Zestaw próbny Olimpiady Matematycznej

Czas trwania: 5h

online, grudzień 2022 (dzień pierwszy)

Zadanie 1

Punkt H to ortocentrum trójkąta ostrokątnego ABC. Niech M to środek boku BC, a D to rzut prostokątny H na prostą AM. Udowodnij, że punkty B, H, D i C leżą na jednym okręgu.

Zadanie 2

Rozwiąż w liczbach całkowitych x, y, z równanie:

$$5x^2 - 14y^2 = 11z^2.$$

Zadanie 3

Niech $n \geqslant 2$ oraz $a_1 \geqslant \ldots \geqslant a_n > 0$ to liczby rzeczywiste spełniające:

$$(a_1 + \ldots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right) \leqslant \left(n + \frac{1}{2}\right)^2.$$

Udowodnij, że $a_1 \leqslant 4a_n$.

Zestaw próbny Olimpiady Matematycznej

Czas trwania: 5h

online, grudzień 2022 (dzień pierwszy)

Zadanie 1

Punkt H to ortocentrum trójkąta ostrokątnego ABC. Niech M to środek boku BC, a D to rzut prostokątny H na prostą AM. Udowodnij, że punkty B, H, D i C leżą na jednym okręgu.

Zadanie 2

Rozwiąż w liczbach całkowitych x, y, z równanie:

$$5x^2 - 14y^2 = 11z^2.$$

Zadanie 3

Niech $n \geqslant 2$ oraz $a_1 \geqslant \ldots \geqslant a_n > 0$ to liczby rzeczywiste spełniające:

$$(a_1 + \ldots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right) \leqslant \left(n + \frac{1}{2}\right)^2.$$

Udowodnij, że $a_1 \leqslant 4a_n$.