau s'écoule à un débit constant de 1 litre par minute. Supposons qu'à l'instant $t = 0$, le conteneur est vide. À chaque évènement d'un processus de Poisson de taux 1, exactement 1 litre d'eau est versé dans le récipient. Supposons que le déversement est instantané, autrement dit qu'il ne faut pas de temps pour verser le litre d'eau. Calculer la quantité d'eau espérée dans le récipient au temps $t = 1$. *Indice : conditionner sur le nombre d'évènements au temps 1.*