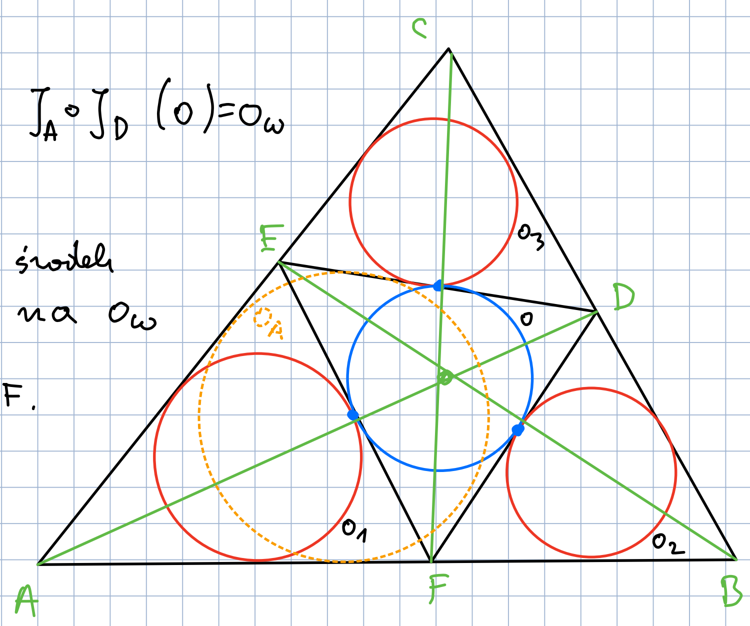
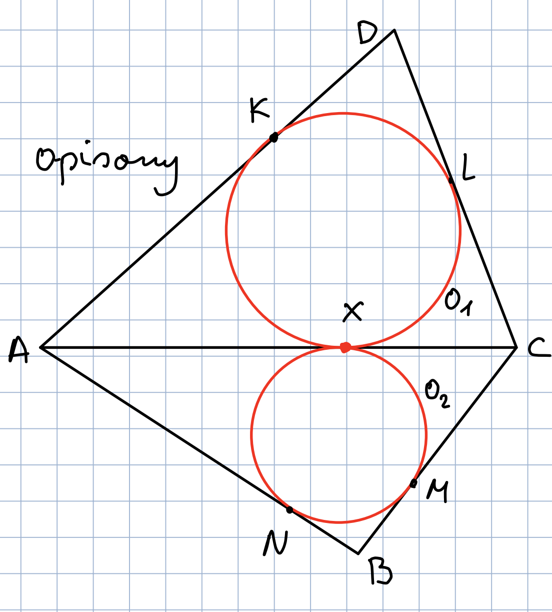
Punkty D, E, F leżą odpowiednio na bokach BC, CA, AB trójkąta ABC. Okręgi wpisane w trójkąty AEF, BFD, CDE są styczne do okręgu wpisanego w trójkąt DEF. Udowodnij, że proste AD, BE, CF przecinają się w jednym punkcie.

$$\left.\begin{array}{l} J_D(o) = o_A \\ J_A(o_A) = o_\omega \end{array}\right\} \quad J_A \circ J_D(o) = o_\omega$$

czyli na AD leży środek jednokładności o na o_ω

Analogicznie dla E i F.





o_1, o_2 są styczne $\iff$ $ABCD$ opisany

Dowód

$\Rightarrow)$ $o_1 \cap o_2 = \{X\}$

$AK = AX = AN$

$LC = CX = CM$

$NB = BM$

$DK = DL$

$AD + BC = AK + DK + CM + MB = AN + DL + BN + LC = AB + CD$

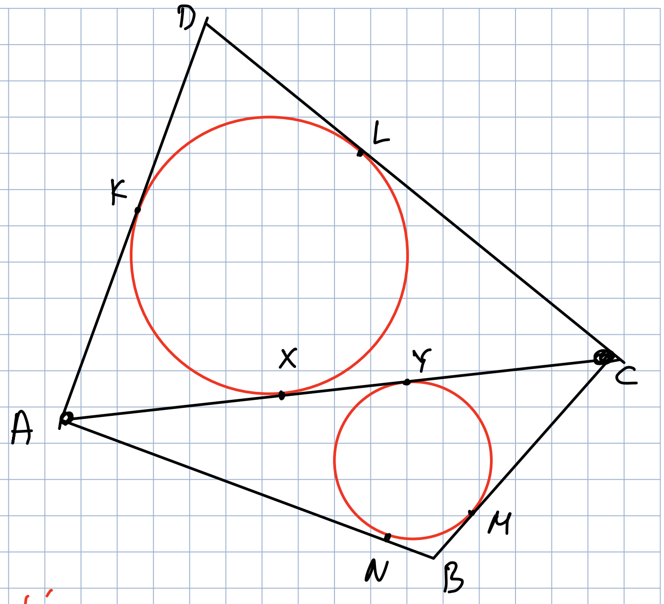
$\blacksquare$

$\Leftarrow)$ $AB = AY + NB$

$CD = CX + LD$

$AD = LD + AX$

$BC = CY + NB$



$$AB + CD = AY + \cancel{NB} + CX + \cancel{LD} =$$

$$= \cancel{LD} + AX + CY + \cancel{NB} =$$

$$= BC + AD$$

$$0 < AY - AX = CY - CX < 0$$

sprzeczność

Zad. 3 z 24.01.22

$$k + \frac{a_n - n}{2} \geq k \cdot n$$

Wskazówka: $\forall\, n \geq 100: \quad a_n \geq 2^n$

$a_n \geq 2^k$

Okrąg o_1 przecina okrąg o_2 w punktach A i B oraz przechodzi przez środek S okręgu o_2. Na okręgu o_1 wybrano punkt P należący do łuku AB, do którego nie należy punkt S. Proste PA i PB przecinają okrąg o_2 odpowiednio w punktach $E \neq A$ i $F \neq B$. Wykaż, że $AB = EF$.

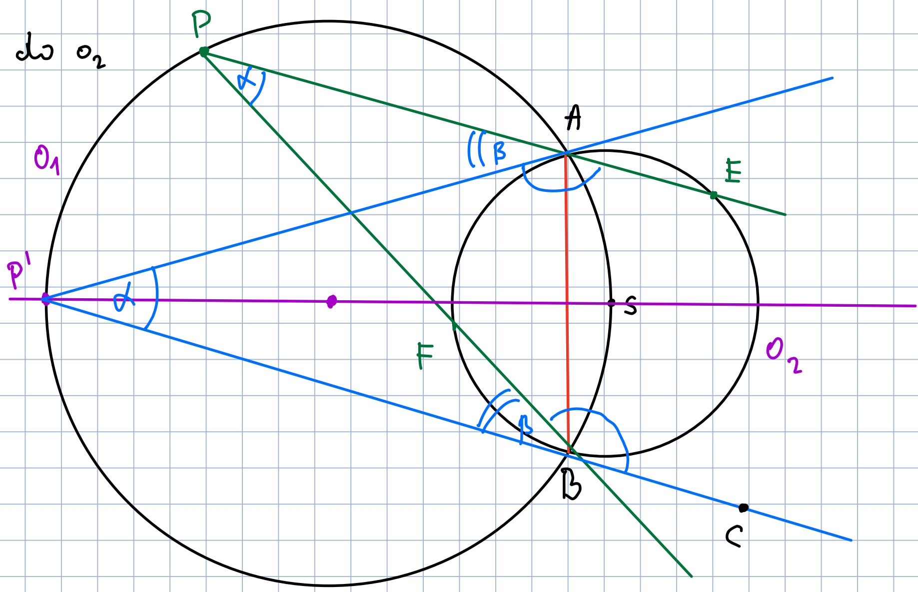
$P'A$, $P'B$ są styczne do o_2

$\sphericalangle P'AE = \sphericalangle PBC \Rightarrow$

$AE = FB \Rightarrow$

$AEBF$ trapez równoramienny

$\Rightarrow AB = FE$



$\sphericalangle ABF = \alpha$

$\sphericalangle EPB = \beta$

$\sphericalangle ABF = \sphericalangle AEF$ (k. wpisane)

$ASBP$ - wpisany $\Rightarrow$

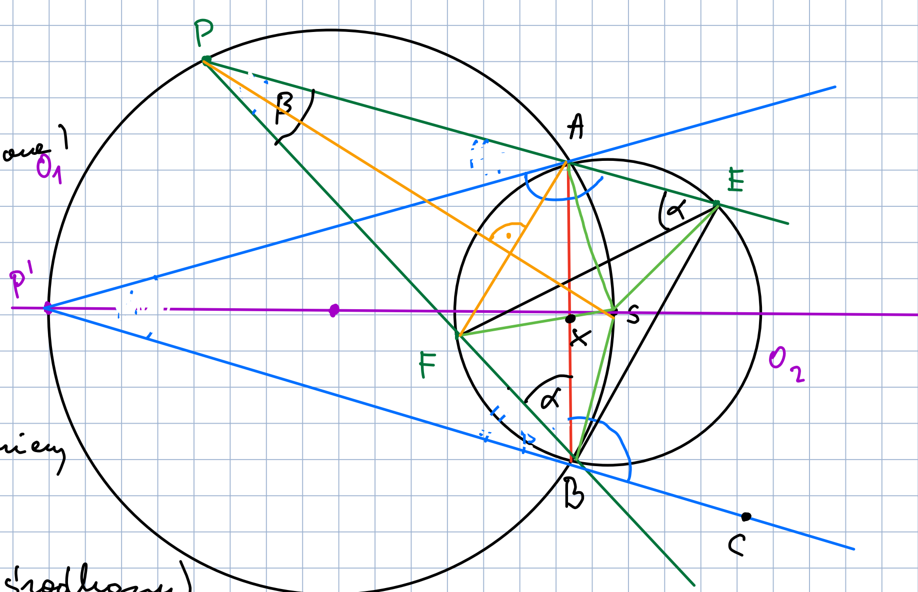
$\Rightarrow \sphericalangle ASB = 180^\circ - \beta$

$SA = SB = SE = SF$

ΔASB jest równoramienny

$\Rightarrow \sphericalangle SAB = \frac{\beta}{2}$

$\sphericalangle ASF = 2\alpha$ (kąt środkowy)



$\sphericalangle PFE = 180^\circ - (\alpha + \beta) \Rightarrow \sphericalangle AXS = \sphericalangle BXF = 180^\circ - 2\alpha - \frac{\beta}{2}$

$\sphericalangle XFB = \alpha + \frac{\beta}{2}$ | bo ΔFXB | $\Rightarrow \sphericalangle EFS = \frac{\beta}{2}$

$\Delta ASB \equiv \Delta ESF$ $\blacksquare$

Niech x, y będą dodatnimi liczbami rzeczywistymi spełniającymi warunek $x + y = 2021$. Znaleźć największą wartość wyrażenia:

$$[x]y + [y]x.$$

$[a]$ jest częścią całkowitą liczby a, czyli największą liczbą całkowitą mniejszą lub równą od a.

Hip. $x = 1010$ $\quad y = 1011 \Rightarrow$ wart. najw. $\underline{2 \cdot 1010 \cdot 1011}$

Niech $x = 1010 + a$, $y = 1011 - a$ gdzie $a \in (0, 1011) \setminus \{1\}$

$[x] \leq x$, $[y] \leq y$

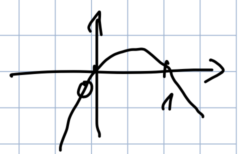
$[x] \cdot y + [y] \cdot x \leq 2x \cdot y = 2(1010 + a)(1011 - a) =$

$= \underline{2 \cdot 1010 \cdot 1011} + 2 \cdot 1010 \cdot (-a) + 2 \cdot a \cdot 1011 \underline{- 2a^2} =$

$= 2 \cdot 1010 \cdot 1011 - 2a^2 + 2a$

Jeśli $[x]y + [y] \cdot x > 2 \cdot 1010 \cdot 1011$, to $2a - 2a^2 > 0$

Zatem $a(1-a) > 0 \iff a \in (0, 1)$



Jeśli $a \in (0, 1)$, to $x, y \in (1010, 1011)$

$[x]y + [y] \cdot x = 1010(x + y) = 1010 \cdot 2021 < 2 \cdot 1010 \cdot 1011$

$\blacksquare$

$x + y = 2021$ $\qquad$ $x_0 + y_0 = 2020$

$x = x_0 + \alpha$, $x_0 \in \mathbb{Z}$, $\alpha \in \langle 0, 1)$

$y = y_0 + \beta$, $y_0 \in \mathbb{Z}$, $\beta \in \langle 0, 1)$ $\qquad$ $\alpha + \beta = 1$

$$[x]y + [y] \cdot x = x_0(y_0 + \beta) + y_0(x_0 + \alpha) =$$

$$= x_0(2020 - x_0 + 1 - \alpha) + (2020 - x_0)(x_0 + \alpha)$$

$$= -2x_0^2 + x_0(2020 + 1 - \alpha + 2020 - \alpha) + 2020\alpha$$

$$x_{max} = \frac{4041 - 2\alpha}{4} = 1010 + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\alpha$$

Udowodnić, że nie istniej~~ą~~e tak~~ie~~a dodatni~~e~~a liczb~~y~~a naturaln~~e~~a, że suma kwadratów ~~ich~~ jej pięciu najmniejszych dzielników jest kwadratem liczby naturalnej.

1° $3 \nmid n \Rightarrow$ każdy dzielnik n nie jest podzielny przez 3

$$d_1^2+d_2^2+d_3^2+d_4^2+d_5^2 \equiv 1+1+1+1+1 \equiv 2 \pmod 3$$

$\forall n \in \mathbb{Z}$: $n^2 \equiv 0$ lub $n^2 \equiv 1 \pmod 3$

Zatem $d_1^2+\dots+d_5^2$ nie jest kwadratem.

2° $2 \nmid n \Rightarrow$ każdy dzielnik jest nieparzysty

$d_1^2+\dots+d_5^2 \equiv 1+1+1+1+1 \equiv 1 \pmod 4$ brak sprz.

$d_1^2+\dots+d_5^2 \equiv 1+1+1+1+1 \equiv 5 \not\equiv 1 \pmod 8$

Zatem $d_1^2+\dots+d_5^2$ nie jest kwadratem.

3° $2 \mid n$ i $3 \mid n$

$1^2+2^2+3^2+4^2+5^2 = 55$ nie jest kw

$1^2+2^2+3^2+4^2+6^2 = 66$ -||-

$1^2+2^2+3^2+5^2+6^2 = 75$ -||-

$1^2+2^2+3^2+6^2+d^2 = k^2$

$50 = k^2-d^2 = (k-d)(k+d)$ sprzeczność

OKRESOWOŚĆ

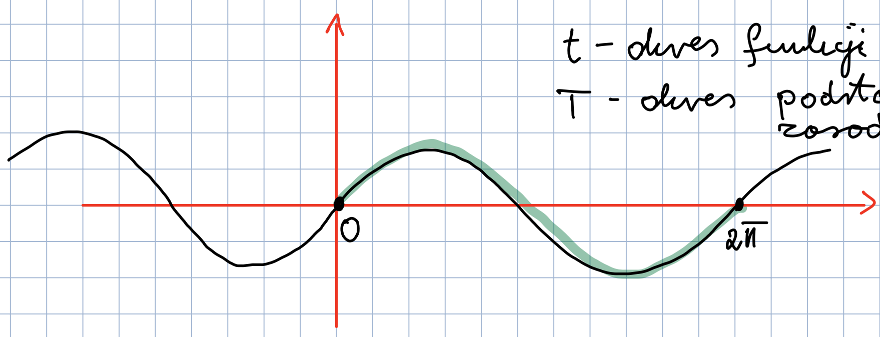
$f: X \to Y$ jest okresowa $\iff$

$\iff \exists\ t \neq 0 \quad \forall x \in X : \quad x+t,\ x-t \in X$

$f(x+t) = f(x) = f(x-t)$

t – okres funkcji

T – okres podstawowy zasadniczy



$T = 2\pi$

Udowodnij, że jeżeli funkcja $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ spełnia dla każdej liczby rzeczywistej warunek $f(x+a) = \frac{f(x)}{3f(x)-1}$, gdzie $a \neq 0$, to jest okresowa.

$x := x + a$

$$f\big((x+a)+a\big) = \frac{f(x+a)}{3f(x+a)-1} = \frac{\frac{f(x)}{3f(x)-1}}{3\cdot\frac{f(x)}{3f(x)-1}-1} =$$

$$= \frac{\frac{f(x)}{\cancel{3f(x)-1}}}{\frac{3f(x)-(3f(x)-1)}{\cancel{3f(x)-1}}} = \frac{f(x)}{1} = f(x)$$

$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x+2a) = f(x)$

$t = 2a$

$f(x) = a$ okresem jest każda liczba $\neq 0$
nie ma okresu zasadniczego

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

funkcja Dirichleta
niestała, okresowa, bez okresu zasadniczego.

Funkcja $f : R \to R$ spełnia dla każdej liczby rzeczywistej x równość $f(x+a) = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - (f(x))^2}$, gdzie $a > 0$. Udowodnij, że f jest funkcją okresową.

$x := x + a$

$$f(x+2a) = f((x+a)+a) = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x+a) - f^2(x+a)} =$$

$$= \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - f^2(x)} - \left(\frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - f^2(x)}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{2} + \cancel{\sqrt{f(x) - f^2(x)}} - \frac{1}{4} - \cancel{\sqrt{f(x) - f^2(x)}} - f(x) + f^2(x)} =$$

$$= \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - f(x) + f^2(x)} = \frac{1}{2} + \sqrt{\left(\frac{1}{2} - f(x)\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{2} + \left| f(x) - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2} + f(x) - \frac{1}{2} = f(x) \qquad \text{bo } f(x) \geq \frac{1}{2}$$

$g(x) := f(x) - \frac{1}{2}$ $\qquad$ $g(x+a) = f(x+a) - \frac{1}{2}$

$$f(x+2a) = f(x) = f(x - 2a)$$

Udowodnij, że jeżeli funkcja $f : R \to R$ spełnia dla każdej liczby rzeczywistej x nierówności $f(x+3) \leqslant f(x)+3$ i $f(x+2) \geqslant f(x)+2$, to funkcja $g(x) = f(x)-x$ jest okresowa.

$$f(x+6) \leqslant f(x+3)+3 \leqslant f(x)+6$$

$$f(x+6) \geqslant f(x+4)+2 \geqslant f(x+2)+4 \geqslant f(x)+6$$

Zatem

$$f(x+6) = f(x)+6$$

$$g(x+6) = f(x+6)-(x+6) = f(x)+6-x-6 = f(x)-x = g(x)$$

$$g(x+6) = g(x)$$

Zadanie

(x_n) : $x_1 = \frac{a-1}{a+1}$, $a \neq -1, 0, 1$

$x_{n+1} = \frac{x_n - 1}{x_n + 1}$

$f(x) = \frac{x-1}{x+1}$

$f^{(n)}(x) = x$

?

$x_{2022} = ?$

$$x_2 = \frac{\frac{a-1}{a+1} - 1}{\frac{a-1}{a+1} + 1} = \frac{-2}{2a} = -\frac{1}{a}$$

$$x_3 = \frac{-\frac{1}{a} - 1}{-\frac{1}{a} + 1} = \frac{-1-a}{-1+a} = \frac{a+1}{1-a}$$

$$x_4 = a$$

$$x_5 = \frac{a-1}{a+1}$$

.

$$x_{2022} = -\frac{1}{a}$$

Dla każdej liczby naturalnej dodatniej n istnieje wyraz ciągu Fibonacciego podzielny przez n.

$a_1 = 1, \; a_2 = 1$

$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$

a_0 : $a_2 = a_1 + a_0 \Rightarrow a_0 = 0$

$1 = 1 + a_0$

$\forall n \in \mathbb{N}_+ : \; n \mid a_0 = 0$

Okresowość reszt mod n

$$r_{n+2} = \underbrace{r_{n+1} + r_n}$$

$$(r_1, r_2), \ldots, (r_1, r_2)$$

skończona liczba par reszt. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ pewna para powtarza się

Ciąg F. jest okresowy na resztach mod n

$$x + y + z = 1399$$

$$[x]y + [y]z + [z]x$$