Niech S będzie n-elementowym zbiorem ($n > 0$). Zbiór wszystkich podzbiorów zbioru S został podzielony na m rozłącznych części spełniających warunek: jeżeli zbiory: $A, B, A \cup B$ występują w tej samej części, to $A = B$. Wyznaczyć najmniejszą wartość, jaką przyjmuje m.

$\emptyset \subset S, \quad S \subset S$

$S = \{1, 2, \ldots, n\}$

$\emptyset, \{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}, \ldots, \{1, \ldots, n\}$ – każdy ten zbiór leży w innej części.

$\{1\} \cup \{1,2,3\} = \{1,2,3\}$

I Części jest co najmniej $n+1$.

II Konstrukcja

1° $\emptyset$

2° $\{1\}, \{2\}, \ldots, \{n\}$

3° $\{1,2\}, \ldots$ podzbiory dwuelementowe

4° -||- 3-el.

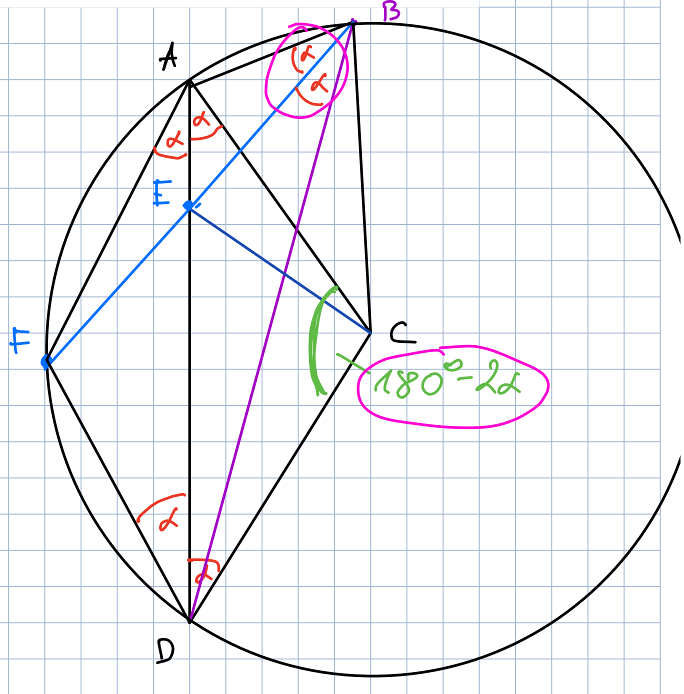
$\vdots$

$n+1^\circ$ S

$n = 2$ 4 podzb.

$\emptyset, 1, 2, 12$ $m = 3$

Na boku AD wypukłego czworokąta $ABCD$ o kącie ostrym B, wybrano taki punkt E, że $\measuredangle CAD = \measuredangle ADC = \measuredangle ABE = \measuredangle DBE$.
Wykazać, że $BE + CE < AD$.



Okrąg opisany na ΔABD.

F leży na okręgu i pw. BE $\Rightarrow$

$\overset{\frown}{AF} = \overset{\frown}{BF}$

$\measuredangle FAD = \measuredangle FBD = \alpha$

$\measuredangle ADF = \measuredangle ABF = \alpha$

$\Rightarrow \Delta AFD \equiv \Delta ACD$

Zatem F i C są symetryczne wzgl. AD.

Zatem $FE = EC$

Teza $\Leftrightarrow$ $BF < AD$

$90^\circ > \measuredangle ABD > \measuredangle BDF \Rightarrow$

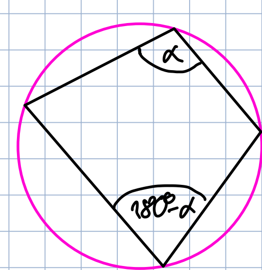
$\Rightarrow BF < AD$

■

α , $180^\circ - \alpha$

I

II



Ciąg (a_n) zadany jest w następujący sposób:
$a_1 = 1, a_2 = 2, a_{n+2} = a_n(a_{n+1} + 1)$ dla każdej dodatniej liczby naturalnej n.
Wykazać, że wyraz a_{a_n} jest podzielny przez wyraz $(a_n)^n$ dla $n \geqslant 100$.

a_n ma w rozkładzie p-pierwsza w potędze k.
Chcemy pokazać, że $(p^k)^n \mid a_{a_n}$.

Motyw: zasada maksimum.

1° $p > 2$

a_i jest najmniejszą liczbą podzielną przez p
$(i > 2)$

Rekurencja: $a_i = a_{i-2}(a_{i-1} + 1) \Rightarrow p \nmid a_{i-2}$
$p \mid a_{i-1} + 1$

Czyli $a_{i-1} \equiv -1 \pmod{p}$
$a_i \equiv 0 \pmod{p}$
$a_{i+1} = a_{i-1}(a_i + 1) \equiv -1 \pmod{p}$
$a_{i+2} \equiv 0 \pmod{p}$ itd.

2° $p = 2$ $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_{2k} \equiv 0 \pmod{2}$, $a_{2k+1} \equiv -1 \pmod{2}$

$$\left.\begin{aligned} a_{i+2} &= a_i(a_{i+1} + 1) \\ p \mid a_i &\Rightarrow p \mid (a_{i+1} + 1) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} &p^2 \mid a_{i+2} \\ &p^3 \mid a_{i+4} \\ &p^4 \mid a_{i+6} \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$p^k \mid a_n \Rightarrow p^{k+t} \mid a_{n+2t}$$

$$p^{k+\frac{a_n-n}{2}} \mid a_{a_n}$$

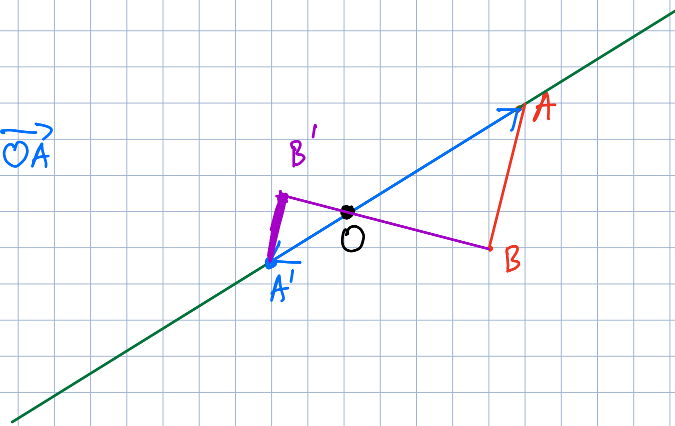
Tera:
$$(a_n)^n \mid a_{a_n} \iff (p^k)^n \mid p^{k+\frac{a_n-n}{2}} \iff$$
$$\iff kn \leq k + \frac{a_n-n}{2}$$

DOKOŃCZYĆ

Definicja

$O \in \Pi$, $k \neq 0$

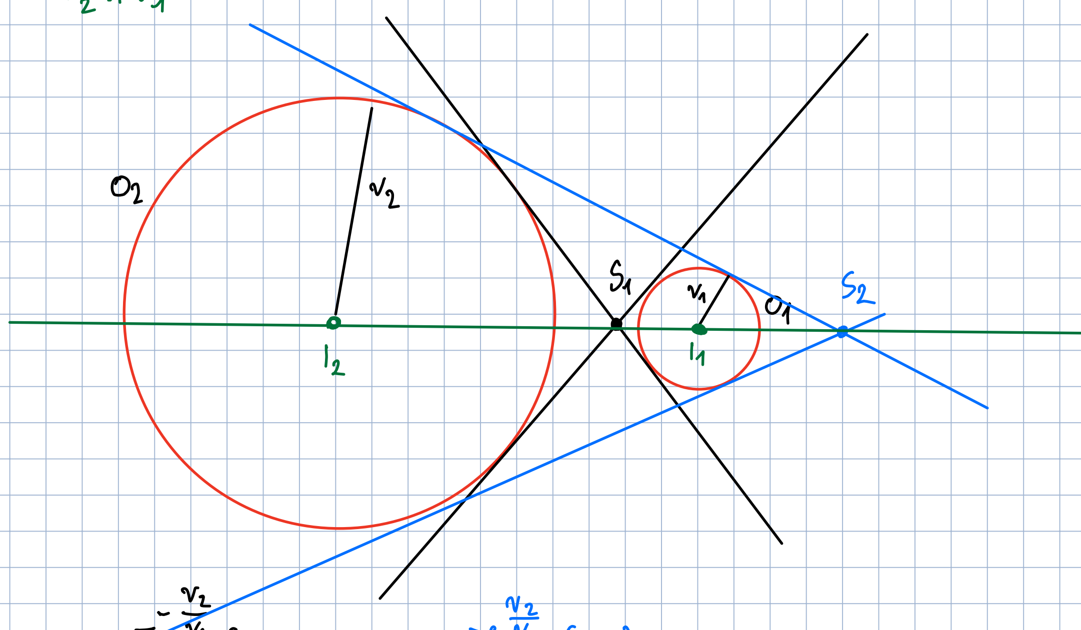
$J_O^k(A) = A' \iff \overrightarrow{OA'} = k \cdot \overrightarrow{OA}$



Własności

1) $A'B' \parallel AB$
2) $|A'B'| = |k| \cdot |AB|$
3) $J_O^k(l) = l' \Rightarrow$ prosta $l' \parallel l$
4) Obrazem okręgu $o(S, r)$ jest okrąg $o(S', r|k|)$

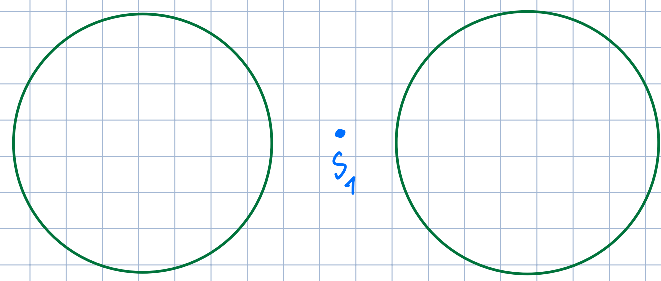
1° $r_2 \neq r_1$

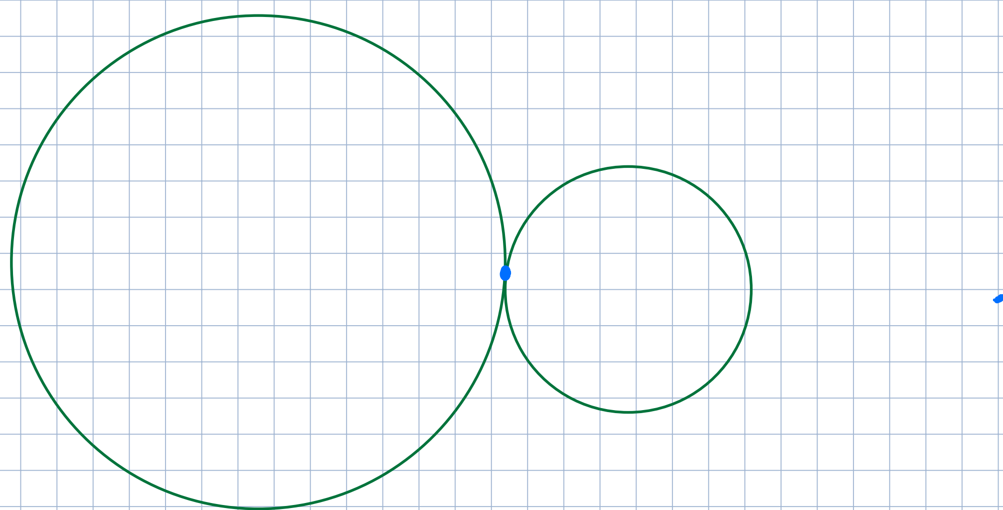


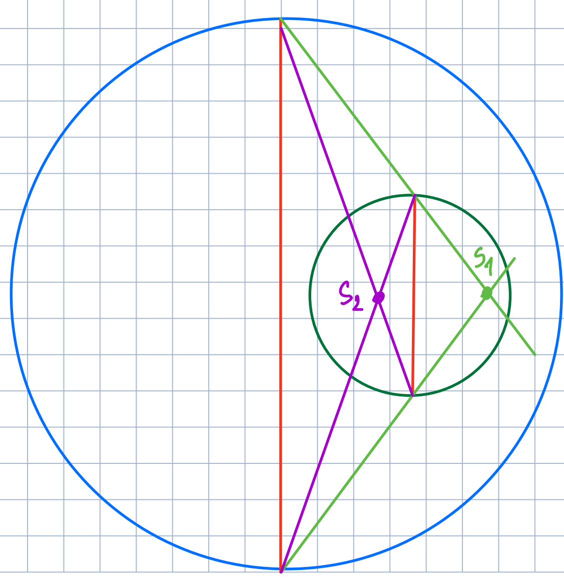
$J_{S_1}^{-\frac{r_2}{r_1}}(o_1) = o_2$ $J_{S_2}^{\frac{r_2}{r_1}}(o_1) = o_2$, I_1, I_2, S_1, S_2 leżą na jednej prostej.

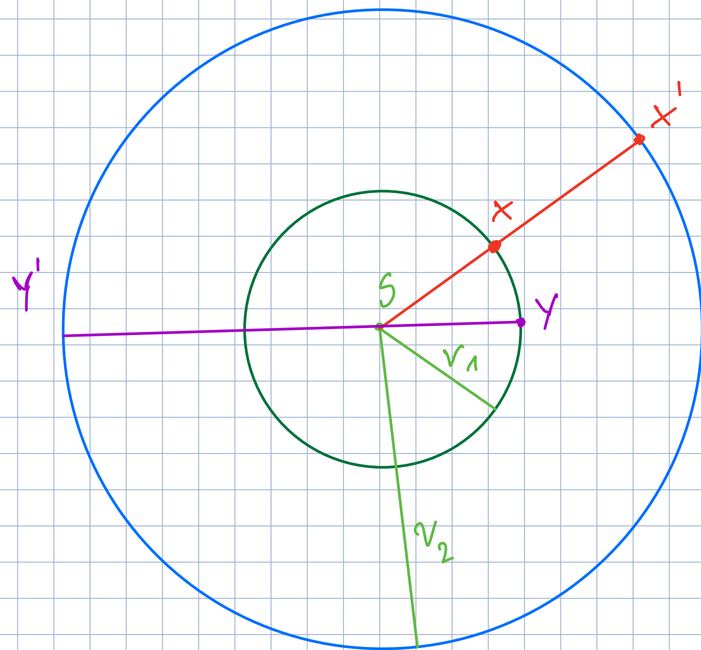
2°

$r_2 = r_1$









$$J_S^{\frac{r_2}{r_1}}(O_1) = O_2$$

$$J_S^{-\frac{r_2}{r_1}}(O_1) = O_2$$

Dane są okręgi o_1, o_2 styczne wewnętrznie w punkcie S, o_2 wewnątrz o_1, oraz cięciwa AB okręgu o_1 styczna do o_2 w punkcie C. Wykaż, że $\measuredangle CSA = \measuredangle CSB$.

$J_S^k(o_2) = o_1$, $k > 0$

Chcemy pokazać, że C' jest środkiem łuku AB

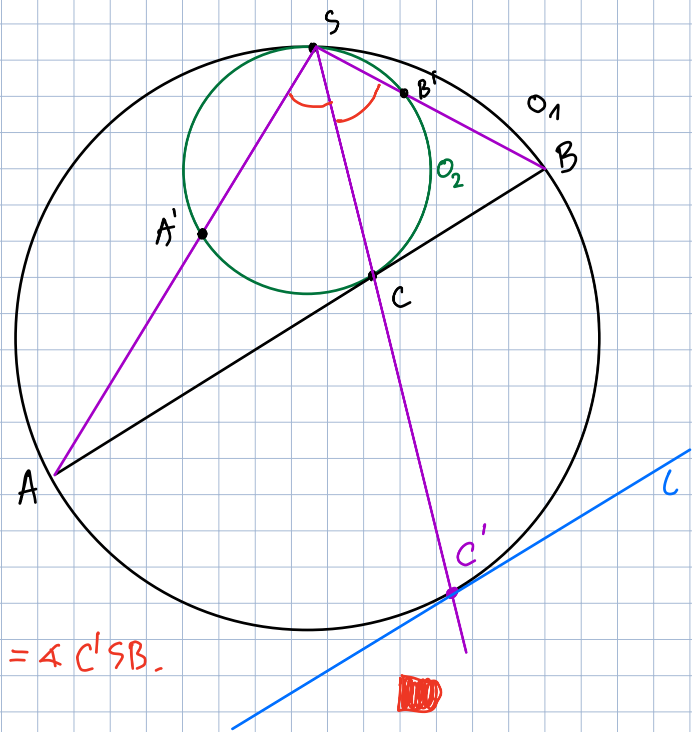
$J_S^k(A') = A$

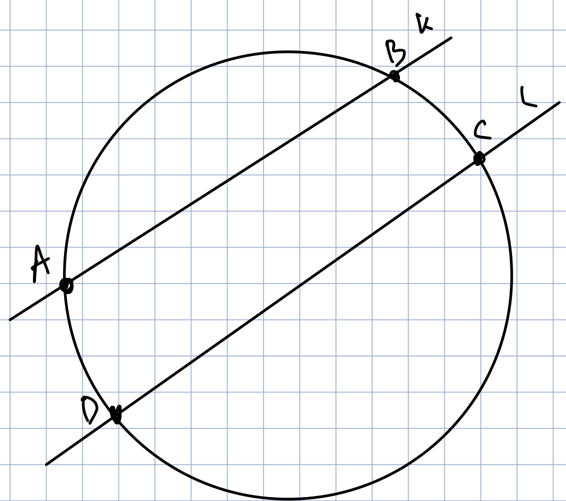
$J_S^k(B') = B$

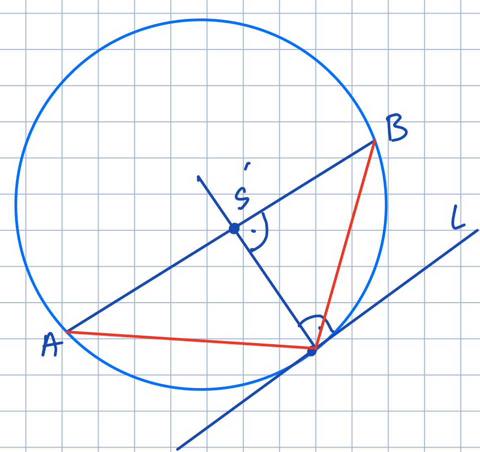
$J_S^k(C) = C'$

$J_S^k(\overline{AB}) = L$, L styczna do o_1 w C': $L \parallel AB$

$\Rightarrow AC' = C'B \Rightarrow \measuredangle ASC' = \measuredangle C'SB$.







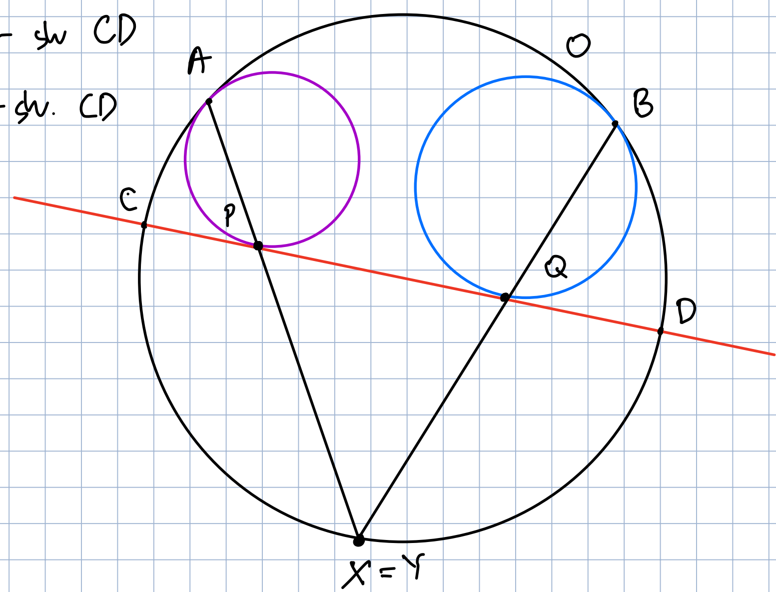
ABCD - trapez równoramienny.

Rozłączne zewnętrznie okręgi o_1 i o_2 są styczne wewnętrznie do okręgu o w punktach odpowiednio A i B. Prosta k, nie rozdzielająca okręgów o_1 i o_2, jest do nich styczna w punktach odpowiednio P i Q. Wykaż, że proste AP i BQ przecinają się w punkcie należącym do okręgu o.

AP przecina o w X - śr CD

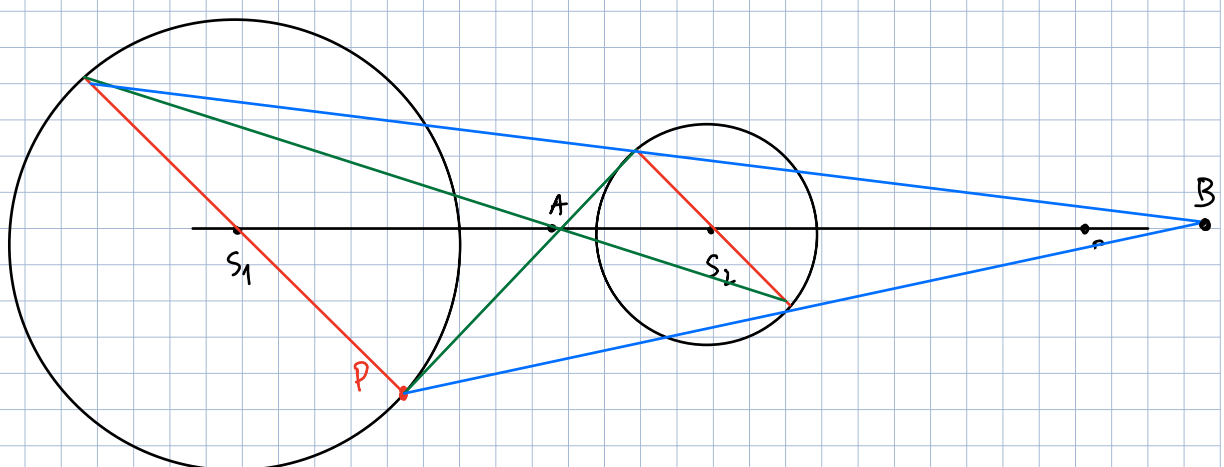
BQ —"— Y - śr. CD

X=Y

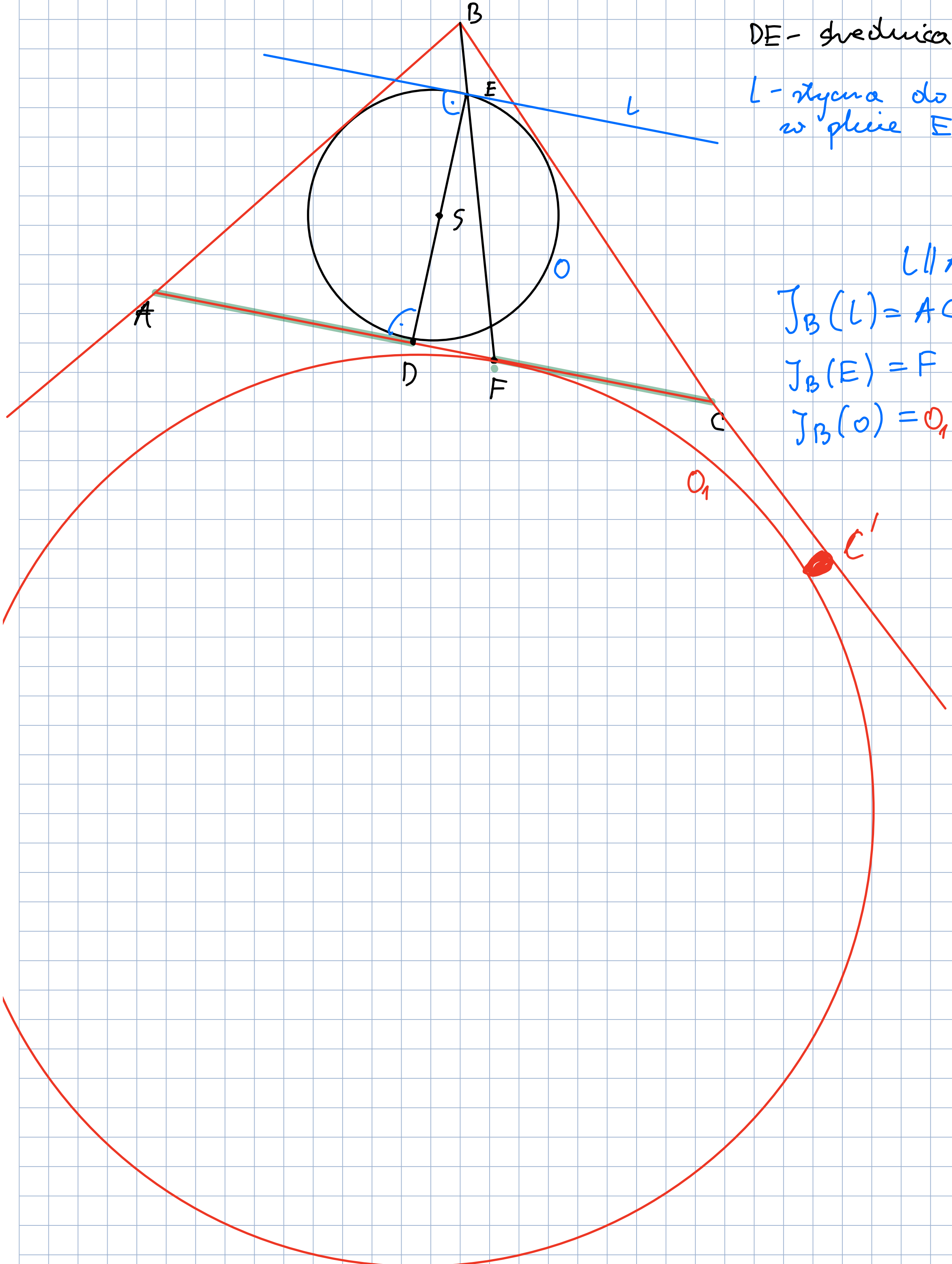


Nieprzystające okręgi o_1 i o_2 leżą jeden na zewnątrz drugiego. Ich wspólne styczne przecinają prostą wyznaczoną przez ich środki w punktach A i B. Niech P będzie dowolnym punktem okręgu o_1. Udowodnij, że istnieje średnica okręgu o_2, której jeden koniec leży na prostej PA, a drugi — na prostej PB.

Bierzemy średnice równoległe



Okrąg wpisany w trójkąt ABC jest styczny do boku AC w punkcie D, odcinek DE jest średnicą tego okręgu. Prosta BE przecina bok AC w punkcie F. Wykaż, że $AF = CD$.



DE – średnica

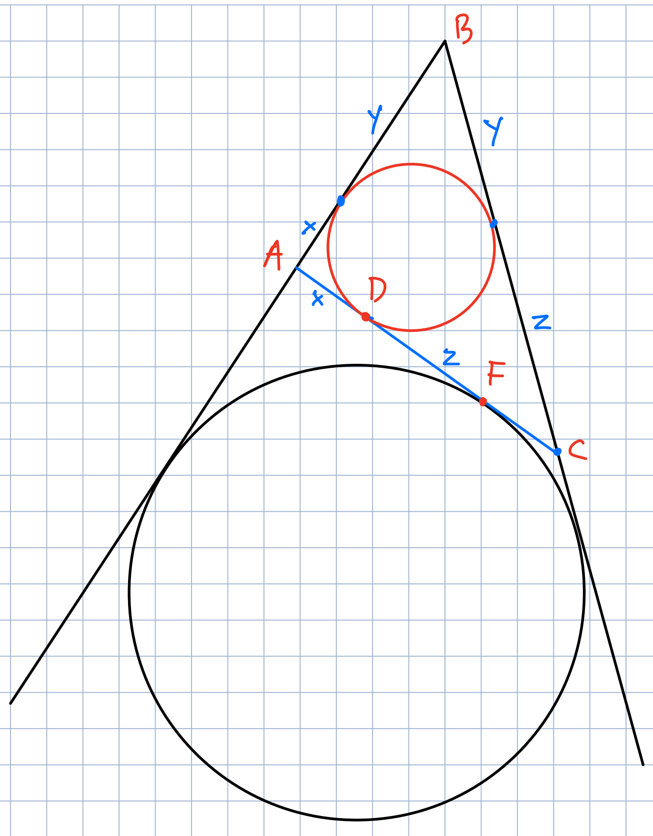
L – styczna do okręgu w punkcie E

$L \parallel AC$

$J_B(L) = AC$

$J_B(E) = F$

$J_B(O) = O_1$ – okrąg dopisany



Tesa: $AD = FC$

$AB = c$, $BC = a$, $AC = b$

$AD = \frac{b+c-a}{2}$

$c = x+y$, $a = y+z$, $b = x+z$

$\Rightarrow 2x = b+c-a$

$x = \frac{b+c-a}{2}$

$FC = \frac{b+c-a}{2}$

Przekątne trapezu przecinają się w punkcie P, a proste zawierające jego ramiona przecinają się w punkcie Q. Wykaż, że prosta PQ przechodzi przez środki podstaw tego trapezu.

Teza: X, Y - środki