Rozwiązania 2020

Dominik Bysiewicz

Zestaw próbny do Olimpiady Matematycznej

Zadanie 1
Znajdź wszystkie liczby $a \in \mathbb{N}_+$ takie, że istnieje dokładnie jedna funkcja $f : \mathbb{N}_+ \to \mathbb{N}_+$ taka, że $f(1) = a$ i zachodzi:

$$f(n) = f(f(n)) - 1 \qquad \forall\ n \in \mathbb{N}_+.$$

Rozwiązanie:
Zauważmy, że jeśli $f(1) = 1$, to równanie w zadaniu jest sprzeczne: $1 = 0$. Wynika stąd, że $f(1) > 1$. Zauważmy, że:

$$f(1) = a \implies f(a) = f(f(1)) = f(1) + 1 = a + 1 \implies f(a + 1) = a + 2 \implies \dots$$

wynika stąd z indukcji matematycznej, że $\forall n \geqslant a : f(n) = n + 1$.

Jeśli $a = 2$, to otrzymujemy jedyną możliwą funkcję $f(n) = n + 1$ (funkcja jest indukcyjnie jednoznacznie określona dla wszystkich $n \in \mathbb{N}_+$)

Jeśli $a > 2$, to mamy dwie (a nawet nieskończenie wiele) funkcje spełniające warunki zadania:

$$f_1(n > 2) = n + 1; \quad f_1(1) = a; \quad f_1(2) = a + 1$$

$$f_2(n > 2) = n + 1; \quad f_2(1) = a; \quad f_2(2) = a + 2$$

czyli otrzymujemy sprzeczność.Wynika stąd, że jedynie $a = 2$ spełnia warunki zadania.

Zadanie 2 *LIX OM*
Każdy punkt kraty całkowitej (czyli zbioru punktów o obu współrzędnych całkowitych) pomalowano na biało lub czarno. Udowodnij, że istnieje nieskończony, jednokolorowy podzbiór tej kraty posiadający środek symetrii.

Rozwiązanie:
Przypuśćmy, że teza zadania jest fałszywa. Rozpatrzmy symetrię środkową względem punktu $(0, 0)$.

Ponieważ nie istnieje nieskończony zbiór symetryczny względem tego punktu i złożony z punktów jednego koloru, więc tylko skończenie wiele punktów o obu współrzędnych całkowitych przechodzi przy tej symetrii na punkty tego samego koloru. Wobec tego istnieje taka liczba całkowita M, że dla każdego punktu o współrzędnych całkowitych (x, y), przy czym $|y| > M$, punkty $(-x, -y)$ i (x, y) mają różne kolory.

Rozważając analogicznie symetrię środkową względem punktu $(\frac{1}{2}, 0)$ widzimy, że istnieje taka liczba całkowita N, że dla każdego punktu o współrzędnych całkowitych (x, y), przy czym $|y| > N$, punkt (x, y) ma inny kolor niż jego obraz przez rozpatrywaną symetrię, czyli punkt $(-x + 1, -y)$.

Przyjmijmy $k = \max M, N + 1$ i rozpatrzmy dowolną liczbę całkowitą s. Wówczas punkt (s, k) przy symetrii względem punktu $(0, 0)$ przechodzi na punkt $(-s, -k)$, który jest przeciwnego koloru niż punkt (s, k). Ponadto punkt $(-s, -k)$ przy symetrii względem punktu $(\frac{1}{2}, 0)$ przechodzi na punkt $(s + 1, k)$, który jest przeciwnego koloru niż punkt $(-s, -k)$. Wobec tego punkty (s, k) i $(s+1, k)$ mają jednakowy kolor. Ponieważ s było dowolną liczbą całkowitą, więc wynika stąd, że wszystkie punkty o pierwszej współrzędnej całkowitej i drugiej współrzędnej równej k mają ten sam kolor. Jednakże punkty te tworzą nieskończony zbiór, którego środkiem symetrii jest punkt $(0, k)$. Otrzymana sprzeczność z założeniem nie wprost kończy rozwiązanie.

Zadanie 3 *Rabka Zdrój, 2017*
W trójkącie ostrokątnym ABC punkt O jest środkiem okręgu opisanego, zaś punkt H jest punktem przecięcia wysokości. Prosta AH przecina okrąg opisany na trójkącie ABC w punkcie K różnym od A. Proste OK i BC przecinają się w punkcie P. Punkt Q jest symetryczny do punktu P względem środka odcinka OH. Proste AQ i BC przecinają się w punkcie R. Dowieść, że $BP = CR$.

Rozwiązanie:

Zauważmy najpierw, że punkty K i H są symetryczne względem prostej BC (jest to standardowy fakt). Jednokładność o skali $-\frac{1}{2}$ i środku w punkcie S, który jest środkiem ciężkości trójkąta ABC, przekształca punkt A na środek M boku BC oraz punkt H na punkt O. Wynika stąd równość $OM = AH$, co w efekcie daje $OD = AH$.

Ponadto proste AH i OM są równoległe, więc czworokąt $AHDO$ jest równoległobokiem. Stąd wniosek, że symetria względem środka odcinka OH przeprowadza odcinek DH, zawierający punkt P, na odcinek AO.

W efekcie proste AQ i AO pokrywają się. Trójkąt POR jest równoramienny, gdyż $\sphericalangle OPR = \sphericalangle DPR = \sphericalangle BPH = \sphericalangle PRA = \sphericalangle PRO$. Zatem z prostopadłości $OM \perp BC$ otrzymujemy, że punkt M jest środkiem odcinka PR. Wynika stąd teza zadania.

Zadanie 4
Dany jest trójkąt ABC, którego boki mają długości będące kolejnymi wartościami ciągu arytmetycznego oraz zachodzi $AB \leqslant BC \leqslant AC$. Okręgi wpisany i opisany na tym trójkącie mają promienie odpowiednio r i R. Znajdź długość AH.

Rozwiązanie:
Poprowadźmy dwusieczną $\sphericalangle BAC$, która przecina BC w punkcie D i okrąg opisany w punkcie S. Niech $AB = x + y$, $BC = y + z$ i $CA = z + x$ (odcinki styczne). Z twierdzenia o dwusiecznej otrzymujemy:

$$BD = (x + y)/2 \quad \text{i} \quad DC = (z + x)/2$$

Jeśli M to środek boku BC i P to rzut I (środka okregu wpisanego) na BC, to:

$$BP = y; \quad PD = (x - y)/2; \quad DM = (z + x)/2 - (y + z)/2 = (x - y)/2 = PD$$

Widzimy, że D to środek PM, zatem z tw. Talesa otrzymujemy:

$$MS = IP = r$$

Korzystając ze znanej własności trójkata:

$$AH = 2 \cdot OM = 2(R - r)$$

Zadanie 5 *CPS, 2019*
Udowodnij, że istnieje taka liczba naturalna n, że dla dowolnej liczby całkowitej k liczba $k^2 + k + n$ nie posiada dzielnika pierwszego mniejszego od 2020.

Rozwiązanie:
Zauważmy, że jeśli $k \equiv 0 \mod p$ lub jeśli $k \equiv -1$, to $k^2 + k \equiv 0 \mod p$. Wynika stąd, że dla ustalonego $p \in \mathbb{P}$, wyrażenie $k^2 + k$ nie przyjmuje wszystkich reszt modulo p, czyli istnieje takie $r \in \{1, \ldots, p - 1\}$, że nie istnieje $k \in \mathbb{Z}$, że $p \mid k^2 + k + r$.

Rozważmy teraz zbiór $\mathbb{P}_{2020}$ liczb pierwszych mniejszych od 2020. Skoro dla każdej $p \in \mathbb{P}_{2020}$ istnieje r_p jak wyżej, to korzystając z Chińskiego Twierdzenia o Resztach:

$$\exists n \in \mathbb{N} : \ 0 < n < \prod_{p \in \mathbb{P}_{2020}} p : \ n \equiv r_p \neq 0 \mod p$$

Zatem otrzymujemy n takie, że nie ma dzielnika pierwszego mniejszego od 2020, zatem teza jest prawdziwa.

Zadanie 6 *Krynica Zdrój, 2015*
Rozważmy ciąg wielomianów $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ zdefiniowany następująco:

$$P_1(x) = x \qquad P_{n+1}(x) = P_n(x)^2 + 1 \quad \text{dla } n \geqslant 1$$

Pokazać, że wielomian $P(x)$ spełnia zależność:

$$P(x^2 + 1) = P(x)^2 + 1$$

wtedy i tylko wtedy, gdy $P \in \{P_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Rozwiązanie:
Najpierw wykażemy, że elementy ciągu $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ spełniają równanie dane w treści. Udowodnimy to przez indukcję.

Dla $n = 0$ mamy $P_0(x) = x$, który istotnie spełnia równanie. Załóżmy, że $R(x) = P_n(x)$ spełnia równanie $R(x^2+1) = (R(x))^2 + 1$, wykażemy, że $P(x) = R(x)^2 + 1 = P_{n+1}(x)$ również spełnia rozważane równanie.

Istotnie jest to prawdą, mamy bowiem

$$P(x^2+1) = R^2(x^2+1) + 1 = ((R(x))^2+1)^2 + 1 = (P(x))^2 + 1$$

Udowodnimy teraz, że jedynie wielomiany z ciągu $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ spełniają warunki zadania. Zauważmy, że

$$P^2(x) = P(x^2+1) - 1 = P((-x)^2+1) - 1 = P^2(-x)$$

stąd dla $x \in \mathbb{R}$ mamy $P(x) = P(-x)$ lub $P(x) = -P(-x)$. W tym drugim przypadku łatwo widzimy, że $P(0) = 0$ co przez łatwą indukcję implikuje, że $P(n) = n$ dla $n \in \mathbb{N}$, więc $P(x) = P_0(x)$ dla $x \in \mathbb{R}$.

Możemy więc założyć, że $P(x) = P(-x)$ dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$. Oznacza to, że wielomian P nie posiada jednomianów stopnia nieparzystego, stąd istnieje wielomian Q o współczynnikach rzeczywistych taki, że dla $x \in \mathbb{R}$ mamy równość $P(x) = Q(x^2)$. Zatem

$$Q((x^2+1)^2) = P(x^2+1) = P^2(x) + 1 = Q^2(x^2) + 1$$

stąd dla wielomianu $R(x) := Q(x-1)$ mamy równość

$$R(y^2+1) = R^2(y) + 1 \text{ dla } y \in \{x^2+1\}_{x \in \mathbb{R}}$$

więc $R(x^2+1) = R^2(x) + 1$ dla $x \in \mathbb{R}$. Ostatecznie

$$P(x) = Q(x^2) = R(x^2+1) = R^2(x) + 1$$

gdzie R spełnia warunek dany w zadaniu i ma stopień mniejszy niż P.

Udowodniliśmy nie wprost, że jeśli istnieje inny wielomian spełniający warunki zadania, to możemy "zbić" jego stopień o połowę, czyli w pewnym momencie musimy uzyskać wielomian nieparzystego stopnia, a jedyny który spełnia warunki, to wielomian $P(x) = x$, czyli wróciliśmy do naszego ciągu, zatem musieliśmy wyjść także od jego wyrazu.