Ejercicio nº 1

Para el siguiente razonamiento:

"No hay comida en la heladera. Si voy al super, compro carne o verduras. Si compro verduras entonces ya hay comida en la heladera. Por lo tanto si voy al super, compro carne."

a) Escribe simbólicamente y analiza la validez del razonamiento

b) En caso de ser válido, demuestra usando reglas de inferencia

H: "Hay comida en la heladera"

S: "Voy al super"

C: "Compro carne"

V: "Compro verduras"

$$\begin{array}{l} \sim H \\ S \Rightarrow C \vee V \\ V \Rightarrow H \\ \hline S \Rightarrow C \end{array}$$

1)	$\sim H$	Premisa
2)	$S \Rightarrow C \vee V$	Premisa
3)	$V \Rightarrow H$	Premisa
4)	$\sim V$	MT (1,3)
5)	$\sim S \vee C \vee V$	Eq. Condicional
6)	$\sim S \vee C$	SD (4,5)
7)	$S \Rightarrow C$	Eq condicional

Ejercicio nº 2

a) Demostrar en conjuntos: $A \cup (\bar{A} \cap B) = A \cap B \Rightarrow A = B$

Hipótesis $A \cup (\bar{A} \cap B) = A \cap B$

$(A \cup \bar{A}) \cap (A \cup B) = A \cap B$

$\mathcal{U} \cap A \cup B = A \cap B$

$A \cup B = A \cap B$

Tesis $A = B$

Demostración

$A \subseteq B$

$x \in A \Rightarrow x \in A \vee x \in B \Rightarrow x \in A \cup B \Rightarrow x \in A \cap B$

$\Rightarrow x \in A \wedge x \in B \Rightarrow x \in B$

$B \subseteq A$

$x \in B \Rightarrow x \in B \vee x \in A \Rightarrow x \in A \cup B \Rightarrow x \in A \cap B$

$\Rightarrow x \in A \wedge x \in B \Rightarrow x \in A$

b) En el conjunto A= {2, 4, 6, 8}, considerar p(x; y) :[(x < y) ⇒ x | y]. Se pide dar el valor de verdad de ∀x ∃y: p(x; y). Justificar adecuadamente.

Es Verdadero.

Demostración : $x \in A$. Tomo $y = 2$. Luego $v(x<2) = F$

Luego $v(x<2 \Rightarrow x|2) = V$

Ejercicio nº 3: Determinar el valor de verdad y justificar:

a) La relación R definida en N / x R y ⇔ x2 – y2 = 3k , k ∈ Z es transitiva.

Verdadero.

Demostración

$$x R y \wedge y R z \Rightarrow 2x - 2y = 3k \,,\, k \in \mathbb{Z} \wedge 2y - 2z = 3k' \,,\, k' \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow 2x - 2y + 2y - 2z = 2x - 2z = 3k + 3k' = 3(k+k') = 3k''$$

con $k' = k + k' \in \mathbb{Z}$

b) El máximo común divisor entre 720 y 216 es 16.

Falso

$$(720, 216) = (216, 72) = (72, 0) = 72$$

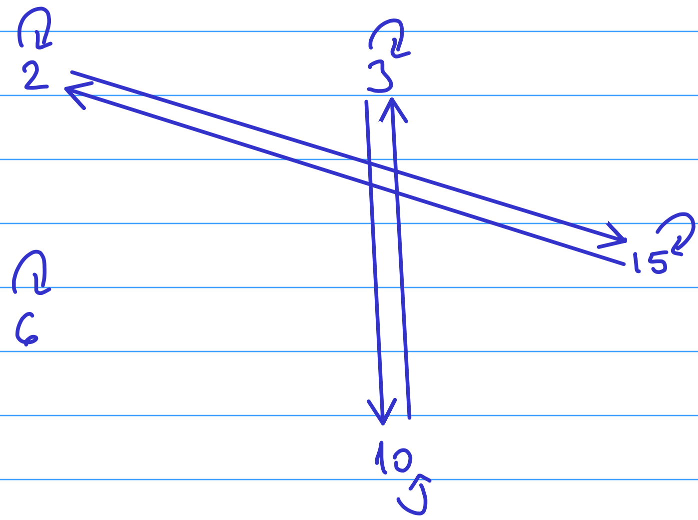
$$\begin{array}{r|l} 720 & 216 \\ \hline 72 & 3 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 216 & 72 \\ \hline 0 & 3 \end{array}$$

Ejercicio nº 4:

En el conjunto A, incluido en los divisores de 30 con A={2,3,6,10,15} se define la relación

$S \subseteq A \times A \ / \ a\, S\, b \Leftrightarrow (a=b \ \text{ o } \ a.b = 30)$

a) Prueba matricialmente que es una relación de equivalencia.



$$M(R) = \begin{array}{c|ccccc} & 2 & 3 & 6 & 10 & 15 \\ \hline 2 & & & & & \\ 3 & & & & & \\ 6 & & & & & \\ 10 & & & & & \\ 15 & & & & & \end{array} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Halla las clases de equivalencia y el conjunto cociente.

$\bar{2} = \{2, 15\}$

$\bar{3} = \{3, 10\}$

$\bar{6} = \{6\}$

$A/S = \{\bar{2}, \bar{3}, \bar{6}\}$

Reflexividad

$$\mathbf{I \leq M(R)}$$

$$I \leq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Simetría

$$\mathbf{M(R) = M(R)^t}$$

$$M(R)^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = M(R)$$

$$\mathbf{M(R) \bullet M(R) \leq M(R)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio nº 5:

Demostrar usando el principio de inducción completa que $\forall n \varepsilon$ N: $3 \mid 2^{2n+1} + 1$

Paso Base $n = 1$

$2^{2.1+1} + 1 = 2^3 + 1 = 9 \qquad 3 \mid 9$ ✓

Paso Inductivo

HI $\quad h = h \qquad 3 \mid (2^{2h+1} + 1)$

$2^{2h+1} + 1 = 3k \qquad k \in \mathbb{Z}$

$2^{2h+1} = 3k - 1$

TI $\quad n = h+1 \qquad 3 \mid (2^{2(h+1)+1} + 1)$

$2^{2h+3} + 1 = 3k' \qquad k' \in \mathbb{Z}$

$2^{2h+3} + 1 = 2^{2h+1+2} + 1 = 2^{2h+1} 2^2 + 1 = 4.2^{2h+1} + 1 = 4(3k-1) + 1$

$= 12k - 4 + 1 = 12k - 3 = 3(4k-1) = 3k' \qquad k' \in \mathbb{Z}$