Zestaw próbny Olimpiady Matematycznej

Czas trwania: 5h

Krosno, 30 grudnia 2020 (dzień drugi)

Zadanie 4

Dany jest trójkąt ABC, którego boki mają długości będące kolejnymi wartościami ciągu arytmetycznego oraz zachodzi $AB \leqslant BC \leqslant AC$. Okręgi wpisany i opisany na tym trójkącie mają promienie odpowiednio r i R. Znajdź długość AH.

Zadanie 5

Udowodnij, że istnieje taka liczba naturalna n, że dla dowolnej liczby całkowitej k liczba k^2+k+n nie posiada dzielnika pierwszego mniejszego od 2020.

Zadanie 6

Rozważmy ciąg wielomianów $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ zdefiniowany następująco:

$$P_1(x) = x \qquad P_{n+1}(x) = P_n(x)^2 + 1 \quad \text{dla } n \geqslant 1$$

Pokazać, że wielomian $P(x)$ spełnia zależność:

$$P(x^2+1) = P(x)^2 + 1$$

wtedy i tylko wtedy, gdy $P \in \{P_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Zestaw próbny Olimpiady Matematycznej

Czas trwania: 5h

Krosno, 30 grudnia 2020 (dzień drugi)

Zadanie 4

Dany jest trójkąt ABC, którego boki mają długości będące kolejnymi wartościami ciągu arytmetycznego oraz zachodzi $AB \leqslant BC \leqslant AC$. Okręgi wpisany i opisany na tym trójkącie mają promienie odpowiednio r i R. Znajdź długość AH.

Zadanie 5

Udowodnij, że istnieje taka liczba naturalna n, że dla dowolnej liczby całkowitej k liczba k^2+k+n nie posiada dzielnika pierwszego mniejszego od 2020.

Zadanie 6

Rozważmy ciąg wielomianów $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ zdefiniowany następująco:

$$P_1(x) = x \qquad P_{n+1}(x) = P_n(x)^2 + 1 \quad \text{dla } n \geqslant 1$$

Pokazać, że wielomian $P(x)$ spełnia zależność:

$$P(x^2+1) = P(x)^2 + 1$$

wtedy i tylko wtedy, gdy $P \in \{P_n\}_{n=1}^{\infty}$.