



## Zestaw próbny Olimpiady Matematycznej

Czas trwania: 5h

online, grudzień 2022 (dzień drugi)

### Zadanie 4

Rozstrzygnij, czy istnieje nieskończenie wiele takich liczb pierwszych  $p$ , dla których istnieje dodatnia liczba naturalna  $n$  o tej własności, że liczba  $n^2 + n + 1$  jest wielokrotnością liczby  $p$ .

### Zadanie 5

Krata trójkątna jest zbudowana z jednostkowych (czyli o boku 1) trójkątów równobocznych. Wzdłuż krawędzi kraty wyznaczono wielokąt, niekoniecznie wypukły, ale bez samo przecięć (czyli każdy wierzchołek kraty należy do maksymalnie dwóch krawędzi wielokąta). Wiedząc, że obwód wielokąta wynosi 400 udowodnij, że musi on mieć przynajmniej jeden kąt o wartości dokładnie  $120^\circ$  lub  $240^\circ$ .

### Zadanie 6

Dany jest czworokąt wypukły  $ABCD$  oraz taki punkt  $M$  na  $AB$ , że czworokąty  $AMCD$  i  $BMDC$  są opisane na okręgach o środkach  $O_1$  i  $O_2$ . Prosta  $O_1O_2$  przecina  $DM$  i  $CM$  w punktach  $X$  i  $Y$ . Udowodnij, że jeśli  $MX = MY$ , to  $ABCD$  jest cykliczny.



## Zestaw próbny Olimpiady Matematycznej

Czas trwania: 5h

online, grudzień 2022 (dzień drugi)

### Zadanie 4

Rozstrzygnij, czy istnieje nieskończenie wiele takich liczb pierwszych  $p$ , dla których istnieje dodatnia liczba naturalna  $n$  o tej własności, że liczba  $n^2 + n + 1$  jest wielokrotnością liczby  $p$ .

### Zadanie 5

Krata trójkątna jest zbudowana z jednostkowych (czyli o boku 1) trójkątów równobocznych. Wzdłuż krawędzi kraty wyznaczono wielokąt, niekoniecznie wypukły, ale bez samo przecięć (czyli każdy wierzchołek kraty należy do maksymalnie dwóch krawędzi wielokąta). Wiedząc, że obwód wielokąta wynosi 400 udowodnij, że musi on mieć przynajmniej jeden kąt o wartości dokładnie  $120^\circ$  lub  $240^\circ$ .

### Zadanie 6

Dany jest czworokąt wypukły  $ABCD$  oraz taki punkt  $M$  na  $AB$ , że czworokąty  $AMCD$  i  $BMDC$  są opisane na okręgach o środkach  $O_1$  i  $O_2$ . Prosta  $O_1O_2$  przecina  $DM$  i  $CM$  w punktach  $X$  i  $Y$ . Udowodnij, że jeśli  $MX = MY$ , to  $ABCD$  jest cykliczny.