Olimpiada Matematyczna
Próbny II etap

28 stycznia 2022

Autor zestawu: Jacek Dymel

Czas pracy: 300 minut

1. Wyznaczyć wszystkie niestałe, unormowane wielomiany $P(x)$ i $Q(x)$ spełniające warunek $P\left(Q^2(x)\right) = P(x) \cdot Q^2(x)$.
   Wyjaśnienie: wielomian unormowany przy najwyższej potędze x ma współczynnik równy 1.

2. Niech P będzie punktem przecięcia przekątnych AC i BD trapezu równoramiennego $ABCD$ o następujących własnościach: $AB \parallel CD$, $BC = AD$, $45^\circ < \measuredangle DCB < 90^\circ$. Prosta BC przecina okrąg opisany na trójkącie ABP w punkcie $X \neq B$. Punkt Y leży na prostej AX i spełnia warunek $DY \parallel BC$. Udowodnić, że $\measuredangle YDA = 2\measuredangle YCA$.

3. W układzie współrzędnych zaznaczono punkty: $(1,1), (2,3), (4,5), (999,111)$. Jeśli zaznaczony jest punkt (a,b), to można zaznaczyć punkty (b,a) i $(a-b, a+b)$. Jeśli zaznaczony jest punkt (a,b) i (c,d), to można zaznaczyć punkt $(ad+bc, 4ac-4bd)$. Wykazać, że wykonując opisane operacje z użyciem podanych punktów nie można zaznaczyć punktu leżącego na prostej $y = 2x$.

Powodzenia!