Zadanie: ZLI
Zliczanie ciągów

Warsztaty ILO, grupa olimpijska, dzień 11. Dostępna pamięć: 128 MB.

Rozwiązanie wzorcowe $O(m^{\frac{1}{2}} + n)$

Łatwiej myśleć jest o zadaniu, jeżeli sfaktoryzujemy sobie liczbę m. Jeżeli myślimy o jej rozkładzie na czynniki pierwsze, to zastanawiamy się, na ile sposobów można te czynniki poustawiać na n pozycjach, przy czym na jednej pozycji może być wiele czynników (i mogą być te same). Łatwo zauważyć, że jest to zadanie równoważne. Istotnie, jeżeli pewnej pozycji przypisaliśmy jakieś czynniki pierwsze, to ich iloczyn będzie równy elementowi ciagu na tej pozycji. Wówczas iloczyn elementów ciągu będzie równy m, ponieważ jest on jednocześnie iloczynem wszystkich czynników pierwszych liczby m.

Rozkład na czynniki pierwsze możemy wykonać standardowym algorytmem o złożoności $O(\sqrt{m})$.

Następnie należy zauważyć, że każdy czynnik pierwszy możemy rozpatrywać niezależnie. Wynika to z jednoznaczności faktoryzacji liczby, tzn. nie może być tak, że na dwóch pozycjach włożymy inne zbiory liczb pierwszych, a iloczyn wyjdzie ten sam.

Zatem pytamy się: dla danej liczby pierwszej, zakładając, że występuje ona k razy w rozkładzie liczby m, na ile sposobów możemy ustawić te k wystąpień na n pozycjach ciągu. Gdyby na danej pozycji ten czynnik mógłby wystąpić tylko raz, to odpowiedź byłaby prosta, a mianowicie $\binom{n}{k}$. Na nasze nieszczęście możemy wiele razy włożyć dany czynnik na tę samą pozycję. Na szczęście nie utrudnia to zbytnio sytuacji, ponieważ poprawny wzór to $\binom{n+k-1}{k}$. Możemy interpretować to w taki sposób, że tworzymy $k-1$ "dodatkowych pozycji". Mówimy, że jeśli wybieram, przykładowo x-tą z nich, to tak naprawdę wrzucam $x+1$-szy czynnik do tej samej pozycji co x-ty.

Symbol newtona $\binom{n}{k}$ możemy obliczyć standardową metodą w czasie stałym obliczając odwrotności silnii dla każdego n. Można to zrobić w czasie liniowym, licząc najpierw silnie dla wszystkich prefiksów, następnie odwrotność największej silnii w czasie $O(log\ M)$, gdzie M jest wartością modulo, a potem doliczając w prosty sposób kolejne odwrotności mniejszych silnii.