Ejercicio 1. $(G, *)$ semigrupo abeliano con elemento neutro cuya tabla está dada parcialmente dada por

$*$	s	u	t	r	v	x	y	z
s	s	s	s	s	s	s	s	s
u	s	u	t	r	v	x	y	z
t	s	t	v	y	s	t	v	y
r	s	r	y	u	v	z	t	x
v	s	v	s	v	s	v	s	v
x	s	x	t	z	v	u	y	r
y	s	y	v	t	s	y	v	t
z	s	z	y	x	v	r	t	u

a) Completar la tabla de $*$ y hallar elementos absorbentes, el elemento neutro y los elementos inversibles (con simétrico).

a) Elemento neutro: u

Elemento absorbente: s

$u' = u$ $v' = \nexists$ Elementos inversibles: u, r, x, z

$s' = \nexists$ $x' = x$

$t' = \nexists$ $y' = \nexists$

$r' = r$ $z' = z$

b) Armar la tabla de $(INV(G), *)$ y hallar todos los subgrupos.

c) Grafique la red de subgrupos.

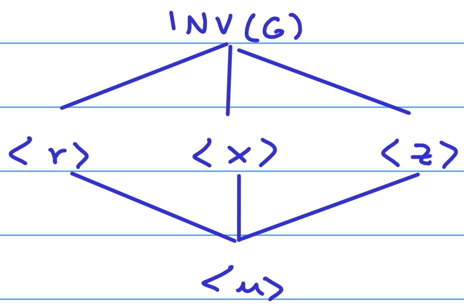
$*$	u	r	x	z
u	u	r	x	z
r	r	u	z	x
x	x	z	u	r
z	z	x	r	u

$\langle u \rangle = \{u\}$

$\langle r \rangle = \{r, u\}$

$\langle x \rangle = \{x, u\}$

$\langle z \rangle = \{z, u\}$



EJERCICIO 2. Dada la relación de orden definida en $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$: $(a, b)R(c, d) \iff a \mid c \wedge b \leq d$

a) Realice el diagrama de Hasse para $B = \{(1,2), (2,1), (1,3), (2,3), (2,2), (4,3)\}$ y determine si es un orden total o parcial.

Cotas superiores de $(1,2)$: $(1,2)$, $(1,3)$, $(2,3)$, $(2,2)$, $(4,3)$

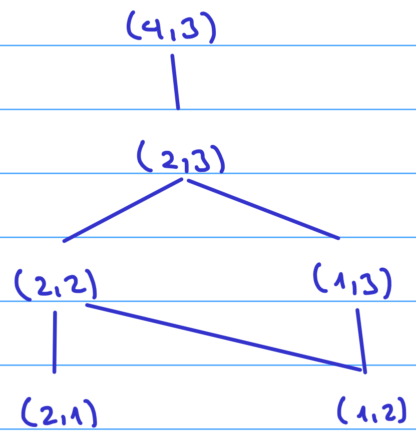
Cotas superiores de $(2,1)$: $(2,1)$, $(2,3)$, $(2,2)$, $(4,3)$

Cotas superiores de $(1,3)$: $(1,3)$, $(2,3)$, $(4,3)$

Cotas superiores de $(2,3)$: $(2,3)$, $(4,3)$

Cotas superiores de $(2,2)$: $(2,2)$, $(2,3)$, $(4,3)$

Cotas superiores de $(4,3)$: $(4,3)$



b) Halle maximales, minimales, máximo, mínimo, cotas superiores e inferiores y supremo e ínfimo de B en $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Elementos maximales $(4,3)$

Elementos minimales $(2,1)$, $(1,2)$

Máximo $(4,3)$

Mínimo $\nexists$

Cotas superiores de B: $\{(k,n) \mid 4 \mid k \wedge 3 \leq n\}$

Cotas inferiores de B: $\{(1,1)\}$

Supremo: $(4,3)$ Ínfimo: $(1,1)$

EJERCICIO 3.

a) Resolver la ecuación de congruencia $9x + 1 \equiv 7_{(39)}$

$9x + 1 \equiv 7_{(39)}$

$9x \equiv 6_{(39)}$ $\quad mcd(9,39)=3$

$9 = 3.3 \quad 39 = 3.13$

$\frac{9}{3}x \equiv \frac{6}{3}\left(\frac{39}{3}\right)$

$3x \equiv 2_{(13)}$

Una forma: $3x \equiv 2+13 = 15_{(13)}$

$\cancel{3}x \equiv \cancel{3}.5_{(13)}$

$x \equiv 5_{(13)}$

Otra forma: $3x \equiv 2_{(13)}$

$x = 3^{\varphi(13)-1}2 = 3^{12-1}2 \equiv 177147.2 \equiv 9.2 = 18 \equiv 5_{(13)}$

Otra forma: $k_1.13 + k_2.3 = 1 \quad k_1 = 1 \quad k_2 = -4$

$x = k_2 b = -4.2 = -8 \equiv 5$

$x \equiv 5_{(13)} \iff \begin{cases} x \equiv 5_{(39)} \\ x \equiv 18_{(39)} \\ x \equiv 31_{(39)} \end{cases}$

b) Calcular el resto de dividir 2^{3457} por 15.

$$2^{\varphi(15)} = 2^{8} \equiv 1 \ (15) \longleftarrow \text{Euler}$$

$$\varphi(15) = \varphi(3)\varphi(5) = 2.4 = 8 \qquad (3 \text{ y } 5 \text{ son coprimos})$$

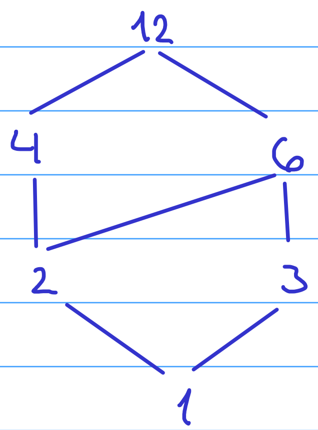
$$3457 = 8.432 + 1$$

$$2^{3457} = 2^{8.432+1} = (2^{8})^{432}\, 2^{1} \equiv 1.2 = 2$$

EJERCICIO 4.

a) Probar que $(D_{12},|)$ es una red pero no un álgebra de Boole.

$D_{12} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$



Todo par de elementos tiene supremo e ínfimo. Luego es red.

No es álgebra de Boole porque tiene 6 elementos y $6 \neq 2^n \ \forall n \in \mathbb{N}$.

b) Dada la relación de recurrencia $a_n = 8a_{n-1} - 12a_{n-2}$, hallar la solución general y la solución particular que verifica $a_0 = -1$, $a_1 = 2$.

$a_n - 8a_{n-1} + 12a_{n-2} = 0$

$x^2 - 8x + 12 = 0$

$x = 2 \qquad x = 6$

$a_n = k_1 2^n + k_2 6^n$

$a_0 = k_1 2^0 + k_2 6^0 = k_1 + k_2 = -1 \qquad k_1 = -k_2 - 1$

$a_1 = k_1 . 2 + k_2 6 = 2k_1 + 6k_2 = 2 \qquad 2(-k_2 - 1) + 6k_2 = 2$

$\begin{cases} k_1 = -k_2 - 1 \\ -2k_2 - 2 + 6k_2 = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} k_1 = -k_2 - 1 \\ 4k_2 = 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} k_1 = -2 \\ k_2 = 1 \end{cases}$

$a_n = -2 . 2^n + 6^n$

EJERCICIO 5.

a) Un árbol tiene en total 21 vértices: 11 hojas, k vértices de grado 2, m vértices de grado 3 y 4 vértices de grado 4 . Hallar los valores de k y de m.

Por ser árbol $|A| = |V| - 1 = 20$

$$\sum_{v \in V} gr(v) = 2|A| = 2.20 = 40$$

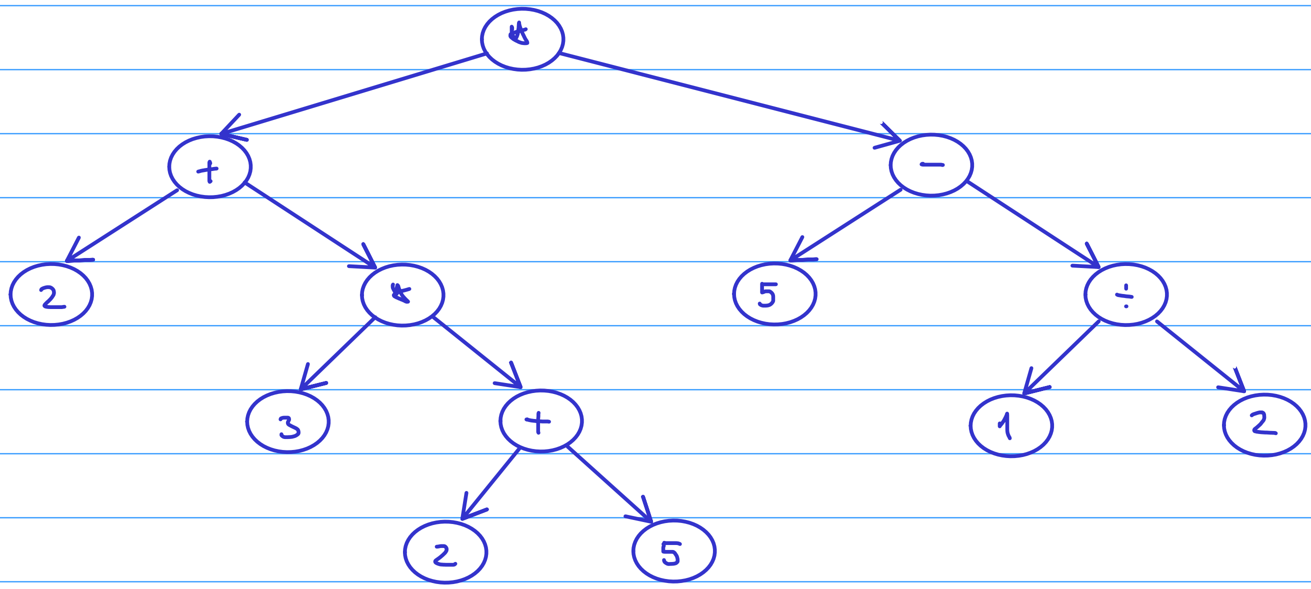
$$\begin{cases} 11 + k + m + 4 = 21 \\ 11.1 + 2k + 3m + 4.4 = 40 \end{cases} \qquad \begin{cases} 15 + k + m = 21 \\ 11 + 2k + 3m + 16 = 40 \end{cases}$$

$$\begin{cases} k + m = 6 \\ 2k + 3m = 13 \end{cases} \qquad \begin{cases} k = 6 - m \\ 2(6-m) + 3m = 13 \end{cases} \qquad \begin{cases} k = 6 - m \\ 12 - 2m + 3m = 13 \end{cases}$$

$$\begin{cases} k = 5 \\ m = 1 \end{cases}$$

Respuesta 5 vértices de grado 2
1 vértice de grado 3

b) La expresión $* + 2 * 3 + 2\ 5 - 5 \div 1\ 2$ está dada en notación polaca. Recuperar el árbol, dar la expresión en notación polaca inversa y escribir la expresión algebraica



Notación Polaca Inversa: 2 3 2 5 + * + 5 1 2 ÷ − *

Expresión $(2 + 3(2+5))(5 - \frac{1}{2})$