Wyznaczyć wszystkie niestałe, unormowane wielomiany $P(x)$ i $Q(x)$ spełniające warunek $P\left(Q^2(x)\right) = P(x)\cdot Q^2(x)$.
Wyjaśnienie: wielomian unormowany przy najwyższej potędze x ma współczynnik równy 1.

$P(x) = x^n + R(x)$ $\qquad$ $Q(x) = x^m + r(x)$

$$\left((x^m + r(x))^2\right)^n + R\left((x^m+r(x))^2\right) = \left(x^n + R(x)\right)\left(x^m + r(x)\right)^2$$

$\deg P(Q^2(x)) = 2\cdot n\cdot m$ $\qquad$ $\deg P(x)\cdot Q^2(x) = 2m+n$

$2n\cdot m = 2m + n \iff (2m-1)(n-1) = 1$

$m(2n-2) = n \Rightarrow m = \frac{n}{2n-2} = \frac{n}{2(n-1)}$

$NWD(n, n-1) = 1$

Wniosek: $m = 1$, $n = 2$

$P(x) = x^2 + ax + b$ $\qquad$ $Q(x) = x + c \Rightarrow Q^2(x) = (x+c)^2$

$(x+c)^4 + a(x+c)^2 + b = (x^2+ax+b)(x+c)^2$

$x := -c$ $\qquad$ $0 + 0 + b = 0 \Rightarrow b = 0$

$t := x + c \Rightarrow t^4 + at^2 = t^2(x^2+ax)$

$t^4 + at^2 = t^2\left((t-c)^2 + a(t-c)\right)$

$\cancel{t^4} + at^2 = \cancel{t^4} - 2ct^3 + c^2t^2 + at^3 - cat^2$

$t^3(2c-a) + t^2(a - c^2 + ca) = 0$

$a = 2c$ $\qquad$ $a - c^2 + ca = 0$

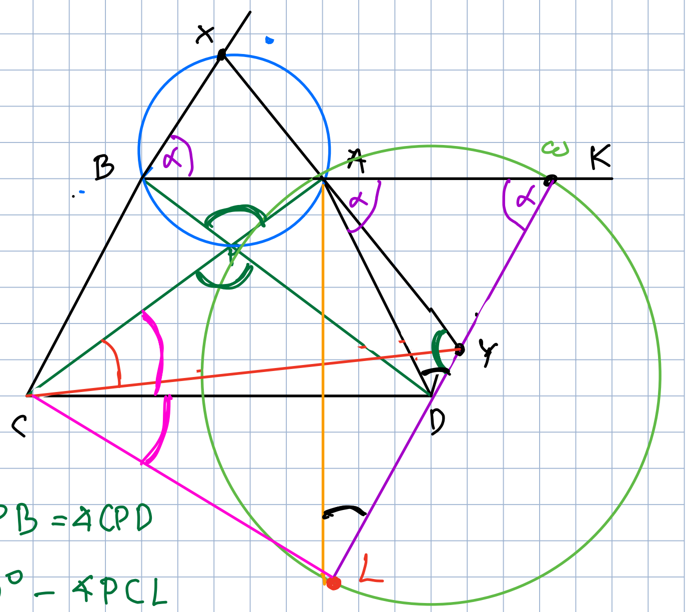
$2c - c^2 + c\cdot 2c = 0$

$2c + c^2 = 0$

$\begin{cases} c = 0 \\ a = 0 \end{cases}$ lub $\begin{cases} c = -2 \\ a = -4 \end{cases}$

Odp. $P(x) = x^2$, $Q(x) = x$ lub $P(x) = x^2 - 4x$, $Q(x) = x - 2$

Niech P będzie punktem przecięcia przekątnych AC i BD trapezu równoramiennego $ABCD$ o następujących własnościach: $AB \parallel CD$, $BC = AD$, $45^\circ < \measuredangle DCB < 90^\circ$. Prosta BC przecina okrąg opisany na trójkącie ABP w punkcie $X \neq B$. Punkt Y leży na prostej AX i spełnia warunek $DY \parallel BC$. Udowodnić, że $\measuredangle YDA = 2\measuredangle YCA$.



$\omega(D, DA)$

$\measuredangle DKA = \measuredangle DAK = \alpha$

$\measuredangle DAB = 180^\circ - \alpha = \measuredangle ABC \Rightarrow \measuredangle XBA = \alpha$

Zatem $KD \parallel BC \Rightarrow Y \in KD$

LK - średnica $\omega \Rightarrow \measuredangle KAL = 90^\circ$

$AL \perp CD$ bo $CD \parallel AB$

CD - symetralna AL

$\measuredangle LYA = 180^\circ - \measuredangle AXB = \measuredangle APB = \measuredangle CPD$

$\measuredangle CPD = 180^\circ - 2\measuredangle PCD = 180^\circ - \measuredangle PCL$

Na czworokącie $ACLY$ można opisać okrąg $\Rightarrow$

$\measuredangle YCA = \measuredangle YLA = \frac{1}{2} \measuredangle KDA = \frac{1}{2} YDA$

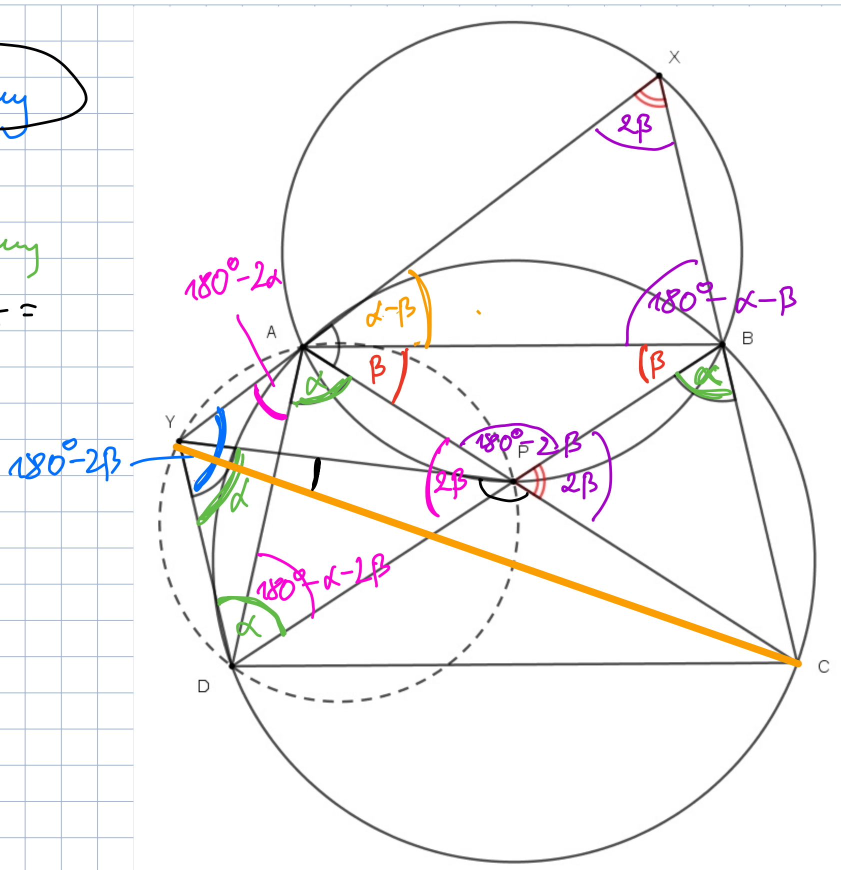
AYDP jest wpisany

PY = PD = PC

PYC - równoramienny

$\sphericalangle YPC = 180^\circ - \sphericalangle YPA =$

$= 180^\circ - \sphericalangle YDA =$



W układzie współrzędnych zaznaczono punkty: $(1,1), (2,3), (4,5), (999,111)$. Jeśli zaznaczony jest punkt (a,b), to można zaznaczyć punkty (b,a) i $(a-b, a+b)$. Jeśli zaznaczony jest punkt (a,b) i (c,d), to można zaznaczyć punkt $(ad+bc, 4ac-4bd)$. Wykazać, że wykonując opisane operacje z użyciem podanych punktów nie można zaznaczyć punktu leżącego na prostej $y = 2x$.

$f(a,b) = a^2+b^2$

$(a,b) \to (b,a)$ $\quad a^2+b^2 \to b^2+a^2$

$(a,b) \to (a-b, a+b)$ $\quad a^2+b^2 \to 2a^2+2b^2$

$(a,b),(c,d) \to (ad+bc, 4ac-4bd)$

$f(a,b)\cdot f(c,d) = (a^2+b^2)(c^2+d^2) = a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2$

$f(ad+bc, 4ac-4bd) = (ad+bc)^2+(4ac-4bd)^2 =$

$= a^2d^2+b^2c^2+2abcd+16a^2c^2-32abcd+16b^2d^2$

$= a^2d^2+b^2c^2+16a^2c^2+16b^2d^2-30abcd$

$(1,1),\ (2,3),\ (4,5),\ (999,111)$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$

$2 \quad 13 \quad 41 \quad 2 \pmod 5$

$(x, 2x)$

$x^2+4x^2 = 5x^2$

II ETAP

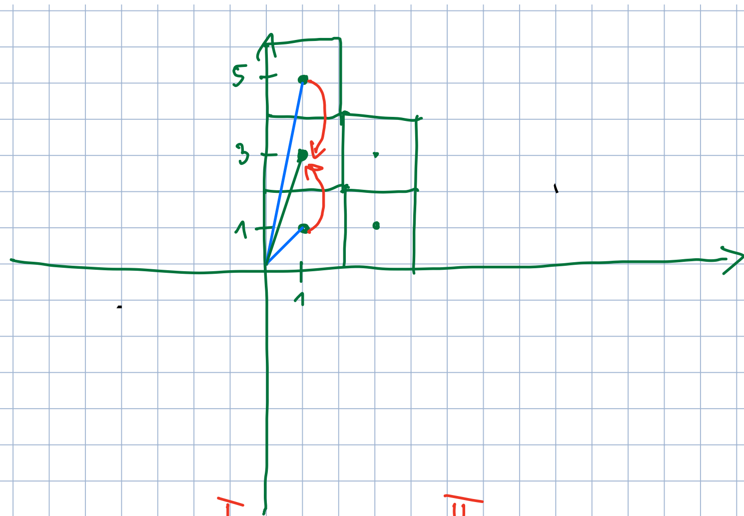
ZETEL GEOMETRIA TRÓJKĄTA

1) ZASADA MAKSIMUM
2) ZASADA DIRICHLETA
3) ZASADA INDUKCJI MAT.
4) METODA NIEZMIENNIKÓW

---

5) SZCZEGÓLNY PRZYPADEK
6) DOWÓD NIE WPROST

Na szachownicy o wymiarach ~~wymiarach~~ 2022×2022 na każdym polu ustawiono kamień. Na kamieniach można wykonywać następującą operację: jeżeli na każdym z kolejnych trzech pól A, B, C znajduje się kamień, to można kamienie z pól A i C przenieść na pole B.
1) Czy jest możliwe przestawienie wszystkich kamieni z szachownicy na jedno pole?
2) Czy operacje z zadania można wykonywać niekończenie wiele razy?



	I	II
$A(a,b)$	$A(a,b)$	$A(a,b)$
$C(c,d)$	$C(a-2,b)$	$C(a,b-2)$
	$\downarrow$	$\downarrow$
	$B(a-1,b)$	$B(a,b-1)$

$f(A,C)$ – suma kwadratów odległości od $(0,0)$

I $\quad OA^2 + OC^2 = (a-0)^2 + (b-0)^2 + (a-2-0)^2 + (b-0)^2 =$

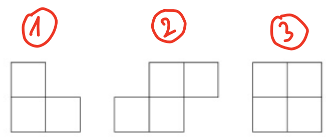
$= 2a^2 + 2b^2 - 4a + 4$

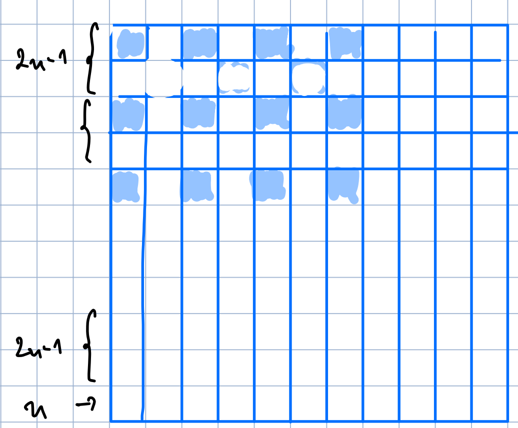
$OB^2 + OB^2 = 2\left((a-1)^2 + b^2\right) = 2a^2 + 2b^2 - 4a + 2$

$f(A,C) > 0$ i $f(A,C) \in \mathbb{Z}$

II Analogicznie jak I.

Tablica o wymiarach $(2n-1)\times(2n-1)$ jest pokryta klockami o następujących kształtach. Udowodnić, że klocków w pierwszym kształcie jest co najmniej $4n-1$.





$1 \to$ 1B, 2C lub 1C, 2B

$2 \to$ 2B, 2C

$3 \to$ 2B, 2C

Czarnych: $(2n-1)(n-1)+n$

Białych: $(2n-1)^2-(2n-1)(n-1)-n$

$1 \to$ 3B lub 2B, 1C

$2 \to$ 3B, 1C

$3 \to$ 3B, 1C

Czarne: n^2

Białe: $(2n-1)^2-n^2=3n^2-4n+1$

a – liczba klocków 1 : 2B, 1C

b – liczba kl. 1 : 3B

c – liczba kl. 2, 3

$$\Rightarrow \quad 3a+3b+4c=(2n-1)^2, \qquad a+c=n^2$$

$$\Downarrow$$

$$a+b \geq 4n-1$$

$$\underline{a-3b}=4(a+c)-(3a+3b+4c)=4n^2-(4n^2-4n+1)=\underline{4n-1}$$

$$a-3b \leq a+b$$

∎

1	2	3	4	1	2	3	4
3	4	1	2	3	4	1	2

1	2	3	4
2	3	4	1
3	4	1	2

1	2	3
1	2	3
1	2	3
1	2	3

M. Pitera Kolorowe kwadraty

$$k + \frac{a_n - n}{2} \geqslant kn$$

$$a_n \geqslant 2kn - 2k + n$$

$a_{n+2} = a_n (a_{n+1} + 1)$

1° $a_n > 2^n$, $\underline{\underline{n > 100}}$

2° $a_n \geqslant 2^k$

1° $n \geqslant k$

$a_n > 2^n \gg 2n^2 + n > 2kn - 2k + n$

2° $k > n$ $a_n > 2^k \gg 2k^2 + k > 2kn - 2k + n$

$\blacksquare$