Zestaw próbny Olimpiady Matematycznej

Czas trwania: 5h

online, grudzień 2021 (dzień drugi)

Zadanie 4

Udowodnij, że zbiór $\{1, \ldots, 1989\}$ może być przedstawiony w postaci sumy parami rozłącznych zbiorów A_i (dla $i \in \{1, \ldots, 117\}$) tak, że:

- każdy zbiór A_i posiada 17 elementów;
- suma elementów każdego A_i jest taka sama.

Zadanie 5

Dany jest trójkąt ostrokątny ABC, gdzie BE i CF to wysokości oraz M to środek BC. Niech ω to okrąg opisany na $BCEF$ oraz P to przecięcie AM i EF. Dla dowolnego punktu X leżącego na krótszym łuku EF niech Y to drugie przecięcie prostej XP i ω. Udowodnij, że $\sphericalangle XAY = \sphericalangle XYM$.

Zadanie 6

Znajdź wszystkie takie pary (a, b) dodatnich liczb całkowitych, że liczba:

$$\frac{a^2}{2ab^2 - b^3 + 1}$$

jest dodatnią liczbą całkowitą.

Zestaw próbny Olimpiady Matematycznej

Czas trwania: 5h

online, grudzień 2021 (dzień drugi)

Zadanie 4

Udowodnij, że zbiór $\{1, \ldots, 1989\}$ może być przedstawiony w postaci sumy parami rozłącznych zbiorów A_i (dla $i \in \{1, \ldots, 117\}$) tak, że:

- każdy zbiór A_i posiada 17 elementów;
- suma elementów każdego A_i jest taka sama.

Zadanie 5

Dany jest trójkąt ostrokątny ABC, gdzie BE i CF to wysokości oraz M to środek BC. Niech ω to okrąg opisany na $BCEF$ oraz P to przecięcie AM i EF. Dla dowolnego punktu X leżącego na krótszym łuku EF niech Y to drugie przecięcie prostej XP i ω. Udowodnij, że $\sphericalangle XAY = \sphericalangle XYM$.

Zadanie 6

Znajdź wszystkie takie pary (a, b) dodatnich liczb całkowitych, że liczba:

$$\frac{a^2}{2ab^2 - b^3 + 1}$$

jest dodatnią liczbą całkowitą.