Zadanie: CZK
Cztery Kolory

Warsztaty ILO, grupa olimpijska, dzień 10. Dostępna pamięć: 256 MB.

Rozwiązanie wzorcowe $O(n^2)$

Najpierw zastanówmy się, jak użyć tylko 5 kolorów. Posortujmy pary odpowiadające wierzchołkom leksykograficznie i przypisujmy przeglądanym po kolei wierzchołkom najmniejszy możliwy kolor. Zauważmy, że wierzchołki przeglądane w ten sposób będą miały maksymalnie czterech pokolorowanych już sąsiadów (w strony $(x-1, y)$, $(x-1, y-1)$, $(x-1, y+1)$ i $(x, y-1)$). To oznacza, że wybrany przez nas kolor zawsze będzie nie większy niż 5.

Co potrzebujemy aby uzyskać 4? Kolorujemy graf tak jak poprzednio. Jeśli rozważamy wierzchołek który ma co najwyżej trzech sąsiadów, to już się udało, a jeśli mamy wierzchołek z czterema sąsiadami z których każdy ma różny kolor, to możemy spróbować przemalować pewne wierzchołki już pomalowane, tak aby jakaś para sąsiadów miała równy kolor. Jak to zrobić? Okazuje się, że zawsze się da przemalować wierzchołek w stronę $(x-1, y)$ na kolor wierzchołka w stronę $(x, y-1)$ lub $(x-1, y+1)$ na $(x-1, y-1)$. Dlaczego? Oznaczmy kolor wierzchołka $(x-1, y)$ przez A, natomiast kolor $(x, y-1)$ przez B. Możemy próbować puścić przeszukiwanie gafu z wierzchołka $(x-1, y)$ które będzie zamieniać każdy kolor A na B i odwrotnie. Zauważmy, że jeśli nie istniała ścieżka która była na zmianę koloru A i B pomiędzy tymi wierzchołkami, to puszczenie tego przeszukiwania doprowadzi do sytuacji, że te dwa wierzchołki będą miały równy kolor, a kolorowanie wciąż będzie poprawne. Jeśli natomiast okaże się, że istnieje naprzemienna ścieżka pomiędzy tymi wierzchołkami, to implikuje to, że pomiędzy wierzchołkami w stronę $(x-1, y+1)$ i $(x-1, y-1)$ nie będzie takiej ścieżki (bo graf jest planarny). Wtedy możemy puścić te przeszukiwanie na tej parze wierzchołków i po tym zabiegu na pewno będziemy mogli pokolorować rozważany przez nas nowy wierzchołek na jeden z 4 kolorów.