Zadanie: MAT
Matrioszka

Warsztaty ILO 2017-2018, grupa olimpijska, dzień 9.

Rozwiązanie wzorcowe $O((n+q) \cdot log(n))$

Zastanówmy się na początku, jak rozwiązać jedno zapytanie w czasie wielomianowym.

To co chcemy zrobić w zadaniu, to chcemy znaleźć na ile minimalnie zbiorów można podzielić lalki, aby każdy zbiór dało się ustawić w takiej kolejności, żeby dla każdego i było spełnione $r_i < r_{i+1}$ oraz $h_i < h_{i+1}$.

Twierdzenie.1. *Minimalna liczba zbiorów spełniająca opisany wyżej warunek jest mocy największego zbioru takiego, że da się go ustawić w takiej kolejności, że dla każdego i było spełnione $r_i \leq r_{i+1}$ oraz $h_i \geq h_{i+1}$*

Dowód. Dowód wynika z twierdzenia Dilwortha o minimalnej liczbie łańcuchów. □

Aby obliczyć moc takiego zbioru, wystarczy znaleźć najdłuższą ścieżkę w grafie złożonym z punktów z wejścia z krawędziami pomiędzy i oraz j jeśli zachodzi $h_i \geq h_j$ oraz $r_i \leq r_j$. Graf ten jest DAGiem więc można łatwo zrobić to w czasie kwadratowym.

Można też zrobić to szybciej – możemy posortować punkty rosnąco po wartościach $(r_i, -h_i)$. Przeiterować się po punktach i dla punktu (r_i, h_i) za pomocą drzewa przedziałowego znajdować najdłuższą ścieżkę kończącą się w części płaszczyzny $([-inf : r_i], [h_i : inf])$ i przedłużyć ją o 1 (tylko taką ścieżkę można skończyć w tym wierzchołku) i wrzucić na drzewo wartość z tego punktu. Wystarczy drzewo jednowymiarowe, bo punkty są posortowane po r.

Umiemy więc rozwiązać zadanie w czasie $n \cdot log(n)$ dla jednego zapytania. Jesteśmy już bardzo blisko, bo żeby zrobić to dla wielu zapytań, wystarczy przetwarzać zapytania razem z punktami i po napotkaniu zapytania odczytać jedynie maksimum na części płaszczyzny wyznaczonej przez ten punkt (tak jak poprzednio robiąc zapytanie na drzewie).

Fundusze Europejskie Program Regionalny
Podlaskie
Unia Europejska Europejski Fundusz Społeczny