Zadanie: BOR
Sumujący borsuk

Warsztaty ILO, grupa olimpijska, dzień 13. Dostępna pamięć: 128 MB.

Rozwiązanie wzorcowe $O(1)$

W tym zadaniu odpowiedź nie wypisujemy wtedy i tylko wtedy kiedy liczba na wejściu jest potęgą dwójki.

Dowód. powiedźmy że zapisujemy pewne n jako sumę k kolejnych liczb naturalnych, zaczynając od a, wtedy zachodzi:

$$n = \frac{k \cdot (k-1)}{2} + k \cdot a = \frac{k \cdot (k-1) + k \cdot 2a}{2} = \frac{k \cdot (k-1+2a)}{2}$$

Oczywiste jest że jeden z czynników licznika jest liczbą parzystą, podczas gdy drugi jest nieparzysty, tak więc nasze n musi być rozkładalne na 2 czynniki, z czego jeden jest nieparzysty.

Co więcej, chwila zastanowienia pozwoli nam dojść od wniosku że nieparzysty czynnik nie może być równy jeden (żeby tego dowieść wystarczy zastanowić się co by to oznaczało dla naszej sumy, albo jest to suma jednego elementu, albo jest to suma pierwszych n liczb naturalnych). Więc nie da się tego zrobić dla żadnej liczby będącej potęgą dwójki.

Jeśli jednak n nie jest potęgą dwójki to można go rozłożyć na 2 czynniki, parzysty większy od 1 (z oczywistych względów), oraz nieparzysty (również większy od 1).

ustalmy jako mniejszy z nich jako nasze k, wtedy ostatni element naszego ciągu będzie równy $a + k - 1$, więc:

$$n = \frac{k \cdot (k-1+2a)}{2}$$

$$2n = k \cdot (k-1+2a)$$

$$k - 1 + 2a = \frac{2n}{k}$$

ale ponieważ k jest nie mniejsze od 3 to: □

$$k - 1 + 2a \leq n$$

ale ponieważ k jest mniejsze od $k-1+2a$ to a jest wyrazem dodatnim niezerowym, więc:

$$k - 1 + a < n$$

więc znaleźliśmy nasz poprawny podział.