Bayesian Learning for Partially-Observed Dynamical Systems

Randal DOUC and Sylvain Le Corff

Tutorial 3 : Markov chain Monte Carlo.

randal.douc@telecom-sudparis.eu sylvain.le_corff@telecom-sudparis.eu

CHAPITRE 3 : MARKOV CHAIN MONTE CARLO

EXERCICE 1 LOIS INVARIANTES ÉTRANGÈRES- Soient π et π' deux probabilités sur $(\mathsf{X}, \mathcal{B}(\mathsf{X}))$.

1. Montrer qu'il existe deux fonctions f, g mesurables et μ une mesure positive telle que $\pi = f\mu$ et $\pi' = g\mu$.
2. En déduire l'existence de deux mesures $(\pi-\pi')^+$ et $(\pi-\pi')^-$ satisfaisant $\pi-\pi' = (\pi-\pi')^+ - (\pi-\pi')^-$ et telles qu'il existe $B \in \mathcal{B}(\mathsf{X})$ tels que
$$(\pi-\pi')^+(B) = (\pi-\pi')^-(B^c) = 0.$$
Cette dernière propriété caractérise deux mesures *étrangères*.
3. Soit P un noyau de Markov sur $(\mathsf{X}, \mathcal{B}(\mathsf{X}))$. On suppose que $\pi P = \pi$ et $\pi' P = \pi'$ avec $\pi \neq \pi'$. En déduire l'existence de deux probabilités étrangères invariantes pour P.
4. Soit $A \in \mathcal{B}(\mathsf{X})$ tel que $\pi(A) = 1$. Montrer qu'il existe $B \subset A$ tel que $P(x, B) = 1$ pour tout $x \in B$ (i.e. B est absorbant).

EXERCICE 2 Let P be a Markov kernel with an invariant distribution π. Pour tout f, g de $\mathrm{L}_2(\pi)$, on note
$$\langle f; g\rangle = \int \pi(\mathrm{d}x) f(x) g(x)$$
De plus, on notera $\mathrm{L}_2^0(\pi) = \{f \in \mathrm{L}_2(\pi)\,:\,\pi(f) = 0\}$.

1. Montrer que pour tout f de $\mathrm{L}_2(\pi)$, $Pf \in \mathrm{L}_2(\pi)$. Montrer que
$$\|P\| = \left(\sup_{f \in \mathrm{L}_2(\pi)} \frac{\langle Pf; Pf\rangle}{\langle f; f\rangle}\right)^{1/2} \leq 1$$
2. Montrer que P est π-réversible ssi pour tout f, g de $\mathrm{L}_2(\pi)$, on a
$$\langle Pf; g\rangle = \langle f; Pg\rangle$$
3. Soit P un noyau de Markov, π-réversible. On suppose que pour un certain $f \in \mathrm{L}_2^0(\pi)$,
$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle f; P^k f\rangle| < \infty \tag{1}$$
On pose pour tout $\lambda \in]0, 1]$, $v_\lambda(f, P) = \pi(f^2) + 2\sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k \langle f; P^k f\rangle$. Montrer alors que
$$\lim_{\lambda \uparrow 1} v_\lambda(f, P) = v_1(f, P)$$

4. Soient P, Q deux noyaux de Markov, π-réversibles, vérifiant (1) pour une certaine fonction $f^\star \in \mathrm{L}_2^0(\pi)$. On suppose que pour tout $g \in \mathrm{L}_2^0(\pi)$,

$$\langle g; Pg \rangle \leq \langle g; Qg \rangle \tag{2}$$

Montrer que pour tout $\lambda \in [0,1]$, $v_\lambda(f^\star, P) \leq v_\lambda(f^\star, Q)$ (on pourra poser $\varphi(\alpha) = v_\lambda(f^\star, (1-\alpha)P + \alpha Q)$ et montrer que $\varphi'(\alpha) \geq 0$).

5. En déduire que si $(X_k)_{k\geq 0}$ (resp. $(Y_k)_{k\geq 0}$) est une chaîne de Markov de noyau P (resp. Q) démarrant sous la loi stationnaire $X_0 \sim \pi$ (resp. $Y_0 \sim \pi$), alors

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{Var}_\pi \left(\frac{\sum_{k=0}^{n-1} f^\star(X_k)}{\sqrt{n}} \right) \leq \lim_{n\to\infty} \mathrm{Var}_\pi \left(\frac{\sum_{k=0}^{n-1} f^\star(Y_k)}{\sqrt{n}} \right)$$

6. Nous allons enfin donner une condition suffisante pour que (2) soit satisfaite. Soient P, Q deux noyaux de Markov, π-réversibles telles que pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathsf{X})$,

$$Q(x, A \setminus \{x\}) \leq P(x, A \setminus \{x\})$$

Montrer alors (2).

EXERCICE 3 Soient P, Q deux noyaux de transition sur $(\mathsf{X}, \mathcal{B}(\mathsf{X}))$ tels que

$$P(x, \mathrm{d}y) = Q(x, \mathrm{d}y)\alpha(x,y) + (1 - \int Q(x, \mathrm{d}z)\alpha(x,z))\delta_x(\mathrm{d}z)$$

ou α est une fonction mesurable $\alpha : \mathsf{X}^2 \to [0,1]$. Soit π une probabilité sur $(\mathsf{X}, \mathcal{B}(\mathsf{X}))$. On supposera pour simplifier que $Q(x, \cdot)$ et $\pi(\cdot)$ sont dominées par une même mesure de domination μ pour tout $x \in \mathsf{X}$, et par abus de notation, on notera $y \mapsto q(x,y)$ et $y \to \pi(y)$, les densités associées.

1. Etablir une condition liant $\alpha(x,y)$ et $\alpha(y,x)$ pour que P soit π-réversible.
2. Donner plusieurs expressions de $\alpha(x,y)$ telles que P est π-réversible.
3. Montrer que

$$\alpha(x,y) \leq \frac{\pi(y)q(y,x)}{\pi(x)q(x,y)} \wedge 1$$

4. Conclure.