数据结构第一次作业

沈俞霖

2016-9-30

课程 数据结构与算法
姓名 沈俞霖
专业班级 软件51
学号 2151601013
邮箱 sylxjtu@outlook.com
提交日期 2016-10-*

目录

1 复杂度与时间估计

1.1 作业题目

程序A和程序B经过分析发现其最坏情形运行时间分别不大于 $150N\log N$ 和 N^2 。如果可能，请回答下列问题：

A 对于 N 的大值($N > 10000$)，哪一个程序的运行时间有更好的保障？

B 对于 N 的小值($N < 100$)，哪一个程序的运行时间有更好的保障？

C 对于 $N = 1000$ ，哪一个程序平均运行得更快？

D 对于所有可能的输入，程序B是否总比程序A运行得快？

1.2 问题分析

A A程序运行时间有更好的保障。当 $N = 10000$ 时，在最坏情况下，$150N\log N \approx 2\times 10^7$ ，而 $N^2 = 10^8$，故A程序运行时间有更好的保障。

B B程序运行时间有更好的保障。当 $N = 100$ 时，在最坏情况下，$150N\log N \approx 10^5$ ，而 $N^2 = 10^4$，故B程序运行时间有更好的保障。

C 不能判断，因为题目只给出了最坏情况运行时间，没有给出平均情况运行时间。

D 不能判断，因为题目只给出了最坏情况运行时间，不能以此来判断所有的输入。

2 递归方程求复杂度

2.1 作业题目

考虑以下递归方程，定义函数 $T(n)$ ：

A

$$T(n) = \begin{cases} 1, & \text{如果} n = 1 \\ T(n-1) + n, & \text{其他情况} \end{cases} \tag{1}$$

B

$$T(n) = \begin{cases} 1, & \text{如果} n = 0 \\ 2T(n-1), & \text{其他情况} \end{cases} \tag{2}$$

请给出A和B两种递归式的大O表示，并证明。

2.2 问题分析

A $T(n) = O(n^2)$

证明 (1) 令 $n = 1$，

$$T(n) = 1 = \frac{n^2 + n}{2}$$

(2) 若

$$T(k) = \frac{k^2 + k}{2}$$

则 $T(k+1) = T(k) + k + 1$，即

$$T(k+1) = \frac{(k+1)^2 + (k+1)}{2}$$

由(1)(2)可知，

$$T(n) = \frac{n^2 + n}{2}$$

故 $T(n) = O(n^2)$，证毕。

B $T(n) = O(2^n)$

证明 (1) 令 $n = 0$，

$$T(n) = 1 = 2^n$$

(2) 若

$$T(k) = 2^k$$

则 $T(k+1) = 2T(k)$，即

$$T(k+1) = 2^{k+1}$$

由(1)(2)可知，

$$T(n) = 2^n$$

故 $T(n) = O(2^n)$，证毕。

3 测试排序算法

3.1 作业题目

实现直接插入排序、简单选择排序、希尔排序、快速排序和归并排序，以能够对给定数组的正序排序，并按照满足下列情形进行测试：

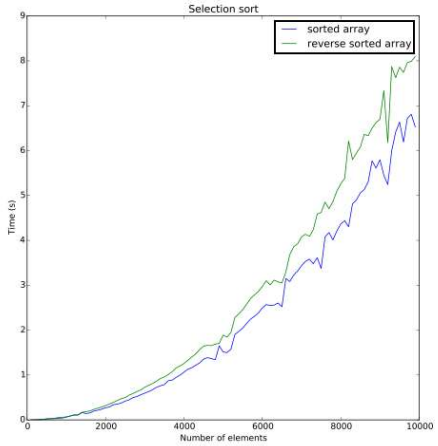
A 测试数组的大小为[100,200,300,⋯,10000] 100 种大小

B 测试数组中的元素分别为正序、逆序和随机序列

对测试的结果需要用图形的方式进行展示：

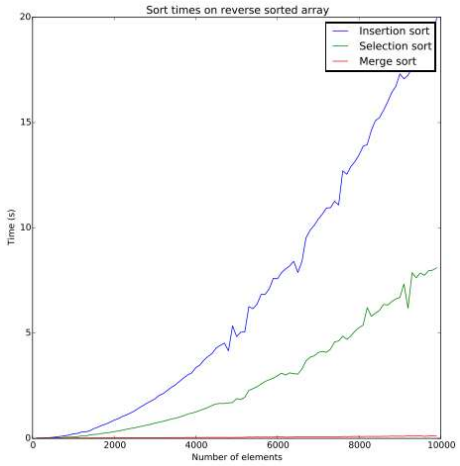
a 展示每个排序算法在满足条件 A 和条件 B 情形下的运行时间趋势变化图，如图 1 所示

图 1: 对选择排序的分析



b 将所有排序算法在正序下、逆序下和随机序列下的运行时间的对比图，如图 2 所示

图 2: 对逆序排序的分析



3.2 程序实现

仅列出算法代码，完整代码详见Github代码仓库

插入排序

```
// InsertionSort.java 插入排序
public class InsertionSort extends SortFunction{
  InsertionSort(DataGenerator gen, int size){
    super(gen, size);
  }
  void sort(int[] arr){
    for (int cur = 1; cur < arr.length; cur++) {
      // 在当前值之前的元素都已排序
      int t = arr[cur];
      int nxt = cur;
      // 将所有大于当前值的已排序元素右移
      for (; nxt >= 1 && arr[nxt - 1] > t; nxt--) {
        arr[nxt] = arr[nxt - 1];
```

```
      }
      // 将当前值归位
      arr[nxt] = t;
    }
  }
}
```

选择排序

```
// SelectionSort.java 选择排序
public class SelectionSort extends SortFunction{
  SelectionSort(DataGenerator gen, int size){
    super(gen, size);
  }
  void sort(int[] arr){
    for (int i = 0; i < arr.length; i++) {
      // 初始化当前最小元素及其位置
      int curm = arr[i];
      int curmi = i;
      // 遍历数组，寻找最小元素
      for (int j = i + 1; j < arr.length; j++) {
        if(arr[j] < curm){
          curm = arr[j];
          curmi = j;
        }
      }
      // 将当前元素与最小元素交换
      int t = arr[i];
      arr[i] = arr[curmi];
      arr[curmi] = t;
    }
  }
}
```

希尔排序

```java
// ShellSort.java 希尔排序
public class ShellSort extends SortFunction{
  ShellSort(DataGenerator gen, int size){
    super(gen, size);
  }
  void sort(int[] arr){
    // 使用Marcin间隔序列
    int[] gaps = new int[]{701, 301, 132, 57, 23, 10, 4, 1};
    for(int i = 0; i < gaps.length; i++){
      // 对每个间隔进行一次插入排序
      for(int j = gaps[i]; j < arr.length; j++){
        int t = arr[j];
        int k = j;
        for( ; k >= gaps[i] && arr[k - gaps[i]] > t; k -= gaps[i]){
          arr[k] = arr[k - gaps[i]];
        }
        arr[k] = t;
      }
    }
  }
}
```

快速排序

```java
// QuickSort.java 快速排序
import java.util.Random;

public class QuickSort extends SortFunction{
  QuickSort(DataGenerator gen, int size){
    super(gen, size);
  }
  void sort(int[] arr){
    // 调用递归的排序方法
```

```
    rsort(arr, 0, arr.length);
  }
  // 递归快速排序
  void rsort(int[] arr, int l, int r){
    // 在元素个数小于等于16时调用插入排序
    if(r - l <= 16){
      isort(arr, l, r);
      return;
    }
    // 随机选取轴值并与第一个元素交换
    Random ran = new Random();
    int pivot = ran.nextInt(r - l);
    int t = arr[l + pivot];
    arr[l + pivot] = arr[l];
    arr[l] = t;
    int cur = l;
    // 选取所有小于轴值的元素放到数组左半部分
    for (int i = l + 1; i < r; i++) {
      if(arr[i] < arr[l]){
        cur++;
        t = arr[cur];
        arr[cur] = arr[i];
        arr[i] = t;
      }
    }
    // 将轴值放到数组中间
    t = arr[cur];
    arr[cur] = arr[l];
    arr[l] = t;
    // 递归对左右两部分进行排序
    rsort(arr, l, cur);
    rsort(arr, cur + 1, r);
  }
```

```
  // 插入排序
  void isort(int[] arr, int l, int r){
    for (int cur = l + 1; cur < r; cur++) {
      int t = arr[cur];
      int nxt = cur;
      for (; nxt >= l + 1 && arr[nxt - 1] > t; nxt--) {
        arr[nxt] = arr[nxt - 1];
      }
      arr[nxt] = t;
    }
  }
}
```

归并排序

```
// MergeSort.java 归并排序
public class MergeSort extends SortFunction{
  MergeSort(DataGenerator gen, int size){
    super(gen, size);
  }
  void sort(int[] arr){
    // 调用递归的排序方法
    rsort(arr, 0, arr.length);
  }
  // 递归归并排序
  void rsort(int[] arr, int l, int r){
    // 在元素个数小于等于16时调用插入排序
    if(r - l <= 16){
      isort(arr, l, r);
      return;
    }
    // 把数组均分，递归进行排序
    rsort(arr, l, (l + r) / 2);
    rsort(arr, (l + r) / 2, r);
```

```
    // 申请临时空间
    int[] arr2 = new int[arr.length];
    int arr2p = 0;

    // 归并两个有序数组
    int ls = l, le = (l + r) / 2, es = (l + r) / 2, ee = r;
    while(ls < le && es < ee){
      if(arr[ls] < arr[es]){
        arr2[arr2p++] = arr[ls++];
      }
      else{
        arr2[arr2p++] = arr[es++];
      }
    }
    while(ls < le){
      arr2[arr2p++] = arr[ls++];
    }
    while(es < ee){
      arr2[arr2p++] = arr[es++];
    }

    // 将临时结构拷贝回原数组
    System.arraycopy(arr2, 0, arr, 0, arr.length);
  }
  // 插入排序
  void isort(int[] arr, int l, int r){
    for (int cur = l + 1; cur < r; cur++) {
      int t = arr[cur];
      int nxt = cur;
      for (; nxt >= l + 1 && arr[nxt - 1] > t; nxt--) {
        arr[nxt] = arr[nxt - 1];
      }
```

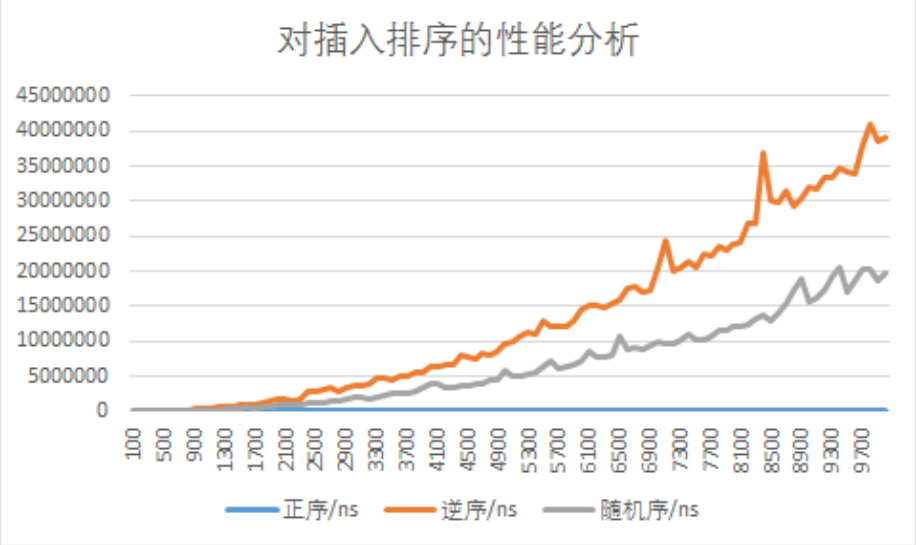
```
      arr[nxt] = t;
    }
  }
}
```

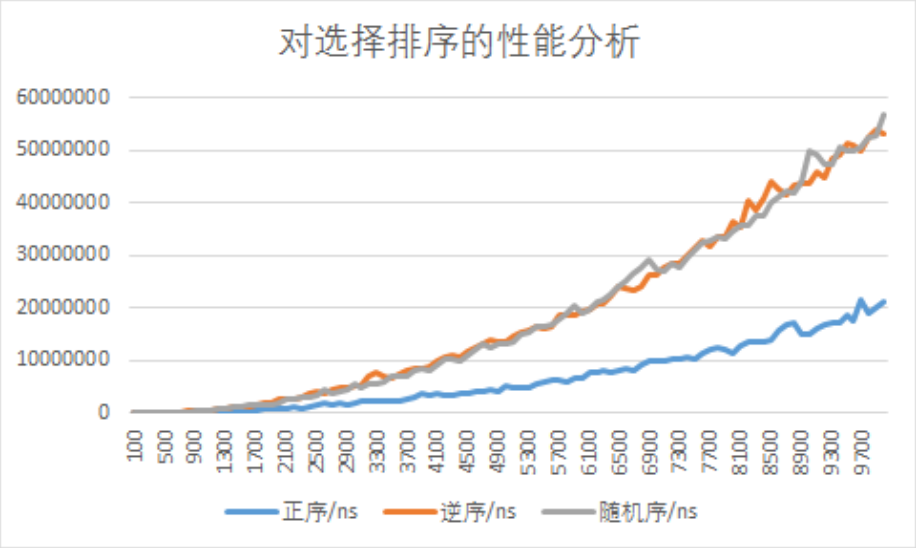
3.3 程序运行结果与时间统计

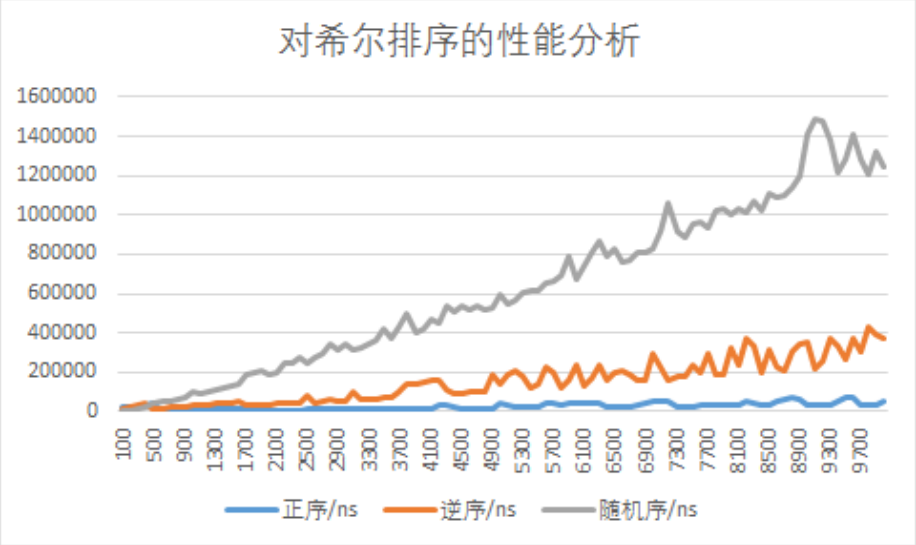
运行结果 所有排序程序全部通过正确性测试

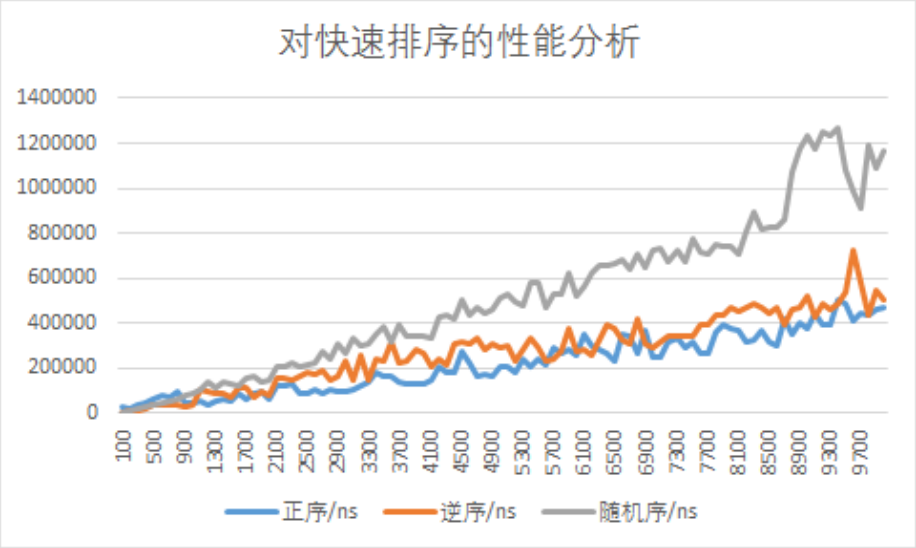
时间统计 以图表形式给出，详细数据详见Github代码仓库

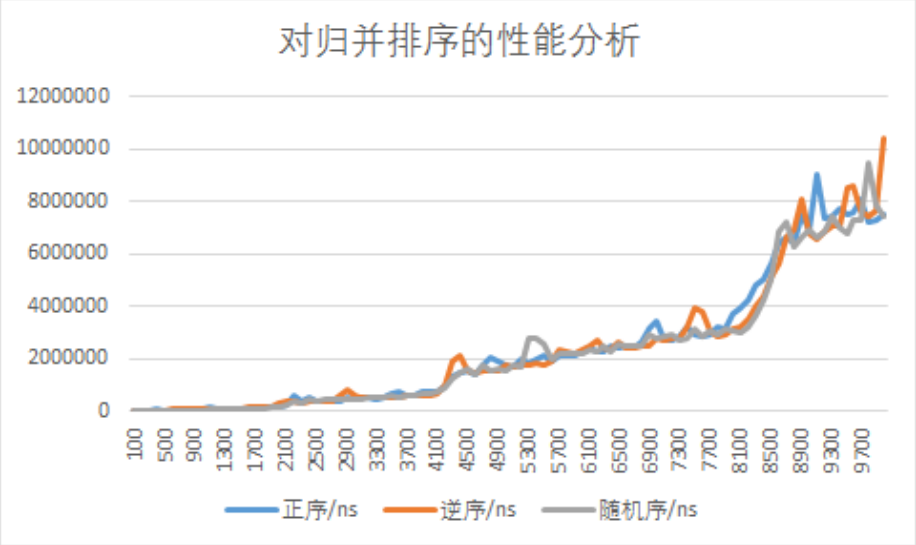
a 每个排序算法在满足条件 A 和条件 B 情形下的运行时间趋势变化图



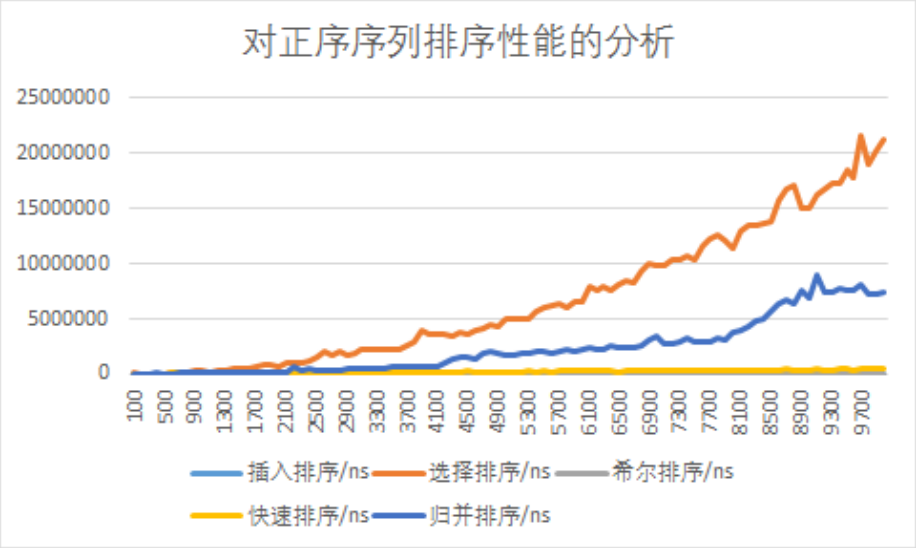

对选择排序的性能分析
60000000
50000000
40000000
30000000
20000000
10000000
0
100 500 900 1300 1700 2100 2500 2900 3300 3700 4100 4500 4900 5300 5700 6100 6500 6900 7300 7700 8100 8500 8900 9300 9700
正序/ns
逆序/ns
随机序/ns

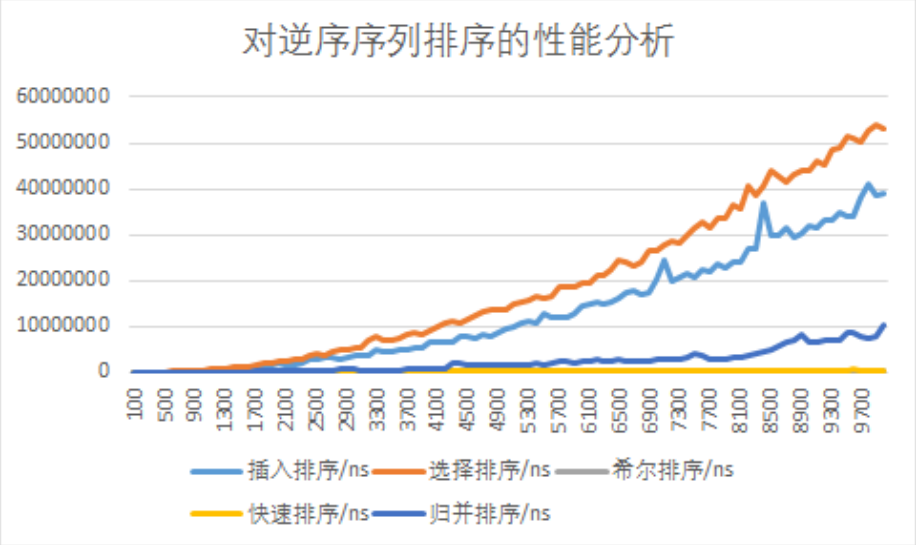

对希尔排序的性能分析
1600000
1400000
1200000
1000000
800000
600000
400000
200000
0
100 500 900 1300 1700 2100 2500 2900 3300 3700 4100 4500 4900 5300 5700 6100 6500 6900 7300 7700 8100 8500 8900 9300 9700
正序/ns
逆序/ns
随机序/ns

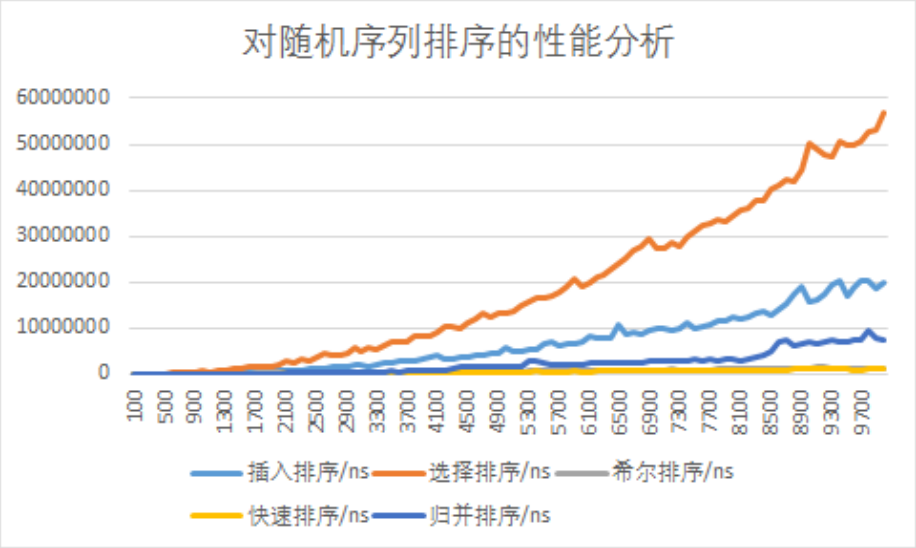




b 所有排序算法在正序下、逆序下和随机序列下的运行时间的对比图


对正序序列排序性能的分析
25000000
20000000
15000000
10000000
5000000
0
100 500 900 1300 1700 2100 2500 2900 3300 3700 4100 4500 4900 5300 5700 6100 6500 6900 7300 7700 8100 8500 8900 9300 9700
插入排序/ns
选择排序/ns
希尔排序/ns
快速排序/ns
归并排序/ns


对逆序序列排序的性能分析
60000000
50000000
40000000
30000000
20000000
10000000
0
100 500 900 1300 1700 2100 2500 2900 3300 3700 4100 4500 4900 5300 5700 6100 6500 6900 7300 7700 8100 8500 8900 9300 9700
插入排序/ns
选择排序/ns
希尔排序/ns
快速排序/ns
归并排序/ns



3.4 算法分析

每个算法在不同数据条件下都有一些不同的性能表现，插入排序和希尔排序的性能表现在正序时明显优于其他情况，而归并排序的时间复杂度最为稳定，三种情况下所需时间基本相等。

在处理大量数据时，希尔排序、快速排序和归并排序速度明显优于插入排序和选择排序的速度，表现了复杂度低的算法在面对大量数据时的优越性。

4 选取主元素

4.1 作业题目

大小为 N 的数组 A，其主元素是一个出现超过 $N/2$ 次的元素（从而这样的元素最多有一个）。

例如，数组 3，3，4，2，4，4，2，4，4 有一个主元素 4

数组 3，3，4，，4，4，2，4 没有主元素。

使用两种方法实现该问题的求解，并编写程序进行实现。

同时给出两种求解的算法分析。

4.2 程序实现

使用了两种求解方法，分别是排序后顺序查找的方法和用哈希表统计后再查找的方法。

代码

```java
// Problem4.java 第4题-选取主元素
import java.util.HashMap;
import java.util.Arrays;

// 第一种算法-排序求解
class SolutionSort{
  static int mainElem(int[] arr){
    // 长度为0，没有主元素
    if(arr.length == 0){
      throw new Error("No main element");
    }
    // 对数组进行排序
    Arrays.sort(arr);
    // 遍历数组找到每个元素出现次数
    int last = arr[0];
    int cnt = 1;
    for(int i = 1; i < arr.length; i++){
      if(cnt > arr.length / 2) return last;
      if(arr[i] == last) cnt++;
      else{
        cnt = 1;
        last = arr[i];
      }
    }
    if(cnt > arr.length / 2) return last;
    // 没有一个元素出现次数大于N/2，没有主元素
    else throw new Error("No main element");
  }
```

```
}

// 第二种算法-使用哈希表
class SolutionHash{
  static int mainElem(int[] arr){
    // 长度为0, 没有主元素
    if(arr.length == 0){
      throw new Error("No main element");
    }
    // 建立一个int到int的哈希表
    HashMap<Integer, Integer> hm = new HashMap<Integer, Integer>();
    // 对每个元素计数
    for(int i = 0; i < arr.length; i++){
      hm.put(arr[i], hm.getOrDefault(arr[i], 0) + 1);
    }
    // 对每个元素的计数进行判断
    for(int i = 0; i < arr.length; i++){
      if(hm.get(arr[i]) > arr.length / 2) return arr[i];
    }
    // 没有找到主元素
    throw new Error("No main element");
  }
}

// 测试代码
public class Problem4{
  public static void main(String[] args) {
    System.out.println(SolutionSort.mainElem(
    new int[]{1, 1, 3, 3, 2, 2, 2, 2, 2})
    );
    System.out.println(SolutionHash.mainElem(
      new int[]{1, 1, 3, 3, 2, 2, 2, 2, 2})
    );
```

```
    DataGenerator ran = new RandomGenerator();
    int[] arr = ran.generate(1000000);
    long n1 = System.nanoTime(), n2;
    try{
      System.out.println(SolutionSort.mainElem(arr));
    }
    catch(Error e){
      System.out.println("没有主元素");
    }
    finally{
      n2 = System.nanoTime();
    }
    System.out.println(n2 - n1);
    long n3 = System.nanoTime(), n4;
    try{
      System.out.println(SolutionHash.mainElem(arr));
    }
    catch(Error e){
      System.out.println("没有主元素");
    }
    finally{
      n4 = System.nanoTime();
    }
    System.out.println(n4 - n3);
  }
}
```

4.3 程序运行结果与时间统计

运行结果 两种解法均通过测试

运行时间 使用10^6个随机数据进行最坏情况运行时间测试

解法1运行时间 1.86×10^8ns

解法2运行时间 8.50×10^8ns

4.4 算法分析

解法1 解法1理论复杂度为$O(n \log n)$（排序）$+ O(n)$（遍历），即为 $O(n \log n)$。

解法2 解法2理论复杂度为$3nO(1)$（2n次哈希表查找，n次哈希表修改），即为$O(n)$，由于哈希表本身的常数复杂度使得该解法求解较慢。

5 选择问题

5.1 作业题目

选择问题：在一组数据中选择第 k 大数据的问题。请给出你的解决方法，并给出该解决方案的时间性能分析。

5.2 程序实现

按照分治的策略，随机选取轴值，把元素划分成小于轴值、大于等于轴值和轴值本身三部分，分类讨论目标元素可能处在的部分，并继续查找。

代码

```
// Problem5.java 第5题-选择问题
import java.util.Random;

class Problem5{
  // 求解函数
  static int kthElement(int[] arr, int k){
    // 验证k的合法性
    if(k > arr.length || k < 1) throw new Error("k must in [1, arr.length]");
    // 调用递归求解方法
    return kthElement_r(arr, 0, arr.length, k);
  }
  static int kthElement_r(int[] arr, int l, int r, int k){
```

```
// 当数组只有一个元素时，答案即此元素
if(r - l == 1){
  return arr[l];
}
// 随机选取轴值并与第一个元素交换
Random ran = new Random();
int pivot = ran.nextInt(r - l);
int t = arr[l + pivot];
arr[l + pivot] = arr[l];
arr[l] = t;
int cur = l;
// 选取所有小于轴值的元素放到数组左半部分
for (int i = l + 1; i < r; i++) {
  if(arr[i] < arr[l]){
    cur++;
    t = arr[cur];
    arr[cur] = arr[i];
    arr[i] = t;
  }
}
// 将轴值放到数组中间
t = arr[cur];
arr[cur] = arr[l];
arr[l] = t;
// 分类讨论所求元素所在位置
if(k - 1 < cur - l){
  return kthElement_r(arr, l, cur, k);
}
else if(k - 1 == cur - l){
  return arr[cur];
}
else{
  return kthElement_r(arr, cur + 1, r, k - (cur - l + 1));
```

```
    }
  }
  // 测试代码
  public static void main(String[] args) {
    Random r = new Random();
    DataGenerator dg = new RandomGenerator();
    int[] arr = dg.generate(1000000);
    long s = System.nanoTime();
    for(int i = 1; i <= 100; i++){
      kthElement(arr, r.nextInt(1000000) + 1);
    }
    long e = System.nanoTime();
    System.out.println(e - s);
  }
}
```

5.3 程序运行结果与时间统计

运行结果 解法通过了测试，有正确性

运行时间 10^6 个数据， 100 次查询，最终用时 3.51×10^8 ns

5.4 算法分析

在平均情况下，对大小为 n 的数组，程序每次运行，都以 $O(n)$ 了复杂度遍历了整个数组，并且递归调用了自身，数量级为 $n/2$ ，可以得出递归方程为

$$T(n) = \begin{cases} O(1), & \text{如果} n = 1 \\ T(n/2), & \text{其他情况} \end{cases} \tag{3}$$

根据等比数列求和公式， $T(n) = 2nO(1) = O(n)$

在最坏情况下，递归调用的数据大小为 $n-1$ ，可以得出递归方程为

$$T(n) = \begin{cases} O(1), & \text{如果} n = 1 \\ T(n-1), & \text{其他情况} \end{cases} \tag{4}$$

根据等差数列求和公式， $T(n) = \frac{n^2+n}{2}O(1) = O(n^2)$

由于轴值随机选择，因此最坏情况基本不可能发生，该算法是有时间保障的。