Processus stochastiques (STT489) – Sylvain Bérubé – Été 2024
Département de mathématiques de l'Université de Sherbrooke

Devoir 4

À remettre le vendredi 2 aout 2024 à 8h30 au début de la séance de cours.

Question 1 (16 points)

Soit $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ une chaîne de Markov à temps continu. Soit i et j deux états de cette chaîne et soit $t \in \mathbb{R}_+$. Justifier pourquoi l'équation de Kolmogorov pour le passé

$$\frac{d}{dt}\left(p_{i,j}(t)\right) = \left(\sum_{k\in E\setminus\{i\}} v_i p_{i,k} p_{k,j}(t)\right) - v_i p_{i,j}(t)$$

est vraie. Note : S'inspirer de la démonstration du théorème 4.17.

Question 2 (16 points)

Montrer, dans le cas du modèle de croissance linéaire avec immigration, que les probabilités limites p_i existent lorsque $\lambda < \mu$.

Question 3 (16 points)

Montrer, dans le cas de la file d'attente M | M | 1, que les probabilités limites p_i existent lorsque $\lambda < \mu$. Déterminer alors les probabilités limites pour chacun des états.

Question 4 (2 + 12 + 6 = 20 points)

Une population est composée de N individus. Certains d'entre eux ont une infection, laquelle se propage de la façon suivante. Les échanges entre deux membres de cette population se produisent en suivant un processus de Poisson de taux λ. Lorsqu'un contact se produit, il a autant de chance d'impliquer n'importe quelles des $\binom{N}{2}$ paires d'individus de la population. Si un contact implique un individu infecté et un individu non infecté, alors l'individu non infecté à une probabilité p de le devenir. Lorsqu'un individu est infecté, il le demeure pour toujours.

Soit X_t le nombre d'individus de la population infectés au temps t.

a) Expliquer pourquoi $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ est une chaîne de Markov à temps continu.

b) Si un seul individu est infecté au temps 0, combien de temps en moyenne cela prendra-t-il avant que toute la population soit infectée ?

c) Le 17 juillet 2024, à 10 h 30, un habitant de Sherbrooke ($N = 170\,000$) s'est transformé en zombie, et infecte le reste de la population selon le modèle de propagation décrit ci-dessus. Lorsqu'un contact se produit entre un zombie et un être humain, l'être humain à une probabilité de 90 % de devenir un zombie à son tour. Les échanges entre deux habitants de Sherbrooke se produisent en suivant un processus de Poisson de taux 10 par seconde.

i) À quel moment (date et heure, à la seconde près) en moyenne, l'ensemble de la population deviendra-t-elle zombie ? Approximer votre réponse.

ii) Quelle est votre probabilité de survivre jusqu'à la fin de la journée ? Approximer votre réponse. Note : Une simulation numérique est appropriée.

Question 5 (4 + 12 = 16 points)

Dans une certaine région, chaque individu d'une population biologique donne naissance à un taux exponentiel λ et meurt à un taux exponentiel μ. De plus, il y a un taux exponentiel d'augmentation θ dû à l'immigration. Cependant, l'immigration n'est pas permise lorsque la taille de la population est plus grande ou égale à N.

a) Modéliser cette situation à l'aide d'un processus de naissance et de mort.

b) Supposer que $N = 3, \theta = \lambda = 1$ et $\mu = 2$.

i) Déterminer la proportion du temps où il y a un seul individu dans cette région. Note : Utiliser au besoin la série

$$\ln(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}.$$

ii) Déterminer la proportion du temps où l'immigration n'est pas permise.

iii) S'il y a un seul individu au temps 0, est-il possible (probabilité non nulle) que cette population atteigne la taille de 100 000 individus ?

Question 6 (16 points)

Un atelier comprend trois machines et deux réparateurs. Le temps de bon fonctionnement d'une machine avant de se briser suit une loi exponentielle de moyenne 12 heures. Une machine peut être réparée par un seul réparateur à la fois, lequel complètera la réparation en un temps suivant une loi exponentielle de moyenne 8 heures.

a) À long terme, quel est le nombre moyen de machines brisées ?

b) À long terme, quelle proportion du temps est-ce que les deux réparateurs seront occupés en même temps ?