Zadanie: MET
Metro

Warsztaty ILO, grupa olimpijska, dzień 19. Dostępna pamięć: 128 MB.

Rozwiązanie wzorcowe $O(n+m)$

Na samym początku rozważmy interpretację grafową, gdzie wierzchołkami są stacje metra, a osoby jadące metrem reprezentowane są przez skierowane krawędzie od stacji początkowej do stacji końcowej.

Zauważmy, że jeśli do danej stacji wchodzi inna liczba krawędzi niż wychodzi, to na pewno nie da się uzyskać w tej stacji kosztu 0. Jest to dość oczywista obserwacja. Zauważmy jednak, że jeśli liczba krawędzi wchodzących jest równa liczbie krawędzi wychodzących w każdej stacji, to da się uzyskać koszt 0 w każdej z nich. Ta obserwacja jest mniej oczywista, jednak łatwo ją uzasadnić. Jeśli zachodzi powyższe, to w grafie istnieje cykl Eulera (a raczej zbiór cykli Eulera, jeżeli graf jest niespójny) z twierdzenia o istnieniu cyklu Eulera. Zatem rozważmy jakąś spójną składową i jej cykl Eulera. Okazuje się, że przedstawia on optymalny sposób zamian kart, który doprowadzi do uniknięcia płacenia. Mianowicie, pierwsza osoba na cyklu jedzie do swojej stacji końcowej i przekazuje kartę osobie, która jest za nią na cyklu i tutaj wsiada. Kolejna osoba jedzie do swojej docelowej stacji i tam przekazuje kolejnej osobie na cyklu, i tak dalej. Na końcu ostatnia osoba na cyklu Eulera dojeżdża do stacji, w której zaczynała osoba pierwsza i posiada jej kartę, więc nic nie płaci.

Oznacza to, że w takim przypadku minimalnym dystansem potrzebnym do przejechania jest suma dystansów między stacjami docelowymi i początkowymi każdej osoby. Lepszego wyniku nie da się uzyskać, ponieważ jest to minimalny koszt nawet w wypadku, gdyby każda osoba nie zważając na koszty pojechałaby najkrótszą drogą do swojej stacji.