# Zadanie: ROW
# Równe liczby

**Warsztaty ILO 2017-2018, grupa olimpijska, dzień 18. Dostępna pamięć: 128 MB.**

Załóżmy na chwilę, że chcemy obliczyć wynik dla pewnego ustalonego $k$.

**Grupą** będziemy określali zbiór elementów o równych wartościach. Wartością grupy będzie wartość elementów tej grupy. W zadaniu chcemy zminimalizować liczbę grup.

Zauważmy, że jeśli dla pewnej grupy o rozmiarze $m$ istnieje inna grupa, której wartość jest wielokrotnością rozważanej, to możemy zmniejszyć liczbę grup (pozbyć się rozważanej grupy) wykonując $m$ operacji domnożenia. Dokładniej, do każdego elementu pierwszej grupy domnażamy tyle, aby ten element dołaczył do drugiej grupy (jest to możliwe ze względu na wielokrotność wartości). Wówczas, rozmiar drugiej grupy się powiększy, ale okazuje się, że nie musimy się tym przejmować!

Dlaczego nie musimy przejmować się powiększeniem drugiej grupy? Przypuśćmy, że kiedyś będziemy chcieli pozbyć się drugiej grupy (domnażając ją do jakiejś trzeciej grupy). Wtedy pozornie koszt domnożenia nie będzie równy oryginalnemu rozmiarowi drugiej grupy, tylko rozmiarowi drugiej grupy powiększonego o rozmiar pierwszej. Zauważmy jednak, że w praktyce mogliśmy już wcześniej elementy grupy pierwszej domnożyć od razu do grupy trzeciej. Wówczas koszt pozbycia się pierwszej grupy nie uległby zmianie, a rozmiar drugiej pozostałby nienaruszony. Takie rozumowanie można powtórzyć również dla trzeciej grupy, czwartej, itd...

Innymi słowy, każdy element ciągu zostanie przemnożony co najwyżej raz.

Trudniej jest pozbyć się grupy, która nie posiada wielokrotności. Taką grupę musimy przemnożyć do NWW wartości tej grupy oraz jakiejś innej grupy i tamtą grupę też domnożyć. Intuicyjnie widać, że pozbywanie się takich grup jest na ogół kosztowniejsze.

Warto zauważyć, że jeśli zdecydujemy się w pewnym momencie pozbyć takiej grupy, która nie ma wielokrotności, to możemy ją domnożyć do tak wielkiej liczby, która jest wielokrotnością wszystkich liczb na wejściu, czyli NWW całego ciągu. W efekcie każda grupa od tej pory będzie juz miała wielokrotność! Oznacza to, że opłacało się od samego początku wybierać elementy zachłannie od najmniejszego rozmiaru.

Ponadto można zauważyć, że jeśli nie zdecydowalismy się pozbyć grupy bez wielokrotności, to usuwaliśmy tylko grupy z wielokrotnościami. Oznacza to, że je również opłaca się pozbywać zachłannie od najmniejszych rozmiarów, ponieważ one się w pewnym sensie niczym od siebie nie różnią.

W takim razie wiemy już, jak postępować jeśli usuniemy grupę bez wielokrotności i kiedy tego nie zrobimy. Pozostaje pytanie, czy chcemy taki element usunać, czy nie. W naszym rozwiązaniu, nie będziemy się nad tym zastanawiać. Po prostu sprawdzimy wszystkie oba przypadki.

## Rozwiązanie wzorcowe $O(n\ log\ n)$

Na samym początku zliczamy wszystkie elementy i sprawdzamy dla każdej grupy, czy ona posiada jakąś wielokrotność (grupę o większej wartości). Możemy to zrobić naiwnie skacząc po wielokrotnościach danej wartości i sprawdzać, czy zliczyliśmy dla kolejnych wielokrotności jakieś elementy.

Stwórzmy sobie dwa kontenery grup: jeden zawiera wszystkie grupy, a drugi tylko takie, które posiadają wielokrotność.

Sortujemy obie części po rozmiarach grup. Teraz już interesują nas tylko rozmiary. Jeśli $k$ jest ustalony, to sprawdźmy, ile grup bylibyśmy się w stanie pozbyć usuwając jedynie grupy z wielokrotnościami i ile usuwając dowolne grupy. Możemy to łatwo sprawdzić znajdując prefiks dla obu zbiorów, którego suma nie przekracza $k$. Wybieramy tańszą z dwóch opcji.

W przypadku gdy chcemy obliczyć wynik dla każdego $k$, możemy obliczać je od najmniejszego do największego. Zauważmy, że prefiks usuniętych grup będzie jedynie się powiększał. Możemy zatem na bieżąco utrzymywać sumę rozmiarów wybranych grup i przesuwać wskaźnik prefiksu w prawo, aż suma przekroczy bieżące $k$.