Zadanie: NSK
Nowe Szaty Króla

Warsztaty ILO 2017-2018, grupa olimpijska, dzień 15.

Zawuażmy, że nasze zadanie sprowadza się do znalezienia minimalnej liczby pół koniecznej do zablokowania aby na planszy istniał dokładnie jeden cykl Hamiltona.

Rozwiązanie wzorcowe $O(1)$

Zauważmy, że wynik dla $n = 1$ to -1, bo nie istnieje żaden cykl Hamilotna na takiej planszy.
Zauważmy, że wynik dla $n = 2$ to 0, bo nie trzeba blokować żadnych pól.
Reszta przypadków nie jest już taka prosta, ale nie jest też trudna:

Po pierwsze wykażmy, że:

Twierdzenie.1. *wynikiem nie może być* 1.

Dowód. Zauważmy, że każde przejście do pola obok, zmienia parzystość pola (dla pola (x, y) jest to $(x + y) \bmod 2$) na którym stoimy, z tego wynika, że żeby skończyć na tym samym polu na którym zaczniemy, cykl musi mieć parzystą długość bo te pole ma ustaloną parzystość. A z tego wynika, że liczba pól które mamy przejść na planszy musi być parzysta, a $4 \cdot n - 1$ nie jest parzyste, więc usunięcie jednego pola nie wystarczy. □

Okazuje się, że:

Twierdzenie.2. *wynikiem jest* 2

Dowód. Jeśli n jest parzyste możemy zablokować pola $(4, 1)$ oraz $(4, n)$. Jeśli zamalujemy te pola i zaczniemy rysować ścieżkę wymuszoną przez te pola, to narysujemy cały cykl i będzie on jednoznaczny.
Dla nieparzystego n można zastosować podobną technikę – zablokujmy pola $(4, 1)$ oraz $(3, n - 2)$. Rysując wymuszoną ścieżke od lewej strony planszy okaże się że dojdziemy do drugiego zablokowanego pola i reszta też będzie wymuszona. □

Fundusze Europejskie
Program Regionalny
Podlaskie
Unia Europejska
Europejski Fundusz Społeczny