Zestaw próbny Olimpiady Matematycznej

Czas trwania: 5h

online, grudzień 2022 (dzień pierwszy)

Zadanie 1

Punkt H to ortocentrum trójkąta ostrokątnego ABC. Niech M to środek boku BC, a D to rzut prostokątny H na prostą AM. Udowodnij, że punkty B, H, D i C leżą na jednym okręgu.

Zadanie 2

Rozwiąż w liczbach całkowitych x, y, z równanie:

$$5x^2 - 14y^2 = 11z^2.$$

Zadanie 3

Niech $n \geqslant 2$ oraz $a_1 \geqslant \ldots \geqslant a_n > 0$ to liczby rzeczywiste spełniające:

$$(a_1 + \ldots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right) \leqslant \left(n + \frac{1}{2}\right)^2.$$

Udowodnij, że $a_1 \leqslant 4a_n$.

Zestaw próbny Olimpiady Matematycznej

Czas trwania: 5h

online, grudzień 2022 (dzień pierwszy)

Zadanie 1

Punkt H to ortocentrum trójkąta ostrokątnego ABC. Niech M to środek boku BC, a D to rzut prostokątny H na prostą AM. Udowodnij, że punkty B, H, D i C leżą na jednym okręgu.

Zadanie 2

Rozwiąż w liczbach całkowitych x, y, z równanie:

$$5x^2 - 14y^2 = 11z^2.$$

Zadanie 3

Niech $n \geqslant 2$ oraz $a_1 \geqslant \ldots \geqslant a_n > 0$ to liczby rzeczywiste spełniające:

$$(a_1 + \ldots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right) \leqslant \left(n + \frac{1}{2}\right)^2.$$

Udowodnij, że $a_1 \leqslant 4a_n$.

Zestaw próbny Olimpiady Matematycznej

Czas trwania: 5h

online, grudzień 2022 (dzień drugi)

Zadanie 4

Rozstrzygnij, czy istnieje nieskończenie wiele takich liczb pierwszych p, dla których istnieje dodatnia liczba naturalna n o tej własności, że liczba n^2+n+1 jest wielokrotnością liczby p.

Zadanie 5

Krata trójkątna jest zbudowana z z jednostkowych (czyli o boku 1) trójkątów równobocznych. Wzdłuż krawędzi kraty wyznaczono wielokąt, niekoniecznie wypukły, ale bez samo przecięć (czyli każdy wierzchołek kraty należy do maksymalnie dwóch krawędzi wielokąta). Wiedząc, że obwód wielokąta wynosi 400 udowodnij, że musi on mieć przynajmniej jeden kąt o wartości dokładnie $120°$ lub $240°$.

Zadanie 6

Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$ oraz taki punkt M na AB, że czworokąty $AMCD$ i $BMDC$ są opisane na okręgach o środkach O_1 i O_2. Prosta O_1O_2 przecina DM i CM w punktach X i Y. Udowodnij, że jeśli $MX = MY$, to $ABCD$ jest cykliczny.

Zestaw próbny Olimpiady Matematycznej

Czas trwania: 5h

online, grudzień 2022 (dzień drugi)

Zadanie 4

Rozstrzygnij, czy istnieje nieskończenie wiele takich liczb pierwszych p, dla których istnieje dodatnia liczba naturalna n o tej własności, że liczba n^2+n+1 jest wielokrotnością liczby p.

Zadanie 5

Krata trójkątna jest zbudowana z z jednostkowych (czyli o boku 1) trójkątów równobocznych. Wzdłuż krawędzi kraty wyznaczono wielokąt, niekoniecznie wypukły, ale bez samo przecięć (czyli każdy wierzchołek kraty należy do maksymalnie dwóch krawędzi wielokąta). Wiedząc, że obwód wielokąta wynosi 400 udowodnij, że musi on mieć przynajmniej jeden kąt o wartości dokładnie $120°$ lub $240°$.

Zadanie 6

Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$ oraz taki punkt M na AB, że czworokąty $AMCD$ i $BMDC$ są opisane na okręgach o środkach O_1 i O_2. Prosta O_1O_2 przecina DM i CM w punktach X i Y. Udowodnij, że jeśli $MX = MY$, to $ABCD$ jest cykliczny.

Rozwiązania 2022

Dominik Bysiewicz

Zestaw próbny do Olimpiady Matematycznej

Zadanie 1 *Akopyan 4.2.6*

Punkt H to ortocentrum trójkąta ostrokątnego ABC. Niech M to środek boku BC, a D to rzut prostokątny H na prostą AM. Udowodnij, że punkty B, H, D i C leżą na jednym okręgu.

Rozwiązanie:

Niech A' i H' to odbicia A i H względem punktu M. Zauważmy, że B i C to wzajemne obrazy w tym odbiciu. Z prostego rachunku kątów wiemy, że $\sphericalangle BH'C = \sphericalangle BHC = 180^\circ - \sphericalangle BAC$, co oznacza, że czworokąt $ABH'C$ jest cykliczny.

Łatwo zauważyć, że $BHCH'$ jest równoległobokiem, zatem $H'C \parallel BH \perp AC$. Ponadto $\sphericalangle ACH' = 90^\circ$, co oznacza, że AH' to średnica okręgu.

Ponieważ $ABH'C$ jest cykliczny, to także $BHCA'$ cykliczny, jako odbicie poprzedniego względem M. Oznacza to, że HA' jest średnicą okręgu na $BHCA'$, zatem D leży na tym okręgu, co daje tezę zadania.

Zadanie 2 *Hungarian MO, 2000*

Rozwiąż w liczbach całkowitych x, y, z równanie:

$$5x^2 - 14y^2 = 11z^2.$$

Rozwiązanie:

Udowodnimy, że jedynym rozwiązaniem tego równania jest $x = y = z = 0$. Przyjrzyjmy się obu stronom równania modulo 7, zauważmy, że otrzymujemy:

$$5x^2 \equiv_{(7)} 4z^2.$$

Zauważmy, że jedynymi resztami kwadratowymi modulo 7 są $\{0, 1, 2, 4\}$, zatem lewa strona przystaje odpowiednio do $\{0, 5, 3, 6\}$, a prawa do $\{0, 4, 1, 2\}$ modulo 7.

Wynika stąd, że $7 \mid x$ oraz $7 \mid z$, czyli $x = 7x_0$ i $z = 7z_0$. Po podstawieniu do równania i podzieleniu przez 7 dostajemy:

$$7 \cdot 5x_0^2 - 2y^2 = 7 \cdot 11z_0^2$$

zatem $7 \mid y$, czyli $y = 7y_0$.

Końcowo otrzymaliśmy własność, że jeżeli (x, y, z) spełnia warunki zadania, to także $(x/7, y/7, z/7)$ spełnia te warunki. Ponieważ interesują nas jedynie rozwiązania całkowite, to widzimy, że każde rozwiązanie inne niż $(0, 0, 0)$ implikuje nieskończone schodzenie przez dzielenie przez 7, co z kolei implikuje sprzeczność. Jedynym rozwiązaniem jest zatem $x = y = z = 7$.

Zadanie 3 *USAMO, 2009*

Niech $n \geqslant 2$ oraz $a_1 \geqslant \ldots \geqslant a_n > 0$ to liczby rzeczywiste spełniające:

$$(a_1 + \ldots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right) \leqslant \left(n + \frac{1}{2}\right)^2.$$

Udowodnij, że $a_1 \leqslant 4a_n$.

Rozwiązanie:

Korzystając z nierówności Cauchy'ego-Schwarza otrzymujemy (zamieniając miejscami tylko dwa skrajne argumenty):

$$(a_n + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_1)\left(\frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right) \geqslant \left(\sqrt{\frac{a_n}{a_1}} + n - 2 + \sqrt{\frac{a_1}{a_n}}\right)^2$$

zatem wykorzystując założenie z treści zadania otrzymujemy kolejno:

$$\left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \geqslant \left(\sqrt{\frac{a_n}{a_1}} + n - 2 + \sqrt{\frac{a_1}{a_n}}\right)^2$$

$$n+\frac{1}{2} \geqslant \sqrt{\frac{a_n}{a_1}}+n-2+\sqrt{\frac{a_1}{a_n}}$$
$$\frac{5}{2} \geqslant \sqrt{\frac{a_n}{a_1}}+\sqrt{\frac{a_1}{a_n}}.$$

Po podniesieniu do kwadratu i skróceniu odpowiednich wyrażeń:

$$\frac{17}{4} \geqslant \frac{a_n}{a_1}+\frac{a_1}{a_n}=\frac{a_1^2+a_n^2}{a_1 a_n}$$
$$0 \geqslant (a_1-4a_n)(4a_1-a_n)$$

ale ponieważ $4a_1 > a_n$, to musi zachodzić $a_1 \leqslant 4a_n$, co kończy dowód zadania.

Zadanie 4 *CPSJ, 2013*

Rozstrzygnij, czy istnieje nieskończenie wiele takich liczb pierwszych p, dla których istnieje dodatnia liczba naturalna n o tej własności, że liczba n^2+n+1 jest wielokrotnością liczby p.

Rozwiązanie:

Niech P oznacza zbiór wszystkich liczb pierwszych o danej własności. Zauważmy, że zbiór P jest niepusty. Jego elementem jest na przykład liczba 3, gdyż $3 \mid 1^2+1+1$.

Przypuśćmy, że zbiór P jest skończony i należy do niego dokładnie k liczb pierwszych: $p_1, p_2, \ldots, p_k$. Przyjmijmy $n = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k$ oraz niech p będzie dzielnikiem pierwszym liczby n^2+n+1.

Wówczas liczba pierwsza p spełnia warunki zadania, więc należy do zbioru P. Z drugiej zaś strony, liczba n^2+n+1 nie jest podzielna przez żadną z liczb $p_1, p_2, \ldots, p_k$ ze zbioru P, a zatem liczba p nie należy do zbioru P. Z otrzymanej sprzeczności wynika, że zbiór P zawiera nieskończenie wiele elementów.

Zadanie 5 *ICO, 2020*

Krata trójkątna jest zbudowana z z jednostkowych (czyli o boku 1) trójkątów równobocznych. Wzdłuż krawędzi kraty wyznaczono wielokąt, niekoniecznie wypukły, ale bez samo przecięć (czyli każdy wierzchołek kraty należy do maksymalnie dwóch krawędzi wielokąta). Wiedząc, że obwód wielokąta wynosi 400 udowodnij, że musi on mieć przynajmniej jeden kąt o wartości dokładnie 120° lub 240°.

Rozwiązanie:

Pokolorujmy wierzchołki tej kraty na czerwono, zielono i niebiesko tak, że żadna krawędź kraty nie łączy dwóch takich samych kolorów.

Analizując to kolorowanie wiemy, że jeżeli wielokąt przejdzie po kolorach $A \to B \to A$, to musi on w wierzchołku B pokonać kąt 120° lub 240°. Zatem jeżeli teza nie jest prawdziwa, to istnieje wielokąt, którego każde trzy kolejne wierzchołki są parami różne. Jednakże w tym wypadku otrzymujemy obwód długości podzielnej przez 3, co daje sprzeczność z założeniem zadania i kończy nasze rozwiązanie.

Zadanie 6 *Sharygin GO, 2015*

Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$ oraz taki punkt M na AB, że czworokąty $AMCD$ i $BMDC$ są opisane na okręgach o środkach O_1 i O_2. Prosta O_1O_2 przecina DM i CM w punktach X i Y. Udowodnij, że jeśli $MX = MY$, to $ABCD$ jest cykliczny.

Rozwiązanie:

Jeżeli $AB \parallel CD$, to także $O_1O_2 \parallel AB$, zatem cały rysunek będzie symetryczny względem symetralnej O_1O_2, co łatwo prowadzi do faktu, że $ABCD$ jest trapezem równoramiennym, co daje tezę.

Załóżmy, że tak nie jest i K to przecięcie O_1O_2 z AB. Wtedy możemy zauważyć, że O_1O_2 jest dwusieczną $\sphericalangle DKA$ oraz:

$$\sphericalangle KMD = \sphericalangle KCM$$

dzięki podobieństwu trójkątów KMX i KCY.

Wiemy, że O_2 jest środkiem okręgu dopisanego do ΔKDM, zatem okrąg przez DO_2M przechodzi przez incentrum KDM, zatem dostajemy:

$$\sphericalangle KMD = 2\sphericalangle KO_2D.$$

Zatem możemy zauważyć, że (O_1 to incetrum ΔKMC):

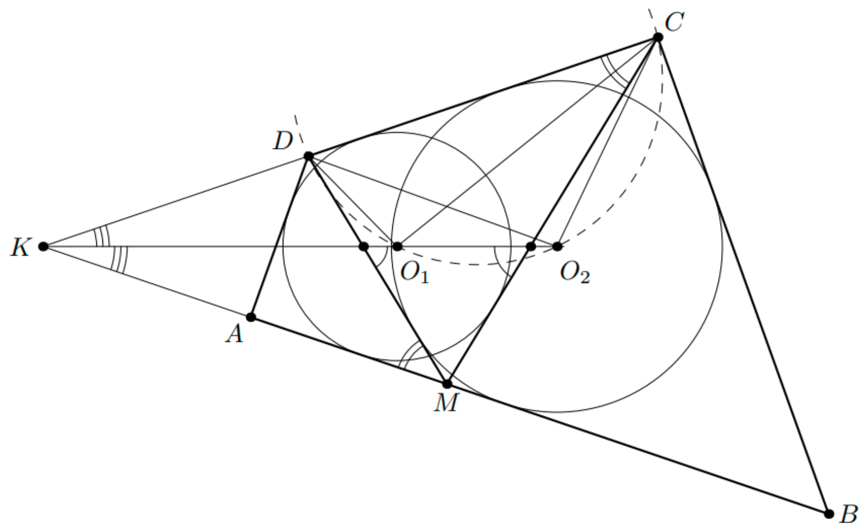
$$\sphericalangle DCO_1 = \frac{1}{2}\sphericalangle DCM = \frac{1}{2}\sphericalangle KMD = \sphericalangle DO_2O_1$$

co daje cykliczność czworokąta DCO_2O_1.

Analogicznie jak poprzednio, skoro O_1 to środek okręgu dopisanego do ΔKAD, to $\sphericalangle KAD = 2\sphericalangle KO_1D$, co razem z cyklicznością CDO_1O_2 implikuje:

$$\sphericalangle KAD = 2\sphericalangle KO_1D = 2\sphericalangle KCO_2 = \sphericalangle KCB$$

zatem $ABCD$ cykliczny.



Zestaw próbny Olimpiady Matematycznej

Czas trwania: 5h

online, grudzień 2021 (dzień pierwszy)

Zadanie 1

Znajdź wszystkie funkcje $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ spełniające:

$$f(f(n)) = n + 2$$

dla wszystkich liczb naturalnych n.

Zadanie 2

Na płaszczyźnie dane są punkty A i B. Funkcja f przypisuje każdemu punktowi C (poza prostą AB) wartość $\sphericalangle AE_CB$, gdzie E_C to środek CH_C, a H_C to ortocentrum trójkąta ABC. Znajdź maksimum, jakie może przyjąć funkcja i opisz zbiór punktów, dla których maksimum jest osiągane.

Zadanie 3

Święty Mikołaj gra z Elfem w następującą grę. Mikołaj wybiera trójkę (x, y, z) liczb całkowitych, gdzie $0 \leqslant x, y, z \leqslant 9$. Elf musi odgadnąć trójkę Mikołaja w jak najmniejszej liczbie ruchów. Każdy ruch wygląda następująco:

1. Elf podaje trójkę (a, b, c) jak wyżej.

2. Mikołaj przekazuje wartość liczby:

$$|x + y - a - b| + |y + z - b - c| + |z + x - c - a|.$$

Znajdź najmniejszą liczbę ruchów, jakie musi wykonać Elf, aby być pewnym trójki Mikołaja.

Zestaw próbny Olimpiady Matematycznej

Czas trwania: 5h

online, grudzień 2021 (dzień pierwszy)

Zadanie 1

Znajdź wszystkie funkcje $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ spełniające:

$$f(f(n)) = n + 2$$

dla wszystkich liczb naturalnych n.

Zadanie 2

Na płaszczyźnie dane są punkty A i B. Funkcja f przypisuje każdemu punktowi C (poza prostą AB) wartość $\sphericalangle AE_CB$, gdzie E_C to środek CH_C, a H_C to ortocentrum trójkąta ABC. Znajdź maksimum, jakie może przyjąć funkcja i opisz zbiór punktów, dla których maksimum jest osiągane.

Zadanie 3

Święty Mikołaj gra z Elfem w następującą grę. Mikołaj wybiera trójkę (x, y, z) liczb całkowitych, gdzie $0 \leqslant x, y, z \leqslant 9$. Elf musi odgadnąć trójkę Mikołaja w jak najmniejszej liczbie ruchów. Każdy ruch wygląda następująco:

1. Elf podaje trójkę (a, b, c) jak wyżej.

2. Mikołaj przekazuje wartość liczby:

$$|x + y - a - b| + |y + z - b - c| + |z + x - c - a|.$$

Znajdź najmniejszą liczbę ruchów, jakie musi wykonać Elf, aby być pewnym trójki Mikołaja.

Zestaw próbny
Olimpiady Matematycznej

Czas trwania: 5h

online, grudzień 2021 (dzień drugi)

Zadanie 4

Udowodnij, że zbiór $\{1, \ldots, 1989\}$ może być przedstawiony w postaci sumy parami rozłącznych zbiorów A_i (dla $i \in \{1, \ldots, 117\}$) tak, że:

- każdy zbiór A_i posiada 17 elementów;
- suma elementów każdego A_i jest taka sama.

Zadanie 5

Dany jest trójkąt ostrokątny ABC, gdzie BE i CF to wysokości oraz M to środek BC. Niech ω to okrąg opisany na $BCEF$ oraz P to przecięcie AM i EF. Dla dowolnego punktu X leżącego na krótszym łuku EF niech Y to drugie przecięcie prostej XP i ω. Udowodnij, że $\sphericalangle XAY = \sphericalangle XYM$.

Zadanie 6

Znajdź wszystkie takie pary (a, b) dodatnich liczb całkowitych, że liczba:

$$\frac{a^2}{2ab^2 - b^3 + 1}$$

jest dodatnią liczbą całkowitą.

Zestaw próbny
Olimpiady Matematycznej

Czas trwania: 5h

online, grudzień 2021 (dzień drugi)

Zadanie 4

Udowodnij, że zbiór $\{1, \ldots, 1989\}$ może być przedstawiony w postaci sumy parami rozłącznych zbiorów A_i (dla $i \in \{1, \ldots, 117\}$) tak, że:

- każdy zbiór A_i posiada 17 elementów;
- suma elementów każdego A_i jest taka sama.

Zadanie 5

Dany jest trójkąt ostrokątny ABC, gdzie BE i CF to wysokości oraz M to środek BC. Niech ω to okrąg opisany na $BCEF$ oraz P to przecięcie AM i EF. Dla dowolnego punktu X leżącego na krótszym łuku EF niech Y to drugie przecięcie prostej XP i ω. Udowodnij, że $\sphericalangle XAY = \sphericalangle XYM$.

Zadanie 6

Znajdź wszystkie takie pary (a, b) dodatnich liczb całkowitych, że liczba:

$$\frac{a^2}{2ab^2 - b^3 + 1}$$

jest dodatnią liczbą całkowitą.

Rozwiązania 2021

Dominik Bysiewicz

Zestaw próbny do Olimpiady Matematycznej

Zadanie 1
Znajdź wszystkie funkcje $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ spełniające:

$$f(f(n)) = n + 2$$

dla wszystkich liczb naturalnych n.

Rozwiązanie:
Zauważmy, że funkcja f jest injekcją: jeśli $f(a) = f(b)$, to:

$$a + 2 = f(f(a)) = f(f(b)) = b + 2 \implies a = b.$$

Teraz, podstawmy $f(n)$, dostajemy:

$$f(n + 2) = f(f(f(n))) = f(n) + 2$$

czyli w ogólności:

$$f(2k) = f(0) + 2k, \qquad f(2k + 1) = f(1) + 2k, \qquad \forall k \in \mathbb{N}$$

Widzimy, że ustalając wartości $f(0)$ i $f(1)$ dostajemy jednoznacznie całą funkcję. Ponadto dla argumentów parzystych funkcja ściśle rosnąca i dla nieparzystych również. Jeżeli $2 \mid f(0)$, to mamy dwa przypadki:
1) $f(0) = 0$, wtedy $f(f(0)) = 0 \neq 2$ - sprzeczność;
2) $f(0) \geqslant 2$, wtedy $f(f(0)) \geqslant 2 \cdot f(0) \geqslant 4 > 2$ - sprzeczność.

Zatem dostajemy przypadek $2 \nmid f(0)$, analogicznie jak wyżej jeśli $f(0) > 2$, to sprzeczność, zatem $f(0) = 1$. Wtedy $f(2k) = 2k + 1$ $\forall k \in \mathbb{N}$. Ponieważ funkcja jest injekcją, zatem $f(1)$ musi być parzyste (inaczej pewne wartości by się pokrywały). Wtedy, mamy: $f(f(1)) = 3 = f(2)$, co z injektywności daje $f(1) = 2$ i $f(2k + 1) = 2k + 2$ $\forall k \in \mathbb{N}$, czyli jedyną funkcją sełniającą warunki zadania jest funkcja $f(x) = x + 1$ (po sprawdzeniu faktycznie działa).

Zadanie 2
Na płaszczyźnie dane są punkty A i B. Funkcja f przypisuje każdemu punktowi C (poza prostą AB) wartość $\sphericalangle AE_CB$, gdzie E_C to środek CH_C, a H_C to ortocentrum trójkąta ABC. Znajdź maksimum, jakie może przyjąć funkcja i opisz zbiór punktów, dla których maksimum jest osiągane.

Rozwiązanie:
Ustalmy C w dowolnym punkcie. Punkt E_C jest punktem Eulera dla wierzchołka C, zatem wiemy, że leży na jednym okręgu ze środkami boków i spodkami wysokości ΔABC. Ponadto, $\sphericalangle E_CH_CM = 90°$, gdzie H_C to spodek wysokości z C, a M to środek boku AB, czyli E_CM jest średnicą okręgu Eulera.

Ponieważ NL (N i L to środki BC i AC) jest cięciwą tego okręgu, więc $NL \leqslant E_CM$. Wynika stąd, że E_C leży poza okręgiem o średnicy AB, lub na nim, czyli $\sphericalangle AE_CB \leqslant 90°$.

Pozostaje sprawdzić, dla jakich punktów ten kąt jest prosty, czyli kiedy NL jest średnicą okręgu Eulera. W tym przypadku $\sphericalangle ACB = \sphericalangle NML$ (trójkąt środkowy), ale $\sphericalangle NML = 90°$, czyli ΔABC jest prostokątny - zbiór tych punktów, to okrąg o średnicy AB.

Zadanie 3 *IMO Shortlist, 2002*
Święty Mikołaj gra z Elfem w następującą grę. Mikołaj wybiera trójkę (x, y, z) liczb całkowitych, gdzie $0 \leqslant x, y, z \leqslant 9$. Elf musi odgadnąć trójkę Mikołaja w jak najmniejszej liczbie ruchów. Każdy ruch wygląda następująco:

1. Elf podaje trójkę (a, b, c) jak wyżej.
2. Mikołaj przekazuje wartość liczby:

$$|x + y - a - b| + |y + z - b - c| + |z + x - c - a|.$$

Znajdź najmniejszą liczbę ruchów, jakie musi wykonać Elf, aby być pewnym trójki Mikołaja.

Rozwiązanie:

Zacznijmy od tego, że dwa ruchy nie zawsze wystarczą do odgadnięcia trójki Mikołaja, ponieważ wartość liczby podanej przez Mikołaja jest liczbą parzystą pomiędzy 0 i 54, czyli mamy 28 możliwych odpowiedzi w każdym ruchu. Wszystkich możliwych trójek jest $1000 > 28^2$, czyli więcej niż par odpowiedzi - za dużo.

Udowodnimy teraz, że 3 ruchy zawsze wystarczą:
Pierwszym ruchem powinno być $(0, 0, 0)$, w odpowiedzi dostaniemy $2(x+y+z)$, czyli poznamy sumę $s = x+y+z$ liczb Mikołaja, załóżmy, że $s \leqslant 13$ (dla pozostałych postępujemy analogicznie, ale zamiast pytać o (a, b, c) pytamy o $(9-a, 9-b, 9-c)$).

Przypadek 1) $s \leqslant 9$.
Ten jest prosty, wystarczy spytać w drugim ruchu o $(9, 0, 0)$, a potem $(0, 9, 0$ dostaniemy odpowiednio $18 - 2x$ i $18 - 2y$, co z $s = x + y + z$ da nam trójkę Mikołaja.

Przypadek 2) $9 < s \leqslant 13$.
Teraz powinniśmy spytać o $(9, s-9, 0)$, dostaniemy $z + |9 - x - z| + |9 - x| = 2k$, gdzie $k = z$ (jesli $x + z \geqslant 9$) lub $k' = 9 - x$ (jeśli $x + z < 9$). W obu przypadkach dostajemy $z \leqslant k \leqslant s$.

Przypadek 2a) $s - k \leqslant 9$.
Trzecim ruchem powinno być $(s - k, 0, k)$. Dostaniemy $y + |k - y - z| + |z - k|$, ale $k \leqslant y + z$, więc dostajemy $2y$. Znamy y oraz $x + z$, więc wiemy, czy $k = z$, czy $k = 9 - x$, co daje trójkę.

Przypadek 2b) $s - k > 9$.
Trzecim ruchem powinno być $(9, s - k - 9, k)$. Dostaniemy $18 + 2k - 2(x + z)$, więc znamy $x + z$ i wiemy, czy $k = z$, czy $k = 9 - x$, co ponownie daje trójkę liczb Mikołaja.

Zadanie 4

Udowodnij, że zbiór $\{1, \ldots, 1989\}$ może być przedstawiony w postaci sumy parami rozłącznych zbiorów A_i (dla $i \in \{1, \ldots, 117\}$) tak, że:

- każdy zbiór A_i posiada 17 elementów;
- suma elementów każdego A_i jest taka sama.

Rozwiązanie:

Zacznijmy od dodania skrajnych liczb według algorytmu: $1, 1989 \in A_1$, $2, 1988 \in A_2$, $\ldots$, $118, 1872 \in A_1$, $\ldots$, $936, 1054 \in A_{17}$. W tym momencie każdy zbiór $A_1, \ldots, A_{17}$ zawiera 16 liczb o sumie $8 \cdot 1990$. Pozostały do rozdzielenia liczby $937, \ldots 1053$, czyli:

$$995 - 58,\ 995 - 57,\ \ldots\ ,\ 995\ ,\ \ldots\ ,\ 995 + 57,\ 995 + 58.$$

Teraz w postępujemy następująco: zamieniamy $1 \in A_1$ z $59 \in A_{59}$ oraz dodajemy: $(995 - 58) \to A_1$ i $(995 + 58) \to A_{59}$. Otrzymaliśmy równe sumy w A_1 i A_{59}, analogicznie postępujemy z pozostałymi parami: (A_2, A_{58}), $\ldots$, (A_{29}, A_{31}) oraz (A_{60}, A_{117}), $\ldots$, (A_{88}, A_{89}), natomiast do A_{30} dodajemy 995.

Zadanie 5 *IMO, 1989*

Dany jest trójkąt ostrokątny ABC, gdzie BE i CF to wysokości oraz M to środek BC. Niech ω to okrąg opisany na $BCEF$ oraz P to przecięcie AM i EF. Dla dowolnego punktu X leżącego na krótszym łuku EF niech Y to drugie przecięcie prostej XP i ω. Udowodnij, że $\sphericalangle XAY = \sphericalangle XYM$.

Rozwiązanie:

Wystarczy wykazać, że MY jest styczne do okręgu opisanego na $AXKY$.

Rozważmy okrąg ω opisany na AEF, niech przecina AM w K. Wtedy z kryterium współokręgowości A, X, K i Y są współokręgowe, ponieważ $XP \cdot PY \overset{\omega}{=} EP \cdot PF \overset{\omega}{=} AP \cdot PK$.

Zauważmy, że $\sphericalangle MEA = 180^\circ - \sphericalangle MEC = 180^\circ - \sphericalangle MCE = 180^\circ - \sphericalangle EFA$, czyli ME jest styczne do ω. Zatem wiemy, że $R_\omega^2 = ME^2 = MK \cdot MA$, czyli $MY^2 = R_\omega^2 = MK \cdot MA$, zatem MY styczne do okręgu opisanego na $AXKY$, co daje tezę.

Zadanie 6 *IMO Shortlist, 2003*

Znajdź wszystkie takie pary (a, b) dodatnich liczb całkowitych, że liczba:

$$\frac{a^2}{2ab^2 - b^3 + 1}$$

jest dodatnią liczbą całkowitą.

Rozwiązanie:

Niech (a,b) to para spełniająca warunki zadania. Ponieważ $k = a^2/(2ab^2 - b^3 + 1) > 0$, więc dostajemy $2ab^2 - b^3 + 1 > 0$, $a > b/2 - 1/2b^2$, stąd $a \geqslant b/2$. Dalej, wiemy, że $k \geqslant 1$, zatem $a^2 > b^2(2a - b) \geqslant 0$, stąd:

$$a > b \qquad \text{or} \qquad 2a = b.$$

Rozważmy teraz rozwiązania a_1, a_2 równania:

$$a^2 - 2kb^2 a + k(b^3 - 1) = 0$$

dla ustalonych k i b. Przypuśćmy, że jedno z nich jest całkowite, wtedy także drugie musi być całkowite, ponieważ $a_1 + a_2 = 2kb^2 \in \mathbb{Z}$. Możemy przyjąć, że $a_1 \geqslant a_2$, wtedy $a_1 \geqslant kb^2 > 0$. Ponadto, ponieważ $a_1 a_2 = k(b^3 - 1)$, dostajemy:

$$0 \leqslant a_2 = \frac{k(b^3 - 1)}{a_1} \leqslant \frac{k(b^3 - 1)}{kb^2} < b.$$

Wiemy, że $a > b$ lub $2a = b$, więc dostajemy $a_2 = 0$ lub $a_2 = b/2$:

Jeżeli $a_2 = 0$, to $b^3 - 1 = 0$ czyli $a_1 = 2k$, $b = 1$.

Jeżeli $a_2 = b/2$, to $k = b^2/4$ i $a_1 = b^4/2 - b/2$.

Podsumowując, jedyne możliwe wyniki to:

$$(a,b) = (2l, 1) \qquad \text{lub} \qquad (l, 2l) \qquad \text{lub} \qquad (8l^4 - l, 2l)$$

dla pewnego dodatniego, całkowitego l. Po sprawdzeniu, wszystkie te pary spełniają warunki zadania.

Zestaw próbny Olimpiady Matematycznej

Czas trwania: 5h

Krosno, 29 grudnia 2020 (dzień pierwszy)

Zadanie 1

Znajdź wszystkie liczby $a \in \mathbb{N}_+$ takie, że istnieje dokładnie jedna funkcja $f : \mathbb{N}_+ \to \mathbb{N}_+$ taka, że $f(1) = a$ i zachodzi:

$$f(n) = f(f(n)) - 1 \qquad \forall\ n \in \mathbb{N}_+.$$

Zadanie 2

Każdy punkt kraty całkowitej (czyli zbioru punktów o obu współrzędnych całkowitych) pomalowano na biało lub czarno. Udowodnij, że istnieje nieskończony, jednokolorowy podzbiór tej kraty posiadający środek symetrii.

Zadanie 3

W trójkącie ostrokątnym ABC punkt O jest środkiem okręgu opisanego, zaś punkt H jest punktem przecięcia wysokości. Prosta AH przecina okrąg opisany na trójkącie ABC w punkcie K różnym od A. Proste OK i BC przecinają się w punkcie P. Punkt Q jest symetryczny do punktu P względem środka odcinka OH. Proste AQ i BC przecinają się w punkcie R. Dowieść, że $BP = CR$.

Zestaw próbny Olimpiady Matematycznej

Czas trwania: 5h

Krosno, 29 grudnia 2020 (dzień pierwszy)

Zadanie 1

Znajdź wszystkie liczby $a \in \mathbb{N}_+$ takie, że istnieje dokładnie jedna funkcja $f : \mathbb{N}_+ \to \mathbb{N}_+$ taka, że $f(1) = a$ i zachodzi:

$$f(n) = f(f(n)) - 1 \qquad \forall\ n \in \mathbb{N}_+.$$

Zadanie 2

Każdy punkt kraty całkowitej (czyli zbioru punktów o obu współrzędnych całkowitych) pomalowano na biało lub czarno. Udowodnij, że istnieje nieskończony, jednokolorowy podzbiór tej kraty posiadający środek symetrii.

Zadanie 3

W trójkącie ostrokątnym ABC punkt O jest środkiem okręgu opisanego, zaś punkt H jest punktem przecięcia wysokości. Prosta AH przecina okrąg opisany na trójkącie ABC w punkcie K różnym od A. Proste OK i BC przecinają się w punkcie P. Punkt Q jest symetryczny do punktu P względem środka odcinka OH. Proste AQ i BC przecinają się w punkcie R. Dowieść, że $BP = CR$.

Zestaw próbny
Olimpiady Matematycznej

Czas trwania: 5h

Krosno, 30 grudnia 2020 (dzień drugi)

Zadanie 4

Dany jest trójkąt ABC, którego boki mają długości będące kolejnymi wartościami ciągu arytmetycznego oraz zachodzi $AB \leqslant BC \leqslant AC$. Okręgi wpisany i opisany na tym trójkącie mają promienie odpowiednio r i R. Znajdź długość AH.

Zadanie 5

Udowodnij, że istnieje taka liczba naturalna n, że dla dowolnej liczby całkowitej k liczba k^2+k+n nie posiada dzielnika pierwszego mniejszego od 2020.

Zadanie 6

Rozważmy ciąg wielomianów $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ zdefiniowany następująco:

$$P_1(x) = x \qquad P_{n+1}(x) = P_n(x)^2 + 1 \quad \text{dla } n \geqslant 1$$

Pokazać, że wielomian $P(x)$ spełnia zależność:

$$P(x^2+1) = P(x)^2 + 1$$

wtedy i tylko wtedy, gdy $P \in \{P_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Zestaw próbny
Olimpiady Matematycznej

Czas trwania: 5h

Krosno, 30 grudnia 2020 (dzień drugi)

Zadanie 4

Dany jest trójkąt ABC, którego boki mają długości będące kolejnymi wartościami ciągu arytmetycznego oraz zachodzi $AB \leqslant BC \leqslant AC$. Okręgi wpisany i opisany na tym trójkącie mają promienie odpowiednio r i R. Znajdź długość AH.

Zadanie 5

Udowodnij, że istnieje taka liczba naturalna n, że dla dowolnej liczby całkowitej k liczba k^2+k+n nie posiada dzielnika pierwszego mniejszego od 2020.

Zadanie 6

Rozważmy ciąg wielomianów $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ zdefiniowany następująco:

$$P_1(x) = x \qquad P_{n+1}(x) = P_n(x)^2 + 1 \quad \text{dla } n \geqslant 1$$

Pokazać, że wielomian $P(x)$ spełnia zależność:

$$P(x^2+1) = P(x)^2 + 1$$

wtedy i tylko wtedy, gdy $P \in \{P_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Rozwiązania 2020

Dominik Bysiewicz

Zestaw próbny do Olimpiady Matematycznej

Zadanie 1

Znajdź wszystkie liczby $a \in \mathbb{N}_+$ takie, że istnieje dokładnie jedna funkcja $f : \mathbb{N}_+ \to \mathbb{N}_+$ taka, że $f(1) = a$ i zachodzi:

$$f(n) = f(f(n)) - 1 \qquad \forall\ n \in \mathbb{N}_+.$$

Rozwiązanie:

Zauważmy, że jeśli $f(1) = 1$, to równanie w zadaniu jest sprzeczne: $1 = 0$. Wynika stąd, że $f(1) > 1$. Zauważmy, że:

$$f(1) = a \implies f(a) = f(f(1)) = f(1) + 1 = a + 1 \implies f(a+1) = a + 2 \implies \dots$$

wynika stąd z indukcji matematycznej, że $\forall n \geqslant a:\ f(n) = n + 1$.

Jeśli $a = 2$, to otrzymujemy jedyną możliwą funkcję $f(n) = n + 1$ (funkcja jest indukcyjnie jednoznacznie określona dla wszystkich $n \in \mathbb{N}_+$)

Jeśli $a > 2$, to mamy dwie (a nawet nieskończenie wiele) funkcje spełniające warunki zadania:

$$f_1(n > 2) = n + 1; \quad f_1(1) = a; \quad f_1(2) = a + 1$$

$$f_2(n > 2) = n + 1; \quad f_2(1) = a; \quad f_2(2) = a + 2$$

czyli otrzymujemy sprzeczność.Wynika stąd, że jedynie $a = 2$ spełnia warunki zadania.

Zadanie 2 *LIX OM*

Każdy punkt kraty całkowitej (czyli zbioru punktów o obu współrzędnych całkowitych) pomalowano na biało lub czarno. Udowodnij, że istnieje nieskończony, jednokolorowy podzbiór tej kraty posiadający środek symetrii.

Rozwiązanie:

Przypuśćmy, że teza zadania jest fałszywa. Rozpatrzmy symetrię środkową względem punktu $(0, 0)$.

Ponieważ nie istnieje nieskończony zbiór symetryczny względem tego punktu i złożony z punktów jednego koloru, więc tylko skończenie wiele punktów o obu współrzędnych całkowitych przechodzi przy tej symetrii na punkty tego samego koloru. Wobec tego istnieje taka liczba całkowita M, że dla każdego punktu o współrzędnych całkowitych (x, y), przy czym $|y| > M$, punkty $(-x, -y)$ i (x, y) mają różne kolory.

Rozważając analogicznie symetrię środkową względem punktu $(\frac{1}{2}, 0)$ widzimy, że istnieje taka liczba całkowita N, że dla każdego punktu o współrzędnych całkowitych (x, y), przy czym $|y| > N$, punkt (x, y) ma inny kolor niż jego obraz przez rozpatrywaną symetrię, czyli punkt $(-x + 1, -y)$.

Przyjmijmy $k = \max M, N + 1$ i rozpatrzmy dowolną liczbę całkowitą s. Wówczas punkt (s, k) przy symetrii względem punktu $(0, 0)$ przechodzi na punkt $(-s, -k)$, który jest przeciwnego koloru niż punkt (s, k). Ponadto punkt $(-s, -k)$ przy symetrii względem punktu $(\frac{1}{2}, 0)$ przechodzi na punkt $(s + 1, k)$, który jest przeciwnego koloru niż punkt $(-s, -k)$. Wobec tego punkty (s, k) i $(s+1, k)$ mają jednakowy kolor. Ponieważ s było dowolną liczbą całkowitą, więc wynika stąd, że wszystkie punkty o pierwszej współrzędnej całkowitej i drugiej współrzędnej równej k mają ten sam kolor. Jednakże punkty te tworzą nieskończony zbiór, którego środkiem symetrii jest punkt $(0, k)$. Otrzymana sprzeczność z założeniem nie wprost kończy rozwiązanie.

Zadanie 3 *Rabka Zdrój, 2017*

W trójkącie ostrokątnym ABC punkt O jest środkiem okręgu opisanego, zaś punkt H jest punktem przecięcia wysokości. Prosta AH przecina okrąg opisany na trójkącie ABC w punkcie K różnym od A. Proste OK i BC przecinają się w punkcie P. Punkt Q jest symetryczny do punktu P względem środka odcinka OH. Proste AQ i BC przecinają się w punkcie R. Dowieść, że $BP = CR$.

Rozwiązanie:

Zauważmy najpierw, że punkty K i H są symetryczne względem prostej BC (jest to standardowy fakt). Jednokładność o skali $-\frac{1}{2}$ i środku w punkcie S, który jest środkiem ciężkości trójkąta ABC, przekształca punkt A na środek M boku BC oraz punkt H na punkt O. Wynika stąd równość $OM = AH$, co w efekcie daje $OD = AH$.

Ponadto proste AH i OM są równoległe, więc czworokąt $AHDO$ jest równoległobokiem. Stąd wniosek, że symetria względem środka odcinka OH przeprowadza odcinek DH, zawierający punkt P, na odcinek AO.

W efekcie proste AQ i AO pokrywają się. Trójkąt POR jest równoramienny, gdyż $\sphericalangle OPR = \sphericalangle DPR = \sphericalangle BPH = \sphericalangle PRA = \sphericalangle PRO$. Zatem z prostopadłości $OM \perp BC$ otrzymujemy, że punkt M jest środkiem odcinka PR. Wynika stąd teza zadania.

Zadanie 4

Dany jest trójkąt ABC, którego boki mają długości będące kolejnymi wartościami ciągu arytmetycznego oraz zachodzi $AB \leqslant BC \leqslant AC$. Okręgi wpisany i opisany na tym trójkącie mają promienie odpowiednio r i R. Znajdź długość AH.

Rozwiązanie:

Poprowadźmy dwusieczną $\sphericalangle BAC$, która przecina BC w punkcie D i okrąg opisany w punkcie S. Niech $AB = x + y$, $BC = y + z$ i $CA = z + x$ (odcinki styczne). Z twierdzenia o dwusiecznej otrzymujemy:

$$BD = (x + y)/2 \quad \text{i} \quad DC = (z + x)/2$$

Jeśli M to środek boku BC i P to rzut I (środka okregu wpisanego) na BC, to:

$$BP = y; \quad PD = (x - y)/2; \quad DM = (z + x)/2 - (y + z)/2 = (x - y)/2 = PD$$

Widzimy, że D to środek PM, zatem z tw. Talesa otrzymujemy:

$$MS = IP = r$$

Korzystając ze znanej własności trójkata:

$$AH = 2 \cdot OM = 2(R - r)$$

Zadanie 5 *CPS, 2019*

Udowodnij, że istnieje taka liczba naturalna n, że dla dowolnej liczby całkowitej k liczba $k^2 + k + n$ nie posiada dzielnika pierwszego mniejszego od 2020.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że jeśli $k \equiv 0 \mod p$ lub jeśli $k \equiv -1$, to $k^2 + k \equiv 0 \mod p$. Wynika stąd, że dla ustalonego $p \in \mathbb{P}$, wyrażenie $k^2 + k$ nie przyjmuje wszystkich reszt modulo p, czyli istnieje takie $r \in \{1, \ldots, p - 1\}$, że nie istnieje $k \in \mathbb{Z}$, że $p \mid k^2 + k + r$.

Rozważmy teraz zbiór $\mathbb{P}_{2020}$ liczb pierwszych mniejszych od 2020. Skoro dla każdej $p \in \mathbb{P}_{2020}$ istnieje r_p jak wyżej, to korzystając z Chińskiego Twierdzenia o Resztach:

$$\exists n \in \mathbb{N} : \ 0 < n < \prod_{p \in \mathbb{P}_{2020}} p : \ n \equiv r_p \neq 0 \mod p$$

Zatem otrzymujemy n takie, że nie ma dzielnika pierwszego mniejszego od 2020, zatem teza jest prawdziwa.

Zadanie 6 *Krynica Zdrój, 2015*

Rozważmy ciąg wielomianów $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ zdefiniowany następująco:

$$P_1(x) = x \qquad P_{n+1}(x) = P_n(x)^2 + 1 \quad \text{dla } n \geqslant 1$$

Pokazać, że wielomian $P(x)$ spełnia zależność:

$$P(x^2 + 1) = P(x)^2 + 1$$

wtedy i tylko wtedy, gdy $P \in \{P_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Rozwiązanie:

Najpierw wykażemy, że elementy ciągu $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ spełniają równanie dane w treści. Udowodnimy to przez indukcję.

Dla $n = 0$ mamy $P_0(x) = x$, który istotnie spełnia równanie. Załóżmy, że $R(x) = P_n(x)$ spełnia równanie $R(x^2+1) = (R(x))^2 + 1$, wykażemy, że $P(x) = R(x)^2 + 1 = P_{n+1}(x)$ również spełnia rozważane równanie.

Istotnie jest to prawdą, mamy bowiem

$$P(x^2+1) = R^2(x^2+1) + 1 = ((R(x))^2+1)^2 + 1 = (P(x))^2 + 1$$

Udowodnimy teraz, że jedynie wielomiany z ciągu $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ spełniają warunki zadania. Zauważmy, że

$$P^2(x) = P(x^2+1) - 1 = P((-x)^2+1) - 1 = P^2(-x)$$

stąd dla $x \in \mathbb{R}$ mamy $P(x) = P(-x)$ lub $P(x) = -P(-x)$. W tym drugim przypadku łatwo widzimy, że $P(0) = 0$ co przez łatwą indukcję implikuje, że $P(n) = n$ dla $n \in \mathbb{N}$, więc $P(x) = P_0(x)$ dla $x \in \mathbb{R}$.

Możemy więc założyć, że $P(x) = P(-x)$ dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$. Oznacza to, że wielomian P nie posiada jednomianów stopnia nieparzystego, stąd istnieje wielomian Q o współczynnikach rzeczywistych taki, że dla $x \in \mathbb{R}$ mamy równość $P(x) = Q(x^2)$. Zatem

$$Q((x^2+1)^2) = P(x^2+1) = P^2(x) + 1 = Q^2(x^2) + 1$$

stąd dla wielomianu $R(x) := Q(x-1)$ mamy równość

$$R(y^2+1) = R^2(y) + 1 \text{ dla } y \in \{x^2+1\}_{x \in \mathbb{R}}$$

więc $R(x^2+1) = R^2(x) + 1$ dla $x \in \mathbb{R}$. Ostatecznie

$$P(x) = Q(x^2) = R(x^2+1) = R^2(x) + 1$$

gdzie R spełnia warunek dany w zadaniu i ma stopień mniejszy niż P.

Udowodniliśmy nie wprost, że jeśli istnieje inny wielomian spełniający warunki zadania, to możemy "zbić" jego stopień o połowę, czyli w pewnym momencie musimy uzyskać wielomian nieparzystego stopnia, a jedyny który spełnia warunki, to wielomian $P(x) = x$, czyli wróciliśmy do naszego ciągu, zatem musieliśmy wyjść także od jego wyrazu.