Olimpiada Matematyczna
Próbny II etap
25 stycznia 2022
Autor zestawu: Jacek Dymel

Czas pracy: 300 minut

1. Wielomian siedmiu zmiennych

$$Q\left(x_1, x_2, \ldots, x_7\right) = \left(x_1 + x_2 + \ldots + x_7\right)^2 + 2\left(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_7^2\right)$$

   można przedstawić jako sumę siedmiu kwadratów wielomianów z nieujemnymi, całkowitymi współczynnikami:

$$Q\left(x_1, \ldots, x_7\right) = P_1\left(x_1, \ldots, x_7\right)^2 + P_2\left(x_1, \ldots, x_7\right)^2 + \ldots + P_7\left(x_1, \ldots, x_7\right)^2.$$

   Znaleźć wszystkie możliwe wartości $P_1(1, 1, \ldots, 1)$.

2. Dane są dwa punkty A i B na prostej k. Na odcinku AB pokolorowano na czerwono punkt P, który jest różny od A, B oraz środka odcinka AB. Jedna operacja polega na tym, że odbijamy czerwony punkt X względem punktu A lub B otrzymując punkt X', a następnie kolorujemy na czerwono środek odcinka, odpowiednio, AX' lub BX'. Udowodnić, że wykonując skończoną liczbę operacji, środek odcinka AB nigdy nie zostanie pokolorowany na czerwono.

3. Wysokości BB_1 i CC_1 ostrokątnego trójkąta ABC przecinają się w punkcie H. Okrąg o środku w punkcie O_b przechodzi przez punkty A, C_1 i środek odcinka BH. Okrąg o środku w punkcie O_c przechodzi przez punkty A, B_1 i środek odcinka CH. Wykazać, że $B_1O_b + C_1O_c > \frac{BC}{4}$.