Opracowanie: ZAM
Zamach

1 Uproszczona treść zadania Zamach

Mamy zmodyfikowaną szachownicę. Szachownica ma N kolumn ($N \leq 1\,000$), których „dolna krawędź” leży na jednej prostej. Każda kolumna jednak może mieć inną wysokość, tzn. inną liczbę pól. Na wejściu dodatkowo dostajemy K wież. Chcemy wiedzieć na ile sposobów możemy rozstawić te wieże tak, aby się nie szachowały (modulo $10^9 + 7$). Wieże szachują się wtedy kiedy są w tej samej kolumnie lub w tym samym wierszu, przy czym pomiędzy wieżami, w wierszu tym nie może być „dziury”.

2 Opis rozwiązań zadania Zamach

Podstawą planszy nazwiemy rozmiar jej dolnego boku (czyli N dla całej planszy z zadania).

Tablicą wyników dla planszy o podstawie N, nazwiemy taką tablicę tab o rozmiarze N, gdzie $tab[I]$ to liczba sposobów rozmieszczenia I wież na tej planszy (czyli wynik dla tej planszy przy założeniu, że chcemy rozmieścić dokładnie I wież).

Obserwacja 1: Przyjmijmy, że na planszy o podstawie N istnieje kolumna o wysokości 0. Wtedy możemy podzielić planszę na dwie części: lewą o podstawie X i prawą o podstawie Y (po odpowiednich stronach od tej kolumny). Obie te plansze są od siebie w pełni niezależne (wieże pomiędzy nimi się nie szachują). Jeśli mamy tablice wyników dla obu tych planszy (lewej i prawej) $tabLEWA[X]$ i $tabPRAWA[Y]$ to możemy na podstawie nich obliczyć tablicę wyników dla całej planszy $tabCAŁA[N]$. Takie obliczenie wykonujemy w złożoności $O(X \cdot Y)$. Robimy to po prostu tak: $tabCAŁA[K] = tabLEWA[0] \cdot tabPRAWA[K] + tabLEWA[1] \cdot tabPRAWA[K-1] + ... + tabLEWA[K] \cdot tabPRAWA[0]$.

Obserwacja 2: Przyjmijmy, że na planszy o podstawie N nie istnieje kolumna o wysokości 0 (czyli najniższy wiersz jest „pełny”). Jeśli mamy tablicę wyników dla tej planszy to możemy w złożoności $O(N)$ policzyć tablicę wyników dla planszy, w której każda kolumna jest zmniejszona o 1 (czyli dolny wiersz jest wykreślony). Niech $tabD[N]$ oznacza tablicę wyników dla początkowej planszy, a $tabG[N]$ oznacza tablicę wyników dla planszy, w której każda kolumna jest zmniejszona o 1 (czyli dolny wiersz jest wykreślony). Zauważmy, że $tabG[K] = tabD[K] - tabG[K-1] \cdot (N - (K-1))$ dla każdego K ($1 \leq K \leq N$). Jest tak, ponieważ liczba sposobów rozmieszczenia K wież na planszy bez dolnego wiersza jest równa liczbie sposobów rozmieszczenia K wież na całej planszy odjąć liczba sposobów rozmieszczenia K wież na całej planszy z założeniem, że w najniższym wierszu musi stać wieża. Jeśli chcemy rozmieścić K wież na całej planszy i w najniższym wierszu koniecznie musi stać wieża to możemy zrobić tak, że najpierw rozmieścimy $K-1$ wież na planszy bez najniższego wiersza, a następnie w najniższym wierszu postawimy wieżę na jednej z $N-(K-1)$ pozycji, które pozostały do wykorzystania (nieszachowane). Analogicznie możemy zrobić w drugą stronę, czyli też liczyć tablicę wyników dla planszy, w której każda kolumna została zwiększona o 1 (czyli dolny wiersz dostawiony).

Rozwiązanie zadania w złożoności $O(N \cdot (N + H))$ (gdzie H to wysokość najwyższej kolumny): Jeśli najniższy wiersz jest pełny to go wykreślamy, obliczamy tablicę wyników rekurencyjnie dla pozostałej planszy, a następnie dostawiamy najniższy wiersz i obliczamy końcową tablicę wyników korzystając z *Obserwacji 2* w złożoności $O(N)$. Jeśli natomiast istnieje kolumna o wysokości 0 to wtedy dzielimy planszę na dwie: lewą o podstawie X i prawą o podstawie Y, następnie obliczamy tablice wyników rekurencyjnie dla obu tych planszy, a następnie korzystając z *Obserwacji 1* obliczamy końcową tablicę wyników dla całej planszy w złożoności $O(X \cdot Y)$.

Obserwacja 3: Jeśli mamy prostokąt o wymiarach $N \times M$ i chcemy na nim rozmieścić K wież to możemy to zrobić na $\binom{N}{K} \cdot \binom{M}{K} \cdot (K!)$ sposobów. Ta liczba po obliczeniu wynosi: $\frac{N! \cdot M!}{(N-K)! \cdot (M-K)! \cdot K!}$, a to jest równe $\frac{N!}{(N-K)!} \cdot \frac{M!}{(M-K)!} / (K!)$. Mamy możliwość obliczenia tego w złożoności $O(K)$ bardzo prosto jeśli możemy wykonywać "dzielenie modulo"(odwrotność modulo). Jeśli $N < K$ lub $M < K$ to wtedy wynikiem jest oczywiście 0.

Rozwiązanie zadania w złożoności $O(N^2 \cdot \sqrt{N})$: Znajdujemy najniższą kolumnę na planszy. Dzielimy planszę na dwie: lewą o podstawie X i prawą o podstawie Y ($X + Y + 1 = N$). Najniższa kolumna jest po środku. Niech V oznacza wysokość najniższej kolumny. Bez straty ogólności możemy przyjąć, że $X \leq Y$ (ponieważ planszę możemy odbić symetrycznie). Teraz rozważymy dwa przypadki.

Przypadek $X > \sqrt{Y}$: W tym przypadku każdą kolumnę zmniejszamy o V. Po tej operacji nasza najniższa kolumna ma wysokość 0. Następnie obliczamy rekurencyjnie tablicę wyników dla lewej planszy, oraz dla prawej planszy. Gdy już obliczyliśmy te tablice wyników to korzystając z *Obserwacji 1*, scalamy te 2 tablice w jedną tablicę wyników dla całej planszy (złożoność $O(X \cdot Y)$) $tabCALA[N]$. Następnie na dole dostawiamy z powrotem V wierszy i obliczamy ostateczną tablicę wyników dla całej planszy. Jednak nie możemy tego zrobić po prostu korzystając z *Obserwacji 2*, ponieważ wtedy obliczenie ostatecznej tablicy wyników miałoby złożoność $O(V \cdot N)$, a V może być bardzo duże (np. 10^9). W celu obliczenia ostatecznej tablicy wyników skorzystamy z *Obserwacji 3*. Bierzemy pod uwagę każdą parę liczb (a,b) $(1 \leq a,b \leq N)$. Liczba a oznacza ile wież chcemy ustawić powyżej V najniższych wierszy, a liczba b oznacza ile wież chcemy ustawić wewnątrz prostokąta składającego się z V najniższych wierszy. Rozważamy każdą możliwą parę (a,b), więc rozważymy każde możliwe ustawienie wież. Dla każdej pary (a,b) policzymy na ile sposobów w taki sposób można rozstawić wieże i ten wynik dodamy do ostatecznej tablicy wyników pod indeksem $a+b$, bo tyle będzie łącznie wież. Jeśli na górze rozstawiamy a wież to możemy to zrobić na $tabCALA[a]$ sposobów. Jeśli już rozstawiliśmy na górze a wież to a kolumn jest teraz źaszachowanych", więc nasz dolny prostokąt o wysokości V śtracił"a kolumn (nie możemy tam umieszczać wież), więc pozostał nam prostokąt o wymiarach $V \times (N-a)$. W takim prostokącie, korzystając z *Obserwacji 3*, możemy rozstawić b wież na $\frac{V! \cdot (N-a)!}{(V-b)! \cdot (N-a-b)! \cdot b!}$ sposobów. Czyli łącznie parę (a,b) da się uzyskać na $tabCALA[a] \cdot \frac{V! \cdot (N-a)!}{(V-b)! \cdot (N-a-b)! \cdot b!}$ sposobów. Zwiększając b o 1 jesteśmy w stanie w czasie stałym obliczyć ten wzór (o ile możemy korzystać z odwrotności modulo). W ten sposób ostateczną tablicę wyników obliczamy w złożoności $O(Y^2)$.

Przypadek $X \leq \sqrt{Y}$: W tym przypadku nie zmniejszamy kolumn prawej planszy o V. Rekurencyjnie obliczamy tablicę wyników dla prawej planszy (bez zmniejszonych kolumn) $tabPRAWA[Y]$. Następnie rekurencyjnie obliczamy tablicę wyników dla lewej planszy (ale tutaj ze zmniejszonymi kolumnami o V) $tabLEWA[X]$. Gdy już mamy te 2 tablice wyników obliczone to teraz chcemy obliczyć ostateczną tablicę wyników dla całej oryginalnej planszy. W tym celu rozważymy każdą trójkę liczb (a,b,c). $(1 \leq a \leq x,\ 1 \leq b \leq x+1,\ 1 \leq c \leq y)$. Liczba a oznacza ile wież chcemy ustawić w lewej planszy (tej o podstawie X) powyżej V najniższych wierszy. Liczba b oznacza ile wież chcemy ustawić wewnątrz V najniższych wierszy w lewej planszy połączonej ze środkową kolumną (bez prawej planszy). Prostokąt ten ma wymiary $V \times (X+1)$. Liczba c oznacza ile wież chcemy ustawić w całej prawej planszy. Analogicznie jak w pierwszym przypadku, obliczamy liczbę sposobów dla każdej takiej trójki i dodajemy do ostatecznej tablicy wyników pod indeksem $a+b+c$. Gdy w lewej planszy na górze rozstawiamy a wież to możemy to zrobić na $tabLEWA[a]$ sposobów. Po rozstawieniu a wież, zostało wykreślonych a kolumn, więc prostokąt poniżej ma teraz wymiary $V \times (X+1-a)$. W takim prostokącie b wież możemy rozstawić na $\frac{V! \cdot (X+1-a)!}{(V-b)! \cdot (X+1-a-b)!}$ sposobów. Analogicznie jak w pierwszym przypadku, jeśli będziemy zwiększali b o 1 to w czasie stałym możemy obliczać ten wzór. Gdy już mamy obliczoną liczbę sposobów na rozstawienie pierwszych a wież i kolejnych b wież to teraz chcemy obliczyć liczbę sposobów na ustawienie c wież w prawej planszy. Zauważmy, że pierwsze a wież w ogóle nie wpływają na prawą planszę. Z kolei każda z kolejnych b wież wpływa na prawą planszę (wykreśla z niej jeden pełny wiersz, który jest szachowany). Dzięki temu możemy obliczyć tablicę wyników dla prawej planszy z wykreślonymi b najniższymi wierszami korzystając z *Obserwacji 2* w złożoności $O(b)$. Obliczamy taką tablicę wyników i z tej tablicy wyników odczytujemy wynik spod indeksu c. Dzięki temu mamy wszystko co potrzebowaliśmy i możemy obliczyć ostateczną tablicę wyników. Obliczanie tej tablicy zajęło nam złożoność $O(X^2 \cdot Y)$.

W ten sposób rozwiązaliśmy zadanie w złożoności $O(N^2\sqrt{N})$.