

Olimpiada Matematyczna**Próbnny II etap***26 stycznia 2022**Autor zestawu: Jacek Dymel****Czas pracy: 300 minut***

1. Okrąg o_1 przecina okrąg o_2 w punktach A i B oraz przechodzi przez środek S okręgu o_2 . Na okręgu o_1 wybrano punkt P należący do łuku AB , do którego nie należy punkt S . Proste PA i PB przecinają okrąg o_2 odpowiednio w punktach $E \neq A$ i $F \neq B$. Wykaż, że $AB = EF$.
2. Niech x, y będą dodatnimi liczbami rzeczywistymi spełniającymi warunek $x + y = 2021$. Znaleźć największą wartość wyrażenia:

$$[x]y + [y]x.$$

$[a]$ jest częścią całkowitą liczby a , czyli największą liczbą całkowitą mniejszą lub równą od a .

3. Udowodnić, że nie istnieją takie dodatnie liczby naturalne, że suma kwadratów ich pięciu najmniejszych dzielników jest kwadratem liczby naturalnej.

Powodzenia!