# Zestaw próbny Olimpiady Matematycznej

**Czas trwania: 5h**

online, grudzień 2022 (dzień pierwszy)

**Zadanie 1**

Punkt $H$ to ortocentrum trójkąta ostrokątnego $ABC$. Niech $M$ to środek boku $BC$, a $D$ to rzut prostokątny $H$ na prostą $AM$. Udowodnij, że punkty $B$, $H$, $D$ i $C$ leżą na jednym okręgu.

**Zadanie 2**

Rozwiąż w liczbach całkowitych $x$, $y$, $z$ równanie:

$$5x^2 - 14y^2 = 11z^2.$$

**Zadanie 3**

Niech $n \geqslant 2$ oraz $a_1 \geqslant \ldots \geqslant a_n > 0$ to liczby rzeczywiste spełniające:

$$(a_1 + \ldots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right) \leqslant \left(n + \frac{1}{2}\right)^2.$$

Udowodnij, że $a_1 \leqslant 4a_n$.


# Zestaw próbny Olimpiady Matematycznej

**Czas trwania: 5h**

online, grudzień 2022 (dzień pierwszy)

**Zadanie 1**

Punkt $H$ to ortocentrum trójkąta ostrokątnego $ABC$. Niech $M$ to środek boku $BC$, a $D$ to rzut prostokątny $H$ na prostą $AM$. Udowodnij, że punkty $B$, $H$, $D$ i $C$ leżą na jednym okręgu.

**Zadanie 2**

Rozwiąż w liczbach całkowitych $x$, $y$, $z$ równanie:

$$5x^2 - 14y^2 = 11z^2.$$

**Zadanie 3**

Niech $n \geqslant 2$ oraz $a_1 \geqslant \ldots \geqslant a_n > 0$ to liczby rzeczywiste spełniające:

$$(a_1 + \ldots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right) \leqslant \left(n + \frac{1}{2}\right)^2.$$

Udowodnij, że $a_1 \leqslant 4a_n$.

# Zestaw próbny Olimpiady Matematycznej

**Czas trwania: 5h**

online, grudzień 2022 (dzień drugi)

**Zadanie 4**

Rozstrzygnij, czy istnieje nieskończenie wiele takich liczb pierwszych $p$, dla których istnieje dodatnia liczba naturalna $n$ o tej własności, że liczba $n^2+n+1$ jest wielokrotnością liczby $p$.

**Zadanie 5**

Krata trójkątna jest zbudowana z z jednostkowych (czyli o boku 1) trójkątów równobocznych. Wzdłuż krawędzi kraty wyznaczono wielokąt, niekoniecznie wypukły, ale bez samo przecięć (czyli każdy wierzchołek kraty należy do maksymalnie dwóch krawędzi wielokąta). Wiedząc, że obwód wielokąta wynosi 400 udowodnij, że musi on mieć przynajmniej jeden kąt o wartości dokładnie $120^\circ$ lub $240^\circ$.

**Zadanie 6**

Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$ oraz taki punkt $M$ na $AB$, że czworokąty $AMCD$ i $BMDC$ są opisane na okręgach o środkach $O_1$ i $O_2$. Prosta $O_1O_2$ przecina $DM$ i $CM$ w punktach $X$ i $Y$. Udowodnij, że jeśli $MX = MY$, to $ABCD$ jest cykliczny.


# Zestaw próbny Olimpiady Matematycznej

**Czas trwania: 5h**

online, grudzień 2022 (dzień drugi)

**Zadanie 4**

Rozstrzygnij, czy istnieje nieskończenie wiele takich liczb pierwszych $p$, dla których istnieje dodatnia liczba naturalna $n$ o tej własności, że liczba $n^2+n+1$ jest wielokrotnością liczby $p$.

**Zadanie 5**

Krata trójkątna jest zbudowana z z jednostkowych (czyli o boku 1) trójkątów równobocznych. Wzdłuż krawędzi kraty wyznaczono wielokąt, niekoniecznie wypukły, ale bez samo przecięć (czyli każdy wierzchołek kraty należy do maksymalnie dwóch krawędzi wielokąta). Wiedząc, że obwód wielokąta wynosi 400 udowodnij, że musi on mieć przynajmniej jeden kąt o wartości dokładnie $120^\circ$ lub $240^\circ$.

**Zadanie 6**

Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$ oraz taki punkt $M$ na $AB$, że czworokąty $AMCD$ i $BMDC$ są opisane na okręgach o środkach $O_1$ i $O_2$. Prosta $O_1O_2$ przecina $DM$ i $CM$ w punktach $X$ i $Y$. Udowodnij, że jeśli $MX = MY$, to $ABCD$ jest cykliczny.

# Zestaw próbny Olimpiady Matematycznej

**Czas trwania: 5h**

online, grudzień 2021 (dzień pierwszy)

**Zadanie 1**
Znajdź wszystkie funkcje $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ spełniające:

$$f(f(n)) = n + 2$$

dla wszystkich liczb naturalnych $n$.

**Zadanie 2**
Na płaszczyźnie dane są punkty $A$ i $B$. Funkcja $f$ przypisuje każdemu punktowi $C$ (poza prostą $AB$) wartość $\sphericalangle AE_CB$, gdzie $E_C$ to środek $CH_C$, a $H_C$ to ortocentrum trójkąta $ABC$. Znajdź maksimum, jakie może przyjąć funkcja i opisz zbiór punktów, dla których maksimum jest osiągane.

**Zadanie 3**
Święty Mikołaj gra z Elfem w następującą grę. Mikołaj wybiera trójkę $(x, y, z)$ liczb całkowitych, gdzie $0 \leqslant x, y, z \leqslant 9$. Elf musi odgadnąć trójkę Mikołaja w jak najmniejszej liczbie ruchów. Każdy ruch wygląda następująco:

1. Elf podaje trójkę $(a, b, c)$ jak wyżej.

2. Mikołaj przekazuje wartość liczby:

$$|x + y - a - b| + |y + z - b - c| + |z + x - c - a|.$$

Znajdź najmniejszą liczbę ruchów, jakie musi wykonać Elf, aby być pewnym trójki Mikołaja.


# Zestaw próbny Olimpiady Matematycznej

**Czas trwania: 5h**

online, grudzień 2021 (dzień pierwszy)

**Zadanie 1**
Znajdź wszystkie funkcje $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ spełniające:

$$f(f(n)) = n + 2$$

dla wszystkich liczb naturalnych $n$.

**Zadanie 2**
Na płaszczyźnie dane są punkty $A$ i $B$. Funkcja $f$ przypisuje każdemu punktowi $C$ (poza prostą $AB$) wartość $\sphericalangle AE_CB$, gdzie $E_C$ to środek $CH_C$, a $H_C$ to ortocentrum trójkąta $ABC$. Znajdź maksimum, jakie może przyjąć funkcja i opisz zbiór punktów, dla których maksimum jest osiągane.

**Zadanie 3**
Święty Mikołaj gra z Elfem w następującą grę. Mikołaj wybiera trójkę $(x, y, z)$ liczb całkowitych, gdzie $0 \leqslant x, y, z \leqslant 9$. Elf musi odgadnąć trójkę Mikołaja w jak najmniejszej liczbie ruchów. Każdy ruch wygląda następująco:

1. Elf podaje trójkę $(a, b, c)$ jak wyżej.

2. Mikołaj przekazuje wartość liczby:

$$|x + y - a - b| + |y + z - b - c| + |z + x - c - a|.$$

Znajdź najmniejszą liczbę ruchów, jakie musi wykonać Elf, aby być pewnym trójki Mikołaja.

# Zestaw próbny Olimpiady Matematycznej

**Czas trwania: 5h**

online, grudzień 2021 (dzień drugi)

**Zadanie 4**

Udowodnij, że zbiór $\{1, \ldots, 1989\}$ może być przedstawiony w postaci sumy parami rozłącznych zbiorów $A_i$ (dla $i \in \{1, \ldots, 117\}$) tak, że:

- każdy zbiór $A_i$ posiada 17 elementów;
- suma elementów każdego $A_i$ jest taka sama.

**Zadanie 5**

Dany jest trójkąt ostrokątny $ABC$, gdzie $BE$ i $CF$ to wysokości oraz $M$ to środek $BC$. Niech $\omega$ to okrąg opisany na $BCEF$ oraz $P$ to przecięcie $AM$ i $EF$. Dla dowolnego punktu $X$ leżącego na krótszym łuku $EF$ niech $Y$ to drugie przecięcie prostej $XP$ i $\omega$. Udowodnij, że $\sphericalangle XAY = \sphericalangle XYM$.

**Zadanie 6**

Znajdź wszystkie takie pary $(a, b)$ dodatnich liczb całkowitych, że liczba:

$$\frac{a^2}{2ab^2 - b^3 + 1}$$

jest dodatnią liczbą całkowitą.


# Zestaw próbny Olimpiady Matematycznej

**Czas trwania: 5h**

online, grudzień 2021 (dzień drugi)

**Zadanie 4**

Udowodnij, że zbiór $\{1, \ldots, 1989\}$ może być przedstawiony w postaci sumy parami rozłącznych zbiorów $A_i$ (dla $i \in \{1, \ldots, 117\}$) tak, że:

- każdy zbiór $A_i$ posiada 17 elementów;
- suma elementów każdego $A_i$ jest taka sama.

**Zadanie 5**

Dany jest trójkąt ostrokątny $ABC$, gdzie $BE$ i $CF$ to wysokości oraz $M$ to środek $BC$. Niech $\omega$ to okrąg opisany na $BCEF$ oraz $P$ to przecięcie $AM$ i $EF$. Dla dowolnego punktu $X$ leżącego na krótszym łuku $EF$ niech $Y$ to drugie przecięcie prostej $XP$ i $\omega$. Udowodnij, że $\sphericalangle XAY = \sphericalangle XYM$.

**Zadanie 6**

Znajdź wszystkie takie pary $(a, b)$ dodatnich liczb całkowitych, że liczba:

$$\frac{a^2}{2ab^2 - b^3 + 1}$$

jest dodatnią liczbą całkowitą.

# Zestaw próbny Olimpiady Matematycznej

**Czas trwania: 5h**

Krosno, 29 grudnia 2020 (dzień pierwszy)

**Zadanie 1**

Znajdź wszystkie liczby $a \in \mathbb{N}_+$ takie, że istnieje dokładnie jedna funkcja $f : \mathbb{N}_+ \to \mathbb{N}_+$ taka, że $f(1) = a$ i zachodzi:

$$f(n) = f(f(n)) - 1 \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}_+.$$

**Zadanie 2**

Każdy punkt kraty całkowitej (czyli zbioru punktów o obu współrzędnych całkowitych) pomalowano na biało lub czarno. Udowodnij, że istnieje nieskończony, jednokolorowy podzbiór tej kraty posiadający środek symetrii.

**Zadanie 3**

W trójkącie ostrokątnym $ABC$ punkt $O$ jest środkiem okręgu opisanego, zaś punkt $H$ jest punktem przecięcia wysokości. Prosta $AH$ przecina okrąg opisany na trójkącie $ABC$ w punkcie $K$ różnym od $A$. Proste $OK$ i $BC$ przecinają się w punkcie $P$. Punkt $Q$ jest symetryczny do punktu $P$ względem środka odcinka $OH$. Proste $AQ$ i $BC$ przecinają się w punkcie $R$. Dowieść, że $BP = CR$.


# Zestaw próbny Olimpiady Matematycznej

**Czas trwania: 5h**

Krosno, 29 grudnia 2020 (dzień pierwszy)

**Zadanie 1**

Znajdź wszystkie liczby $a \in \mathbb{N}_+$ takie, że istnieje dokładnie jedna funkcja $f : \mathbb{N}_+ \to \mathbb{N}_+$ taka, że $f(1) = a$ i zachodzi:

$$f(n) = f(f(n)) - 1 \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}_+.$$

**Zadanie 2**

Każdy punkt kraty całkowitej (czyli zbioru punktów o obu współrzędnych całkowitych) pomalowano na biało lub czarno. Udowodnij, że istnieje nieskończony, jednokolorowy podzbiór tej kraty posiadający środek symetrii.

**Zadanie 3**

W trójkącie ostrokątnym $ABC$ punkt $O$ jest środkiem okręgu opisanego, zaś punkt $H$ jest punktem przecięcia wysokości. Prosta $AH$ przecina okrąg opisany na trójkącie $ABC$ w punkcie $K$ różnym od $A$. Proste $OK$ i $BC$ przecinają się w punkcie $P$. Punkt $Q$ jest symetryczny do punktu $P$ względem środka odcinka $OH$. Proste $AQ$ i $BC$ przecinają się w punkcie $R$. Dowieść, że $BP = CR$.

# Zestaw próbny Olimpiady Matematycznej

**Czas trwania: 5h**

Krosno, 30 grudnia 2020 (dzień drugi)

**Zadanie 4**

Dany jest trójkąt $ABC$, którego boki mają długości będące kolejnymi wartościami ciągu arytmetycznego oraz zachodzi $AB \leqslant BC \leqslant AC$. Okręgi wpisany i opisany na tym trójkącie mają promienie odpowiednio $r$ i $R$. Znajdź długość $AH$.

**Zadanie 5**

Udowodnij, że istnieje taka liczba naturalna $n$, że dla dowolnej liczby całkowitej $k$ liczba $k^2+k+n$ nie posiada dzielnika pierwszego mniejszego od 2020.

**Zadanie 6**

Rozważmy ciąg wielomianów $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ zdefiniowany następująco:

$$P_1(x) = x \qquad P_{n+1}(x) = P_n(x)^2 + 1 \quad \text{dla } n \geqslant 1$$

Pokazać, że wielomian $P(x)$ spełnia zależność:

$$P(x^2+1) = P(x)^2 + 1$$

wtedy i tylko wtedy, gdy $P \in \{P_n\}_{n=1}^{\infty}$.


# Zestaw próbny Olimpiady Matematycznej

**Czas trwania: 5h**

Krosno, 30 grudnia 2020 (dzień drugi)

**Zadanie 4**

Dany jest trójkąt $ABC$, którego boki mają długości będące kolejnymi wartościami ciągu arytmetycznego oraz zachodzi $AB \leqslant BC \leqslant AC$. Okręgi wpisany i opisany na tym trójkącie mają promienie odpowiednio $r$ i $R$. Znajdź długość $AH$.

**Zadanie 5**

Udowodnij, że istnieje taka liczba naturalna $n$, że dla dowolnej liczby całkowitej $k$ liczba $k^2+k+n$ nie posiada dzielnika pierwszego mniejszego od 2020.

**Zadanie 6**

Rozważmy ciąg wielomianów $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ zdefiniowany następująco:

$$P_1(x) = x \qquad P_{n+1}(x) = P_n(x)^2 + 1 \quad \text{dla } n \geqslant 1$$

Pokazać, że wielomian $P(x)$ spełnia zależność:

$$P(x^2+1) = P(x)^2 + 1$$

wtedy i tylko wtedy, gdy $P \in \{P_n\}_{n=1}^{\infty}$.