Wielomian siedmiu zmiennych

$$Q(x_1, x_2, \dots, x_7) = (x_1 + x_2 + \dots + x_7)^2 + 2\left(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_7^2\right)$$

można przedstawić jako sumę siedmiu kwadratów wielomianów z nieujemnymi, całkowitymi współczynnikami:

$$Q(x_1, \dots, x_7) = P_1(x_1, \dots, x_7)^2 + P_2(x_1, \dots, x_7)^2 + \dots + P_7(x_1, \dots, x_7)^2.$$

Znaleźć wszystkie możliwe wartości $P_1(1, 1, \dots, 1)$.

I sposób

$$(x_1+\dots+x_7)^2 + 2(x_1^2+\dots+x_7^2) = 3(x_1^2+\dots+x_7^2) + 2(x_1x_2+\dots) =$$
$$= (x_1+x_2+x_3)^2 + (x_3+x_4+x_5)^2 + (x_3+x_6+x_7)^2 + (x_1+\underline{x_4+x_6})^2$$
$$+ (x_1+x_5+x_7)^2 + (x_4+x_2+x_7)^2 + (x_6+x_5+x_2)^2$$

Hp. $(x_1+x_2+x_3+x_4)^2$ $\qquad$ $3^2 \cdot 7 = 63 = Q(1,\dots,1)$

x_1 v

x_1 v

x_2 v

x_2 v

x_3 v

x_3 v

II sposób

n	2	3	4	5	6	7
x_i^2	2	3	4	5	6	7
$2x_i x_j$	1	3	6	10	15	21

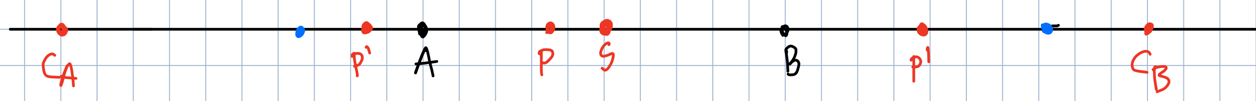
$(\sum x_i^2) \longleftrightarrow 21$

$2x_ix_j \longleftrightarrow \binom{7}{2} = \frac{6\cdot 7}{2} = 21$

$$\begin{cases} 2\cdot x + 3y + 4z + 5t = 21 \\ x + y + z + t = 7 \\ x + 3y + 6z + 10t = 21 \end{cases}$$

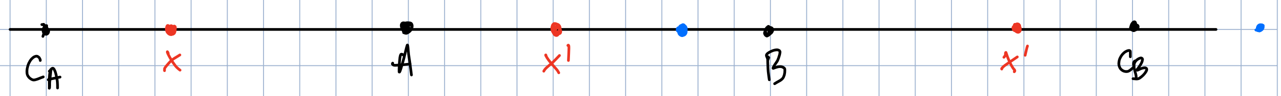
$$\begin{cases} x = 11t \\ y = 7 - 17t \\ z = 5t \end{cases} \Rightarrow y = 7$$

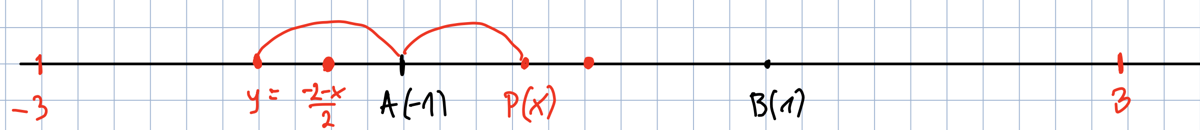
Dane są dwa punkty A i B na prostej k. Na odcinku AB pokolorowano na czerwono punkt P, który jest różny od A, B oraz środka odcinka AB. Jedna operacja polega na tym, że odbijamy czerwony punkt X względem punktu A lub B otrzymując punkt X', a następnie kolorujemy na czerwono środek odcinka, odpowiednio, AX' lub BX'. Udowodnić, że wykonując skończoną liczbę operacji, środek odcinka AB nigdy nie zostanie pokolorowany na czerwono.



$P'A < AB$

$P'B < AB$





$y+1 = -1-x$

$y = -2-x$

$x \in (-3,3) \Rightarrow \frac{-2-x}{2} \in (-3,3)$

Wysokości BB_1 i CC_1 ostrokątnego trójkąta ABC przecinają się w punkcie H. Okrąg o środku w punkcie O_b przechodzi przez punkty A, C_1 i środek odcinka BH. Okrąg o środku w punkcie O_c przechodzi przez punkty A, B_1 i środek odcinka CH. Wykazać, że $B_1O_b + C_1O_c > \frac{BC}{4}$.

$$B_1O_b + C_1O_c \geqslant \frac{BH}{4} + \frac{CH}{4} > \frac{BC}{4}$$

$$S_{B_1}(B) = B' \quad : \quad B' \in O_{AC_1M}$$

Chcemy pokazać:

$$BM \cdot BB' = BC_1 \cdot BA$$

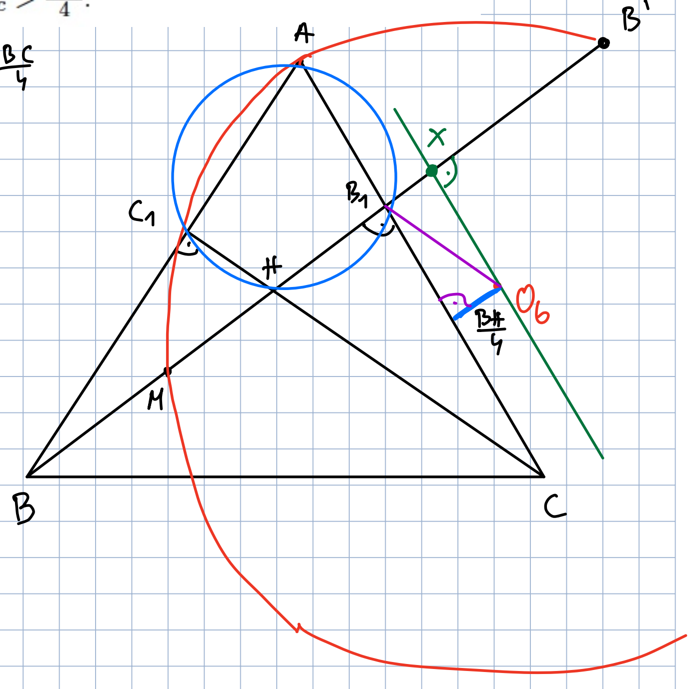
$$BM \cdot BB' = BM \cdot 2 \cdot BB_1 =$$

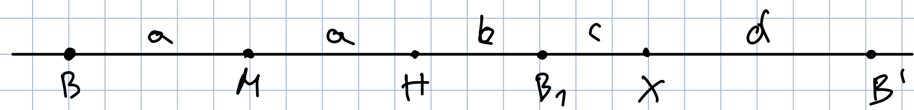
$$= 2 \cdot BM \cdot BB_1 = BH \cdot BB_1 =$$

$$BC_1 \cdot BA \quad \blacksquare$$

X - środek MB'

$$d(O_b, AC) = \frac{1}{4} BH$$

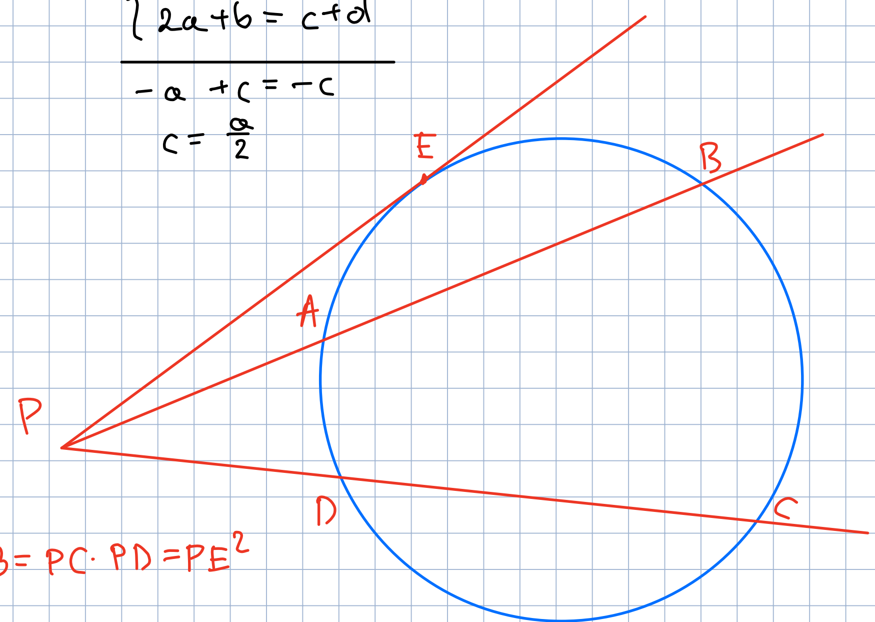




$$\begin{cases} a+b+c=d \\ 2a+b=c+d \end{cases}$$

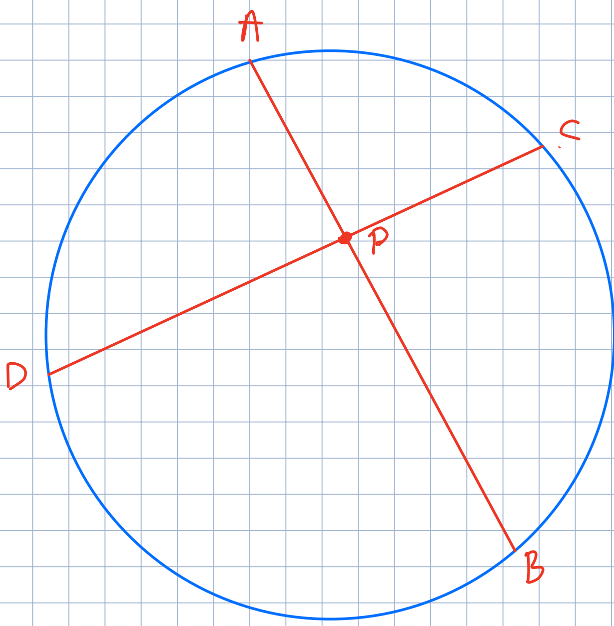
$$-a+c=-c$$

$$c=\frac{a}{2}$$



$$PA \cdot PB = PC \cdot PD = PE^2$$

$PA \cdot PB = PC \cdot PD$



Rozłączne okręgi o_1 i o_2 o równych promieniach są styczne wewnętrznie do okręgu o w punktach odpowiednio A i B. Punkt P należy do okręgu o, proste PA i PB przecinają okręgi o_1 i o_2 odpowiednio w drugich punktach C i D. Udowodnij, że proste AB i CD są równoległe.

$J_A^{\frac{R}{r}}(C) = P$

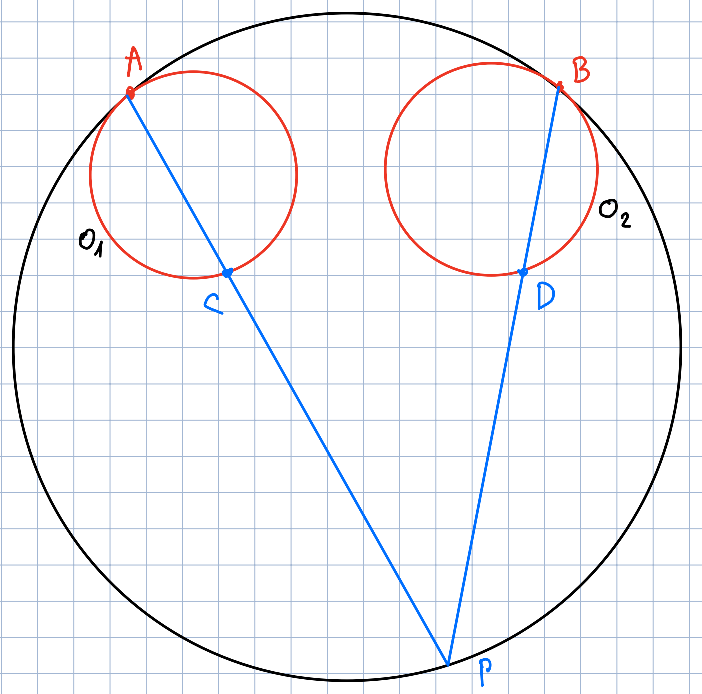
$J_B^{\frac{R}{r}}(D) = P$

$o_1 \equiv o_2$

Zatem $\frac{AC}{CP} = \frac{BD}{DP} \Rightarrow$

$\Rightarrow \Delta PAB \sim \Delta PCD \Rightarrow$

$\Rightarrow CD \parallel AB$

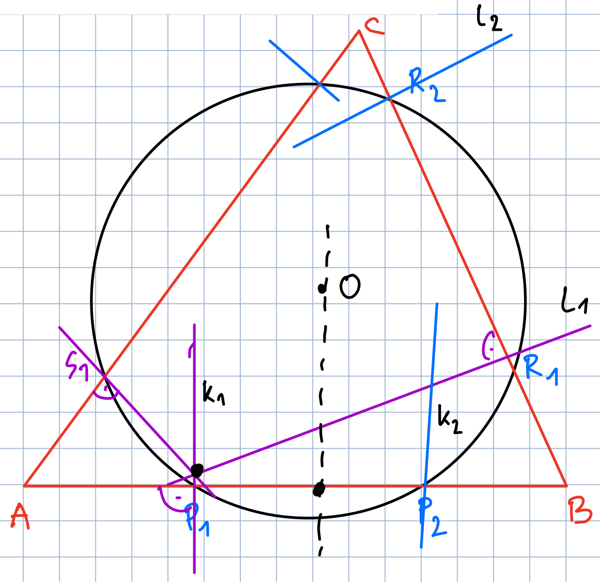


Okrąg o przecina bok AB trójkąta ABC w punktach P_1, P_2, bok BC w punktach R_1 i R_2 oraz bok AC w punktach S_1 i S_2. Proste prostopadłe do AB przechodzące przez P_1 i P_2 oznaczamy odpowiednio k_1 i k_2, prostopadłe do BC przechodzące przez R_1 i R_2 oznaczamy l_1 i l_2, zaś prostopadłe do AC przechodzące przez S_1 i S_2 oznaczamy m_1 i m_2. Wykaż, że jeśli proste k_1, l_1 i m_1 przecinają się w jednym punkcie, to proste k_2, l_2 i m_2 również przecinają się w jednym punkcie.

$$J_O^{-1}(k_1) = k_2$$

$$J_O^{-1}(l_1) = l_2$$

$$J_O^{-1}(m_1) = m_2$$



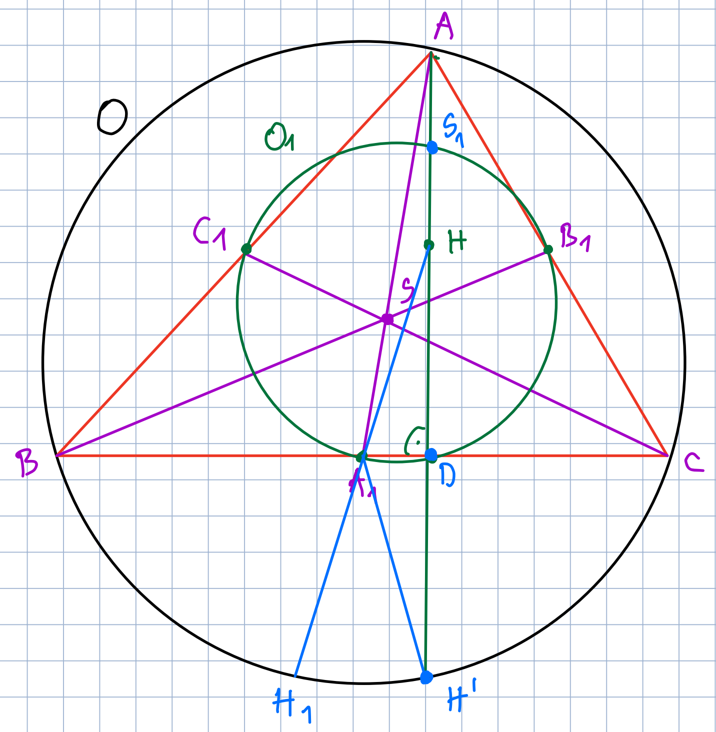
Wykazać, że w dowolnym trójkącie $R \geq 2r$, gdzie R jest promień okręgu opisanego na trójkącie ABC i r - promień okręgu wpisanego w trójkąt ABC.

$$\underbrace{P = \frac{abc}{4R}} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{abc}{4P} = \frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$

$$p = \frac{a+b+c}{2}$$

$$P = p \cdot r \quad \Rightarrow \quad r = \frac{P}{p} = \frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p}$$

$$\frac{abc}{4P} \geq \frac{P}{\frac{a+b+c}{2}}$$



A_1, B_1, C_1 - środki boków

$$\frac{AS}{SA_1} = \frac{BS}{SB_1} = \frac{CS}{SC_1} = 2$$

$$J_S^{-\frac{1}{2}}(\Delta ABC) = \Delta A_1B_1C_1$$

$$J_S^{-\frac{1}{2}}(O) = O_1$$

O_1 ma promień: $\frac{R}{2}$

$$\frac{R}{2} \geqslant r$$

Hp. $J_H^{\frac{1}{2}}(O) = O_1$

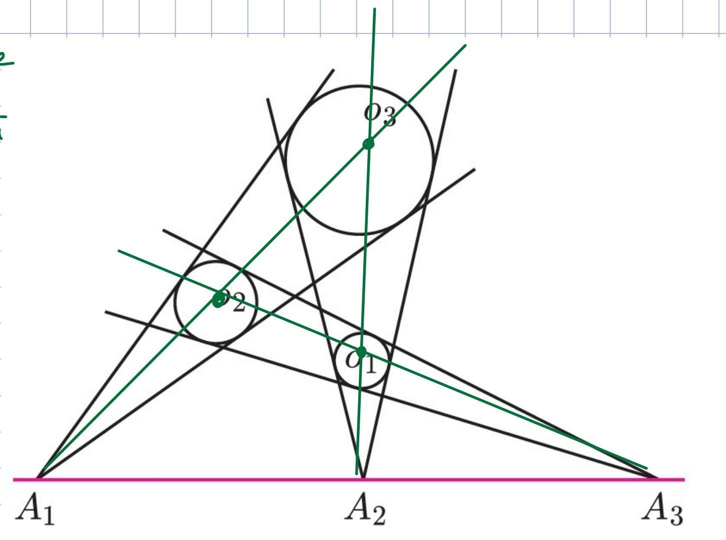
$S_{BC}(H) = H'$ $\quad$ $A_1H_1 = A_1H'$ $\quad$ bo A_1 - śr. BC

$S_{A_1}(H) = H_1$

OKRĄG FEUERBACHA (EULERA), 9 PUNKTÓW:

ŚRODKI BOKÓW, SPODKI WYSOKOŚCI, ŚRODKI ODC. ŁĄCZĄCYCH ORTOCENTRUM Z WIERZCHOŁKAMI

Okręgi o_1, o_2, o_3 są rozłączne zewnętrznie. Te dwie styczne do o_1 i o_2, które nie rozdzielają tych okręgów, przecinają się w punkcie A_3. Analogicznie definiujemy punkty A_1 i A_2. Wykaż, że punkty A_1, A_2, A_3 są współliniowe.



Zielone proste - dwusieczne

Na dwusiecznych są środki okręgów

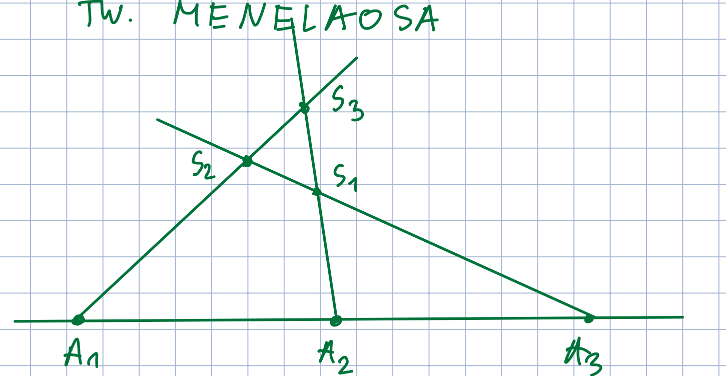
$$\left.\begin{array}{l} J_{A_1}^{\frac{r_3}{r_2}}(O_2) = O_3 \\ J_{A_2}^{\frac{r_1}{r_3}}(O_3) = O_1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow J_{A_3}^{\frac{r_1}{r_2}}(O_2) = O_1$$

$$J_{A_2}^{\frac{r_1}{r_3}} \circ J_{A_1}^{\frac{r_3}{r_2}} = J_{A_3}^{\frac{r_1}{r_2}}$$

A_1, A_2, A_3 są współliniowe.

TW. MENELAOSA



TW. MONGE'A

$k, s \neq 0, 1, -1$, $k \cdot s \neq -1, 1$

$$J_B^s \circ J_A^k = J_C^{k \cdot s}$$

Teza: A, B, C współliniowe

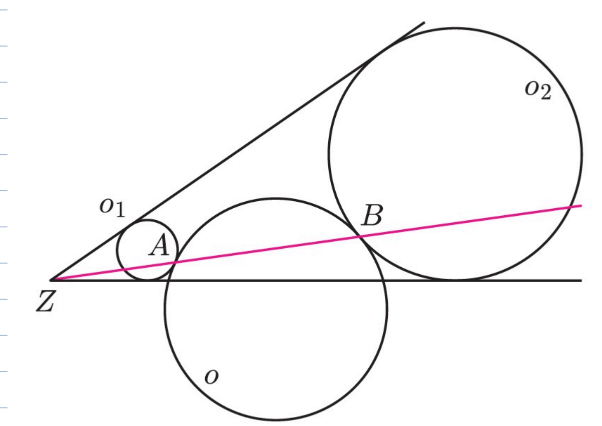
Okręgi o_1 i o_2 są rozłączne zewnętrznie i wpisane w kąt o wierzchołku Z. Okrąg o jest styczny zewnętrznie do okręgów o_1 i o_2 odpowiednio w punktach A i B. Udowodnij, że punkty A, B, Z są współliniowe.

$J_A(o_1) = o$

$J_B(o) = o_2$

$J_B \circ J_A = J_Z$

Zatem B, A, Z współliniowe na podst. tw. Monge'a



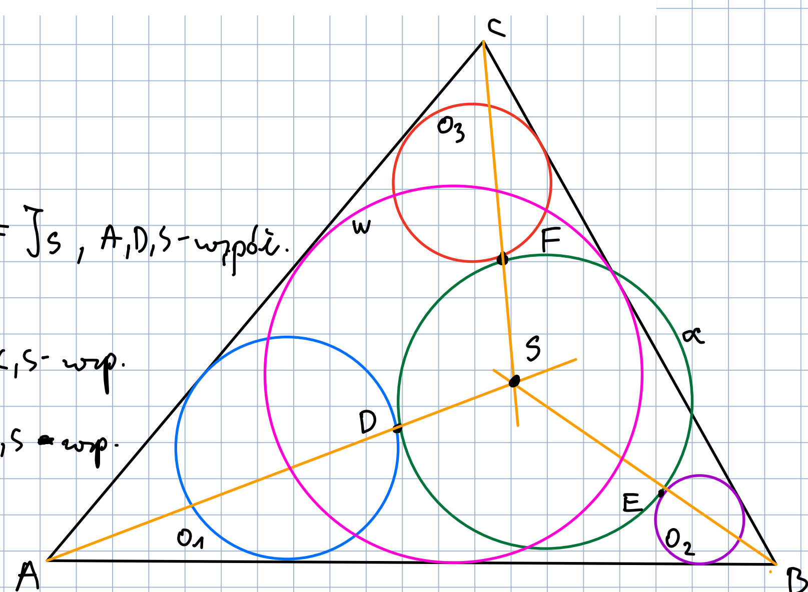
Okręgi o_1, o_2, o_3 są styczne odpowiednio do par boków AB i AC, AB i BC oraz AC i BC trójkąta ABC. Okrąg o jest styczny zewnętrznie do okręgów o_1, o_2, o_3 odpowiednio w punktach D, E, F . Wykaż, że proste AD, BE, CF przecinają się w jednym punkcie.

Hp. $J_S(\omega) = \alpha$

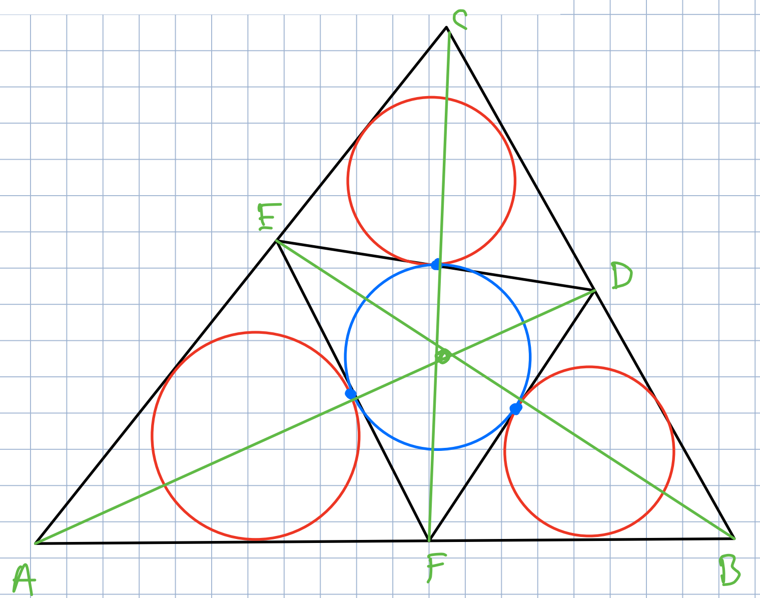
$$\left.\begin{array}{l} J_A(w) = o_1 \\ J_D(o_1) = \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow J_D \circ J_A = J_S, \ A, D, S \text{ - współl.}$$

$J_F \circ J_C = J_S$, F, C, S - wsp.

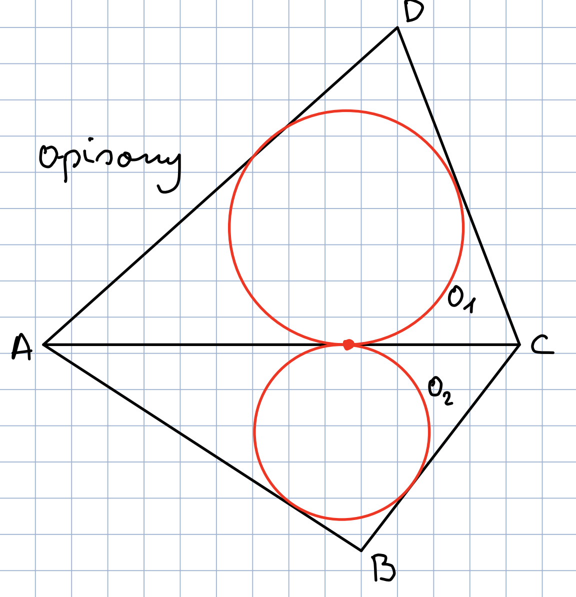
$J_E \circ J_B = J_S$, E, B, S - wsp.



Punkty D, E, F leżą odpowiednio na bokach BC, CA, AB trójkąta ABC. Okręgi wpisane w trójkąty AEF, BFD, CDE są styczne do okręgu wpisanego w trójkąt DEF. Udowodnij, że proste AD, BE, CF przecinają się w jednym punkcie.



O_1, O_2 są styczne $\iff$ $ABCD$ opisany



Zad. 3 z 24.01.22

$$k + \frac{a_n - n}{2} \geqslant k \cdot n$$

Wskazówka: $\forall\, n \geqslant 100:\quad a_n \geqslant 2^n$

$a_n \geqslant 2^k$