Zadanie: KLI
Klikanie

Warsztaty ILO 2017-2018, grupa olimpijska, dzień 3. Dostępna pamięć: 256 MB.

Rozwiązanie wzorcowe $O(n^{log_2(n)})$

Sformułujmy nasz problem w języku grafowym.
Mamy dany graf który jest kilką. Naszym zadaniem jest wyznaczyć minimalny zbiór dominujący.

Lemat.1. *Zbiór dominujący będzie miał rozmiar co najwyżej* $\lfloor log_2(n) \rfloor$.

Dowód. Przedstawimy algorytm konstrukcji rozwiązania o takim rozmiarze. Mając daną kilkę możemy wybrać wierzchołek, z którego wychodzi krawędź do przynajmniej połowy wierzchołków (jest $\frac{n*(n-1)}{2}$ wychodzących krawędzi i n wierzchołków). Wybierając taki wierzchołek możemy wyrzucić jego i wszystkie wierzchołki do których prowadziła krawędź z niego. Po takim zabiegu otrzymamy znowu kilkę. Możemy powtarzać ten algorytm dopóki nie zostanie nam jeden wierzchołek. Wykonamy $\lfloor log_2(n) \rfloor$ kroków algorytmu. □

Umiemy już znaleźć rozwiązanie wielkości $\lfloor log_2(n) \rfloor \leq 6$ dla $n \leq 75$. Teraz chcemy tylko sprawdzić czy nie istnieje mniejsze rozwiązanie. Możemy więc sprawdzić każdy możliwy podzbiór wierzchołków o mocy mniejszej niż 6. Takich podzbiorów jest $\sum_{i=1}^{5} \binom{n}{i} = 18\,545\,215$ dla $n = 75$.

Rozwiązanie można zapisać rekurencyjnie z użyciem bitmasek aby nie pomnożyć złożoności przez dodatkowy czynnik n. Wynik o mocy 6 należy sprawdzić algorytmem z dowodu. I mamy rozwiązanie.

Co prawda ograniczyliśmy wynik z góry przez 6, ale okazuje się, że nie istnieje test na którym wynik tyle wynosi, więc można zrezygnować z pisania zachłannego algorytmu, ale jest to trudno udowodnić.

Dobrze napisane rozwiązania z dodatkowym czynnikiem n też były przepuszczane.

Fundusze Europejskie Program Regionalny

Podlaskie

Unia Europejska Europejski Fundusz Społeczny