

Zadanie: PRL

Pralka



Warsztaty ILO 2017-2018, grupa olimpijska, dzień 3. Dostępna pamięć: 128 MB.

Obserwacja.1. *Jeżeli $m = 1$, to możemy złączyć wszystkie pralki w jedną.*

Uzasadnienie jest oczywiste – łączny czas prania nie może się zwiększyć, ponieważ nie ma takiego ubrania, które musiałoby czekać na zakończenie innego.

Obserwacja.2. *Jeżeli $m \geq 2$, to możemy przyjąć $m = 2$, a rozwiązanie się nie zmienia.*

Dowód. Niech t będzie czasem sumarycznym czasem oczekiwania w kolejce drugiego ubrania. Możemy zatem przypuścić, że czekamy na samym początku z drugim ubraniem przez t jednostek czasu, a następnie uruchamiamy na nim naszą symulację prania z opóźnieniem. Wówczas drugie ubranie nigdy nie będzie oczekiwało w kolejce, a wynik się nie zmieni. Możemy zatem założyć, że jest to pierwsze pranie i powtórzyć rozumowanie dla pozostałych pralek. \square

Od teraz zakładamy, że pierzemy tylko dwa ubrania.

Lemat.1. *Niech M będzie maksymalnym czasem prania spośród wszystkich pralek. Wówczas sumaryczny czas oczekiwania drugiego ubrania wynosi M .*

Dowód. Przez indukcję po n . Dla $n = 1$ to oczywiste, bo drugie ubranie czeka t_1 czasu, aż się skończy prac pierwsze ubranie. Przypuśćmy $n > 1$. Wiadomo, że jeśli oba ubrania zostały już uprane w pralce piorącej M czasu, to drugie ubranie nie będzie już nigdy oczekiwać w kolejce za zakończenie pierwszego – pierwsze pranie będzie zawsze miało M czasu zapasu, a ponieważ kolejne pralki piorą już tylko co najwyżej tak długo, to pierwsze pranie skończy się szybciej niż drugie pranie ‘stanie’ w kolejce do tej pralki.

Jeżeli spojrzymy sobie na pralki wcześniejsze, to przyjmijmy, że najwolniejsza pralka pierze M' jednostek czasu. Wówczas z założenia indukcyjnego drugie ubranie będzie oczekiwało sumarycznie M' jednostek czasu. Wiemy natomiast, że $M' \leq M$, bo M jest czasem najwolniejszej pralki spośród wszystkich pralek, a M' spośród wcześniejszych niż najwolniejsza. Widać zatem, że kiedy pierwsze ubranie zaczyna się prac w najwolniejszej pralce, to ma jeszcze M' zapasu, zanim drugie ubranie stanie w kolejce do tej samej pralki. Jednak ponieważ pierwsze ubranie będzie się prało M jednostek, to drugie pranie dodatkowo musi odczekać $M - M'$ jednostek, co sumarycznie daje czas M . \square

Wniosek.1. *Jeśli złączymy pewną liczbę pralek, tak że suma ich czasów prania nie przekroczy M , to łączny czas prania się nie zwiększy.*

Rozwiązanie $O(n)$

Rozwiązanie wygląda następująco. Najpierw znajdujemy maksymalną wartość w ciągu. Następnie iterujemy się od lewej do prawej i scalamy kolejne pralki. Jeśli w pewnym momencie scalenie kolejnej pralki spowoduje przekroczenie czasu M , to nie dodajemy już więcej do bieżącej grupy pralek, a tworzymy nową grupę.

```
1  wczytaj_n
2  wczytaj_m
3  wczytaj_tn
4  if m == 0:
5      wypisz(1)
6      return 0
7  M = max(tn)
8  suma = 0
9  wynik = 0
10 for i := 1 to n:
11     if suma + t[i] > M:
12         wynik = wynik + 1
13         suma = 0
14     suma = suma + t[i]
15 wypisz(wynik)
```