
Olimpiada Matematyczna**Próbnny II etap***27 stycznia 2022**Autor zestawu: Jacek Dymel****Czas pracy: 300 minut***

1. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC . Niech AD będzie wysokością trójkąta ABC , punkty H i O odpowiednio ortocentrum i środkiem okręgu opisanego na tym trójkącie. Niech punkt K leży na odcinku AH i spełnia warunek $AK = HD$. Niech punkt L leży na odcinku CD i spełnia warunek $CL = DB$. Odowodnić, że punkt O leży na odcinku KL .
2. Niech x, y będą dodatnimi, różnymi liczbami rzeczywistymi spełniającymi warunek:
 $x^4 - y^4 = x - y$. Udowodnić nierówność:

$$\frac{x - y}{x^6 - y^6} \leq \frac{4}{3}(x + y).$$

3. Wyznacz wszystkie funkcje $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, które dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}_+$ spełniają warunki:
 - 1) $f(x + y) \geq f(x) + y$,
 - 2) $f(f(x)) \leq x$.

Powodzenia!