Zadanie: RES
Reszta

Warsztaty ILO, grupa olimpijska, dzień 6. Dostępna pamięć: 128 MB.

Dostępne nominały to $1, 5, 10, 20, 50$.

Główną obserwacją potrzebną do rozwiązania zadania jest to, że w optymalnym rozwiązaniu użyjemy niewielkiej liczby monet o nominałach mniejszych niż 50.

Rozwiązanie wzorcowe $O(m)$

Obserwacja.1. *Zauważmy, że nigdy nie opłaca mi się użyć w optymalnym rozwiązaniu dziewięciu (lub więcej) jedynek. Dlaczego? Z tych dziewięciu jedynek mogę uzyskać sumy które będą ze zbioru* $[0, 9]$*. Ale przecież, jeśli użyję czterech jedynek oraz jedną piątkę, to wciąż z nich jestem w stanie uzyskać wszystkie sumy ze zbioru* $[0, 9]$ *używając mniejszej liczby nominałów! Mogę więc wyrzucić dziewięć jedynek i zastąpić je czterema jedynkami oraz jedną piątką, uzyskam lepszy wynik a wciąż będę mógł uzyskać wszystkie reszty które mogłem uzyskać wcześniej.*

Wniosek.1. *Nigdy nie opłaca się używać dziewięciu jedynek, więc optymalne rozwiązanie ma od zera do ośmiu jedynek.*

Obserwacja.2. *Jeśli chodzi o piątki, to nie użyję trzech piątek, bo mogę z nich uzyskać sumy* $[0, 5, 10, 15]$*. Natomiast, jeśli użyje jednej piątki oraz jednej dziesiątki, to wciąż mogę z nich uzyskać sumy* $[0, 5, 10, 15]$*, używając mniejszej liczby monet.*

Wniosek.2. *Użyję co najwyżej dwóch piątek.*

Obserwacja.3. *Tak samo będzie z dziesiątkami, użyję ich co najwyżej dwóch, bo gdybym miał użyć trzy to dostałbym sumy* $[0, 10, 20, 30]$*, a z użycia dziesiątki i dwudziestki dostanę takie same.*

Wniosek.3. *Użyję co najwyżej dwóch dziesiątek.*

Obserwacja.4. *Zostały jeszcze dwudziestki. Zauważmy, że nigdy nie użyje pięciu dwudziestek – dają one sumy* $[0, 20, 40, 60, 80, 100]$*, zamiast nich mogę użyć nominałów* $10, 20, 20, 50$ *z których też da się uzyskać te sumy, a jest ich mniej.*

Wniosek.4. *Użyję co najwyżej czterech dwudziestek.*

Wykazałem, więc ograniczenia na liczbę nominałów mniejszych niż 50 w optymalnym rozwiązaniu. Mogę teraz rozważyć każdą konfiguracje nominałów spełniającą te założenia (jest ich dokładnie 128). Mając założone ile jest wszystkich nominałów poza 50 i znając sumę którą mamy uzyskać, jestem w stanie obliczyć ile nominałów wartości 50 będę potrzebował (lub stwierdzić że nie istnieje rozwiązanie dla tego, ustalonego zbioru mniejszych nominałów).

Mamy teraz pewną liczbę kandydatów na rozwiązania i chcemy sprawdzić, po kolei, czy dla danych liczności nominałów da się uzyskać każdą z zadanych reszt i spośród tych dla których się da, wybiorę taką konfiguracje która używa najmniej banknotów.

Podzadanie *Doszliśmy więc do prostszego zadania:* ***Masz dane liczności nominałów*** $1, 5, 10, 20, 50$ ***oraz liczbę*** $1 \leq X \leq 10^5$***, stwierdź czy z zadanych nominałów da się wydać resztę*** $\boldsymbol{X}$.

W tym miejscu kusi użyć zachłannego rozwiązania (używamy ile się da od największych nominałów), ale niestety łatwo znaleźć przykład na którym ono nie działa. Choćby proste $X = 60$ oraz nominały: $50, 20, 20, 20$.

Szukamy więc czegoś innego. Jest dużo rozwiązań tego podzadania. Możemy na przykład po prostu puścić plecaka dla każdego zbioru nominałów i da się to zrobić szybko, ale najprostsze rozwiązanie jest inne.

Wiemy, że liczności nominałów mniejszych niż 50 są bardzo małe. W takim razie przeiterujmy się po prostu po każdej liczności każdego z nominałów (co najwyżej 128 opcji), zakładając, że tylu użyjemy, żeby wypłacić X i obliczymy, czy jesteśmy w stanie wypłacić odpowiednią liczbę nominałów wartości 50.

Pozostaje jeszcze kwestia złożoności, wiemy że na pewno nie przekroczymy $128 \cdot m \cdot 128$, najpierw iterujemy się po zbiorze nominałów który używamy, potem dla każdej liczby z wejścia w co najwyżej 128 operacji sprawdzamy czy możemy ją wypłacić. Trochę dużo?

To prawda, ale możemy zauważyć, że tak na prawdę sprawdzimy tylko zbiory nominałów, które mają taką samą resztę modulo 50 co n (dopełniamy resztę pięćdziesiątkami). Po sprawdzaniu na komputerze, okazuje się, że maksymalna liczba zbiorów nominałów o takiej samej reszcie to 9. Mamy więc $m \cdot 9 \cdot 128$ operacji, co spokojnie się mieści w limicie czasu.

Obserwacja.5. *Można pójść jeszcze dalej i zastanowić się kiedy zachłan nie działa. Nie działa on tylko wtedy kiedy decydujemy pomiędzy liczbą dwudziestek a liczbą pięćdziesiątek, dla pozostałych liczb działa, bo każda ich para jest podzielna przez siebie. Możemy więc przeiterować się jedynie po liczbie dwudziestek którą bierzemy i resztę zrobić już zachłanem. (Można udowodnić, że jeśli każda para liczb jest podziela przez siebie to ten zachłan działa i nie jest to trudne). Mamy więc* $9 \cdot m \cdot 4$ *operacji ;)*