

Warm-up

Soit (X, Y) un couple de variables de loi gaussienne centrée de matrice de covariance

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix},$$

où $\rho \in (0, 1)$. Écrire un échantillonneur de Gibbs permettant de simuler approximativement la loi de (X, Y) .

Échantillonneur pour un mélange gaussien

Soit $K \geq 2$ et $n \geq 1$. Notons \mathbf{S}_K le K -simplexe i.e. l'ensemble des K -uplets de réels positifs de somme égale à 1. On considère le modèle suivant.

- Le vecteur $p = (p_1, \dots, p_K) \in \mathbf{S}_K$ suit une loi de densité proportionnelle à $p \mapsto \prod_{k=1}^K p_k^{\gamma_k - 1}$ où pour tout $1 \leq k \leq K$, $\gamma_k > 0$. Il s'agit d'une loi de Dirichlet permettant d'obtenir des échantillons sur \mathbf{S}_K .
- Le vecteur $s^2 = (s_1^2, \dots, s_K^2)$ contient des variables mutuellement indépendantes, et telles que pour tout $1 \leq k \leq K$, s_k^2 a une loi inverse-gamma de paramètres, $\lambda_k/2$ et $\beta_k/2$, i.e. de densité proportionnelle à $u \mapsto u^{-\lambda_k/2 - 1} \exp(-\beta_k/(2u))$ sur \mathbb{R}_+^* .
- Conditionnellement à (p, s^2) , le vecteur $m = (m_1, \dots, m_K)$ est constitué de variables indépendantes et pour tout $1 \leq k \leq K$, la loi conditionnelle de m_k est gaussienne de moyenne α_k et de variance s_k^2/λ_k .
- Conditionnellement à $\theta = (p, m, s^2)$, les $(Z_i, X_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont indépendantes et telles que :
 - pour tout $1 \leq k \leq K$, $Z_i \in \{1, \dots, K\}$ et $Z_i = k$ avec probabilité p_k ;
 - conditionnellement à (θ, Z_i) , $X_i \sim \mathcal{N}(m_{Z_i}, s_{Z_i}^2)$.

La densité jointe de toutes les variables peut alors s'écrire :

$$\pi : (\theta, x, z) \mapsto \pi(p) \left\{ \prod_{k=1}^K \pi(s_k^2) \pi(m_k | s_k^2) \right\} \left\{ \prod_{i=1}^n \pi(z_i | \theta) \pi(x_i | z_i, \theta) \right\},$$

où $\pi(w_1 | w_2)$ est une notation générique pour la densité de la loi conditionnelle de la variable W_1 sachant W_2 .

1. Montrer que la loi a posteriori de θ s'écrit :

$$\pi(\theta | x) \propto \pi(\theta) \prod_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^K p_k \varphi_{m_k, s_k^2}(x_i) \right),$$

où φ_{m_k, s_k^2} est la densité gaussienne de moyenne m_k et de variance s_k^2 .

2. Écrire la densité de la loi conditionnelle de Z sachant (X, θ) .
3. Écrire la densité de la loi conditionnelle de θ sachant (Z, X) .
4. Écrire le pseudo-code de l'échantillonneur de Gibbs.