Rozwiązania 2022

Dominik Bysiewicz

Zestaw próbny do Olimpiady Matematycznej

Zadanie 1 *Akopyan 4.2.6*

Punkt H to ortocentrum trójkąta ostrokątnego ABC. Niech M to środek boku BC, a D to rzut prostokątny H na prostą AM. Udowodnij, że punkty B, H, D i C leżą na jednym okręgu.

Rozwiązanie:

Niech A' i H' to odbicia A i H względem punktu M. Zauważmy, że B i C to wzajemne obrazy w tym odbiciu. Z prostego rachunku kątów wiemy, że $\sphericalangle BH'C = \sphericalangle BHC = 180^\circ - \sphericalangle BAC$, co oznacza, że czworokąt $ABH'C$ jest cykliczny.

Łatwo zauważyć, że $BHCH'$ jest równoległobokiem, zatem $H'C \parallel BH \perp AC$. Ponadto $\sphericalangle ACH' = 90^\circ$, co oznacza, że AH' to średnica okręgu.

Ponieważ $ABH'C$ jest cykliczny, to także $BHCA'$ cykliczny, jako odbicie poprzedniego względem M. Oznacza to, że HA' jest średnicą okręgu na $BHCA'$, zatem D leży na tym okręgu, co daje tezę zadania.

Zadanie 2 *Hungarian MO, 2000*

Rozwiąż w liczbach całkowitych x, y, z równanie:

$$5x^2 - 14y^2 = 11z^2.$$

Rozwiązanie:

Udowodnimy, że jedynym rozwiązaniem tego równania jest $x = y = z = 0$. Przyjrzyjmy się obu stronom równania modulo 7, zauważmy, że otrzymujemy:

$$5x^2 \equiv_{(7)} 4z^2.$$

Zauważmy, że jedynymi resztami kwadratowymi modulo 7 są $\{0, 1, 2, 4\}$, zatem lewa strona przystaje odpowiednio do $\{0, 5, 3, 6\}$, a prawa do $\{0, 4, 1, 2\}$ modulo 7.

Wynika stąd, że $7 \mid x$ oraz $7 \mid z$, czyli $x = 7x_0$ i $z = 7z_0$. Po podstawieniu do równania i podzieleniu przez 7 dostajemy:

$$7 \cdot 5x_0^2 - 2y^2 = 7 \cdot 11z_0^2$$

zatem $7 \mid y$, czyli $y = 7y_0$.

Końcowo otrzymaliśmy własność, że jeżeli (x, y, z) spełnia warunki zadania, to także $(x/7, y/7, z/7)$ spełnia te warunki. Ponieważ interesują nas jedynie rozwiązania całkowite, to widzimy, że każde rozwiązanie inne niż $(0, 0, 0)$ implikuje nieskończone schodzenie przez dzielenie przez 7, co z kolei implikuje sprzeczność. Jedynym rozwiązaniem jest zatem $x = y = z = 7$.

Zadanie 3 *USAMO, 2009*

Niech $n \geqslant 2$ oraz $a_1 \geqslant \ldots \geqslant a_n > 0$ to liczby rzeczywiste spełniające:

$$(a_1 + \ldots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right) \leqslant \left(n + \frac{1}{2}\right)^2.$$

Udowodnij, że $a_1 \leqslant 4a_n$.

Rozwiązanie:

Korzystając z nierówności Cauchy'ego-Schwarza otrzymujemy (zamieniając miejscami tylko dwa skrajne argumenty):

$$(a_n + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_1)\left(\frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right) \geqslant \left(\sqrt{\frac{a_n}{a_1}} + n - 2 + \sqrt{\frac{a_1}{a_n}}\right)^2$$

zatem wykorzystując założenie z treści zadania otrzymujemy kolejno:

$$\left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \geqslant \left(\sqrt{\frac{a_n}{a_1}} + n - 2 + \sqrt{\frac{a_1}{a_n}}\right)^2$$

$$n+\frac{1}{2} \geqslant \sqrt{\frac{a_n}{a_1}}+n-2+\sqrt{\frac{a_1}{a_n}}$$

$$\frac{5}{2} \geqslant \sqrt{\frac{a_n}{a_1}}+\sqrt{\frac{a_1}{a_n}}.$$

Po podniesieniu do kwadratu i skróceniu odpowiednich wyrażeń:

$$\frac{17}{4} \geqslant \frac{a_n}{a_1}+\frac{a_1}{a_n}=\frac{a_1^2+a_n^2}{a_1 a_n}$$

$$0 \geqslant (a_1-4a_n)(4a_1-a_n)$$

ale ponieważ $4a_1 > a_n$, to musi zachodzić $a_1 \leqslant 4a_n$, co kończy dowód zadania.

Zadanie 4 *CPSJ, 2013*

Rozstrzygnij, czy istnieje nieskończenie wiele takich liczb pierwszych p, dla których istnieje dodatnia liczba naturalna n o tej własności, że liczba n^2+n+1 jest wielokrotnością liczby p.

Rozwiązanie:

Niech P oznacza zbiór wszystkich liczb pierwszych o danej własności. Zauważmy, że zbiór P jest niepusty. Jego elementem jest na przykład liczba 3, gdyż $3 \mid 1^2+1+1$.

Przypuśćmy, że zbiór P jest skończony i należy do niego dokładnie k liczb pierwszych: $p_1, p_2, \ldots, p_k$. Przyjmijmy $n = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k$ oraz niech p będzie dzielnikiem pierwszym liczby n^2+n+1.

Wówczas liczba pierwsza p spełnia warunki zadania, więc należy do zbioru P. Z drugiej zaś strony, liczba n^2+n+1 nie jest podzielna przez żadną z liczb $p_1, p_2, \ldots, p_k$ ze zbioru P, a zatem liczba p nie należy do zbioru P. Z otrzymanej sprzeczności wynika, że zbiór P zawiera nieskończenie wiele elementów.

Zadanie 5 *ICO, 2020*

Krata trójkątna jest zbudowana z z jednostkowych (czyli o boku 1) trójkątów równobocznych. Wzdłuż krawędzi kraty wyznaczono wielokąt, niekoniecznie wypukły, ale bez samo przecięć (czyli każdy wierzchołek kraty należy do maksymalnie dwóch krawędzi wielokąta). Wiedząc, że obwód wielokąta wynosi 400 udowodnij, że musi on mieć przynajmniej jeden kąt o wartości dokładnie $120°$ lub $240°$.

Rozwiązanie:

Pokolorujmy wierzchołki tej kraty na czerwono, zielono i niebiesko tak, że żadna krawędź kraty nie łączy dwóch takich samych kolorów.

Analizując to kolorowanie wiemy, że jeżeli wielokąt przejdzie po kolorach $A \to B \to A$, to musi on w wierzchołku B pokonać kąt $120°$ lub $240°$. Zatem jeżeli teza nie jest prawdziwa, to istnieje wielokąt, którego każde trzy kolejne wierzchołki są parami różne. Jednakże w tym wypadku otrzymujemy obwód długości podzielnej przez 3, co daje sprzeczność z założeniem zadania i kończy nasze rozwiązanie.

Zadanie 6 *Sharygin GO, 2015*

Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$ oraz taki punkt M na AB, że czworokąty $AMCD$ i $BMDC$ są opisane na okręgach o środkach O_1 i O_2. Prosta O_1O_2 przecina DM i CM w punktach X i Y. Udowodnij, że jeśli $MX = MY$, to $ABCD$ jest cykliczny.

Rozwiązanie:

Jeżeli $AB \parallel CD$, to także $O_1O_2 \parallel AB$, zatem cały rysunek będzie symetryczny względem symetralnej O_1O_2, co łatwo prowadzi do faktu, że $ABCD$ jest trapezem równoramiennym, co daje tezę.

Załóżmy, że tak nie jest i K to przecięcie O_1O_2 z AB. Wtedy możemy zauważyć, że O_1O_2 jest dwusieczną $\sphericalangle DKA$ oraz:

$$\sphericalangle KMD = \sphericalangle KCM$$

dzięki podobieństwu trójkątów KMX i KCY.

Wiemy, że O_2 jest środkiem okręgu dopisanego do ΔKDM, zatem okrąg przez DO_2M przechodzi przez incentrum KDM, zatem dostajemy:

$$\sphericalangle KMD = 2\sphericalangle KO_2D.$$

Zatem możemy zauważyć, że (O_1 to incetrum ΔKMC):

$$\sphericalangle DCO_1 = \frac{1}{2}\sphericalangle DCM = \frac{1}{2}\sphericalangle KMD = \sphericalangle DO_2O_1$$

co daje cykliczność czworokąta DCO_2O_1.

Analogicznie jak poprzednio, skoro O_1 to środek okręgu dopisanego do ΔKAD, to $\sphericalangle KAD = 2\sphericalangle KO_1D$, co razem z cyklicznością CDO_1O_2 implikuje:

$$\sphericalangle KAD = 2\sphericalangle KO_1D = 2\sphericalangle KCO_2 = \sphericalangle KCB$$

zatem $ABCD$ cykliczny.