# Devoir 3

Solutions

**Question 1** (4 + 6 + 4 = 14 points)

Soit $X_1$, $X_2$, $X_3$ des variables aléatoires exponentielles indépendantes de paramètre $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$ respectivement.

**a)** Calculer $P(X_1 < X_2 < X_3)$.

**Solution 1**

Directement,

$$\begin{aligned} P(X_1 < X_2 < X_3) &= P(X_1 < \min\{X_2, X_3\}, X_2 < X_3) \\ &= P(X_1 < \min\{X_2, X_3\}) \cdot P(X_2 < X_3 \mid X_1 < \min\{X_2, X_3\}) \\ &= P(X_1 < \min\{X_2, X_3\}) \cdot P(X_2 < X_3) \quad \text{(car } X_2, X_3 \text{ sont sans mémoire)} \\ &= \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3} \cdot \frac{\lambda_2}{\lambda_2 + \lambda_3}. \quad \text{(selon les propositions 3.4 et 3.6)} \end{aligned}$$

**Solution 2**

En conditionnant sur $X_2$, on obtient

$$P(X_1 < X_2 < X_3) = \int_0^\infty P(X_1 < X_2 < X_3 \mid X_2 = s)\, f_{X_2}(s)\, ds$$

$$= \int_0^\infty P(X_1 < s, s < X_3)\, f_{X_2}(s)\, ds$$

$$= \int_0^\infty P(X_1 < s)\, P(s < X_3)\, f_{X_2}(s)\, ds \quad \text{(car les variables sont indépendantes)}$$

$$= \int_0^\infty F_{X_1}(s)\, \left(1 - F_{X_3}(s)\right)\, f_{X_2}(s)\, ds$$

$$= \int_0^\infty \left(1 - e^{-\lambda_1 s}\right) e^{-\lambda_3 s}\, \lambda_2 e^{-\lambda_2 s}\, ds$$

$$= \lambda_2 \int_0^\infty \left(e^{-(\lambda_2+\lambda_3)s} - e^{-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)s}\right) ds$$

$$= \lambda_2 \left(\frac{e^{-(\lambda_2+\lambda_3)s}}{-(\lambda_2+\lambda_3)} - \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)s}}{-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)}\right)\Bigg|_{s=0}^{s=\infty}$$

$$= \lambda_2 \left(\frac{1}{(\lambda_2+\lambda_3)} - \frac{1}{(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)}\right) = \frac{\lambda_2}{\lambda_2+\lambda_3} \cdot \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}$$

**Solution 3**

En conditionnant d'abord sur $X_1$, on obtient

$$\begin{aligned} P(X_1 < X_2 < X_3) &= \int_0^\infty P(X_1 < X_2 < X_3 \mid X_1 = s) \cdot f_{X_1}(s)\, ds \\ &= \int_0^\infty P(s < X_2 < X_3) \cdot f_{X_1}(s)\, ds\,. \quad \text{(car les variables sont indépendantes)} \end{aligned}$$

Puis en conditionnant sur $X_2$, on obtient

$$\begin{aligned} P(s < X_2 < X_3) &= \int_0^\infty P(s < X_2 < X_3 \mid X_2 = t) \cdot f_{X_2}(t)\, dt \\ &= \int_0^\infty P(s < t < X_3) \cdot f_{X_2}(t)\, dt \quad \text{(car les variables sont indépendantes)} \\ &= \int_s^\infty P(t < X_3) \cdot f_{X_2}(t)\, dt\,. \quad \text{(car } P(s < t < X_3) = 0 \text{ si } s \geq t\text{)} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} P(X_1 < X_2 < X_3) &= \int_0^\infty \left( \int_s^\infty P(t < X_3) \cdot f_{X_2}(t)\, dt \right) \cdot f_{X_1}(s)\, ds \\ &= \int_0^\infty \left( \int_s^\infty e^{-\lambda_3 t} \cdot \lambda_2 \cdot e^{-\lambda_2 t}\, dt \right) \cdot f_{X_1}(s)\, ds \\ &= \int_0^\infty \left( \frac{\lambda_2}{\lambda_2 + \lambda_3} \cdot e^{-(\lambda_2 + \lambda_3)s} \right) \cdot \lambda_1 \cdot e^{-\lambda_1 s}\, ds \\ &= \frac{\lambda_2}{\lambda_2 + \lambda_3} \int_0^\infty \lambda_1 \cdot e^{-(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)s}\, ds \\ &= \frac{\lambda_2}{\lambda_2 + \lambda_3} \cdot \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}. \end{aligned}$$

**b)** Calculer $P(X_1 < X_2 \mid \max(X_1, X_2, X_3) = X_3)$.

**Solution 1**

Directement,

$$\begin{aligned}
P(X_1 < X_2 \mid \max(X_1, X_2, X_3) = X_3) &= P(X_1 < X_2 \mid X_1 < X_2 < X_3 \text{ ou } X_2 < X_1 < X_3) \\
&= \frac{P(X_1 < X_2 < X_3)}{P(X_1 < X_2 < X_3) + P(X_2 < X_1 < X_3)} \\
&= \frac{\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3} \cdot \frac{\lambda_2}{\lambda_2 + \lambda_3}}{\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3} \cdot \frac{\lambda_2}{\lambda_2 + \lambda_3} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3} \cdot \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_3}} \\
&= \frac{\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3} \cdot \frac{\lambda_2}{\lambda_2 + \lambda_3}}{\frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}\left(\frac{1}{\lambda_2 + \lambda_3} + \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_3}\right)} \\
&= \frac{\frac{1}{\lambda_2 + \lambda_3}}{\frac{1}{\lambda_2 + \lambda_3} + \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_3}} \\
&= \frac{\lambda_1 + \lambda_3}{\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3}.
\end{aligned}$$

**Solution 2**

Par définition,

$$\begin{aligned}
P(X_1 < X_2 \mid \max(X_1, X_2, X_3) = X_3) &= P(X_1 < X_2 \mid X_1 < X_3, X_2 < X_3) \\
&= \frac{P(X_1 < X_2, X_1 < X_3, X_2 < X_3)}{P(X_1 < X_3, X_2 < X_3)} \\
&= \frac{P(X_1 < X_2 < X_3)}{P(X_1 < X_3, X_2 < X_3)}.
\end{aligned}$$

Or, par conditionnement sur $X_3$,

$$\begin{aligned}
&P(X_1 < X_3, X_2 < X_3) \\
&= \int_0^\infty P(X_1 < X_3, X_2 < X_3 \mid X_3 = s) \cdot f_{X_3}(s)\, ds \\
&= \int_0^\infty P(X_1 < s) \cdot P(X_2 < s) \cdot f_{X_3}(s)\, ds \quad \text{(car les variables sont indépendantes)} \\
&= \int_0^\infty \left(1 - e^{\lambda_1 s}\right) \cdot \left(1 - e^{\lambda_2 s}\right) \cdot e^{-\lambda_3 s}\, ds \\
&= \lambda_3 \cdot \int_0^\infty e^{-\lambda_3 s} - e^{-(\lambda_2 + \lambda_3)s} - e^{-(\lambda_1 + \lambda_3)s} + e^{-(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)s} \cdot\ ds \\
&= \lambda_3 \cdot \left(\frac{1}{\lambda_3} - \frac{1}{\lambda_2 + \lambda_3} - \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_3} + \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}\right).
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
P(X_1 < X_2 \mid \max(X_1, X_2, X_3) = X_3) &= \frac{P(X_1 < X_2 < X_3)}{P(X_1 < X_3, X_2 < X_3)} \\
&= \frac{\frac{\lambda_2}{\lambda_2 + \lambda_3} \cdot \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}}{\lambda_3 \cdot \left(\frac{1}{\lambda_3} - \frac{1}{\lambda_2 + \lambda_3} - \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_3} + \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}\right)}.
\end{aligned}$$

**c)** Calculer $E\big(\max(X_1, X_2, X_3)\big)$.

On a

$$\max\{X_1, X_2, X_3\} = X_1 + X_2 + X_3 - \min\{X_1, X_2\} - \min\{X_1, X_3\} - \min\{X_2, X_3\} + \min\{X_1, X_2, X_3\}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
&E(\max\{X_1, X_2, X_3\}) \\
&\quad = E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) \\
&\qquad - E(\min\{X_1, X_2\}) - E(\min\{X_1, X_3\}) - E(\min\{X_2, X_3\}) \\
&\qquad + E(\min\{X_1, X_2, X_3\}) \\
&\quad = \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_3} - \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_3} - \frac{1}{\lambda_2 + \lambda_3} + \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}. \quad \text{(selon la proposition 3.6)}
\end{aligned}$$

**Question 2** (6 + 6 = 12 points)

Une centrale électrique dispose de trois générateurs (A, B et C) qui doivent fonctionner de manière fiable pour assurer l'alimentation continue en électricité. La centrale peut continuer à fonctionner de manière optimale tant que deux des trois générateurs sont opérationnels. Les générateurs ont des temps de défaillance qui suivent des lois exponentielles avec des moyennes de 2 ans, 3 ans et 6 ans respectivement.

**a)** Quelle est la durée moyenne pendant laquelle la centrale électrique peut continuer à fonctionner de manière optimale ?

Soit $X_A, X_B, X_C$ les temps de défaillance des générateurs A, B, C. Selon l'énoncé,

$$X_A \sim \mathrm{Exp}(\lambda_1 = 1/2),$$
$$X_B \sim \mathrm{Exp}(\lambda_2 = 1/3),$$
$$X_C \sim \mathrm{Exp}(\lambda_3 = 1/6).$$

Le temps durant lequel la centrale peut fonctionner de manière optimale est

$$X_A + X_B + X_C - \max\{X_A, X_B, X_C\} - \min\{X_A, X_B, X_C\}.$$

On sait que

$$E(X_A) = 2,$$
$$E(X_B) = 3,$$
$$E(X_C) = 6.$$

Par ailleurs, selon la question 1 c),

$$E(\max\{X_A, X_B, X_C\}) = \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_3} - \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_3} - \frac{1}{\lambda_2 + \lambda_3} + \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}$$
$$= \frac{1}{1/2} + \frac{1}{1/3} + \frac{1}{1/6} - \frac{1}{1/2 + 1/3} - \frac{1}{1/2 + 1/6} - \frac{1}{1/3 + 1/6} + \frac{1}{1/2 + 1/3 + 1/6}$$
$$= \frac{73}{10} = 7{,}3.$$

Et $\min\{X_A, X_B, X_C\} \sim \mathrm{Exp}(1/2 + 1/3 + 1/6 = 1)$, d'où $E(\min\{X_A, X_B, X_C\}) = 1$.

Ainsi, la durée moyenne pendant laquelle la centrale peut fonctionner de manière optimale est

$$E(X_A + X_B + X_C - \max\{X_A, X_B, X_C\} - \min\{X_A, X_B, X_C\})$$
$$= E(X_A) + E(X_B) + E(X_C) - E(\max\{X_A, X_B, X_C\}) - E(\min\{X_A, X_B, X_C\}).$$
$$= 2 + 3 + 6 - \frac{73}{10} - 1$$
$$= \frac{27}{10} = 2{,}7.$$

**b)** Trouver les probabilités pour les six ordres (ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA) dans lesquels les défaillances des générateurs peuvent se produire.

Selon la question 1 a),

$$\begin{aligned} P(X_A < X_B < X_C) &= \frac{\lambda_2}{\lambda_2 + \lambda_3} \cdot \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3} \\ &= \frac{1/3}{1/3 + 1/6} \cdot \frac{1/2}{1/2 + 1/3 + 1/6} \\ &= \frac{1}{3} = \frac{20}{60} \approx 0{,}3333. \end{aligned}$$

De façon similaire, on trouve

$$P(X_A < X_B < X_C) = \frac{1}{3} = \frac{20}{60} \approx 0{,}3333, \quad P(X_A < X_C < X_B) = \frac{1}{6} = \frac{10}{60} \approx 0{,}1667,$$

$$P(X_B < X_A < X_C) = \frac{1}{4} = \frac{15}{60} = 0{,}2500, \quad P(X_B < X_C < X_A) = \frac{1}{12} = \frac{5}{60} \approx 0{,}0833,$$

$$P(X_C < X_A < X_B) = \frac{1}{10} = \frac{6}{60} = 0{,}1000, \quad P(X_C < X_B < X_A) = \frac{1}{15} = \frac{4}{60} = 0{,}0667.$$

**Question 3** (4 + 6 + 10 = 20 points)

Un système a deux serveurs. Un client entrant dans le système est d'abord servi par le serveur 1, puis par le serveur 2, et ensuite il quitte le système. Les temps de service aux serveurs 1 et 2 suivent des lois exponentielles de paramètres $\lambda_1 = 1/2$ et $\lambda_2 = 1/3$ respectivement. Lorsque vous arrivez dans le système, vous constatez que le serveur 1 est libre et qu'il y a 2 clients au serveur 2 : le client A est en service et le client B en attente.

Soit

$X_1$ : notre temps de service au serveur 1,
$X_2$ : notre temps de service au serveur 2,
$Y_A$ : le temps de service du client A au serveur 2,
$Y_B$ : le temps de service du client B au serveur 2,

où $X_1 \sim \text{Exp}(\lambda_1)$, $X_2 \sim \text{Exp}(\lambda_2)$, $Y_A \sim \text{Exp}(\lambda_2)$ et $Y_B \sim \text{Exp}(\lambda_2)$.

**a)** Calculer $P_A$, la probabilité que le client A soit toujours en service lorsque vous arriverez au serveur 2.

Directement,

$$\begin{aligned} P_A &= P(X_1 < Y_A) \\ &= \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \quad \text{(selon la proposition 3.4)} \\ &= \frac{1/2}{1/2 + 1/3} \\ &= \frac{3}{5} = 0{,}6000. \end{aligned}$$

**b)** Calculer $P_B$, la probabilité que le client B soit toujours dans le système lorsque vous arriverez au serveur 2.

**Solution 1**

Directement,

$$\begin{aligned} P_B &= P(X_1 < Y_A + Y_B) \\ &= P(X_1 < Y_A + Y_B \mid X_1 < Y_A) \cdot P(X_1 < Y_A) + P(X_1 < Y_A + Y_B \mid X_1 \geq Y_A) \cdot P(X_1 \geq Y_A) \\ &= 1 \cdot \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} + P(X_1 < Y_B) \cdot \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \quad \text{(car } X_1 \text{ est sans mémoire)} \\ &= \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} + \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \cdot \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \\ &= \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \cdot \left(1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}\right) \\ &= \frac{3}{5} \cdot \left(1 + \frac{2}{5}\right) \\ &= \frac{21}{25} = 0{,}8400. \end{aligned}$$

**Solution 2**

Directement,

$$\begin{aligned} P_B &= P(X_1 < Y_A + Y_B) \\ &= 1 - P(X_1 \geq Y_A + Y_B) \\ &= 1 - \big(P(X_1 \geq Y_A + Y_B \mid X_1 < Y_A) \cdot P(X_1 < Y_A) + P(X_1 \geq Y_A + Y_B \mid X_1 \geq Y_A) \cdot P(X_1 \geq Y_A)\big) \\ &= 1 - \big(0 \cdot P(X_1 < Y_A) + P(X_1 \geq Y_B) \cdot P(X_1 \geq Y_A)\big) \quad \text{(car } X_1 \text{ est sans mémoire)} \\ &= 1 - \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}\right)^2 \\ &= 1 - \left(\frac{2}{5}\right)^2 \\ &= \frac{21}{25} = 0{,}8400. \end{aligned}$$

**c)** Calculer $E(T)$, où $T$ est le temps que vous passez dans le système.

Soit

$W_A$ : notre temps d'attente au serveur 2 pendant que A se fait servir,
$W_B$ : notre temps d'attente au serveur 2 pendant que B se fait servir,
$T$ : notre temps passé dans le système,

$$Z = \begin{cases} 0 & \text{si A et B sont toujours dans le système lorsqu'on arrive au serveur 2} \\ & (X_1 < Y_A) \\ 1 & \text{si B est toujours dans le système lorsqu'on arrive au serveur 2, mais pas A} \\ & (Y_A < X_1 < Y_A + Y_B) \\ 2 & \text{si A et B ne sont plus dans le système lorsqu'on arrive au serveur 2} \\ & (X_1 > Y_A + Y_B) \end{cases}$$

De a) et b),

$$P(Z = 0) = P_A = 15/25,$$
$$P(Z = 1) = P_B - P_A = 6/25,$$
$$P(Z = 2) = 1 - P_B = 4/25.$$

De plus,

$$T = X_1 + W_A + W_B + X_2,$$

avec

$$W_A \mid Z = 0 \sim \text{Exp}(\lambda_2),$$
$$W_A \mid Z \in \{1,\ 2\} = 0,$$
$$W_B \mid Z = 0 \sim \text{Exp}(\lambda_2),$$
$$W_B \mid Z \in \{1,\ 2\} = 0,$$
$$X_1 \mid Z = 0 \sim \text{Exp}(\lambda_1 + \lambda_2),$$
$$X_1 \mid Z = 1 \sim \text{Exp}(\lambda_1 + \lambda_2) + \text{Exp}(\lambda_1 + \lambda_2),$$
$$X_1 \mid Z = 2 \sim \text{Exp}(\lambda_1 + \lambda_2) + \text{Exp}(\lambda_1 + \lambda_2) + \text{Exp}(\lambda_1)$$

en appliquant à répétition le résultat de l'exercice 3.4. Ainsi, en conditionnant sur $Z$, on a

$$\begin{aligned} E(T) &= E(T \mid Z = 0) \cdot P(Z = 0) + E(T \mid Z = 1) \cdot P(Z = 1) + E(T \mid Z = 2) \cdot P(Z = 2) \\ &= E(T \mid Z = 0) \cdot P_A + E(T \mid Z = 1) \cdot (P_B - P_A) + E(T \mid Z = 2) \cdot (1 - P_B). \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned} E(T \mid Z = 0) &= E(X_1 + W_A + W_B + X_2 \mid Z = 0) \\ &= E(X_1 \mid Z = 0) + E(W_A \mid Z = 0) + E(W_B \mid Z = 0) + E(X_2 \mid Z = 0) \\ &= \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2} + \frac{1}{\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_2} \\ &= \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2} + \frac{3}{\lambda_2} \\ &= \frac{1}{1/2 + 1/3} + \frac{3}{1/3} \\ &= \frac{51}{5} = 10{,}2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(T \mid Z = 1) &= E(X_1 + W_A + W_B + X_2 \mid Z = 1) \\ &= E(X_1 \mid Z = 1) + E(W_A \mid Z = 1) + E(W_B \mid Z = 1) + E(X_2 \mid Z = 1) \\ &= \frac{2}{\lambda_1 + \lambda_2} + 0 + \frac{1}{\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_2} \\ &= \frac{2}{\lambda_1 + \lambda_2} + \frac{2}{\lambda_2} \\ &= \frac{2}{1/2 + 1/3} + \frac{2}{1/3} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{42}{5} = 8{,}4, \\
E(T \mid Z=2) &= E(X_1 + W_A + W_B + X_2 \mid Z=2) \\
&= E(X_1 \mid Z=2) + E(W_A \mid Z=2) + E(W_B \mid Z=2) + E(X_2 \mid Z=2) \\
&= \left(\frac{2}{\lambda_1+\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_1}\right) + 0 + 0 + \frac{1}{\lambda_2} \\
&= \frac{2}{\lambda_1+\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} \\
&= \frac{2}{1/2+1/3} + \frac{1}{1/2} + \frac{1}{1/3} \\
&= \frac{37}{5} = 7{,}4.
\end{aligned}
$$

Par conséquent,

$$
\begin{aligned}
E(T) &= E(T \mid Z=0) \cdot P_A + E(T \mid Z=1) \cdot (P_B - P_A) + E(T \mid Z=2) \cdot (1 - P_B) \\
&= \frac{51}{5} \cdot \frac{3}{5} + \frac{42}{5} \cdot \left(\frac{21}{25} - \frac{3}{5}\right) + \frac{37}{5} \cdot \left(1 - \frac{21}{25}\right) \\
&= \frac{233}{25} = 9{,}32.
\end{aligned}
$$

**Question 4** (4 + 4 + 4 + 6 + 6 + 4 = 28 points)

Les appels téléphoniques à un centre d'aide arrivent selon un processus de Poisson $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$, où $N_t$ représente le nombre d'appels reçus au temps $t$. Le centre d'aide reçoit en moyenne λ appels par heure. Un appel est jugé « urgent » avec une probabilité $p$ et « non urgent » avec une probabilité $1\ - p$.

**a)** Quelle est la probabilité que le centre d'aide reçoive exactement 4 appels entre 12h et 12h45 ?

Directement,

$$\begin{aligned} P\left(N_{12,75} - N_{12} = 4\right) &= P(\text{Poisson}(0{,}75\lambda) = 4) \\ &= \frac{e^{-0{,}75\lambda}\cdot(0{,}75\lambda)^4}{4!}. \end{aligned}$$

**b)** Quelle est la probabilité que dans la prochaine heure, le centre d'aide reçoive à la fois au moins 1 appel urgent et au moins 2 appels non urgents ?

Soit $N1_t$ le nombre d'appels jugées « urgent » au temps $t$ et soit $N2_t$ le nombre d'appels jugées « non urgent » au temps $t$. Ainsi, $\{N1_t\}_{t\in\mathbb{R}_+} \sim PP(\lambda p)$ et $\{N2_t\}_{t\in\mathbb{R}_+} \sim PP\big(\lambda(1-p)\big)$ et ces processus sont indépendants. Ainsi,

$$P(N1_1 \geq 1) = 1 - P(N1_1 = 0) = 1 - e^{-\lambda p}$$

et

$$P(N2_1 \geq 2) = 1 - P(N2_1 \leq 1) = 1 - \left(e^{-\lambda(1-p)} + e^{-\lambda(1-p)}\big(\lambda(1-p)\big)\right),$$

d'où

$$\begin{aligned} P(N1_1 \geq 1, N2_1 \geq 1) &= P(N1_1 \geq 1)\cdot P(N2_1 \geq 2) \\ &= \left(1 - e^{-\lambda p}\right)\cdot\left(1 - \left(e^{-\lambda(1-p)} + e^{-\lambda(1-p)}\big(\lambda(1-p)\big)\right)\right). \end{aligned}$$

**c)** Supposons que le 10e appel s'est réalisé au temps $t = 2$. Quelle est l'espérance du temps de réalisation du 20e appel ?

Soit $T_i$ le temps entre les appels $i-1$ et $i$. On sait que $T_i \sim \text{Exp}(\lambda)$. Le temps de réalisation du 20e appel est

$$2 + \sum_{i=11}^{20} T_i.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} E\left(2 + \sum_{i=11}^{20} T_i\right) &= 2 + \sum_{i=11}^{20} E(T_i) \\ &= 2 + \frac{10}{\lambda} \end{aligned}$$

**d)** Pour $n > k$, où $n, k \in \mathbb{N}$, calculer $P(N_2 = n \mid N_1 = k)$.

Directement,

$$\begin{aligned}
P(N_2 = n \mid N_1 = k) &= \frac{P(N_2 = n, N_1 = k)}{P(N_1 = k)} \\
&= \frac{P(N_2 - N_1 = n - k, N_1 = k)}{P(N_1 = k)} \\
&= \frac{P(N_2 - N_1 = n - k) \cdot P(N_1 = k)}{P(N_1 = k)} \\
&= P(N_2 - N_1 = n - k) \\
&= \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^{n-k}}{(n-k)!}.
\end{aligned}$$

**e)** Pour $n > k$, où $n, k \in \mathbb{N}$, calculer $P(N_1 = k \mid N_2 = n)$.

Directement,

$$\begin{aligned}
P(N_1 = k \mid N_2 = n) &= \frac{P(N_1 = k, N_2 = n)}{P(N_2 = n)} \\
&= \frac{P(N_2 = n \mid N_1 = k) \cdot P(N_1 = k)}{P(N_2 = n)} \\
&= \frac{\frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^{n-k}}{(n-k)!} \cdot \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^{k}}{k!}}{\frac{e^{-2\lambda} \cdot (2\lambda)^n}{n!}} \\
&= \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \\
&= \binom{n}{k} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n.
\end{aligned}$$

**f)** En posant $\lambda = 6, p = 0{,}2, n = 8, k = 3$, effectuer les calculs des sous-questions a) à e).

a) $\dfrac{e^{-0{,}75\lambda} \cdot (0{,}75\lambda)^4}{4!} = \dfrac{e^{-4{,}5} \cdot (4{,}5)^4}{4!} \approx 0{,}1898.$

b) $(1 - e^{-\lambda p}) \cdot \left(1 - \left(e^{-\lambda(1-p)} + e^{-\lambda(1-p)}(\lambda(1-p))\right)\right) = (1 - e^{-1{,}2}) \cdot \left(1 - \left(e^{-4{,}8} + 4{,}8e^{-4{,}8}\right)\right)$
$\approx 0{,}6655$

c) $2 + \dfrac{10}{\lambda} = 2 + \dfrac{10}{6} \approx 3{,}6667$

d) $\dfrac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^{n-k}}{(n-k)!} = \dfrac{e^{-6} \cdot 6^{8-3}}{(8-3)!} \approx 0{,}1606$

e) $\binom{n}{k} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n = \binom{8}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^8 \approx 0{,}2188$

**Question 5** (8 + 6 = 14 points)

Les équipes 1 et 2 jouent une partie. Les équipes marquent des points selon des processus de Poisson indépendants avec des taux respectifs $\lambda_1 = 3$ et $\lambda_2 = 4$ (temps en minutes).

Soit $N1_t$ et $N2_t$ le nombre de points marqués par les équipes 1 et 2 respectivement sur l'intervalle $[0, t]$. Selon l'énoncé,

$$\{N1_t\}_{t\in\mathbb{R}_+} \sim \text{PP}(\lambda_1 = 3) \quad \text{et} \quad \{N2_t\}_{t\in\mathbb{R}_+} \sim \text{PP}(\lambda_2 = 4).$$

Si $T1_i$ et $T2_i$ représentent le temps entre les points $i-1$ et $i$ des équipes 1 et 2 respectivement, alors

$$T1_i \sim \text{Exp}(\lambda_1 = 3) \quad \text{et} \quad T2_i \sim \text{Exp}(\lambda_2 = 4).$$

**a)** La partie se termine lorsqu'une des équipes a marqué 8 points. Calculer la probabilité que l'équipe 1 remporte la partie.

**Solution 1** La probabilité que l'équipe 1 marque le prochain point est

$$\begin{aligned} p &= P\big(\text{Exp}(\lambda_1 = 3) < \text{Exp}(\lambda_2 = 4)\big) \\ &= \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \\ &= \frac{3}{7} \approx 0{,}4286. \end{aligned}$$

L'équipe 1 va l'emporter si elle marque 8 des premiers 15 points. Soit $X$ le nombre de points marqués par l'équipe 1 sur les 15 premiers points. Alors

$$X \sim \text{Bin}(15, 3/7).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} P(X \geq 8) &= \sum_{x=8}^{15} P(X = x) \\ &= \sum_{x=8}^{15} \binom{15}{x} \cdot \left(\frac{3}{7}\right)^x \cdot \left(\frac{4}{7}\right)^{15-x} \approx 0{,}2859. \end{aligned}$$

**Solution 2**

Soit $S1 = \sum_{i=1}^{8} T1_i \sim \Gamma(8,3)$ et $S2 = \sum_{i=1}^{8} T2_i \sim \Gamma(8,4)$. On cherche $P(S1 < S2)$. Par conditionnement sur $S_2$ on obtient

$$\begin{aligned} P(S1 < S2) &= \int_0^\infty P(S1 < S2 \mid S2 = t) \cdot f_{S2}(t)\, dt \\ &= \int_0^\infty P(S1 < t) \cdot f_{S2}(t) dt \\ &= \int_0^\infty F_{S1}(t) \cdot f_{S2}(t) dt \\ &\approx 0{,}2859. \end{aligned}$$

**b)** La partie se termine lorsqu'une des équipes a marqué 8 points de plus que l'autre. Calculer la probabilité que l'équipe 1 remporte la partie.

La probabilité que l'équipe 1 marque le prochain point est

$$p = \frac{3}{7} \approx 0{,}4444.$$

On peut modéliser la situation comme un problème de ruine d'un joueur (voir exemple 2.49), où $N = 16$, $i = 8$ et $p = 3/7$. Ainsi, la probabilité que l'équipe 1 l'emporte est

$$\begin{aligned} p_{10} &= \frac{1 - (4/3)^8}{1 - (4/3)^{16}} \\ &\approx 0{,}0910. \end{aligned}$$

**Question 6** (12 points)

Considérer un grand récipient avec un trou au fond, d'où l'eau s'écoule à un débit constant de 1 litre par minute. Supposons qu'à l'instant $t = 0$, le conteneur est vide. À chaque évènement d'un processus de Poisson de taux 1, exactement 1 litre d'eau est versé dans le récipient. Supposons que le déversement est instantané, autrement dit qu'il ne faut pas de temps pour verser le litre d'eau. Calculer la quantité d'eau espérée dans le récipient au temps $t = 1$. *Indice : conditionner sur le nombre d'évènements au temps 1.*

Soit

— $N_t$ le nombre d'évènements (de versement d'eau) jusqu'au temps $t$,
— $X$ la quantité d'eau dans le récipient au temps $t = 1$,
— $T_1$ le temps du premier évènement.

Selon l'énoncé, $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+} \sim \mathrm{PP}(1)$, ce qui implique que $N_1 \sim \mathrm{Poisson}(1)$.

On va calculer $E(X)$ en conditionnant sur $N_1$. On remarque que

$$(X \mid N_1 = k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k = 0, \\ k - 1 + (T_1 \mid N_1 = k) & \text{si } k \in \mathbb{N}_+. \end{cases}$$

Par ailleurs, la distribution de $T_1 \mid N_1 = k$, où $k \in \mathbb{N}_+$, est la même que celle du minimum de $k$ variables aléatoires indépendantes de loi $\mathrm{Unif}(0,1)$ (selon la remarque précédent la proposition 3.16). Ainsi,

$$E(T_1 \mid N_1 = k) = \frac{1}{k+1}.$$

**Variation**

La fonction de survie de $T_1 \mid N_1 = k$ évaluée en $s \in [0,1]$ est

$$\begin{aligned} S_{T_1 \mid N_1 = k}(s) &= P(T_1 > s \mid N_1 = k) \\ &= \frac{P(T_1 > s,\ N_1 = k)}{P(N_1 = k)} \\ &= \frac{P(N_s = 0,\ N_1 - N_s = k)}{P(N_1 = k)} \\ &= \frac{P(N_s = 0) \cdot P(N_1 - N_s = k)}{P(N_1 = k)} \\ &= \frac{e^{-s} \cdot \dfrac{(1-s)^k \cdot e^{-(1-s)}}{k!}}{\dfrac{e^{-1}}{k!}} \\ &= (1-s)^k. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} E(T_1 \mid N_1 = k) &= \int_0^1 (1-s)^k \, ds \\ &= \frac{1}{k+1}. \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}
E(X) &= E\big(E(X \mid N_1)\big) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} E(X \mid N_1 = k) \cdot P(N_1 = k) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \big(k - 1 + E(T_1 \mid N_1 = k)\big) \cdot P(N_1 = k) \\
&= \left(\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot P(N_1 = k)\right) - \left(\sum_{k=1}^{\infty} P(N_1 = k)\right) + \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+1} \cdot \frac{e^{-1}}{k!}\right) \\
&= E(N_1) - \big(1 - P(N_1 = 0)\big) + e^{-1} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!} \\
&= 1 - (1 - e^{-1}) + e^{-1} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!} \\
&= e^{-1} + e^{-1} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!} \\
&= e^{-1} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \\
&= e^{-1}(e-1) = \frac{e-1}{e} = 1 - \frac{1}{e} \approx 0{,}6321.
\end{aligned}$$