Politechnika Wrocławska

Singular Value Decomposition

Autor
Sylwia Badur, 241226

Politechnika Wrocławska

Zawartość prezentacji:

- Czym jest SVD?
- Opis matematyczny,
- Zastosowania,
- Metody wyznaczania SVD,
- Wybrane środowisko programistyczne i narzędzia,
- Realizacja projektu - stan.

SVD - Singular Value Decomposition

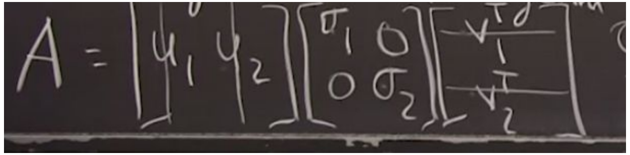
- Rozkład według wartości osobliwych (szczególnych),
- Tzw. faktoryzacja,
- Korzystamy z tego, że macierze można rozłożyć na komponenty rotujące i rozciągające, https://www.youtube.com/watch?v=EokL7E6o1AE - odnośnik
- Rozkład macierzy A wymiaru m x n na iloczyn trzech specyficznych macierzy jest **unikalny**,
- Stosowany do redukcji wymiaru macierzy.

Politechnika Wrocławska

Opis matematyczny

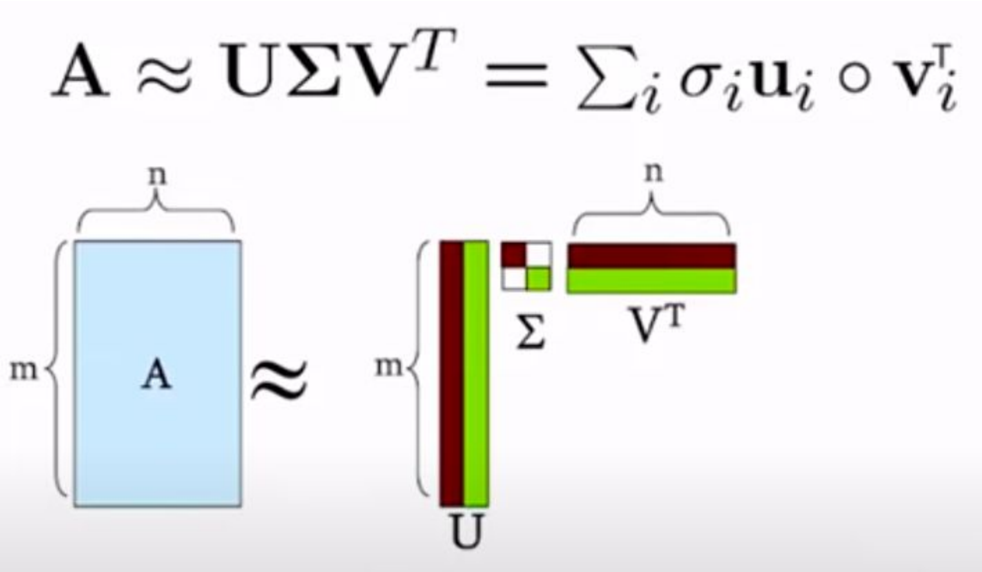
Możemy przedstawić **każdą** macierz A (m x n) w postaci rozkładu
$U\Sigma V^T$
, gdzie:
U (m x m) i V^T (n x n) są macierzami ortogonalnymi - kolumny są zestawami ortonormalnymi $U^{-1} = U^T, V^{-1} = V^T$
Σ (m x n) to macierz diagonalna z nieujemnymi wartościami osobliwymi (non-negative entries on diagonal) uporządkowanymi w porządku malejącym,

Korzysta się w tym celu z dwóch równań, które należy rozwiązać:
$A^TA=V\Sigma^T\Sigma V^T$
$AV=U\Sigma$



Macierze mają rzeczywiste wartości

Opis matematyczny



Rys. 1: Wizualnie przedstawiony koncept techniki SVD

Źródło: https://www.youtube.com/watch?v=P5mlg91as1c

Wartości osobliwe macierzy

Pierwiastki kwadratowe wartości własnych macierzy A^TA, gdzie macierz A^T jest sprzężona do A.

Wartościami osobliwymi nazywa się wartości położone na przekątnej macierzy Σ $\sigma_i = \Sigma_{ii}$.

Liczba niezerowych wartości osobliwych jest równa rzędowi macierzy A.

Natomiast kolumny U i V są nazywane osobliwymi wektorami lewo- oraz prawostronnymi.

Własności

Jeżeli macierz A jest macierzą nieosobliwą, to można tak dobrać macierze U oraz V, by jej wszystkie wartości osobliwe były dodatnie. Jeżeli którakolwiek wartość osobliwa macierzy jest równa zero, to macierz ta jest macierzą osobliwą.

Wartość bezwzględna wyznacznika macierzy kwadratowej A jest iloczynem wszystkich wartości osobliwych tej macierzy.

$$|det(A)| = \sigma_1\sigma_2\sigma_3...\sigma_n$$

Politechnika Wrocławska

Zastosowania SVD

- Techniki z obszaru Machine Learning,
- Redukcja danych do specyficznego problemu,
- Baza dla PCA (principle component analysis),
- Systemy rekomendacyjne - Amazon, Netflix,
- Rozpoznawanie twarzy - Facebook,
- Algorytmy rankingowania stron internetowych - Google,
- Przetwarzanie obrazów,
- Sterowanie procesami.

Algorytm SVD - klasyczna metoda z użyciem eigenvalues i eigenvectors

1. Wyznaczenie macierzy A^T
2. Obliczenie macierzy A^TA oraz AA^T
3. Obliczenie rzędu dla dwóch macierzy. Przyjęcie właściwej macierzy o niższym rzędzie.
4. Obliczenie wartości własnych macierzy - pierwiastki wartości własnych.
5. Określić liczbę niezerowych wartości własnych - r.
6. Znaleźć ortonormalne wartości własne macierzy.
7. Stworzenie macierzy ortogonalnej V.
8. Stworzenie macierzy Σ z pierwiastków kwadratowych wartości własnych.
9. Znalezienie pierwszych r wektorów kolumnowych U.
10. Uzupełnienie U wykorzystując ortogonalizację Grama-Schmidta.

Block SVD power method

1. Tworzymy macierz A^TA lub AA^T w zależności od wymiaru A.
2. Losowo generujemy macierz Q.
3. Dokonujemy jej dekompozycji na QR (ortogonalna i trójkątna górna).
4. Iteracyjnie dokonujemy operacji mnożenia macierzy A, Q oraz dekompozycji na Q i R, tak by błąd między kolejnymi iteracjami (błąd średniokwadratowy) malał i osiągnął wartość poniżej pewnego progu.
5. Algorytm zbiega tak, by macierz Q stanowiła eigenvectors a R eigenvalues.
6. Wyznaczamy wartości osobliwe jako pierwiastki z diagonali macierzy R.
7. W zależności od wymiarów macierzy A wyznaczamy U oraz V na różne sposoby.
8. Jest to metoda iteracyjna, siłowa.

Wybrane technologie i środowisko programistyczne

NumPy

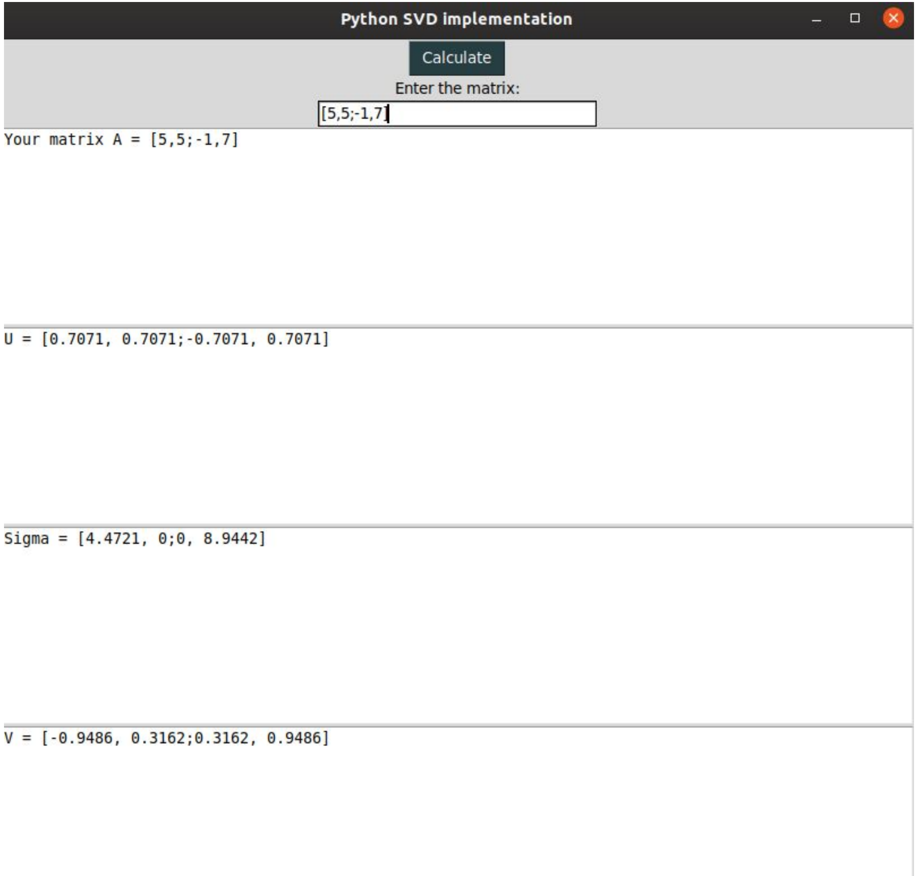
SciPy

ubuntu

TKinter

Co do tej pory zrealizowano?

- Podstawy implementacji algorytmu na znanym przykładzie (znane A),
- Prosty interfejs graficzny - przycisk, pola tekstowe, wykonanie funkcji, wyświetlenie wyniku obliczeń



Politechnika Wrocławska

Singular Value Decomposition

Autor
Sylwia Badur, 241226