Zadanie: RAN
Randomowa podróż

Warsztaty ILO 2017-2018, grupa olimpijska, dzień 7. Dostępna pamięć: 128 MB.

Rozwiązanie wzorcowe $O(q \cdot sqrt(n+m))$

Graf na wejściu jest losowy, co wydaje się, że będzie bardzo istotne przy rozwiązywaniu zadania i rzeczywiście tak jest.

Najpierw rozwiążmy sytuacje kiedy niema ścieżki pomiędzy wierzchołkami - graf jest nieskierowany, więc aby stwierdzić czy jest ścieżka, możemy użyć **Find & Union**.

Teraz spróbujmy rozwiązać zapytania - użyjemy techniki meet in the middle i puścimy BFSa z dwóch wierzchołków z zapytania równolegle. Będziemy robić na zmianę jedną iteracje BFSa z jednej strony i jedną z drugiej. Gdy z dwóch stron napotkamy ten sam wierzchołek, będziemy już znali najdłuższą ścieżkę z a do b, bo będzie to odległość z a do tego wierzchołka plus odległość z b do tego wierzchołka.

Lemat.1. *Oczekiwana liczba przejrzanych wierzchołków jest rzędu* $O(sqrt(n))$

Dowód. Wynika to z paradoksu dnia urodzin. Skoro na wejściu mamy losowy graf, to możemy myśleć, że zbiory które widzą nasze BFSy puszczone z obu stron są losowe. Gdy rozmiary zbiorów są rzędu $sqrt(n)$ to według paradoksu prawdopodobieństwo, że będą miały przynajmniej jeden wspólny wierzchołek jest duże, a gdy wielkość zbiorów przekroczy $sqrt(n)$ kilka razy, prawdopodobieństwo jest bliskie 1. □

Można też udowodnić, że te wartości nie odchylają się za bardzo od wartości oczekiwanej, ale jest to całkiem intuicyjne. Można również po napisaniu programu wykonać eksperyment i się przekonać, że tak jest w praktyce.

To wszystko daje nam oczekiwany czas $O(sqrt(n))$ odpowiedzi na pojedyńcze zapytanie.

Fundusze Europejskie Program Regionalny
Podlaskie
Unia Europejska Europejski Fundusz Społeczny