ZADANIE 1

Skoro $y^2 = 4x$, to $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Niech k będzie szukaną styczną do wykresu paraboli: $k : y = mx + c$ dla $m, c \in \mathbb{R}$. Prostą l przekształćmy do postaci kierunowej, otrzymując: $y = 2x + 2$. Ponieważ $k \mid\mid l$, to współczynniki kierunkowe tych prostych są równe, zatem $m = 2$. Niech punkt $P = (x_o, y_o)$ będzie przecięciem paraboli i prostej k. Różniczkując stronami względem x otrzymujemy:

$$y^2 = 4x \implies 2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 4 \implies \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{2}{y} \implies m = \left[\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]_{(x_o, y_o)} = \frac{2}{y_o} = 2 \implies y_o = 1.$$

Skoro (x_o, y_o) należy do paraboli, to $y_o^2 = 1 = 4x_o \implies x_o = \frac{1}{4}$, i $P = (\frac{1}{4}, 1)$.

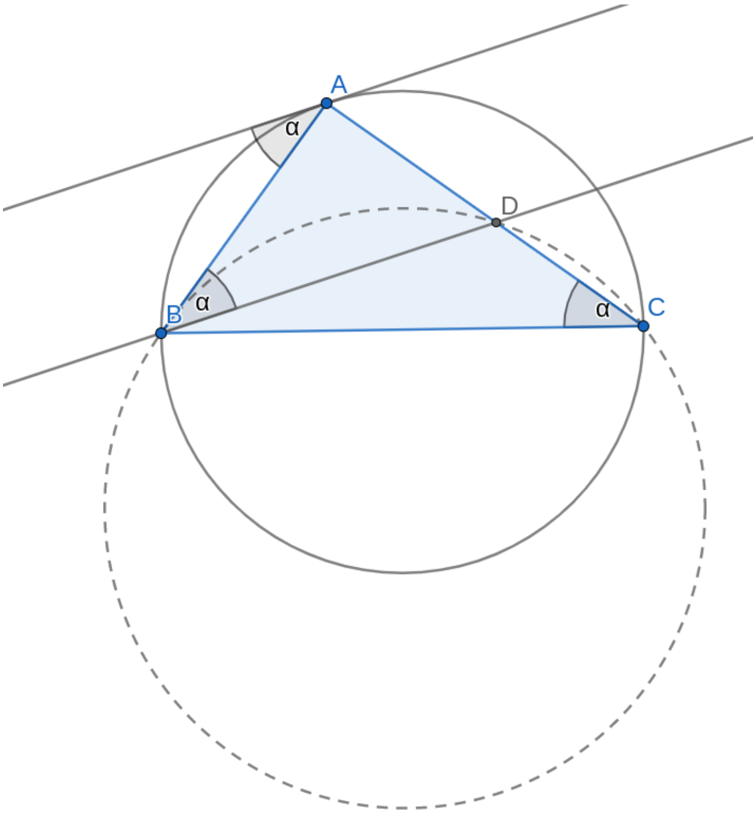
Odległość punktu P od prostej l wyraża się wzorem:

Rozwiązanie

wowoowowoowowwowow OKEJ DZIĘKUJE!

ZADANIE 2

ZADANIE 3



Oznaczmy przez α kąt pomiędzy odcinkiem AB a prostą styczną do okręgu opisanego na $\triangle ABC$. Z własności kątów dopisanych i opisanych opartych na tym samym łuku AB wiemy, że $\angle ACB = \alpha$. Ponadto z równoległości stycznej do prostej BD mamy, że $\angle ABD = \alpha$. Opiszmy okrąg ω na $\triangle BCD$. Skoro $\angle DBA = \angle DCB$, to prosta AB jest styczna do ω w punkcie B. Rozważmy potęgę punktu A względem ω. Mamy, że $AB^2 = AC \cdot CD$, co po spierwiastkowaniu stronami daje tezę.

$$\left\lfloor 2\sqrt{n - \lfloor\sqrt{n}\rfloor} \right\rfloor + 1 \leq \lfloor 2\sqrt{n} \rfloor$$

ZADANIE 4

get out
Założenia: $0 < \alpha, \beta < \pi$.
Teza: jeśli spełniona jest poniższe równanie, to trójkąt o dwóch kątach α, β jest prostokątny.

$$1 + \cos^2(\alpha + \beta) = \cos^2\alpha + \cos^2\beta$$

Przekształcając równoważnie:

$$\cos^2(\alpha + \beta) - \cos^2\alpha = \cos^2\beta - 1$$

$$(\cos(\alpha + \beta) - \cos\alpha)(\cos(\alpha + \beta) + \cos\alpha) = \cos^2\beta - 1 = (1 - \sin^2\beta) - 1 = -\sin^2\beta$$

Wzorki, więcej wzorków:

$$(\cos(\alpha+\beta)-\cos\alpha)(\cos(\alpha+\beta)+\cos\alpha) = -2\sin\frac{2\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\cdot 2\cos\frac{2\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2} = -\sin(2\alpha+\beta)\sin\beta = -\sin^2\beta$$

$$\sin(2\alpha+\beta)\sin\beta = \sin^2\beta$$

$$\sin\beta(\sin(2\alpha+\beta)-\sin\beta) = 0 \implies \sin\beta = 0 \vee \sin(2\alpha+\beta) = \sin\beta$$

Wiemy, że $\forall_{0<\beta<\pi} \sin\beta > 0$, zatem musi zachodzić:

$$\sin(2\alpha+\beta) = \sin\beta$$

Rozważmy dwa przypadki (bo założenia):

1. $2\alpha+\beta = \beta$, sprzeczność, bo wtedy $\alpha = 0°$.
2. $2\alpha+\beta+\beta = \pi \implies \alpha+\beta = \frac{\pi}{2} \implies$ trzeci kąt trójkąta będzie wynosić $90°$, co kończy dowód.

ZADANIE 5

Rozważmy dwusieczną kąta α wycinka. Z symetrii na tej dwusiecznej leży środek okręgu wpisanego w wycinek. Przez r oznaczmy promień okręgu wpisanego. Zatem: GET OUT

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{r}{R-r} \implies r = R\frac{\sin(\frac{\alpha}{2})}{1+\sin(\frac{\alpha}{2})}.$$

ZADANIE 6

Oznaczmy to zdarzenie przez $\mathcal{A}$. Wszystkich możliwości sześciu rzutów sześcienną kostką jest $|\Omega| = 6^6$. Teraz: do dwóch pierwszych rzutów możemy na 3 sposoby wybrać liczbę oczek mniejszą niż 4, następnie spośród pozostałych 4 rzutów na $\binom{4}{3} = 4$ sposoby możemy wybrać rzuty, które będą miały liczbę oczek równą co najmniej 4 (podczas każdego z tych rzutów może pojawić się liczba oczek równa $\{4,5,6\}$ - na trzy sposoby). Ostatni rzut będzie liczbą ze zbioru $\{1,2,3\}$, ponieważ dokładnie 3 rzuty miały liczbę oczek równą co najmniej 4. Zatem łączna liczba sposobów spełniających warunki zadania to:

$$3^2 \cdot 4 \cdot 3^3 \cdot 3 = 3^6 \cdot 4$$

Czyli prawdopodobieństwo wynosi:

$$P(\mathcal{A}) = \frac{3^6 \cdot 4}{6^6} = \frac{1}{16}.$$

ZADANIE 7

Niech $f(x) = x^5 + 5x - 1$. Policzmy pochodną: $f'(x) = 5x^4 + 5 \implies \forall_{x\in\mathbb{R}} f'(x) > 0$, zatem funkcja jest rosnąca w całej swojej dziedzinie. Zauważmy, że: $f(1) = 1+5-1 = 4$ oraz $f(-1) = -1-5-1 = -7$. Z własności Darboux wielomianów istnieje dokładnie jeden $x \in (-1,1)$, że $f(x) = 0$.

ZADANIE 8

1. $f(x) = y = \frac{x^2-4x+3}{x^2+4x+3}$

$$f'(x) = \frac{(x^2-4x+3)'(x^2+4x+3)-(x^2-4x+3)(x^2+4x+3)'}{(x^2-4x+3)^2} =$$

$$= \frac{(2x-4)(x^2+4x+3)-(x^2-4x+3)(2x+4)}{(x^2+4x+3)^2} = \frac{8(x^2-3)}{(x^2-4x+3)^2}$$

Dziedzina hshsh.

$$f'(x) = 0 \iff 8(x^2-3) = 0 \iff x \in \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$$

2. $g(x) = y = \frac{x\sqrt{x}}{1-x}$

$$g'(x) = \frac{(x\sqrt{x})'(1-x)-(1-x)'(x\sqrt{x})}{(1-x)^2} = \frac{\frac{3}{2}\sqrt{x}(1-x)+x\sqrt{x}}{(1-x)^2} = \frac{\sqrt{x}(3-x)}{2(x-1)^2}$$

$$g'(x) = 0 \iff \sqrt{x}(3-x) = 0 \iff x \in \{0, 3\}.$$

ZADANIE 9

Wzór na sumę piątych potęg pierwszych n liczb naturalnych wyraża się wzorem:

$$S_n = \frac{n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)}{12}$$

Udowodnijmy go indukcyjnie. Baza indukcji: $n = 1$: $S_1 = \frac{1\cdot 2^2\cdot(2+2-1)}{12} = \frac{12}{12} = 1$. Krok indukcyjny - załóżmy, że dla pewnego $k \in \mathbb{Z}_+$ wzór ten jest spełniony. Rozważmy teraz

$$\sum_{i=1}^{k+1} i^5 = \sum_{i=1}^{k} i^5 + (k+1)^5 = \frac{k^2(k+1)^2(2k^2+2k-1)}{12} + (k+1)^5 = \frac{(k+1)^2(k^2(2k^2+2k-1)+12(k+1)^3)}{12} =$$

$$= \frac{(k+1)^2(2k^4+14k^3+35k^2+36k+12)}{12} = \frac{(k+1)^2(k+2)^2(2k^2+6k+3)}{12} =$$

$$= \frac{(k+1)^2(k+2)^2(2(k+1)^2+2(k+1)-1)}{12},$$

co kończy dowód indukcyjny. Zatem

$$S_{2021} = \sum_{i=1}^{2021} i^5 = \frac{2021^2\cdot 2022^2\cdot(2\cdot 2021^2+2\cdot 2021-1)}{12} = (43\cdot 47)^2\cdot\frac{2022}{6}\cdot\frac{2022}{2}\cdot 8172923 = 43^2\cdot 47^2\cdot 337\cdot 3\cdot 337\cdot 11\cdot 742993$$

$$S_{2021} = 3\cdot 11\cdot 43^2\cdot 47^2\cdot 337^2\cdot 742993.$$