# Rozwiązania 2021

Dominik Bysiewicz

Zestaw próbny do Olimpiady Matematycznej

**Zadanie 1**
Znajdź wszystkie funkcje $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ spełniające:

$$f(f(n)) = n + 2$$

dla wszystkich liczb naturalnych $n$.

**Rozwiązanie:**
Zauważmy, że funkcja $f$ jest injekcją: jeśli $f(a) = f(b)$, to:

$$a + 2 = f(f(a)) = f(f(b)) = b + 2 \quad \implies a = b.$$

Teraz, podstawmy $f(n)$, dostajemy:

$$f(n + 2) = f(f(f(n))) = f(n) + 2$$

czyli w ogólności:

$$f(2k) = f(0) + 2k, \qquad f(2k + 1) = f(1) + 2k, \qquad \forall k \in \mathbb{N}$$

Widzimy, że ustalając wartości $f(0)$ i $f(1)$ dostajemy jednoznacznie całą funkcję. Ponadto dla argumentów parzystych funkcja ściśle rosnąca i dla nieparzystych również. Jeżeli $2 \mid f(0)$, to mamy dwa przypadki:
1) $f(0) = 0$, wtedy $f(f(0)) = 0 \neq 2$ - sprzeczność;
2) $f(0) \geqslant 2$, wtedy $f(f(0)) \geqslant 2 \cdot f(0) \geqslant 4 > 2$ - sprzeczność.

Zatem dostajemy przypadek $2 \nmid f(0)$, analogicznie jak wyżej jeśli $f(0) > 2$, to sprzeczność, zatem $f(0) = 1$. Wtedy $f(2k) = 2k + 1$ $\forall k \in \mathbb{N}$. Ponieważ funkcja jest injekcją, zatem $f(1)$ musi być parzyste (inaczej pewne wartości by się pokrywały). Wtedy, mamy: $f(f(1)) = 3 = f(2)$, co z injektywności daje $f(1) = 2$ i $f(2k + 1) = 2k + 2$ $\forall k \in \mathbb{N}$, czyli jedyną funkcją sełniającą warunki zadania jest funkcja $f(x) = x + 1$ (po sprawdzeniu faktycznie działa).

**Zadanie 2**
Na płaszczyźnie dane są punkty $A$ i $B$. Funkcja $f$ przypisuje każdemu punktowi $C$ (poza prostą $AB$) wartość $\sphericalangle AE_C B$, gdzie $E_C$ to środek $CH_C$, a $H_C$ to ortocentrum trójkąta $ABC$. Znajdź maksimum, jakie może przyjąć funkcja i opisz zbiór punktów, dla których maksimum jest osiągane.

**Rozwiązanie:**
Ustalmy $C$ w dowolnym punkcie. Punkt $E_C$ jest punktem Eulera dla wierzchołka $C$, zatem wiemy, że leży na jednym okręgu ze środkami boków i spodkami wysokości $\Delta ABC$. Ponadto, $\sphericalangle E_C H_C M = 90°$, gdzie $H_C$ to spodek wysokości z $C$, a $M$ to środek boku $AB$, czyli $E_C M$ jest średnicą okręgu Eulera.

Ponieważ $NL$ ($N$ i $L$ to środki $BC$ i $AC$) jest cięciwą tego okręgu, więc $NL \leqslant E_C M$. Wynika stąd, że $E_C$ leży poza okręgiem o średnicy $AB$, lub na nim, czyli $\sphericalangle AE_C B \leqslant 90°$.

Pozostaje sprawdzić, dla jakich punktów ten kąt jest prosty, czyli kiedy $NL$ jest średnicą okręgu Eulera. W tym przypadku $\sphericalangle ACB = \sphericalangle NML$ (trójkąt środkowy), ale $\sphericalangle NML = 90°$, czyli $\Delta ABC$ jest prostokątny - zbiór tych punktów, to okrąg o średnicy $AB$.

**Zadanie 3** *IMO Shortlist, 2002*
Święty Mikołaj gra z Elfem w następującą grę. Mikołaj wybiera trójkę $(x, y, z)$ liczb całkowitych, gdzie $0 \leqslant x, y, z \leqslant 9$. Elf musi odgadnąć trójkę Mikołaja w jak najmniejszej liczbie ruchów. Każdy ruch wygląda następująco:

1. Elf podaje trójkę $(a, b, c)$ jak wyżej.

2. Mikołaj przekazuje wartość liczby:

$$|x + y - a - b| + |y + z - b - c| + |z + x - c - a|.$$

Znajdź najmniejszą liczbę ruchów, jakie musi wykonać Elf, aby być pewnym trójki Mikołaja.

**Rozwiązanie:**

Zacznijmy od tego, że dwa ruchy nie zawsze wystarczą do odgadnięcia trójki Mikołaja, ponieważ wartość liczby podanej przez Mikołaja jest liczbą parzystą pomiędzy 0 i 54, czyli mamy 28 możliwych odpowiedzi w każdym ruchu. Wszystkich możliwych trójek jest $1000 > 28^2$, czyli więcej niż par odpowiedzi - za dużo.

Udowodnimy teraz, że 3 ruchy zawsze wystarczą:
Pierwszym ruchem powinno być $(0, 0, 0)$, w odpowiedzi dostaniemy $2(x+y+z)$, czyli poznamy sumę $s = x+y+z$ liczb Mikołaja, załóżmy, że $s \leqslant 13$ (dla pozostałych postępujemy analogicznie, ale zamiast pytać o $(a, b, c)$ pytamy o $(9 - a, 9 - b, 9 - c)$).

Przypadek 1) $s \leqslant 9$.
Ten jest prosty, wystarczy spytać w drugim ruchu o $(9, 0, 0)$, a potem $(0, 9, 0$ dostaniemy odpowiednio $18 - 2x$ i $18 - 2y$, co z $s = x + y + z$ da nam trójkę Mikołaja.

Przypadek 2) $9 < s \leqslant 13$.
Teraz powinniśmy spytać o $(9, s-9, 0)$, dostaniemy $z + |9 - x - z| + |9 - x| = 2k$, gdzie $k = z$ (jesli $x + z \geqslant 9$) lub $k' = 9 - x$ (jeśli $x + z < 9$). W obu przypadkach dostajemy $z \leqslant k \leqslant s$.

Przypadek 2a) $s - k \leqslant 9$.
Trzecim ruchem powinno być $(s - k, 0, k)$. Dostaniemy $y + |k - y - z| + |z - k|$, ale $k \leqslant y + z$, więc dostajemy $2y$. Znamy $y$ oraz $x + z$, więc wiemy, czy $k = z$, czy $k = 9 - x$, co daje trójkę.

Przypadek 2b) $s - k > 9$.
Trzecim ruchem powinno być $(9, s - k - 9, k)$. Dostaniemy $18 + 2k - 2(x + z)$, więc znamy $x + z$ i wiemy, czy $k = z$, czy $k = 9 - x$, co ponownie daje trójkę liczb Mikołaja.

**Zadanie 4**

Udowodnij, że zbiór $\{1, \ldots, 1989\}$ może być przedstawiony w postaci sumy parami rozłącznych zbiorów $A_i$ (dla $i \in \{1, \ldots, 117\}$) tak, że:

- każdy zbiór $A_i$ posiada 17 elementów;
- suma elementów każdego $A_i$ jest taka sama.

**Rozwiązanie:**

Zacznijmy od dodania skrajnych liczb według algorytmu: $1, 1989 \in A_1$, $2, 1988 \in A_2$, $\ldots$, $118, 1872 \in A_1$, $\ldots$, $936, 1054 \in A_{17}$. W tym momencie każdy zbiór $A_1, \ldots, A_{17}$ zawiera 16 liczb o sumie $8 \cdot 1990$. Pozostały do rozdzielenia liczby $937, \ldots 1053$, czyli:

$$995 - 58,\ 995 - 57,\ \ldots\ ,\ 995\ ,\ \ldots\ ,\ 995 + 57,\ 995 + 58.$$

Teraz w postępujemy następująco: zamieniamy $1 \in A_1$ z $59 \in A_{59}$ oraz dodajemy: $(995 - 58) \to A_1$ i $(995 + 58) \to A_{59}$. Otrzymaliśmy równe sumy w $A_1$ i $A_{59}$, analogicznie postępujemy z pozostałymi parami: $(A_2, A_{58})$, $\ldots$, $(A_{29}, A_{31})$ oraz $(A_{60}, A_{117})$, $\ldots$, $(A_{88}, A_{89})$, natomiast do $A_{30}$ dodajemy 995.

**Zadanie 5** *IMO, 1989*

Dany jest trójkąt ostrokątny $ABC$, gdzie $BE$ i $CF$ to wysokości oraz $M$ to środek $BC$. Niech $\omega$ to okrąg opisany na $BCEF$ oraz $P$ to przecięcie $AM$ i $EF$. Dla dowolnego punktu $X$ leżącego na krótszym łuku $EF$ niech $Y$ to drugie przecięcie prostej $XP$ i $\omega$. Udowodnij, że $\sphericalangle XAY = \sphericalangle XYM$.

**Rozwiązanie:**

Wystarczy wykazać, że $MY$ jest styczne do okręgu opisanego na $AXKY$.

Rozważmy okrąg $\omega$ opisany na $AEF$, niech przecina $AM$ w $K$. Wtedy z kryterium współokręgowości $A$, $X$, $K$ i $Y$ są współokręgowe, ponieważ $XP \cdot PY \overset{\omega}{=} EP \cdot PF \overset{\omega}{=} AP \cdot PK$.

Zauważmy, że $\sphericalangle MEA = 180° - \sphericalangle MEC = 180° - \sphericalangle MCE = 180° - \sphericalangle EFA$, czyli $ME$ jest styczne do $\omega$. Zatem wiemy, że $R_\omega^2 = ME^2 = MK \cdot MA$, czyli $MY^2 = R_\omega^2 = MK \cdot MA$, zatem $MY$ styczne do okręgu opisanego na $AXKY$, co daje tezę.

**Zadanie 6** *IMO Shortlist, 2003*

Znajdź wszystkie takie pary $(a, b)$ dodatnich liczb całkowitych, że liczba:

$$\frac{a^2}{2ab^2 - b^3 + 1}$$

jest dodatnią liczbą całkowitą.

**Rozwiązanie:**

Niech $(a,b)$ to para spełniająca warunki zadania. Ponieważ $k = a^2/(2ab^2 - b^3 + 1) > 0$, więc dostajemy $2ab^2 - b^3 + 1 > 0$, $a > b/2 - 1/2b^2$, stąd $a \geqslant b/2$. Dalej, wiemy, że $k \geqslant 1$, zatem $a^2 > b^2(2a - b) \geqslant 0$, stąd:

$$a > b \qquad \text{or} \qquad 2a = b.$$

Rozważmy teraz rozwiązania $a_1$, $a_2$ równania:

$$a^2 - 2kb^2a + k(b^3 - 1) = 0$$

dla ustalonych $k$ i $b$. Przypuśćmy, że jedno z nich jest całkowite, wtedy także drugie musi być całkowite, ponieważ $a_1 + a_2 = 2kb^2 \in \mathbb{Z}$. Możemy przyjąć, że $a_1 \geqslant a_2$, wtedy $a_1 \geqslant kb^2 > 0$. Ponadto, ponieważ $a_1a_2 = k(b^3 - 1)$, dostajemy:

$$0 \leqslant a_2 = \frac{k(b^3 - 1)}{a_1} \leqslant \frac{k(b^3 - 1)}{kb^2} < b.$$

Wiemy, że $a > b$ lub $2a = b$, więc dostajemy $a_2 = 0$ lub $a_2 = b/2$:

Jeżeli $a_2 = 0$, to $b^3 - 1 = 0$ czyli $a_1 = 2k$, $b = 1$.

Jeżeli $a_2 = b/2$, to $k = b^2/4$ i $a_1 = b^4/2 - b/2$.

Podsumowując, jedyne możliwe wyniki to:

$$(a,b) = (2l, 1) \qquad \text{lub} \qquad (l, 2l) \qquad \text{lub} \qquad (8l^4 - l, 2l)$$

dla pewnego dodatniego, całkowitego $l$. Po sprawdzeniu, wszystkie te pary spełniają warunki zadania.