CHAPITRE 2
CHAÎNES DE MARKOV

Comme nous le verrons dans cette section, de nombreux processus vérifient la propriété de Markov. Pour ces processus sans mémoire, la bonne prédiction du futur dépend seulement du présent. Autrement dit, si l'on souhaite prédire le futur et que l'on connaît le présent, la connaissance du passé n'apporte pas d'informations supplémentaires.

Les exercices 1 et 3 de la section -1 sont des exemples de processus stochastiques vérifiant la propriété markovienne.

2.1 Définitions

Définition 2.1 Un **processus stochastique** est une collection $\{X_t\}_{t\in T}$ de variables aléatoires. Si t représente le temps, on dit que X_t est l'**état** du processus au temps t. Si l'ensemble T est discret, on dit que le processus est à **temps discret** et si T est un intervalle réel, on dit que le processus est à **temps continu**.

Exemple 2.2 Soit X_n représentant le profit réalisé au poker après n parties. Alors $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est un processus stochastique à temps discret.

Exemple 2.3 Soit X_t représentant le nombre de clients qui sont entrés dans un magasin jusqu'au temps t. Alors $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ est un processus stochastique à temps continu.

Définition 2.4 Soit $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires prenant des valeurs dans un ensemble E discret, nommé l'**espace d'états**. On dit que le processus $\{X_n\}_{n\in N}$ est une **chaîne de Markov à temps discret** (ou **possède la propriété markovienne**) lorsque pour tout $n\in\mathbb{N}$ et pour toute suite d'états $(i_0,\dots,i_{n-1},i,j)\in E^{n+2}$ telle que

$$P(X_0=i_0,\dots,X_{n-1}=i_{n-1},X_n=i)>0,$$

on a

$$P(X_{n+1}=j \mid X_0=i_0,\dots,X_{n-1}=i_{n-1},X_n=i)=P(X_{n+1}=j\mid X_n=i).$$

Ainsi, la distribution de probabilité conditionnelle des états futurs du processus ne dépend que de l'état présent, et non pas de l'ensemble de la séquence des événements qui l'ont précédé. Autrement dit, le futur est conditionnellement indépendant du passé si on connaît le présent. En ce sens, un tel processus est considéré sans mémoire ou non héréditaire.

Définition 2.5 Une chaîne de Markov $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est dite **homogène** (ou **stationnaire**) si, pour tout $n\in\mathbb{N}$ et pour tous états $i,j\in E$,

$$P(X_{n+1}=j\mid X_n=i)=P(X_n=j\mid X_{n-1}=i).$$

Autrement dit, $P(X_{n+1}=j\mid X_n=i)$ ne dépend pas de n.

Remarque Dans la suite de ce chapitre, on ne considère que des chaînes de Markov homogènes.

Exemple 2.6 (Andreï Andreïevitch Markov) En 1913, Markov (1856–1922) donne les résultats d'une analyse des suites de lettres dans l'oeuvre « Eugène Onéguine » qui est un roman en vers d'Alexandre Sergueïevitch Pouchkine (1799–1837). Sur 20 000 lettres, il estime ainsi la succession des voyelles et des consonnes :

	voyelle	consonne
voyelle	0,128	0,872
consonne	0,663	0,337

Markov a suggéré que pour prédire la prochaine lettre X_{n+1}, il est aussi efficace de ne tenir compte que de X_n, que de prendre $X_n, X_{n-1}, \dots, X_0$.

Définition 2.7 Soit $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov d'espace d'états E. Posons $p_{i,j} = P(X_{n+1} = j \mid X_n = i)$, la **probabilité de transition** de l'état i à l'état j. La matrice $P = \left[p_{i,j}\right]_{i,j\in E}$ de dimension $(|E|, |E|)$ est la **matrice de transition** (ou **noyau de transition**, **opérateur de transition**) de la chaîne de Markov.

Remarque Soit P la matrice de transition d'une chaîne de Markov. Alors

$$0 \le p_{i,j} \le 1 \text{ pour tout } i,j \in E \quad \text{et} \quad \sum_{j\in E} p_{i,j} = 1 \text{ pour tout } i \in E.$$

Une matrice carrée ayant ces propriétés est appelée **matrice stochastique** (ou **matrice de Markov**). Par ailleurs, une **matrice bistochastique** est une matrice stochastique dont la somme des éléments des colonnes vaut également 1, c'est-à-dire une matrice stochastique telle que

$$\sum_{i\in E} p_{i,j} = 1 \text{ pour tout } j \in E$$

Exemple 2.8 (Prédiction météo 1) Supposons que la probabilité d'avoir de la pluie demain dépend seulement de la météo d'aujourd'hui. Considérons $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, où

$$X_n = \begin{cases} 0 & \text{s'il pleut à la journée } n, \\ 1 & \text{s'il ne pleut pas à la journée } n. \end{cases}$$

Des données collectées dans une certaine région donnent la matrice de transition

$$P = \begin{bmatrix} 0{,}60 & 0{,}40 \\ 0{,}25 & 0{,}75 \end{bmatrix}.$$

Exemple 2.9 (Prédiction météo 2) Supposons que la probabilité d'avoir de la pluie demain dépend seulement de la météo d'hier et d'aujourd'hui. Plus spécifiquement, supposons que

— s'il a plu les deux derniers jours, il pleuvra demain avec une probabilité de 70 %,
— s'il a plu aujourd'hui mais pas hier, il pleuvra demain avec une probabilité de 50 %,
— s'il a plu hier mais pas aujourd'hui, il pleuvra demain avec une probabilité de 40 %,
— s'il n'a pas plu les deux derniers jours, il pleuvra demain avec une probabilité de 20 %.

Est-il possible de modéliser ce processus à l'aide d'une chaîne de Markov ?

Exemple 2.10 (Promenade sur les entiers) Une chaîne de Markov $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ayant $\mathbb{Z}$ comme espace d'états est une **promenade aléatoire** si, pour une certaine probabilité $p \in [0,1]$,

$$p_{i,i+1} = p \quad \text{et} \quad p_{i,i-1} = 1-p \quad \text{pour tout } i \in \mathbb{Z}.$$

Exemple 2.11 (Problème de la ruine du joueur) Un joueur compulsif joue à un jeu de hasard. À chaque partie, il a une probabilité p de gagner 1 \$ et une probabilité $q = 1-p$ de perdre 1 \$. Le joueur étant compulsif joue jusqu'à sa propre ruine ou jusqu'à ce qu'il ait N \$.

2.2 Équations de Chapman-Kolmogorov

Définition 2.12 Soit $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov. Posons

$$p_{i,j}^{(n)} = P(X_{k+n} = j \mid X_k = i),$$

la probabilité de passer de l'état i à l'état j en n transitions. La matrice

$$P^{(n)} = \left[p_{i,j}^{(n)}\right]_{i,j\in E}$$

est la **matrice des n-transitions**.

Remarque Soit P la matrice de transition de la chaîne de Markov $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Alors

$$P(X_{n+2} = j, X_{n+1} = k \mid X_n = i) = p_{i,k} \cdot p_{k,j}.$$

Théorème 2.13 (Équation de Chapman-Kolmogorov) Soit P la matrice de transition de la chaîne de Markov $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Alors, pour tout $n, m \geq 0$ et pour tout $i, j \in E$,

$$p_{i,j}^{(n+m)} = \sum_{k\in E} p_{i,k}^{(n)} \cdot p_{k,j}^{(m)}.$$

Corollaire 2.14 Soit P la matrice de transition de la chaîne de Markov $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Alors

$$P^{(n+m)} = P^{(n)} \cdot P^{(m)}.$$

Corollaire 2.15 Soit P la matrice de transition de la chaîne de Markov $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Alors

$$P^{(n+m)} = P^{n+m}.$$

Corollaire 2.16 Soit P la matrice de transition de la chaîne de Markov $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Alors

$$P^{(n+1)} = \sum_{k\in E} P_{i,k}^{(n)} \cdot P_{k,j}.$$

Exemple 2.17 Reprenons l'exemple 2.8 (prédiction météo 1) et supposons qu'il a plu aujourd'hui.

a) Quelle est la probabilité qu'il pleuve demain ?

b) Quelle est la probabilité qu'il pleuve après-demain ?

c) Quelle est la probabilité qu'il pleuve dans dix jours ?

d) Quelle est la probabilité qu'il pleuve dans cent-mille jours ?

2.3 Classification des états

Pour l'ensemble de cette section, on considère une chaîne de Markov $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ d'espace d'états E et de matrice de transition P.

Définition 2.18 Un état j est dit **accessible** d'un autre état i (ou i **mène** à j) s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $p_{i,j}^{(n)} > 0$, auquel cas on note $j \leftarrow i$ ou $i \rightarrow j$,

Proposition 2.19 L'état j est accessible depuis l'état i si et seulement si en commençant en i, il est possible que le processus entre en j.

Proposition 2.20 La propriété d'accessibilité est réflexive et transitive, mais n'est pas nécessairement symétrique.

Définition 2.21 Deux états i et j **communiquent** s'ils sont accessibles l'un de l'autre, autrement dit si $i \rightarrow j$ et $j \rightarrow i$, auquel cas on note $i \leftrightarrow j$.

Proposition 2.22 La relation $\leftrightarrow$ est une relation d'équivalence.

Définition 2.23 Une chaîne de Markov est dite **irréductible** si elle n'a qu'une seule classe d'équivalence pour $\leftrightarrow$.

Exemple 2.24 La chaîne de Markov définie par la matrice de transition

$$P = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$$

est irréductible.

Exemple 2.25 Soit la chaîne de Markov définie par la matrice de transition

$$P = \begin{bmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 2/3 & 1/3 \\ a & 0 & 1/2 - a & 1/2 \end{bmatrix},$$

où $a \in [0, 1/2]$. Pour quelles valeurs de a la chaîne de Markov est-elle irréductible ?

Notation 2.26 On note f_i la probabilité qu'en débutant en l'état i, on retourne éventuellement à l'état i. Ainsi,

$$f_i = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{X_n = i\} \mid X_0 = i\right).$$

On note $f_{i,j}$ la probabilité qu'en débutant en l'état i, on atteigne éventuellement à l'état j. Ainsi,

$$f_{i,j} = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{X_n = j\} \mid X_0 = i\right).$$

On note N_i le nombre de fois où le processus est dans l'état i si $X_0 = i$. Ainsi, si

$$Y_n = \begin{cases} 1 & \text{si } X_n = i, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

alors

$$N_i = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n.$$

Définition 2.27 Un état i est dit **récurrent** si $f_i = 1$. Il est dit **transitoire** (ou **transient**) si $f_i < 1$.

Remarque

— Si l'état i est récurrent, alors, en débutant à cet état, on y retournera infiniment souvent, et l'espérance du nombre de fois où le processus sera en i est infinie.

— Si l'état i est transitoire, alors, en débutant à cet état, le nombre de fois que le processus sera dans l'état i suit une loi géométrique de paramètre $1 - f_i$.

Proposition 2.28 Un état i est récurrent si et seulement si

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{i,i}^{(n)} = \infty.$$

Il est transitoire si et seulement si

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{i,i}^{(n)} < \infty.$$

Proposition 2.29 Si l'état i est récurrent et $i \leftrightarrow j$, alors l'état j est récurrent.

Remarque Les propriétés « récurrent » et « transitoire » sont invariantes sous $\leftrightarrow$.

Exemple 2.30 Considérons la chaîne de Markov ayant pour espace d'états $E = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ et pour matrice de transition

$$P = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

Quels sont les états récurrents et les états transitoires ?

Exemple 2.31 Dans l'exemple 2.10 (Promenade aléatoire sur les entiers), quels sont les états récurrents et les états transitoires ?

Exemple 2.32 (Les classes sociales) Considérons trois classes sociales A, B et C. Les probabilités que les individus de la génération suivante passent d'une classe sociale à l'autre sont

$$P = \begin{bmatrix} 3/5 & 1/5 & 1/5 \\ 1/6 & 4/6 & 1/6 \\ 3/8 & 3/8 & 2/8 \end{bmatrix}.$$

Sachant que la population est présentement formée de 20 % de A, de 30 % de B et de 50 % de C, quelle sera cette répartition dans plusieurs (un très grand nombre) générations ?

Définition 2.33 Un état i est un **état de retour** s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $p_{i,i}^{(n)} > 0$. Il est un **état de non-retour** si $p_{i,i}^{(n)} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Définition 2.35 Si i est un état de retour, on définit la **période** de i, notée $d(i)$, par

$$d(i) = \text{pgcd}\left\{n \in \mathbb{N}^* \mid P_{i,i}^{(n)} > 0\right\}.$$

Si i est un état de non-retour, on pose $d(i) = \infty$.

Exemple 2.36 Considérons la chaîne de Markov $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ayant pour espace d'états $E = \{0, 1\}$ et pour matrice de transition

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Déterminez si 0 et 1 sont des états de retour ou de non-retour et indiquez leur période.

Définition 2.37 Un état de période 1 est dit **apériodique**, alors qu'un état i de période supérieure à 1 est dit **périodique** de longueur $d(i)$.

Proposition 2.38 Si les états i et j communiquent, alors ils ont la même période.

Exemple 2.39 Considérons la chaîne de Markov $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ayant pour espace d'états $E = \{0, 1, 2\}$ et pour matrice de transition

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ p & 0 & 1-p \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

où $p \in]0, 1[$. Quelles sont les périodes des états ?

Exemple 2.40 Considérons la chaîne de Markov $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ayant pour espace d'états $E = \{0, 1, 2, 3\}$ et pour matrice de transition

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Quelles sont les périodes des états ?

Définition 2.41 Soient $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov et i un état récurrent. Le **temps du premier retour** à l'état i est

$$T_i = \min\{n \in \mathbb{N}^* \mid X_n = i, X_0 = i\}.$$

On dit que i est **récurrent positif** si $E(T_i) < \infty$ et que i est **récurrent nul** lorsque $E(T_i) = \infty$.

Proposition 2.42 La récurrence positive est stable sous $\leftrightarrow$.

Remarque Si une chaîne irréductible a un nombre fini d'états, tous les états sont nécessairement récurrents positifs.

Définition 2.43 Un état i est dit **ergodique** s'il est apériodique et récurrent positif.

Théorème 2.44 Soit $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov irréductible où tous les états sont ergodiques. Alors $\lim\limits_{n\to\infty} p_{i,j}^{(n)}$ existe et est indépendante de i. De plus, si $\pi_j = \lim\limits_{n\to\infty} p_{i,j}^{(n)}$, alors π_j est l'unique solution non négative du système d'équations

$$\pi_j = \sum_{i\in E} \pi_i \cdot P_{i,j} \text{ pour tout } j \in E \quad \text{et} \quad \sum_{j\in E} \pi_j.$$

Remarque La valeur π_j correspond dans la pratique à la proportion du temps que la chaîne passe dans l'état j.

Exemple 2.45 Pour la chaîne de Markov de l'exemple 2.32 (Les classes sociales), démontrez que tous les états sont ergodiques et trouvez les valeurs π_A, π_B, π_C.

Exemple 2.46 Considérons la chaîne de Markov ayant pour espace d'états $E = \{0, 1\}$ et pour matrice de transition

$$P = \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 \end{bmatrix}.$$

Quelles sont les valeurs de π_0 et de π_1 ?

Proposition 2.47 Soit P une matrice de transition d'une chaîne de Markov $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Si P est bistochastique, alors $\pi_i = 1/|E|$ pour tout $i \in E$.

2.4 Applications

Exemple 2.48 (Collectionneur de cartes de basketball) Un collectionneur souhaite accumuler les N cartes d'une collection de cartes de basketball. Pour y arriver, il achète des paquets contenant une carte. Chaque carte a autant de chance de se retrouver dans un paquet (distribution uniforme). Si chaque paquet coûte 1 \$, combien d'argent devra-t-il débourser en moyenne pour compléter sa collection ?

Exemple 2.49 (Problème de la ruine du joueur) Un joueur compulsif disposant de i \$ joue à un jeu de hasard. À chaque partie, il a une probabilité p de gagner 1 \$ et une probabilité $q = 1 - p$ de perdre 1 \$. Le joueur étant compulsif joue jusqu'à sa propre ruine ou jusqu'à ce qu'il ait N \$.

a) Quelle est la probabilité qu'il termine le jeu avec N \$?

b) Quelle est la durée moyenne du jeu ?

c) Qu'en est-il des réponses en a) et b) si N est une somme très importante ?

Exemple 2.49 (Génétique et loi de Hardy-Weinberg) Chaque individu d'une population est porteur de deux gènes, chacun prenant la valeur A ou a. Initialement, les proportions des paires de gènes AA, aa ou Aa sont respectivement p_0, q_0 et r_0, avec $p_0 + q_0 + r_0 = 1$. Lors de la reproduction, chaque parent transmet un de ses gènes aléatoirement (uniforme). Quelle sera la répartition des paires de gènes dans plusieurs générations? Et celle des gènes eux-mêmes ?

2.5 Temps moyen passé dans les états transitoires

Proposition 2.50 Soit $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov ayant un nombre fini d'états et supposons que les états sont numérotés de sorte que $T = \{1, 2, \dots, t\}$ désigne l'ensemble des états transitoires. Soit

$$P_T = \begin{bmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & \cdots & p_{1,t} \\ p_{2,1} & p_{2,1} & \cdots & p_{2,t} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{t,1} & p_{t,2} & \cdots & p_{t,t} \end{bmatrix},$$

La matrice de transition des états transitoires. Pour les états transitoires i et j, posons $s_{i,j}$ pour représenter l'espérance du nombre de périodes où la chaîne de Markov est dans l'état j, étant donné qu'elle commence à l'état i. Si

$$S = \begin{bmatrix} s_{1,1} & s_{1,2} & \cdots & s_{1,t} \\ s_{2,1} & s_{2,1} & \cdots & s_{2,t} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{t,1} & s_{t,2} & \cdots & s_{t,t} \end{bmatrix}.$$

alors $S = (I - P_T)^{-1}$. Par ailleurs,

$$f_{i,j} = \frac{s_{i,j} - \delta_{i,j}}{s_{j,j}},$$

où

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

2.6 Processus de branchement

Exemple 2.51 On a une population formée d'individus qui peuvent engendrer des individus de même type. Chaque individu produit dans sa vie j individus avec probabilité p_j, indépendamment les uns des autres. Quelle est la probabilité que cette population s'éteigne ?

2.7 Exercices supplémentaires

Exercice 2.1 Soit P la matrice de transition d'une chaîne de Markov $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Montrer que P^k est une matrice de transition pour la chaîne de Markov $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, où $Y_n = X_{kn}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 2.2 Soit P est une matrice de transition d'une chaîne de Markov $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Montrer que P^k est stochastique pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 2.3 Soit $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov. Supposons que $X_0 = i$ pour un état i. Soit N_i le nombre de fois où le processus va retourner en l'état i après l'avoir quitté pour la première fois. Déterminer $E(N_i)$.

Exercice 2.4 Soit i un état transitoire d'une chaîne de Markov $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ et soit N_i le nombre de fois où le processus est dans l'état i si $X_0 = i$.

a) Déterminer $E(N_i)$.

b) Déterminer $P(N_i > k)$ pour $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 2.5 Considérons la chaîne de Markov ayant pour espace d'états $E = \{0, 1, 2, 3\}$ et pour matrice de transition

$$P = \begin{bmatrix} 0{,}25 & 0{,}25 & 0{,}25 & 0{,}25 \\ 0{,}10 & 0{,}50 & 0 & 0{,}40 \\ 0 & 0 & 0{,}60 & 0{,}40 \\ 0 & 0 & 0{,}50 & 0{,}50 \end{bmatrix}.$$

a) Identifier les états récurrents et les états transitoires.

b) Déterminer $P(N_i \geq n)$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $E(N_i)$ pour toute valeur $i \in \{0, 1, 2, 3\}$.

Exercice 2.6 Montrer que dans une chaîne de Markov ayant un nombre fini d'états, les états ne peuvent pas tous être transitoires.

Exercice 2.7 Une compagnie d'assurance classe les niveaux de bonus-malus de ses clients suivant les entiers naturels : $0, 1, 2, \dots$. Le niveau 0 est le plus avantageux pour l'assuré. Soient $i, j \in \mathbb{N}$ tels que $0 \leq i \leq j$. Notons le niveau de bonus-malus d'un assuré à l'année n par X_n, où $n \in \mathbb{N}$. Si ce niveau est i à l'année n, l'assureur le dévaluera au niveau j l'année suivante si, entre temps, l'assuré a eu $j - i$ accidents. Supposons que le nombre d'accidents subis par l'assuré suit une loi de Poisson de paramètre λ.

a) Donner les états de la chaîne de Markov $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

b) Donner la matrice de transition de cette chaîne.

c) Déterminer les classes d'équivalence pour la relation de communication.

d) Déterminer si les états sont récurrents ou transitoires.

Exercice 2.8 Considérons la marche aléatoire symétrique dans $\mathbb{Z}^m$ avec probabilité $1/m$ de se déplacer vers une des directions canoniques d'une valeur à la fois. Soit 0 l'état correspondant à l'origine du repère. On peut montrer que $P_{0,0}^{(n)} \approx k \cdot n^{-m/2}$ pour une constante k. Déterminer si les marches aléatoires symétriques dans $\mathbb{Z}^m$ sont récurrentes ou transitoires.

Exercice 2.9 Chaque citoyen adulte d'une ville travaille dans l'une des trois professions: A, B ou C. De père en fils, les professions des pères sont retenues avec probabilités respectives de $3/5$, $2/3$ et $1/4$. Par ailleurs, si un fils ne retient pas la profession du père, il accède avec probabilités égales à l'une des deux autres professions. Supposons que la répartition des professions pour la génération actuelle est de 20 % pour la profession A, 30 % pour la profession B et de 50 % pour la profession C.

a) Déterminer la distribution des citoyens mâles par profession pour la prochaine génération.

b) Déterminer la distribution des citoyens mâles par profession dans deux générations.

c) Déterminer la distribution limite des citoyens mâles par profession pour la $n^{\text{ième}}$ génération future lorsque $n \to \infty$.

Exercice 2.10 Soient i et j deux états d'une chaîne de Markov $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de périodes finies. Montrer que si i communique avec j, alors i et j ont la même période.

Exercice 2.11 Soit $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov irréductible d'espace d'états fini E où tous les états sont ergodiques. Supposons que la matrice de transition de cette chaîne soit bistochastique. Montrer que $\pi_j = 1/|E|$ pour $j \in E$ est la distribution stationnaire de cette chaîne de Markov.

Exercice 2.12 Considérons la chaîne de Markov $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ayant pour espace états $E = \mathbb{N}$ et où les probabilités de transition sont

$$p_{i,i+1} = \frac{i}{i+1} \quad \text{et} \quad p_{i,0} = \frac{1}{i+1}.$$

Posons $T_i = \min\{n \geq 1 \mid X_0 = i, X_n = i\}$ et Posons $f_{i,i}^{(n)} = P(T_i = n \mid X_0 = i)$.

a) Calculer $f_{0,0}^{(1)}$, puis $f_{0,0}^{(2)}$, $f_{0,0}^{(3)}$, $f_{0,0}^{(4)}$ et $f_{0,0}^{(5)}$, puis en déduire une formule pour $f_{0,0}^{(n)}$ avec $n \geq 2$.

b) En déduire que 0 est un état récurrent.

c) Montrer que 0 est un état récurrent nul.

Exercice 2.13 Soit $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov. Posons $T_i = \min\{n \geq 1 \mid X_0 = i, X_n = i\}$ et posons $f_{i,j}^{(n)} = P\big(T_j = n \mid X_0 = i\big)$.

a) Expliquer intuitivement pourquoi, pour tout entier $n \geq 1$, on a

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=0}^{\infty} f_{i,j}^{(k)} \cdot p_{j,j}^{(n-k)}.$$

b) En déduire une formule de récurrence pour les $f_{i,j}^{(n)}$.

Exercice 2.14 Montrer que tout état de non-retour est transitoire et que tout état absorbant est récurrent.

Exercice 2.15 Un joueur joue à un jeu de roulette. La roulette est formée de 38 cases : 18 rouges, 18 noires, une case marquée 0 et une case marquée 00. Le joueur gagne si la bille s'arrête sur une case rouge. Le joueur possède une fortune initiale de 10 \$. S'il gagne, il remporte un dollars et s'il perd, il le débourse. Le joueur se fixe comme but de doubler sa mise initiale.

a) Déterminer la probabilité que le joueur atteigne sa cible.

b) Déterminer le profit (ou la perte) espérée.

c) Reprendre l'exercice b) en supposant cette fois que le joueur ne fait qu'un seul paris de 10 \$. Déterminer la stratégie optimale.

Exercice 2.16 L'humeur d'un individu peut être considérée comme une chaîne de Markov à trois états. Supposons que la matrice de transition est donnée par

$$P = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,4 & 0,1 \\ 0,3 & 0,4 & 0,3 \\ 0,2 & 0,3 & 0,5 \end{bmatrix}.$$

Déterminer la proportion, à long terme, du temps que passe l'individu dans chacun des états.

Exercice 2.17 Une chaîne de montage comporte plusieurs machines. Si certaines d'entre elles ne sont pas en opération, la chaîne peut quand même continuer à avancer alors que d'autres sont critiques et que la chaîne doit arrêter si une d'elles fait défaillance. On peut modéliser la chaîne par un processus de Markov où chaque état représente une configuration (marche/marche pas) des différentes machines. Soit P la matrice de transition. Soient A l'ensemble des états qui permettent à la chaîne d'avancer et A^c l'ensemble des états où la chaîne arrête. Soit π_k la proportion du temps où la chaîne est dans l'état k pour $k = 1, \dots, n$.

a) Soient $i \in A$ et $j \in A^c$. Déterminer la proportion du temps où le processus passe de l'état i à l'état j.

b) Déterminer la proportion du temps où le processus passe d'un état où la chaîne avance à l'état j.

c) Déterminer la proportion du temps où le processus tombe en panne.

d) Soient F le temps moyen où la chaîne de montage demeure en fonction après une remise en service et D le temps moyen où la chaîne de montage demeure en défaillance après une panne. Déterminer la proportion du temps où le processus tombe en panne en fonction de F et de D.

e) Expliquer, dans le contexte du problème, pourquoi

$$\frac{F}{F+D} = \sum_{i \in A} \pi_i.$$

f) Déterminer les valeurs de F et de D.

g) Supposons que P est donnée par la matrice

$$P = \begin{bmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{bmatrix}.$$

On admettra que la chaîne avance si elle est dans les états 1 et 2 et qu'elle s'arrête dans les états 3 et 4. Déterminer les proportions du temps que le système passe dans chacun des quatre états, puis déterminer le taux de panne, la durée moyenne de celles-ci puis la durée de fonctionnement moyenne entre deux pannes.

Exercice 2.18 On considère une population où chaque individu est porteur de deux gènes qui peuvent chacun être du type A ou a. Un individu sera porteur de la caractéristique a si et seulement s'il est porteur de la paire aa. On dit alors que le gène A est dominant et que le gène a est récessif. Supposons que les pourcentages de gens de la population ayant les paires de gènes AA, aa et aA se sont stabilisées et prennent les valeurs p, q et r respectivement. On dira qu'un individu est dominant s'il possède au moins un gène dominant et qu'il est récessif sinon.

a) Soit S_{11} la probabilité qu'un enfant d'un couple de dominants soit récessif. Déterminer S_{11}.

b) Soit S_{10} la probabilité qu'un enfant d'un couple formé d'un parent dominant et d'un parent récessif soit récessif. Déterminer S_{10}.

c) En déduire que $S_{11} = S_{10}^2$.

En génétique ces rapports sont appelés **ratio de Snyder**.

Exercice 2.19 Reprenons le problème de la ruine du joueur (voir exemple 2.11) où le jeu s'arrête lorsque le joueur a soit tout perdu ou soit tout gagné les N dollars. Soit M_i le nombre moyen de parties qui doivent être complétées pour que le jeu se termine si le joueur possède au départ i dollars. Montrer que

$$M_0 = M_N = 0 \quad \text{et} \quad M_i = 1 + pM_{i+1} + qM_{i-1}$$

pour $i \in \{1, \ldots, N-1\}$.

Exercice 2.20 Quatre balles blanches et quatre balles noires sont distribuées dans deux urnes de sorte que chaque urne contient quatre balles. On dit que le système est dans l'état i, $i \in \{0,1,2,3,4\}$, si la première urne contient i balles blanches. À chaque étape, on prend une balle de chaque urne et on les interchange. Soit X_n l'état du système après l'étape n, c'est-à-dire après n interchangements de balles. Expliquez pourquoi $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov et calculez sa matrice de transition.

Exercice 2.21 Une chaîne de Markov $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ayant pour espace d'états $E = \{0,1,2\}$ a pour matrice de transition

$$P = \begin{bmatrix} 3/6 & 2/6 & 1/6 \\ 0 & 2/6 & 4/6 \\ 3/6 & 0 & 3/6 \end{bmatrix}.$$

Si

$$P(X_0 = 0) = \frac{1}{4}, \quad P(X_0 = 1) = \frac{1}{4}, \quad P(X_0 = 2) = \frac{2}{4},$$

calculez $E(X_3)$.

Exercice 2.22 On considère le problème de la ruine du joueur (voir exemple 2.11) avec $M = 6$ et $p = 0{,}60$. On suppose que le joueur débute la partie avec 3 $.

a) Quelle est la probabilité que le joueur ait 4 $ après 3 parties ?

b) Sachant que le joueur a 3 $ après 12 parties, quelle est la probabilité qu'il ait 4 $ après 15 parties ?

c) Quelle est la probabilité que le jeu se termine en 5 parties ou moins ?

d) Si le joueur a entre 1 $ et 5$ après 10 parties, quelle est la probabilité qu'à ce moment, le joueur ait 3 $?

Exercice 2.23 Montrer que dans une chaîne de Markov irréductible avec un nombre fini d'états, tous les états sont récurrents.

Exercice 2.24 Six enfants (Alice, Bob, Carl, Diane, Ève, Franck) jouent à se lancer une balle.

- Si Alice a la balle, elle a autant de chance de la lancer à Bob, Diane, Ève et Franck.
- Si Bob a la balle, il a autant de chance de la lancer à Alice, Carl, Ève et Franck.
- Si Ève a la balle, elle a autant de chance de la lancer à Alice, Bob, Diane et Franck.
- Si Carl ou Franck ont la balle, ils vont se la lancer à répétition.
- Si Diane a la balle, elle s'enfuit avec.

a) Modéliser ce jeu à l'aide d'une chaîne de Markov et trouver la matrice de transition de cette chaîne de Markov.

b) Identifier ses états récurrents et ses états transitoires.

Exercice 2.25 Soit une chaîne de Markov $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ayant un nombre fini d'états. Montrez que si l'état j est accessible depuis l'état i, alors il peut l'être en $|E| - 1$ étapes ou moins.

Exercice 2.26 Soit une chaîne de Markov $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Montrez que si un état i est récurrent et que l'état i ne communique pas avec l'état j, alors $p_{i,j} = 0$.

Note : Ce résultat implique que lorsqu'un processus entre dans une classe d'états récurrents, elle ne peut jamais en sortir. Pour cette raison, une classe récurrente est aussi appelée une classe fermée.

Exercice 2.27 Des épreuves sont performées en série. Si les deux dernières épreuves sont des succès, alors la prochaine épreuve sera un succès avec une probabilité de 0,8. Sinon, la prochaine épreuve sera un succès avec une probabilité de 0,5. À long terme (c'est-à-dire après plusieurs épreuves), quelle sera la proportion d'épreuves étant des succès ?

Exercice 2.28 Soit une chaîne de Markov $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Considérons A un ensemble d'états, et A^c les états restant.

a) Quelle est l'interprétation de

$$\sum_{i\in A}\sum_{j\in A^c}\pi_i P_{i,j} \ ?$$

b) Quelle est l'interprétation de

$$\sum_{i\in A^c}\sum_{j\in A}\pi_i P_{i,j} \ ?$$

c) Expliquez l'identité

$$\sum_{i\in A}\sum_{j\in A^c}\pi_i P_{i,j} = \sum_{i\in A^c}\sum_{j\in A}\pi_i P_{i,j}.$$

Exercice 2.29 Anna, Billie, Claire, David et Enzo se rendent au casino et jouent à la roulette en misant à chaque tour sur une couleur, ce qui leur donne chacun une probabilité $p = 18/38$ de doubler leur mise et $q = 20/38$ de la perdre.

a) Anna dispose de 190 \$. Elle parie 1 \$ à chaque tour. Elle quittera la table de jeu lorsqu'elle aura 200 \$ ou lorsqu'elle sera fauchée. Quelle est la probabilité qu'Anna quitte la table de jeu avec 200 \$?

b) Billie dispose de 10 \$. Elle parie 10 \$ à chaque tour. Elle quittera la table de jeu lorsqu'elle aura 200 \$ ou lorsqu'elle sera fauchée. Quelle est la probabilité que Billie quitte le casino avec 200 \$?

c) Claire dispose de 3,125 \$ (pourquoi pas !). Elle parie tout son argent à chaque tour. Elle quittera la table de jeu lorsqu'elle aura 200 \$ ou lorsqu'elle sera fauchée. Quelle est la probabilité que Claire quitte la table de jeu avec 200 \$?

d) David dispose de 180 \$. Il parie 2 \$ à chaque tour. Il quittera la table de jeu lorsqu'il aura 200 \$ ou lorsqu'il sera fauché. Quelle est la probabilité que David quitte la table de jeu avec 200 \$?

e) Enzo dispose de 20 \$. Il s'achète une limonade, et, pour passer le temps, décide de calculer le temps que passeront chacun de ses amis (Anna, Billie, Claire et David) à la table de jeu avant de la quitter. Sachant qu'un tour de roulette dure une minute, à quels résultats arrivera-t-elle ?

Exercice 2.30 Soit $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov ayant pour ensemble d'états $E=\{0,\dots,9\}$ et pour matrice de transition

$$P=\begin{bmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}.$$

a) Démontrer que les états 0, 1 et 2 forment une classe d'équivalence pour la relation $\leftrightarrow$ (communication entre deux états).

b) Quelle est la période de l'état 3 ?

c) Prouver que l'état 0 est récurrent.

d) Prouver que l'état 8 est transitoire.

Exercice 2.31 Démontrer que la relation $\leftrightarrow$ (communication entre deux états) est une relation d'équivalence (réflexive, transitive et symétrique).

Exercice 2.32 Dans une ville, un système de vélos en libre-service a été implanté. À la fin du premier mois d'opération, 10 % de la population l'a utilisé, alors que 90 % de la population a utilisé sa voiture. Supposons qu'à chaque mois, 10 % des utilisateurs de ce système de vélos retournent à leur voiture, alors que 5 % des automobilistes transfèrent vers le système de vélo.

a) Si une personne utilisait sa voiture à la fin du premier mois, quelle est la probabilité qu'elle utilise le système de vélos à la fin du troisième mois ?

b) À la fin du troisième mois, quel sera le pourcentage de gens utilisant le système de vélos ?

c) À long terme, quelle proportion de la population utilisera le système de vélos ?

Exercice 2.33 Lors du carnaval de l'Université de Sherbrooke, Alice décide de jouer à un jeu, lequel nécessite l'achat d'un coupon au coût de 1 \$. À chaque tour de jeu, elle a 60 % de chance de gagner un coupon et 40 % de chance d'en perdre un. Le jeu prend fin lorsqu'elle n'a plus de coupons, auquel cas elle repart les mains vides, ou lorsqu'elle réussit à accumuler trois coupons, auquel cas elle remporte un gros toutou.

a) Quelle est la probabilité qu'Alice remporte un gros toutou ?

b) En moyenne, combien de tours de jeu seront nécessaires avant que la partie prenne fin ?

Exercice 2.34 Pour chacune des affirmations suivantes, déterminer si elle est vraie ou fausse. Justifier votre réponse par une preuve complète si l'affirmation est vraie, ou par un contre-exemple si elle fausse.

a) Toute chaîne de Markov a au moins un état récurrent.

b) Toute chaîne de Markov a au moins un état transitoire.

c) Soit i un état d'une chaîne de Markov ayant P pour matrice de transition. Si $d(i)=2$, alors $P_{i,i}^{(2)}>0$.

Exercice 2.35 Soit $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov à temps discret ayant pour espace d'états $E = \{0, 1, 2, 3\}$ et dont la matrice de transition est

$$P = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}4 & 0{,}1 & 0 \\ 0{,}3 & 0{,}5 & 0 & 0{,}2 \\ 0 & 0 & 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0 & 0 & 0{,}5 & 0{,}5 \end{bmatrix}.$$

Supposons que $X_0 = 0$. Soit M le nombre de fois où le processus est à l'état 0, incluant au temps 0. Déterminer $E(M)$.

Exercice 2.36 Une population est formée d'individus tous identiques qui donnent naissance à des individus de même type. Chaque individu produit dans sa vie j enfants avec probabilité P_j, où $P_0 = 0{,}25$, $P_1 = 0{,}25$ et $P_0 = 0{,}50$. Soit X_n le nombre d'individus de la génération n.

a) Montrer que $E(X_n) = (5/4)^n \cdot E(X_0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) Sachant que la population comprenait deux individus au temps 0, calculez la probabilité qu'elle s'éteigne.