Dany jest trójkąt ostrokątny ABC. Niech AD będzie wysokością trójkąta ABC, punkty H i O odpowiednio ortocentrum i środkiem okręgu opisanego na tym trójkącie. Niech punkt K leży na odcinku AH i spełnia warunek $AK = HD$. Niech punkt L leży na odcinku CD i spełnia warunek $CL = DB$. Odowdnić, że punkt O leży na odcinku KL.

$OD = OL$

$OB = OC$

$\Delta BOD \equiv \Delta COL \Rightarrow OD = OL$

$H'D = DH$

$OH' = OA$

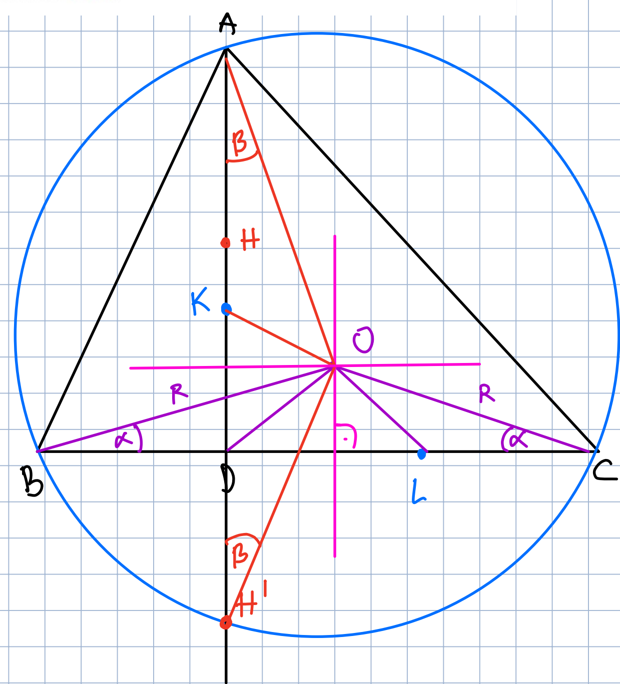
$AK = DH'$

$OK = OD = OL \Rightarrow$

$\Rightarrow$ O - śr. okręgu op na

ΔKDL - prostokątny

Zatem $O \in KL$



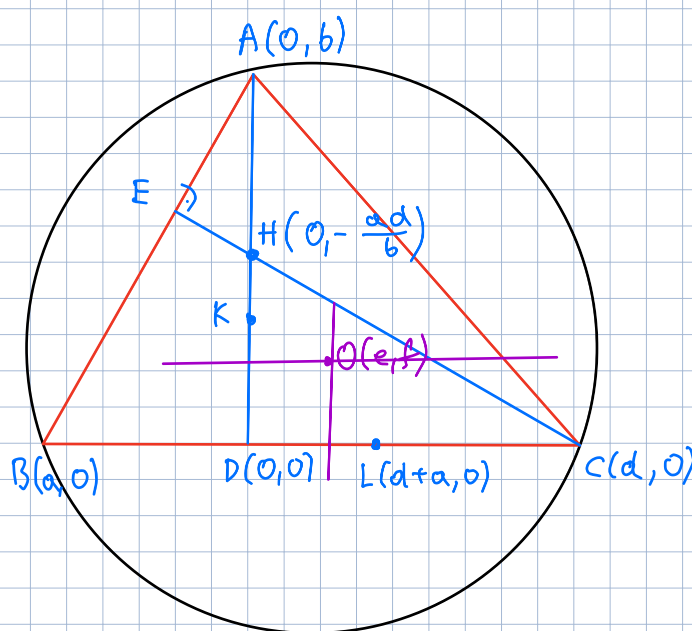
pr. AB: $y = -\frac{b}{a}x + b$

pr. CE: $y = \frac{a}{b}(x - d)$

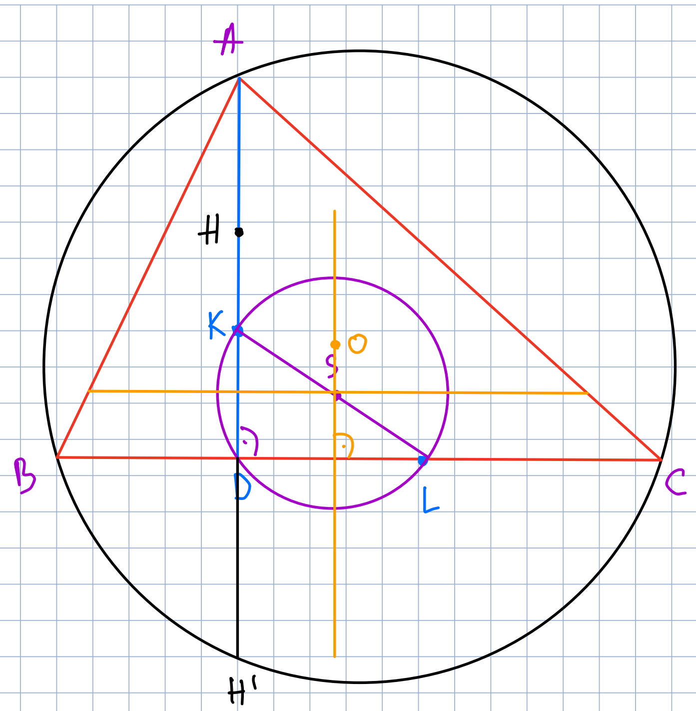
$K\left(0, \frac{b^2+ad}{b}\right)$

$OA = OB = OC$

$O\left(\frac{a+d}{2}, \frac{ad+b^2}{2b}\right)$



S – sr. dužine



Niech x, y będą dodatnimi, różnymi liczbami rzeczywistymi spełniającymi warunek:
$x^4 - y^4 = x - y$. Udowodnić nierówność:

$$\frac{x-y}{x^6-y^6} \leq \frac{4}{3}(x+y).$$

$$(x-y)(x+y)(x^2+y^2) = x-y \quad \Rightarrow \quad (x+y)(x^2+y^2) = 1$$

$$x+y = \frac{1}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\cancel{x-y}}{\cancel{(x-y)}(x+y)(x^2-xy+y^2)(x^2+xy+y^2)} = \frac{\cancel{(x+y)}(x^2+y^2)}{\cancel{(x+y)}(x^2-xy+y^2)(x^2+xy+y^2)} =$$

$$= \frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2-(xy)^2}$$

$$\frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2-(xy)^2} \leq \frac{4}{3}(x+y)$$

$$x^2+y^2 \leq \frac{4}{3}(x+y)\left((x^2+y^2)^2-(xy)^2\right)$$

$$3(x^2+y^2)^2 \leq 4\left((x^2+y^2)^2-(xy)^2\right)$$

$$4(xy)^2 \leq (x^2+y^2)^2$$

$$2xy \leq x^2+y^2$$

$$0 \leq (x-y)^2$$

Przejścia były równoważne. ∎

Wyznacz wszystkie funkcje $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, które dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}_+$ spełniają warunki:
1) $f(x+y) \geq f(x) + y$,
2) $f(f(x)) \leq x$.

$f(x) = x$

I

1) $\Rightarrow \quad f(x+y) \geq f(x) + \underset{\in \mathbb{R}_+}{y} > f(x)$

$x+y > x \ \wedge \ f(x+y) > f(x) \Rightarrow$ f ściśle rosnąca

II.

Hp. $\exists\, x_0 : \underline{f(x_0) > x_0}$

$f(f(x_0)) > f(x_0) > x_0$ sprzeczność, bo z 2) $f(f(x_0)) \leq x_0$

Wniosek: $\forall\, x \in \mathbb{R}_+ : \ f(x) \leq x$

Hp. $\exists\, x_0 : f(x_0) < x_0 \quad \Rightarrow \quad x_0 - f(x_0) > 0$

$x := x_0 - f(x_0)$

$y := f(x_0)$

$$f(\cancel{x_0 - f(x_0)) + f(x_0}) \geq f(x_0 - f(x_0)) + f(x_0)$$

$$f(x_0) \geq f(x_0 - f(x_0)) + f(x_0)$$

$$f(x_0 - f(x_0)) \leq 0 \qquad \text{sprzeczność}$$

Wniosek: $f(x) = x$, dla $x \in \mathbb{R}_+$

■

Wyznacz wszystkie funkcje $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, które dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}_+$ spełniają warunki:
1) $f(x+y) \geq f(x) + y$,
2) $f(f(x)) \leq x$.

BŁĘDNE ROZWIĄZANIA

1) Podstawmy $x = 0$

2) $x \geqslant f(x) \Rightarrow f(x) = x - a(x)$

3) $f(x+1) - f(x) = 1$

$\forall x: \quad f(x+n) - f(x) = n \Rightarrow f(x) = x + c$

Kontrprzykład: $y = [x]$

4) $y = f(x)$ rosnąca ściśle

$x := f(x) \qquad f(y + f(x)) \geqslant f(y) + f(x)$

$x + y \geqslant f(f(x+y)) \geqslant f(f(x) + y) \geqslant f(y) + f(x)$

$y = x \Rightarrow 2x \geqslant 2f(x)$

$x \geqslant f(x)$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0 \qquad 0 \leq f(x) \leq x$

$\downarrow \qquad \downarrow$

$0 \qquad 0$

$f(y+x) \geqslant f(y) + x$

$\downarrow y \to 0 \qquad \downarrow$

$f(x) \geqslant 0 + x$

$\lim_{y \to 0} f(y+x) = f(x)$

TYLKO DLA FUNKCJI CIĄGŁYCH

TW. BEZOUTE'A

$W(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$, $a_n \neq 0$

I $\quad (x - x_0) \mid W(x) \iff W(x_0) = 0$

II $\quad W(x)$ przy dzieleniu przez $(x - x_0)$ daje resztę $W(x_0)$

$$W(x) = (x - x_0) \cdot Q(x) + R$$

Udowodnij, że jeżeli wielomian o współczynnikach całkowitych przyjmuje dla trzech różnych argumentów całkowitych wartość 1, to nie ma on pierwiastków całkowitych.

$W(a) = 1$, $W(b) = 1$, $W(c) = 1$

$W(a) - 1 = 0$, $W(b) - 1 = 0$, $W(c) - 1 = 0$

Zatem $P(x) = W(x) - 1$ ma 3 pierwiastki : a, b, c

$$\left.\begin{array}{l} P(x) = (x-a)\, Q_1(x) \\ P(x) = (x-b)\, Q_2(x) \\ P(x) = (x-c) \cdot Q_3(x) \end{array}\right\} \Rightarrow P(x) = (x-a)(x-b)(x-c) \cdot Q(x)$$

$Q(x)$ ma wsp. całkowite

$$W(x) - 1 = (x-a)(x-b)(x-c)\, Q(x)$$

$$W(x) = (x-a)(x-b)(x-c)\, Q(x) + 1$$

Hp. $\quad x_0 \in \mathbb{Z} : W(x_0) = 0$

$$0 = W(x_0) = (x_0 - a)(x_0 - b)(x_0 - c)\, Q(x_0) + 1$$

$$-1 = \underset{\in \mathbb{Z}}{(x_0 - a)}\underset{\in \mathbb{Z}}{(x_0 - b)}\underset{\in \mathbb{Z}}{(x_0 - c)}\,\underset{\in \mathbb{Z}}{Q(x_0)}$$

sprzeczność, bo $x_0 - a$, $x_0 - b$, $x_0 - c$ są trzema różnymi liczbami całk.

■

Wielomian $P(x)$ stopnia n spełnia warunki $P(k) = \frac{k}{k+1}$ dla $k = 0, 1, 2, 3, \dots, n$. Wyznacz $P(n+1)$

Niech $f(x)$ będzie niestałym wielomianem o nieujemnych współczynnikach i niech $n \in \mathbb{N}$. Wówczas liczba $f(f(n)+1)$ jest podzielna przez $f(n)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $n = 1$.

$$P(k) = \frac{k}{k+1} \iff P(k)(k+1) - k = 0 \quad , k = 0, 1, \dots, n$$

$$Q(x) = \underbrace{P(x)}_{st.\, n}\underbrace{(x+1)}_{st.\, 1} - \underbrace{x}_{st.\, 1} \qquad \deg Q(x) = n+1$$

Wielomian Q ma $(n+1)$ pierwiastków: $0, 1, .., n$

$$Q(x) = a(x-0)(x-1)(x-2)\cdots(x-n)$$

$x := n+1$ $\quad Q(n+1) = a\cdot(n+1)n\cdots 1 = a\cdot(n+1)!$

$$P(x)(x+1) - x = a(x-0)\cdots(x-n)$$

Podst.: $x = -1$ $\quad \underbrace{P(-1)(-1+1)}_{=0} - (-1) = a(-1)(-2)\cdots(-1-n)$

$$a = \frac{1}{(n+1)!\,(-1)^{n+1}}$$

$$Q(n+1) = \frac{1}{(n+1)!\,(-1)^{n+1}} \cdot (n+1)!$$

$\blacksquare$

TRICK $\quad (x-y) \mid (f(x)-f(y))$

I

Z: $\quad f(x) = a_n x^n + \ldots + a_0$

$$f(x) - f(y) = (a_n x^n + \ldots + a_0) - (a_n y^n + \ldots + a_0) =$$

$$= a_n (x^n - y^n) + a_{n-1} (x^{n-1} - y^{n-1}) + \ldots + a_1 (x-y) + \cancel{a_0 - a_0}$$

$$= (x-y)\left(a_n (\quad) + \ldots + a_1 \right)$$

T: $\quad x, y$ − zmienne rzeczywiste

$$(x-y) \mid (f(x) - f(y))$$

II

Z: $\quad f(x) = a_n x^n + \ldots + a_0 \quad , a_n, \ldots, a_0$ − całkowite

$$\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$$

T: $\quad (\alpha - \beta) \mid (f(\alpha) - f(\beta))$

Czy istnieje taki wielomian f o współczynnikach całkowitych, że $f(1) = 19$ i $f(19) = 85$?

Z TRICKU

$f(19) - f(1) = 66$

$19 - 1 = 18$

$\Rightarrow 18 \nmid 66$ nie istnieje

Wielomian $P(x)$ ma współczynniki całkowite. Udowodnić, że jeżeli liczba $P(5)$ dzieli się przez 2, liczba $P(2)$ dzieli się przez 5, to liczba $P(7)$ dzieli się przez 10.

$(7-5) \mid P(7)-P(5) \Rightarrow 2 \mid P(7)-P(5)$

$2 \mid P(5)$

$\Rightarrow 2 \mid P(7)$

$(7-2) \mid P(7)-P(2) \Rightarrow 5 \mid P(7)-P(2)$

$5 \mid P(2)$

$\Rightarrow 5 \mid P(7)$

Niech $f(x)$ będzie niestałym wielomianem o nieujemnych współczynnikach i niech $n \in \mathbb{N}$. Wówczas liczba $f(f(n)+1)$ jest podzielna przez $f(n)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $n = 1$.

$\Rightarrow)$ $\quad f(f(n)+1) \equiv f(n) \pmod{f(n)}$

czyli $\quad f(n) \mid f(f(n)+1)$

$f(n)+1 \equiv n \pmod{f(n)}$

TW $\quad a \equiv b \pmod{m} \iff f(a) \equiv f(b) \pmod{m}$

$n \equiv 1 \pmod{f(n)}$

$f(n) \geqslant n$, bo f rosnący ściśle.

Zatem $\quad n = 1$

Wielomian o współczynnikach całkowitych daje przy dzieleniu przez wielomian $x^2 - 12x + 11$ resztę $990x - 889$. Wykazać, że wielomian ten nie ma pierwiastków całkowitych.