

最短路及其应用

2017.04.04 四川

最短路算法整理

- 最短路问题的种类
 - 有向图 or 无向图
 - 单源 or 多源
 - 稀疏图 or 稠密图
 - 单位权值 or 任意权值

单位权值

- 给定无向图，包含 n 个点 m 条边。求1号点到 n 号点的最短路。 $n, m \leq 200000$ 。
- 解决方案：BFS，时间复杂度 $O(m)$ 。

单源最短路

- 给定有向图，包含 n 个点 m 条边，边上有权值。求1号点到其他所有点的最短路。 $n, m \leq 200000$ 。
- 解决方案：SPFA，时间复杂度：“ $O(m)$ ”。

单源最短路

- 思考：SPFA与BFS的不同在哪里？

```
while (!q.empty()) {  
    now = q.pop_front();  
    for (e in edges[now]) {  
        if (dis[now] + e.weight < dis[e.target]) {  
            dis[e.target] = dis[now] + e.weight;  
            if (flag[e.target]) {  
                flag[e.target] = false;  
                q.push_back(e.target);  
            }  
        }  
    }  
    flag[now] = true;  
}
```

多源最短路

- 给定有向图，包含 n 个点 m 条边，边上有权值。求任意两点之间的最短路。 $n \leq 200$ ， $m \leq 20000$ 。
- 解决方案：Floyd，时间复杂度“ $O(n^3)$ ”

```
for (int k=1; k<=n; k++)  
    for (int i=1; i<=n; i++)  
        for (int j=1; j<=n; j++)  
            f[i][j] = min(f[i][j], f[i][k]+f[k][j])
```

- 思考：背后原理？

多源最短路

- 动态规划： $f[k][i][j]$ 表示只经过编号不超过 k 的点， i 到 j 的最短路。
 - $f[k][i][j] = \min(f[k-1][i][j], f[k-1][i][k] + f[k-1][k][j]) \quad \text{for } k \geq 1$
 - $f[0][i][j] = a[i][j]$

```
for (int k=1; k<=n; k++)  
    for (int i=1; i<=n; i++)  
        for (int j=1; j<=n; j++)  
             $f[k][i][j] = \min(f[k-1][i][j], f[k-1][i][k] + f[k-1][k][j])$ 
```

多源最短路

- 优化1：滚动数组

```
for (int k=1; k<=n; k++) {  
    for (int i=1; i<=n; i++)  
        for (int j=1; j<=n; j++)  
            f[i][j] = min(last[i][j], last[i][k]+last[k][j])  
    copy(last, f)  
}
```

- 优化2：用f取代last（思考：为什么正确）

```
for (int k=1; k<=n; k++)  
    for (int i=1; i<=n; i++)  
        for (int j=1; j<=n; j++)  
            f[i][j] = min(f[i][j], f[i][k]+f[k][j])
```


最短路算法整理

- 算法比较
 - BFS：适用单位权值，时间 $O(m)$ ；
 - SPFA：单源最短路，时间“ $O(m)$ ”，适用稀疏图；
 - Floyd：多源最段路，时间 $O(n^3)$ ，适用稠密图；
 - Dijkstra：单源最段路，时间 $O(m\log m)$ ，好久没用过了。

次短路

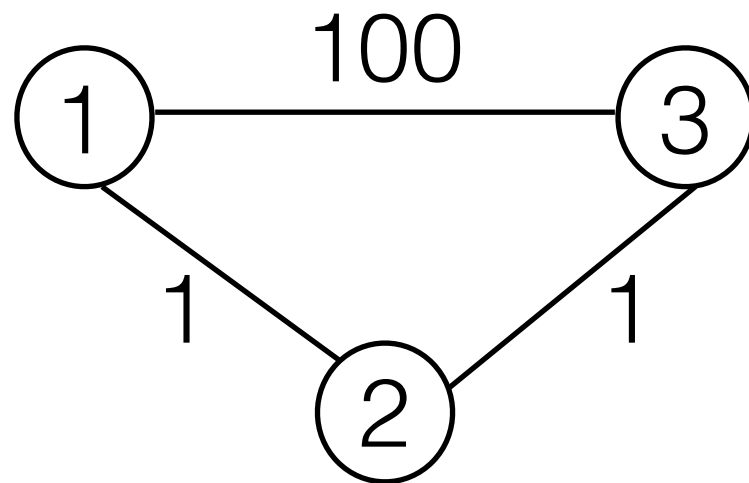
- 给定有向图，包含 n 个顶点， m 条有向边，边上有权值。求1号点到 n 号点的次短路。
- 次短路的定义
 - 路径与最短路不同即可
 - 长度必须严格大于最短路
- 数据范围： $n, m \leq 200000$ 。

最短路的应用

- 给定一个 $n*m$ 的网格图迷宫，迷宫分为障碍“X”，起点“S”，终点“T”和普通格子“.”，起点和终点可能有多个。问最近的起点到最近的终点的最短路是多少。
- 数据范围： $n, m \leq 1000$ 。

最短路的应用

- 给定无向图，包含 n 个顶点， m 条无向边，边上有权值。给定一个特殊值 k ，现让你从1号点出发至少经过 k 条边到达 n 号点，边可重复走，求最短路。
- 数据范围： $n \leq 20000$, $m \leq 200000$, $k \leq 50$ 。
- 样例： $k=3$, $\text{ans}=4$



最短路的应用

- 给定无向图，包含 n 个顶点，点上有权值； m 条无向边，边上有权值。对于顶点 x 到顶点 y 的一条路径，其费用为所经过的边权和再加上点权的最大值（不含 x 和 y ）。现有 q 次询问，每次询问给定 x 和 y ，求最小费用。
- 数据范围： $n \leq 200$, $m \leq 2000$, $q \leq 2000$ 。

最短路的应用

- 给定无向图，包含 n 个顶点， m 条无向边，边上有权值。从1号点出发不经过 i 号点到达 n 号点的最短路径计作 d_i ，求 $d_2..d_{n-1}$ 。
- 数据范围： $n, m \leq 200000$ 。
- 提示： 先思考其简化版，求“不经过某条边”的最短路。

最短路的应用

- 给定 a 、 b 、 c ，对于正整数 x 、 y 、 z ， $ax+by+cz$ 所不能表示的最小正整数是多少。
- 数据范围： $a, b, c \leq 100000$ 。

最短路的应用

- 给定一个有向图，包含 n 个点， m 条边。这个图的补图中1号点到 n 号点最少要经过几条边？
- 数据范围： $n \leq 200000$ ， $m \leq 5000$ 。

用最短路求解DP

- 最优贸易： n 个点， m 条边的有向图，每个点都有一个水晶球的标价。你希望寻找一条从1号点到 n 号点的路径，在途中买入水晶球并卖出以此获得最大的收益，水晶球只能买/卖一次。
- 数据范围： $n \leq 100000$, $m \leq 500000$ 。

用最短路求解DP

- 给定有向图，包含 n 个顶点， m 条有向边，边上有权值。图中有一条边不允许通过，但是要走到这条边的一个端点处才会得知。问最坏情况下1号点到2号点的最短路是多少。
- 数据范围： $n \leq 100$, $m \leq 500$ 。
- 样例： $\text{ans}=9$

