Zadanie: RZA
Najdzielniejszy dzielnik

Warsztaty ILO 2017-2018, grupa olimpijska, dzień 5. Dostępna pamięć: 128 MB.

Rozwiązanie wzorcowe $O(k \cdot (n \cdot log(a_{max}) + a_{max}^{\frac{2}{3}}))$

Rozwiązanie będzie randomizowane, zadziała z prawdopodobieństwem $1 - 2^{-k}$ i wykonona k iteracji.

Wylosujmy liczbę z wejścia, oznaczmy ją przez a i załóżmy, że wynikowa liczba ją dzieli. Mamy szanse $\frac{1}{2}$, że trafimy.

Teraz będziemy chcieli deterministycznie obliczyć jaka jest największa liczba która dzieli naszą liczbę i przynajmniej połowę liczb z wejścia.

Skoro zakładamy, że liczba wynikowa dzieli a, możemy ze wszystkich liczb z wejścia usunąć czynniki których nie ma w a, aby to zrobić, możemy dla każdej liczby zrobić $a_i = nwd(a_i, a)$. Teraz wszystkie liczby z wejścia dzielą a, natomiast wynik nie jest zmieniony bo i tak założyliśmy że nasz wynik dzieli a.

Teraz znajdźmy wszystkie dzielniki liczby a. Można to łatwo zrobić iterując się do $sqrt(a)$. Dla każdego z nich będziemy chcieli wyznaczyć ile liczb ze zmodyfikowanego wejścia on dzieli. Aby to zrobić, możemy dla każdego dzielnika zliczyć ile liczb ze zmodyfikowanego wejścia jest jemu równych. Potem, aby policzyć dla ustalonego dzielnika ile liczb z wejścia on dzieli, wystarczy przeiterować się po pozostałych dzielnikach i zsumować ile jest liczb na wejściu które on dzieli. Wynikiem będzie największy dzielnik który dzieli przynajmniej połowę z nich.

Odpalany ten algorytm k razy. Wynikiem jest najwyższy z k wyników. Jakie jest prawdopodobieństwo sukcesu? Jest to 1 - prawdopodobieństwo k porażek (przegrywamy gdy nigdy nie trafimy), czyli $1 - \frac{1}{2}^k$. Aby być w miarę bezpiecznym możemy ustawić k w granicach $20 - 30$.

Jaka jest złożoność tego rozwiązania? Liczbę dzielników liczby a możemy szacować przez $a^{\frac{1}{3}}$. Przy każdym odpaleniu algorytmu mamy kwadrat od liczby dzielników oraz $O(n \cdot log(n))$, bo dla każdej liczby z wejścia liczymy nwd.