

Zadanie: ZBU

Zbuduj graf



Warsztaty ILO, grupa olimpijska, dzień 14. Dostępna pamięć: 128 MB.

Rozwiązanie wzorcowe $O(n)$

Powiedzmy, że n wierzchołków ustawiamy w rzędzie i od końca łączymy kolejne sąsiednie wierzchołki skierowaną krawędzią o wadze równej kolejnej potęgze dwójki oraz krawędzią o wadze 0. Zauważmy, że wówczas możemy otrzymać ścieżkę od pierwszego wierzchołka do ostatniego o dowolnej wadze pomiędzy 0 a $2^n - 1$, ponieważ w każdym przejściu decydujemy, czy chcemy dodać daną potęgę dwójki, czy nie. Możemy zatem otrzymać każdy zapis binarny o długości $n - 1$.

Zatem dla $n = 20$ moglibyśmy otrzymać każdą liczbę aż do 1048575. Niestety, może się okazać, że wartość L z zadania jest nieco mniejsza niż ta wartość.

W związku z tym weźmy tyle wierzchołków, żeby największa możliwa wartość była mniejsza niż L . Przykładowo, dla $L = 10^6$, weźmiemy 19 wierzchołków i maksymalna do otrzymania wartość ścieżki będzie równa 524287. Zauważmy, że każda z tych liczb ma najistotniejszy bit zgaszony. Teraz będziemy chcieli dodać jeszcze jeden wierzchołek i tak dodać wychodzące z niego krawędzie, aby najistotniejszy bit był zapalony.

Powiedzmy, że dla uproszczenia nowy wierzchołek ma numer 0. Zauważmy, że każda liczba mniejsza od L charakteryzuje się tym, że w zapisie binarnym pewien jej początek jest taki sam, jak liczby L , następnie pewien zapalony bit liczby L zmienia się w 0, a reszta bitów jest już dowolna. Będziemy chcieli tworzyć krawędzie, które to reprezentują.

Zauważmy, że w naszym aktualnie zbudowanym grafie przejście ścieżką długości k ustala nam pewien początek długości k zapisu binarnego liczby, którą chcemy stworzyć.

Zatem wyobraźmy sobie zapis binarny liczby L i rozważmy pierwszą jedynekę, którą będziemy chcieli ustawić na 0 w zapisie binarnym tworzonej przez nas liczby (wagi ścieżki). Załóżmy, że ta jedynka jest na pozycji k -tej licząc od lewej (od najistotniejszych bitów). Dodajmy wówczas krawędź z wierzchołka 0 do wierzchołka k o wadze takiej, że pierwsze $k - 1$ są takie same jak w liczbie L , k -ty bit jest 0 (co gwarantuje wartość mniejszą niż L) a pozostałe bity 0, czyli zgodnie z powyższym opisem. Zauważmy, że dokończenie ścieżki do wierzchołka ostatniego daje nam tylko uzupełnienie pozostałych bitów, a więc ścieżka nie może już osiągnąć ani przekroczyć wartości L .

Taką krawędź tworzymy dla każdej jedynek w zapisie binarnym liczby L i otrzymujemy poprawny graf.