Zadanie: SLD
Składanie papieru

Warsztaty ILO, grupa olimpijska. Dostępna pamięć: 128 MB.

Rozwiązanie wzorcowe $O(t\ log\ k\ )$

Rozważmy jeden zestaw danych. Zastanówmy się, jak będzie wyglądał ciąg zagięć kartek dla pewnej liczby złożeń. Zgięcia wklęsłe oznaczmy przez `D`, a wypukłe przez `U`. Przyjrzyjmy się kilku zgięciom dla małych n.

- $n = 1$: `D`
- $n = 2$: `DDU`
- $n = 3$: `DDUDDUU`

Można sobie te przypadki zweryfikować ręcznie na kartce. Zauważmy, że ciąg zagięć dla kolejnych n ma jako swój początek ciąg zagieć dla n mniejszego o 1. Istotnie, taki ciąg będzie się zaczynał tak samo, ale nie tylko. Mianowicie, środkowy element zawsze będzie wklęsłym zagięciem, ponieważ odpowiada ono pierwszemu złożeniu kartki. Jak natomiast ma się prawa połowa do pierwszej? Można zauważyć, że jest to 'zanegowana' pierwsza połowa, a dodatkowo w odwrotnej kolejności. W przypadku $n = 3$, `DDU` przechodzi najpierw na `UUD` (negacja), a następnie `DUU` (odwrócenie kolejności). Oznacza to, że możemy bardzo łatwo wyznaczyć ciąg zagięć dla pewnego n znając ciąg zagięć dla $n - 1$.

Kluczową obserwacją jest to, że długość tego ciągu rośnie wykładniczo. Dokładniej długość ciągu dla pewnego n wynosi $2^n - 1$. Co nam to daje? Otóż jeśli mamy dane k, to k-te zagięcie będzie wyznaczone w bardzo wczesnym złożeniu! Nawet dla $k = 10^{18}$, k-te zgięcie będzie już znane po około 60 złożeniu. Oznacza to, że n tak naprawdę można zmniejszyć do $log\ k$.

Algorytm będzie rekurencyjny i wygląda następująco: dla danego n i k, sprawdzamy, czy k-te zgięcie będzie w lewej połowie czy w prawej, czy na środku. Jeśli na środku, to wynikiem jest zgięcie wklęsłe. Jeśli w lewej, to wywołujemy się rekurencyjnie dla $n - 1, k$. Jeśli natomiast w prawej połowie, to odbijamy nasze k na lewą połowę, wywołujemy się rekurencyjnie dla nowego k, a wynik negujemy zgodnie z obserwacjami powyżej. Ponieważ zmniejszyliśmy n do $log\ k$, to nasz algorytm wykonał $log\ k$ operacji. Zatem złożoność całego rozwiązania dla wszystkich zestawów łącznie to $t\ log\ k$.