TD1 : Simulations et méthodes de Monte Carlo

Exercice 1

Soient f et g deux fonctions positives définies sur $\mathbb{R}$ et telles qu'il existe $M > 0$ satisfaisant, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \leqslant Mg(x)$. On simule alors $(U_i)_{i\geqslant 1}$ i.i.d. uniformes sur $(0,1)$ indépendamment de $(Y_i)_{i\geqslant 1}$ i.i.d. de loi de densité $\bar{g} : x \mapsto g(x)/\int g(u)\mathrm{d}u$ par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que la loi de Y_T a pour densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ la fonction $\bar{f} : x \mapsto f(x)/\int f(u)\mathrm{d}u$ où
$$T = \inf\left\{k \geqslant 1\,;\, U_k \leqslant \frac{f(Y_k)}{Mg(Y_k)}\right\}\,.$$

Solution.

Notons $I(f) = \int f(u)\mathrm{d}u$ et $I(g) = \int g(u)\mathrm{d}u$. Pour toute fonction h mesurable bornée,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[h(Y_T)] = \sum_{k\geqslant 1}\mathbb{E}[h(Y_T)\mathbb{1}_{T=k}] &= \sum_{k\geqslant 1}\mathbb{E}[h(Y_k)\mathbb{1}_{T=k}]\,,\\ &= \sum_{k\geqslant 1}\mathbb{E}\left[h(Y_k)\mathbb{1}_{U_k\leqslant\frac{f(Y_k)}{Mg(Y_k}}\prod_{i=1}^{k-1}\mathbb{1}_{U_i>\frac{f(Y_i)}{Mg(Y_i)}}\right]\,,\\ &= \sum_{k\geqslant 1}\mathbb{E}\left[h(Y_k)\mathbb{1}_{U_k\leqslant\frac{f(Y_k)}{Mg(Y_k}}\right]\prod_{i=1}^{k-1}\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{U_i>\frac{f(Y_i)}{Mg(Y_i)}}\right]\,,\\ &= \sum_{k\geqslant 1}\mathbb{E}\left[h(Y_k)\mathbb{1}_{U_k\leqslant\frac{f(Y_k)}{Mg(Y_k}}\right]\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{U_1>\frac{f(Y_1)}{Mg(Y_1)}}\right]^{k-1}\,.\end{aligned}$$

En écrivant
$$\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{U_1>\frac{f(Y_1)}{Mg(Y_1)}}\right] = \int_{\mathbb{R}}\int_{\frac{f(y)}{Mg(y)}}^{1}\mathrm{d}u\bar{g}(y)\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}}\left(1-\frac{f(y)}{Mg(y)}\right)\bar{g}(y)\mathrm{d}y = 1-\frac{I(f)}{MI(g)}$$
et
$$\mathbb{E}\left[h(Y_1)\mathbb{1}_{U_1\leqslant\frac{f(Y_1)}{Mg(Y_1)}}\right] = \int_{\mathbb{R}}\int_{0}^{\frac{f(y)}{Mg(y)}}\mathrm{d}u\bar{g}(y)h(y)\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}}\frac{f(y)}{Mg(y)}\bar{g}(y)h(y)\mathrm{d}y = \frac{\int_{\mathbb{R}}h(y)f(y)\mathrm{d}y}{MI(g)}\,.$$
Finalement,
$$\mathbb{E}[h(Y_T)] = \int_{\mathbb{R}}h(y)\bar{f}(y)\mathrm{d}y\,.$$

□

2. Quelle est la loi de T ?
Solution.

En procédant comme dans la question précédente, pour tout $k \geqslant 1$,
$$\mathbb{P}(T=k) = \mathbb{E}[\mathbb{1}_{T=k}] = \left(1-\frac{I(f)}{MI(g)}\right)^{k-1}\frac{I(f)}{MI(g)}\,.$$
La variable al'eatoire T suit donc une loi géométrique de paramètre $I(f)(MI(g))^{-1}$. □

3. Rappelons que la loi de Cauchy $C(0,\sigma^2)$ de paramétre $\sigma > 0$ a pour densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ la fonction $x \mapsto \sigma/(\pi(x^2+\sigma^2))$. On suppose dans cette question que f est la densité de la loi normale centrée réduite et que g est la densité de la loi de Cauchy $C(0,1)$. Montrer que l'on peut choisir $M = \sqrt{2\pi/\mathrm{e}}$.
Solution.

Dans ce cas, pour tout x réel,

$$\frac{f(x)}{g(x)} = (2\pi)^{-1/2}\pi(1+x^2)\mathrm{e}^{-x^2/2}$$

et

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}(2x - x(1+x^2))\mathrm{e}^{-x^2/2} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}x(1-x^2)\mathrm{e}^{-x^2/2}\,.$$

La fonction f/g est donc maximale en 1 et -1 et son maximum est $M = \sqrt{2\pi/\mathrm{e}}$. □

4. Si g est maintenant la densité d'une loi de Cauchy $C(0,\sigma^2)$, montrer que l'on peut choisir $M = \sqrt{2\pi}(\mathrm{e}\sigma)^{-1}\mathrm{e}^{\sigma^2/2}$ si $\sigma < \sqrt{2}$ et $M = \sigma\sqrt{\pi/2}$ dans le cas contraire.
Solution.

Dans ce cas, pour tout x réel,

$$\frac{f(x)}{g(x)} = (2\pi)^{-1/2}\sigma^{-1}\pi(\sigma^2+x^2)\mathrm{e}^{-x^2/2}$$

et

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\sigma^{-1}(2x - x(\sigma^2+x^2))\mathrm{e}^{-x^2/2} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\sigma^{-1}x((2-\sigma^2)-x^2)\mathrm{e}^{-x^2/2}\,.$$

(a) Si $\sigma \in (0,\sigma^2]$, la fonction f/g est maximale en $\sqrt{2-\sigma^2}$ et $-\sqrt{2-\sigma^2}$ et son maximum est $M = \sqrt{2\pi}(\mathrm{e}\sigma)^{-1}\mathrm{e}^{\sigma^2/2}$.
(b) Si $\sigma > \sqrt{2}$, la fonction f/g est maximale en 0 et son maximum est $M = \sigma\sqrt{\pi/2}$.

□

Exercice 2

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle de paramétre 1.

1. Montrer que la loi de X sachant $\{2Y > (1-X)^2\}$ a pour densité sur $\mathbb{R}$:

$$x \mapsto \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-x^2/2}\mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)\,.$$

Solution.

Pour toute fonction h mesurable bornée,

$$\mathbb{E}[h(X)|2Y > (1-X)^2] = \frac{\mathbb{E}[h(X)\mathbb{1}_{2Y>(1-X)^2}]}{\mathbb{P}(2Y > (1-X)^2)}\,,$$

avec

$$\mathbb{E}[h(X)\mathbb{1}_{2Y>(1-X)^2}] = \int_{\mathbb{R}_+^*} h(x)\mathrm{e}^{-x}\int_{\frac{(1-x)^2}{2}}^{\infty}\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}_+^*} h(x)\mathrm{e}^{-x^2/2-1/2}\mathrm{d}x$$

et

$$\mathbb{P}(2Y > (1-X)^2) = \int_{\mathbb{R}_+^*}\mathrm{e}^{-x}\int_{\frac{(1-x)^2}{2}}^{\infty}\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}_+^*}\mathrm{e}^{-x^2/2-1/2}\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^{-1/2}\,.$$

On en déduit que

$$\mathbb{E}[h(X)|2Y > (1-X)^2] = \int_{\mathbb{R}} h(x)\sqrt{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^{-x^2/2}\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(x)\mathrm{d}x\,.$$

□

2. Proposer alors un algorithme pour simuler une loi normale centrée réduite.
Solution.

D'après la question précédente, il est possible de procéder par acceptation-rejet. Il suffit de simuler des couples indépendants $\{(X_i,Y_i)\}_{i\geqslant 1}$ de loi $\mathcal{E}(1)\otimes\mathcal{E}(1)$ et de poser

$$T = \inf\left\{i \geqslant 1\,;\, 2Y_i > (1-X_i)^2\right\}\,.$$

On pose ensuite

$$Z = (2\varepsilon - 1)X_T\,,$$

où ε est indépendante des $\{(X_i,Y_i)\}_{i\geqslant 1}$ et de loi de Bernoulli de paramètre 1/2. □

Exercice 3

Soit X une variable aléatoire réelle de densité g par rapport à la mesure de Lebesgue. Notons κ_X sa fonction génératrice des cumulants:

$$\kappa_X : t \mapsto \log\left(\mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{tX}\right]\right) .$$

Cet exercice propose d'estimer la quantité $\mathbb{P}(X \geqslant x)$, pour $x \in \mathbb{R}$, en utilisant l'échantillonnage d'importance avec la densité instrumentale $h_t : x \mapsto \mathrm{e}^{xt-\kappa_X(t)} g(x)$ pour $t \in \mathbb{R}$.

1. Proposer un estimateur Monte Carlo basé sur des échantillons i.i.d. de loi de densité h_t par rapport à la mesure de Lebesgue.
Solution.

Soient $(Y_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ des variables i.i.d. de loi de loi de densité h_t par rapport à la mesure de Lebesgue. On propose l'estimateur Monte Carlo suivant :

$$I_n(t,x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{h_t(Y_i)}{g(Y_i)} \mathbb{1}_{Y_i \geqslant x} .$$

□

2. Montrer que

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{Y\geqslant x\}} \mathrm{e}^{-2Yt+2\kappa_X(t)}\right] \leqslant \mathrm{e}^{-xt+\kappa_X(t)} ,$$

où Y a pour densité h_t par rapport à la mesure de Lebesgue avec $t \geqslant 0$.
Solution.

Par définition,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{Y\geqslant x\}} \mathrm{e}^{-2Yt+2\kappa_X(t)}\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{X\geqslant x\}} \mathrm{e}^{-2Xt+2\kappa_X(t)} \frac{h_t(X)}{g(X)}\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{X\geqslant x\}} \mathrm{e}^{-Xt+\kappa_X(t)}\right] &\leqslant \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{X\geqslant x\}} \mathrm{e}^{-xt+\kappa_X(t)}\right] ,\\ &\leqslant \mathrm{e}^{-xt+\kappa_X(t)} .\end{aligned}$$

□

3. Proposer un choix de t_x de tel sorte que h_{t_x} minimise la borne supérieure du moment d'ordre 2 précédent.
Solution.

Il suffit de choisir t_x tel que $\kappa'_X(t_x) = x$. □

4. Supposons que g soit la densité gaussienne de moyenne μ et de variance σ^2.
Montrer que $\kappa_X : t \mapsto \mu t + \sigma^2 t^2/2$ et déterminer t_x pour tout $x \geqslant \mu$.
Solution.

Dans ce cas, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\kappa_X(t) = \mu t + \sigma^2 t^2/2$ car

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\mathrm{e}^{tX}] &= (2\pi\sigma^2)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{tx-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)} \mathrm{d}x ,\\ &= (2\pi\sigma^2)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{(x-(t\sigma^2+\mu))^2}{2\sigma^2} - \frac{\mu^2}{2\sigma^2} + \frac{(t\sigma^2+\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \mathrm{d}x ,\\ &= \exp\left(-\frac{\mu^2}{2\sigma^2} + \frac{(t\sigma^2+\mu)^2}{2\sigma^2}\right) ,\\ &= \exp\left(\mu t + \sigma^2 t^2/2\right) .\end{aligned}$$

On choisit alors $t_x = (x-\mu)/\sigma^2$. □

5. Faites de méme pour une loi de Poisson.
Solution.

Si X suit une loi de Poisson de paramèter $\lambda > 0$, pour tout réel t,

$$\mathbb{E}[\mathrm{e}^{tX}] = \mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{k\geqslant 0} \frac{\lambda^k}{k!} \mathrm{e}^{tk} = \exp\left(-\lambda + \lambda \mathrm{e}^t\right) .$$

On choisit alors $t_x = \log(x/\lambda)$. □

Exercice 4

Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On souhaite estimer $\mathbb{E}[h(X)]$ où X a pour densité f_X par rapport à la mesure de Lebesgue. On considère une densité instrumentale g telle que g est non nulle sur $\{x\,;\, h(x)f_X(x) \neq 0\}$ et on considère l'estimateur

$$\widehat{I}_N(h) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\omega_i}{\sum_{\ell=1}^{N} \omega_\ell} h(Y_i)\,,$$

où les $(Y_i)_{i \geqslant 1}$ sont i.i.d. de loi de densité g et pour tout $i \geqslant 1$,

$$\omega_i = \frac{f_X(Y_i)}{g(Y_i)}\,.$$

1. Montrer que si $\mathbb{E}[|h(X)|] < \infty$, $\widehat{I}_N(h)$ est un estimateur fortement consistant de $\mathbb{E}[h(X)]$.
   Solution.

> On peut écrire
>
> $$\widehat{I}_N(h) = \left(\frac{1}{N}\sum_{\ell=1}^{N}\omega_\ell\right)^{-1} \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\omega_i h(Y_i)\,.$$
>
> Si $\mathbb{E}[|\omega_1 h(Y_1)|] = \mathbb{E}[|h(X)|] < \infty$, par la loi forte des grands nombres, le terme de droite converge presque sûrement vers $\mathbb{E}[h(X)]$. Par la loi forte des grands nombres, le terme de gauche converge presque sûrement vers 1. Ainsi, $\widehat{I}_N(h)$ converge presque sûrement vers $\mathbb{E}[h(X)]$. □

2. Montrer, sous une hypothése supplémentaire à préciser, que $\widehat{I}_N(h)$ est asymptotiquement gaussien et donner la variance asymptotique.
   Solution.

> On peut écrire
>
> $$\sqrt{N}\left(\widehat{I}_N(h) - \mathbb{E}[h(X)]\right) = \left(\frac{1}{N}\sum_{\ell=1}^{N}\omega_\ell\right)^{-1} \sqrt{N}\left\{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\omega_i\left(h(Y_i) - \mathbb{E}[h(X)]\right)\right\}.$$
>
> Comme dans la question précédente, le terme de gauche converge presque sûrement vers 1. Les variables aléatoires intervenant dans la somme du terme de droite étant centrées, si $\mathbb{E}[\omega_1^2\left(h(Y_1) - \mathbb{E}[h(X)]\right)^2] < \infty$, le théorème central limite assure que
>
> $$\sqrt{N}\left\{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\omega_i\left(h(Y_i) - \mathbb{E}[h(X)]\right)\right\} \xrightarrow[N\to\infty]{\mathcal{D}} \mathcal{N}\left(0, \mathbb{E}[\omega_1^2\left(h(Y_1) - \mathbb{E}[h(X)]\right)^2]\right).$$
>
> On peut ensuite conclure en appliquant le lemme de Slutsky. On remarque ensuite que
>
> $$\mathbb{E}[\omega_1^2\left(h(Y_1) - \mathbb{E}[h(X)]\right)^2] = \mathbb{E}\left[\frac{f_X(X)}{g(X)}\left(h(X) - \mathbb{E}[h(X)]\right)^2\right].$$
>
> □

Exercice 5 : Inégalité de Hoeffding

Soient $(X_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ n variables aléatoires indépendantes telles que pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, $\mathbb{P}(a_i \leqslant X_i \leqslant b_i) = 1$ où a_i, b_i sont des réels vérifiant $a_i < b_i$. L'objectif de l'exercice est de prouver l'inégalité suivante : pour tout $t > 0$,

$$\mathbb{P}\left(\left|\sum_{i=1}^{n} X_i - \sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}[X_i]\right| > t\right) \leqslant 2\exp\left(\frac{-2t^2}{\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i)^2}\right).$$

1. Supposons que $\mathbb{E}[X_i] = 0$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$. Prouver qu'il est suffisant d'avoir, pour tout $t > 0$,

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i > t\right) \leqslant \exp\left(\frac{-2t^2}{\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i)^2}\right).$$

   Solution.

Supposons l'inégalité donnée vraie. Alors, enremplaçant X_i par $-X_i \in [-b_i, -a_i]$, on obtient la même borne pour $\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^n X_i > t\right)$ et $\mathbb{P}\left(-\sum_{i=1}^n X_i > t\right)$. On écrit ensuite

$$\mathbb{P}\left(\left|\sum_{i=1}^n X_i\right| > t\right) \leqslant \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^n X_i > t\right) + \mathbb{P}\left(-\sum_{i=1}^n X_i > t\right).$$

□

2. Prouver que pour tout $s, t > 0$,

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^n X_i > t\right) \leqslant \mathrm{e}^{-st} \prod_{i=1}^n \mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{sX_i}\right].$$

Solution.

Pour tout $s > 0$,

$$\mathbb{1}_{\{\sum_{i=1}^n X_i > t\}} = \mathbb{1}_{\{\mathrm{e}^{-st}\mathrm{e}^{\sum_{i=1}^n sX_i} > 1\}} \leq \mathrm{e}^{-st}\mathrm{e}^{\sum_{i=1}^n sX_i}$$

La preuve se termine en utilisant l'indépendance des variables $(X_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$. □

3. Définissons pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, $\phi_i : s \mapsto \log\left(\mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{sX_i}\right]\right)$. Prouver que pour tout $s > 0$,

$$\phi_i''(s) \leqslant \left(\frac{b_i - a_i}{2}\right)^2.$$

Solution.

Définissons $\psi_i(s) = \mathbb{E}[\mathrm{e}^{sX_i}]$. Puisque $X_i \in [a_i, b_i]$, ψ_i est deux fois dérivable et $\psi_i^{(j)}(s) = \mathbb{E}[X_i^j \mathrm{e}^{sX_i}]$ pour $j \in \{1, 2\}$. ϕ_i est donc deux fois dérivable et $\phi_i'' = \frac{\psi_i''}{\psi_i} - \left(\frac{\psi_i'}{\psi_i}\right)^2$. Ainsi,

$$\phi_i''(s) = \frac{\mathbb{E}[X_i^2 \mathrm{e}^{sX_i}]}{\mathbb{E}[\mathrm{e}^{sX_i}]} - \left(\frac{\mathbb{E}[X_i \mathrm{e}^{sX_i}]}{\mathbb{E}[\mathrm{e}^{sX_i}]}\right)^2 = \tilde{\mathbb{V}}(X_i) \quad \text{où } \tilde{\mathbb{V}}(Z) = \tilde{\mathbb{E}}[Z^2] - \tilde{\mathbb{E}}^2[Z] \text{ et } \tilde{\mathbb{E}}[Z] = \frac{\mathbb{E}[Z\mathrm{e}^{sX_i}]}{\mathbb{E}[\mathrm{e}^{sX_i}]}.$$

En choisissant U_i tel que $X_i = (b_i - a_i)U_i + a_i$, $U_i \in [0, 1]$, et:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbb{V}}(X_i) &= (b_i - a_i)^2 \tilde{\mathbb{V}}(U_i) = (b_i - a_i)^2 (\tilde{\mathbb{E}}[U_i^2] - \tilde{\mathbb{E}}^2[U_i]) \\ &\leqslant (b_i - a_i)^2 (\tilde{\mathbb{E}}[U_i] - \tilde{\mathbb{E}}^2[U_i]) = (b_i - a_i)^2 \tilde{\mathbb{E}}[U_i](1 - \tilde{\mathbb{E}}[U_i]) \leq (b_i - a_i)^2/4.\end{aligned}$$

□

4. En déduire que pour tout $s, t > 0$,

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^n X_i > t\right) \leqslant \mathrm{e}^{-st}\mathrm{e}^{s^2 \sum_{i=1}^n \frac{(b_i - a_i)^2}{8}}$$

et conclure.

Solution.

Puisque $\phi_i(0) = \phi_i'(0) = 0$, par la question précédente $s > 0$, $\phi_i(s) \leqslant \mathrm{e}^{-s^2(b_i - a_i)^2/8}$. Le résultat s'obtient alors en choisissant :

$$s = \frac{t}{\sum_{i=1}^n (b_i - a_i)^2/4}.$$

□