Zestaw próbny Olimpiady Matematycznej

Czas trwania: 5h

online, grudzień 2021 (dzień pierwszy)

Zadanie 1

Znajdź wszystkie funkcje $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ spełniające:

$$f(f(n)) = n + 2$$

dla wszystkich liczb naturalnych n.

Zadanie 2

Na płaszczyźnie dane są punkty A i B. Funkcja f przypisuje każdemu punktowi C (poza prostą AB) wartość $\sphericalangle AE_CB$, gdzie E_C to środek CH_C, a H_C to ortocentrum trójkąta ABC. Znajdź maksimum, jakie może przyjąć funkcja i opisz zbiór punktów, dla których maksimum jest osiągane.

Zadanie 3

Święty Mikołaj gra z Elfem w następującą grę. Mikołaj wybiera trójkę (x, y, z) liczb całkowitych, gdzie $0 \leqslant x, y, z \leqslant 9$. Elf musi odgadnąć trójkę Mikołaja w jak najmniejszej liczbie ruchów. Każdy ruch wygląda następująco:

1. Elf podaje trójkę (a, b, c) jak wyżej.

2. Mikołaj przekazuje wartość liczby:

$$|x + y - a - b| + |y + z - b - c| + |z + x - c - a|.$$

Znajdź najmniejszą liczbę ruchów, jakie musi wykonać Elf, aby być pewnym trójki Mikołaja.

Zestaw próbny Olimpiady Matematycznej

Czas trwania: 5h

online, grudzień 2021 (dzień pierwszy)

Zadanie 1

Znajdź wszystkie funkcje $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ spełniające:

$$f(f(n)) = n + 2$$

dla wszystkich liczb naturalnych n.

Zadanie 2

Na płaszczyźnie dane są punkty A i B. Funkcja f przypisuje każdemu punktowi C (poza prostą AB) wartość $\sphericalangle AE_CB$, gdzie E_C to środek CH_C, a H_C to ortocentrum trójkąta ABC. Znajdź maksimum, jakie może przyjąć funkcja i opisz zbiór punktów, dla których maksimum jest osiągane.

Zadanie 3

Święty Mikołaj gra z Elfem w następującą grę. Mikołaj wybiera trójkę (x, y, z) liczb całkowitych, gdzie $0 \leqslant x, y, z \leqslant 9$. Elf musi odgadnąć trójkę Mikołaja w jak najmniejszej liczbie ruchów. Każdy ruch wygląda następująco:

1. Elf podaje trójkę (a, b, c) jak wyżej.

2. Mikołaj przekazuje wartość liczby:

$$|x + y - a - b| + |y + z - b - c| + |z + x - c - a|.$$

Znajdź najmniejszą liczbę ruchów, jakie musi wykonać Elf, aby być pewnym trójki Mikołaja.