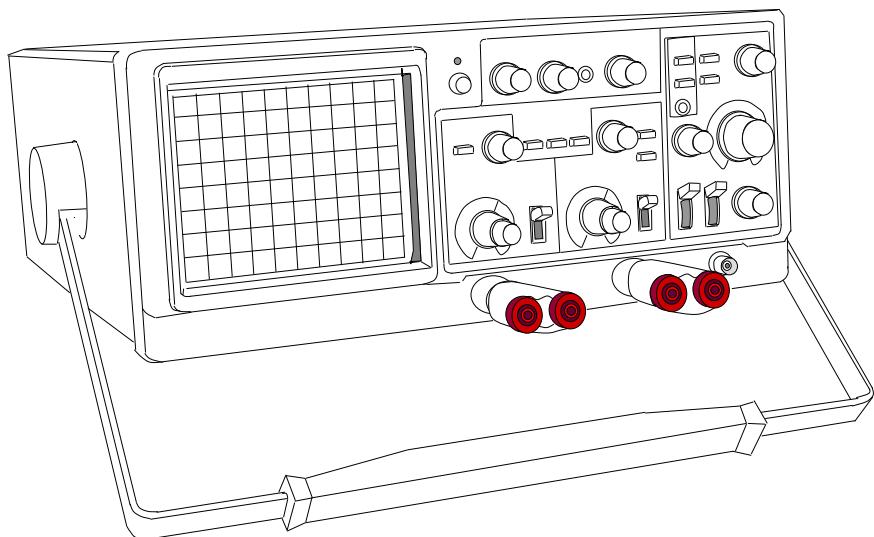


COLLECTION SAWD

# PHYSIQUE

ABDOU  
WAHAB  
DIOP

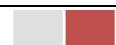
TERMINALES S1 ET S2



Notes de cours | Lycée Seydina Limamou Laye

## Table des matières

<b>Cinématique du point.....</b>	<b>12</b>
I. Notion de système .....	12
II. Vecteur position .....	12
III. Vecteur vitesse instantanée: .....	15
1. DEFINITION .....	15
2. VECTEUR VITESSE ET COORDONNEES CARTESIENNES .....	15
3. VECTEUR VITESSE ET ABSISSE CURVILIGNE.....	17
IV. Accélération.....	18
1. DEFINITION .....	18
2. VECTEUR ACCELERATION ET COORDONNEES CARTESIENNES .....	18
3. VECTEUR ACCELERATION ET COORDONNEES CURVILIGNES .....	19
4. MOUVEMENT ACCELE, RETARDE OU UNIFORME.....	19
V. Changement de référentiel .....	20
1. POSITION DU PROBLEME.....	20
2. LOI DE COMPOSITION DES VITESSES .....	20
VI. Étude de quelques mouvements.....	21
1. MOUVEMENT RECTILIGNE UNIFORME .....	21
2. MOUVEMENT RECTILIGNE UNIFORMEMENT VARIE.....	23
3. MOUVEMENT RECTILIGNE SINUSOIDAL.....	26
4. MOUVEMENT CIRCULAIRE UNIFORME .....	28
5. MOUVEMENT CIRCULAIRE UNIFORMEMENT VARIE.....	29
<b>Bases de la dynamique .....</b>	<b>33</b>
I. Mouvement du centre d'inertie.....	33
II. QUANTITE DE MOUVEMENT .....	33
1. QUANTITE DE MOUVEMENT D'UN POINT MATERIEL .....	33
2. QUANTITE DE MOUVEMENT D'UN SOLIDE .....	33
III. Relation fondamentale de la dynamique .....	34
1. ÉNONCE.....	34
2. CONSEQUENCES.....	34
IV. Relation fondamentale de la dynamique de rotation (S1).....	35
1. CAS D'UN POINT MATERIEL .....	35
2. CAS D'UN SOLIDE .....	35



3. MOMENT D'INERTIE DE QUELQUES SOLIDES.....	35
4. THEOREME DE HUYGENS (S1) .....	36
V. Théorèmes relatifs aux énergies .....	36
1. ENERGIE CINETIQUE.....	36
2. ENERGIE POTENTIELLE .....	37
3. ENERGIE MECANIQUE .....	37
VI. Référentiels et repères galiléens.....	37
1. REFERENTIEL DE COPERNIC (HELIOCENTRIQUE) .....	37
2. REFERENTIEL GEOCENTRIQUE .....	38
3. REFERENTIEL TERRESTRE .....	38
VII. Référentiels et repères non galiléens.....	38
1. POSITION DU PROBLEME.....	38
2. REFERENTIELS NON GALILEENS .....	38
3. MOUVEMENT DE TRANSLATION ACCELERE OU RETARDE .....	38
4. MOUVEMENT DE ROTATION UNIFORME .....	39
<b>Applications des bases de la dynamique.....</b>	<b>40</b>
I. Mouvements rectilignes.....	40
1. SOLIDE GLISSANT SUR UN PLAN INCLINE .....	40
2. SYSTEMES ARTICULES .....	41
3. MOUVEMENT D'UNE PARTICULE DANS LE CHAMP DE PESANTEUR: CAS OU $\vec{g} \parallel \vec{v}_0$ .....	41
4. MOUVEMENT D'UNE PARTICULE CHARGEÉE DANS UN CHAMP $\vec{E}$ UNIFORME: CAS OU $\vec{E} \parallel \vec{v}_0$ .....	42
5. MOUVEMENT D'UNE BILLE DANS UN FLUIDE .....	43
II. Mouvement paraboliques .....	45
1. MOUVEMENT D'UN PROJECTILE DANS LE CHAMP DE PESANTEUR: CAS OU $v_0 \neq \vec{g}$ .....	45
2. MOUVEMENT D'UNE PARTICULE CHARGEÉE DANS E UNIFORME: .....	48
III. Mouvements circulaires uniformes.....	51
1. ÉTUDE DYNAMIQUE.....	51
2. PENDULE CONIQUE .....	51
3. RELEVEMENT DES VIRAGES.....	52
IV. Mouvement circulaire uniformément varié ( S1).....	53
1. ÉTUDE DYNAMIQUE.....	53
2. APPLICATION .....	53
V. Conservation de la quantité de mouvement .....	54

1. APPLICATION AU RECOL D'UNE ARME A FEU .....	54
2. ÉTUDE DES CHOCS.....	54
<b>Gravitation universelle .....</b>	<b>58</b>
I. Interactions gravitationnelles: loi de Newton .....	58
II. Champ de gravitation .....	58
1. OBJET PONCTUEL .....	58
2. OBJET DE SYMETRIE SPHERIQUE .....	58
3. FORCE GRAVITATIONNELLE CREEE PAR UN OBJET PLACE DANS UN CHAMP DE GRAVITATION .....	59
4. APPLICATION.....	59
5. CHAMP DE GRAVITATION DE LA TERRE.....	59
6. CHAMP DE GRAVITATION ET CHAMP DE PESANTEUR .....	60
III. Énergie potentielle de gravitation.....	60
IV. Mouvement circulaire des satellites terrestres .....	61
1. ACCELERATION D'UN SATELLITE .....	61
2. SATELLITE A TRAJECTOIRE CIRCULAIRE .....	62
3. SATELLITES GEOSTATIONNAIRES .....	64
4. ETAT D'IMPESANTEUR DANS UN SATELLITE.....	65
V. La satellisation .....	66
1. CHUTE LIBRE PARABOLIQUE .....	66
2. SATELLISATION .....	66
<b>Oscillations mécaniques libres.....</b>	<b>67</b>
I. Généralités .....	67
II. Oscillateurs en translation.....	67
1. PENDULE ELASTIQUE HORIZONTAL .....	67
2. PENDULE ELASTIQUE VERTICAL .....	70
3. PENDULE ELASTIQUE SUR UN PLAN INCLINE.....	71
III. Oscillateurs en rotation .....	72
1. PENDULE SIMPLE .....	72
2. PENDULE PESANT .....	73
3. PENDULE DE TORSION .....	73
IV. Oscillateurs mécaniques amorties .....	73
V. Association de ressorts.....	74
<b>Généralités sur les champs magnétiques .....</b>	<b>76</b>

I.	Interactions électromagnétiques .....	76
1.	MISE EN EVIDENCE .....	76
2.	POLES D'UN AIMANT, FACES D'UNE BOBINE .....	76
II.	Champ magnétique .....	77
1.	VECTEUR CHAMP MAGNETIQUE .....	77
2.	SPECTRES MAGNETIQUES.....	78
3.	CHAMP MAGNETIQUE TERRESTRE .....	78
4.	CHAMPS CREEES PAR LES COURANTS .....	80
	<b>Mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique uniforme .....</b>	<b>82</b>
I.	Force magnétique.....	82
1.	RELATION DE LORENTZ.....	82
2.	CARACTERISTIQUES DE LA FORCE DE LORENTZ.....	82
3.	APPLICATION.....	82
II.	Étude théorique du mouvement dans le cas où la vitesse initiale est perpendiculaire au champ magnétique .....	83
1.	EXPRESSION DE L'ACCELERATION .....	83
2.	NATURE DU MOUVEMENT.....	83
3.	VITESSE LINEAIRE, VITESSE ANGULAIRE, PERIODE, FREQUENCE.....	84
4.	REMARQUES IMPORTANTES .....	84
III.	Applications pratiques.....	84
1.	ÉTUDE DE LA DEFLEXION MAGNETIQUE .....	84
2.	SPECTROGRAPHE DE MASSE .....	85
3.	FILTRE DE VITESSE .....	86
4.	CYCLOTRON .....	87
	<b>Loi de Laplace.....</b>	<b>89</b>
I.	Action d'un champ magnétique uniforme sur un élément de courant .....	89
1.	ÉTUDE EXPERIMENTALE .....	89
2.	LOI DE LAPLACE .....	89
II.	Applications .....	91
1.	ROUE DE BARLOW .....	91
2.	BALANCE DE COTTON .....	92
3.	HAUT PARLEUR ELECTRODYNAMIQUE .....	92
III.	Interaction entre deux courants rectilignes et parallèles .....	93
1.	EXPERIENCE .....	93

2. INTERPRETATION .....	93
3. DEFINITION LEGALE DE L'AMPERE.....	94
IV. Action d'un champ magnétique sur un cadre rectangulaire.....	94
1. NORMALE AU PLAN D'UN CADRE .....	94
2. FORCE DE LAPLACE S'EXERÇANT SUR UN CADRE.....	94
3. MOMENT DES FORCES DE LAPLACE .....	94
4. POSITION D'EQUILIBRE DU CADRE.....	94
V. Notion de flux magnétique.....	95
1. FLUX MAGNETIQUE A TRAVERS UN CONTOUR PLAN .....	95
2. FLUX A TRAVERS UN CIRCUIT .....	95
3. REGLE DU FLUX MAXIMAL .....	95
<b>Induction électromagnétique .....</b>	<b>96</b>
I. Rappels: algébrisation des grandeurs physiques (i et u) .....	96
1. CONVENTION RECEPTEUR .....	96
2. Loi d'OHM GENERALISEE.....	96
II. Phénomène d'induction.....	97
1. ÉTUDE EXPERIMENTALE .....	97
2. INTERPRETATION .....	99
3. CONCLUSION.....	100
4. SENS DU COURANT INDUIT: LOI DE LENZ .....	100
III. Force électromotrice d'induction.....	100
1. FEM. INDUIITE MOYENNE .....	100
2. FEM. INDUIITE INSTANTANEE .....	100
3. INTENSITE DU COURANT INDUIT .....	100
4. APPLICATION.....	101
5. CHAMP ELECTROMOTEUR D'INDUCTION .....	101
IV. Applications: <i>Le transformateur</i> .....	102
<b>Auto-induction électromagnétique.....</b>	<b>104</b>
I. Phénomène d'auto induction.....	104
1. INFLUENCE D'UNE BOBINE DANS UN CIRCUIT .....	104
2. VISUALISATION A L'OSCILLOSCOPE .....	104
3. INTERPRETATION .....	105
II. Force électromotrice d'auto induction .....	105

1. INDUCTANCE D'UNE BOBINE .....	105
2. F.E.M. D'AUTO INDUCTION .....	105
3. TENSION AUX BORNES D'UNE BOBINE .....	105
III. Réponse d'un dipôle RL.....	106
1. ÉQUATION DIFFERENTIELLE .....	106
2. LOI D'ETABLISSEMENT DU COURANT .....	106
3. LOI D'ANNULATION DU COURANT .....	107
4. CONSTANTE DE TEMPS .....	107
IV. Énergie emmagasinée dans une bobine .....	108
V. Suppression d'un courant dans un circuit inductif :.....	108
<b>Condensateurs: dipôle RC.....</b>	<b>110</b>
I. Le condensateur .....	110
1. DEFINITION ET SYMBOLE.....	110
2. CHARGE ET DECHARGE D'UN CONDENSATEUR .....	110
3. VISUALISATION A L'OSCILLOSCOPE .....	111
4. RELATION ENTRE LA CHARGE ET L'INTENSITE DU COURANT .....	111
5. CAPACITE D'UN CONDENSATEUR .....	112
II. Réponse d'un dipôle RC à un échelon de tension .....	112
1. ÉQUATIONS DIFFERENTIELLES VERIFIEES PAR LA TENSION $U_C$ .....	112
2. SOLUTIONS DES EQUATIONS DIFFERENTIELLES PRECEDENTES. ....	113
3. REPONSE EN INTENSITE. ....	114
4. CONSTANTE DE TEMPS DU DIPOLE RC .....	115
III. Énergie emmagasinée dans un condensateur. ....	116
1. RELATION DONNANT CETTE ENERGIE.....	116
2. ORDRE DE GRANDEUR DE LA DUREE DU TRANSFERT D'ENERGIE.....	116
3. ASSOCIATION DE CONDENSATEURS (RAPPEL 1E S) .....	117
<b>Oscillations électriques libres: circuit LC .....</b>	<b>118</b>
I. Décharge d'un condensateur dans une bobine : étude expérimentale.....	118
1. MONTAGE (AVEC OSCILLOSCOPE A MEMOIRE) .....	118
2. COURBES, POUR PLUSIEURS RESISTANCES .....	118
3. REMARQUE : MONTAGE AVEC OSCILLOSCOPE CLASSIQUE .....	118
4. CONCLUSION .....	119
II. Décharge d'un condensateur dans une bobine idéale (LC) .....	119

1. ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE .....	119
2. SOLUTION .....	119
3. VARIATION DE L'INTENSITÉ ET DE LA TENSION $U_C$ EN FONCTION DU TEMPS .....	120
4. ÉTUDE ENERGETIQUE .....	121
III. Influence de la résistance du circuit sur les oscillations (RLC libre) .....	121
1. ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE .....	121
2. LES DIFFERENTS REGIMES.....	122
3. ÉTUDE ENERGETIQUE DU REGIME PSEUDOPERIODIQUE .....	122
IV. Analogie électromécanique.....	123
<b>Oscillations électriques forcées en régime sinusoïdal: circuit RLC série .....</b>	<b>124</b>
I. Généralités sur le courant alternatif .....	124
1. DEFINITION .....	124
2. INTENSITE ET TENSION EFFICACES .....	124
3. IMPEDANCE D'UN DIPOLE .....	125
II. Représentation de Fresnel d'une valeur sinusoïdale .....	125
1. PRINCIPE.....	125
2. SOMME DE DEUX GRANDEURS SINUSOIDALES DE MEME PULSATION .....	126
III. Étude de quelques dipôles en courant alternatif.....	126
1. RESISTOR .....	126
2. BOBINE( $R; L$ ) .....	127
3. CAPACITE .....	128
IV. Circuit RLC série en régime sinusoïdal forcé .....	129
1. OSCILLATIONS FORCEES .....	129
2. IMPEDANCE ET DEPHASAGE DU DIPOLE RLC.....	129
3. RESONANCE D'INTENSITÉ .....	131
4. COURBE DE RESONANCE D'INTENSITÉ .....	132
5. BANDE PASSANTE .....	133
6. FACTEUR DE QUALITE .....	133
7. PHENOMENE DE SURTENSION .....	134
V. Puissance en courant alternatif.....	134
1. PUSSANCE INSTANTANEE.....	134
2. PUSSANCE MOYENNE .....	135
<b>Interférences lumineuses .....</b>	<b>137</b>

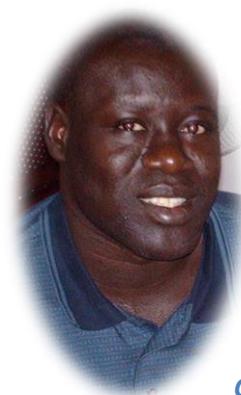


I.	Modèle du rayon lumineux .....	137
1.	OPTIQUE GEOMETRIQUE.....	137
2.	LIMITE DE L'OPTIQUE GEOMETRIQUE .....	137
II.	Modèle ondulatoire de la lumière.....	138
1.	PROPAGATION.....	138
2.	LES PERIODICITES .....	138
III.	Couleur et longueur d'onde .....	139
1.	LUMIERE MONOCHROMATIQUE .....	139
2.	LUMIERE VISIBLE .....	139
IV.	Interférences lumineuses : Expérience de la double fente de Young.....	139
1.	MISE EN EVIDENCE DES INTERFERENCES LUMINEUSES .....	139
2.	OBSERVATIONS .....	140
3.	INTERPRETATION THEORIQUE .....	140
	<b>Effet photoélectrique .....</b>	<b>146</b>
I.	Mise en évidence de l'effet électrique .....	146
1.	EXPERIENCE DE HERTZ (1887).....	146
2.	ANALYSE DE L'EXPERIENCE .....	147
3.	CONCLUSION .....	147
4.	CAS DE LA CELLULE PHOTOELECTRIQUE .....	147
II.	Interprétation de l'effet photoélectrique .....	147
1.	HYPOTHESE D'EINSTEIN.....	147
2.	SEUIL PHOTOELECTRIQUE.....	148
3.	PUISANCE D'UN FAISCEAU MONOCHROMATIQUE.....	148
III.	Dualité onde corpuscule .....	148
	<b>Niveaux d'énergie de l'atome .....</b>	<b>151</b>
I.	Spectre atomique .....	151
1.	SPECTRE D'EMISSION ET D'ABSORPTION .....	151
2.	INTERPRETATION .....	151
II.	Niveaux d'énergie de l'atome d'hydrogène .....	153
1.	ÉNERGIE DE L'ATOME D'HYDROGÈNE .....	153
2.	SERIE DE RAIRES D'EMISSION .....	153
3.	DIAGRAMME D'ENERGIE .....	154
III.	Généralisation aux autres atomes.....	155

1. LES IONS HYDROGENOÏDES.....	155
2. LES IONS POLY ELECTRONIQUES .....	155
<b>Masse et énergie: réactions nucléaires .....</b>	<b>159</b>
I. Quelques définitions relatives aux noyaux d'atomes .....	159
1. CARACTERISTIQUES D'UN NOYAU D'ATOME. ....	159
2. NUCLEIDE. ....	159
3. ÉLÉMENT. ....	159
4. ISOTOPES. ....	159
5. GRANDEUR DU NOYAU .....	159
II. Équivalence masse énergie .....	159
1. ÉNERGIE DE LIAISON.....	159
2. RELATION D'EQUIVALENCE.....	160
3. UNITE DE MASSE ET D'ENERGIE .....	160
III. Énergie de liaison du noyau .....	160
1. DEFAUT DE MASSE DU NOYAU .....	160
2. ÉNERGIE DE LIAISON DU NOYAU .....	161
3. ÉNERGIE DE LIAISON PAR NUCLEON.....	161
4. COURBE D'ASTON .....	161
IV. Fission et fusion nucléaire .....	162
1. REACTIONS NUCLEAIRES PROVOQUEES .....	162
2. LA FISSION NUCLEAIRE: REACTION EN CHAINE .....	162
3. LA FUSION NUCLEAIRE .....	162
V. Bilan d'énergie.....	163
1. CAS DES REACTIONS NUCLEAIRES SPONTANÉES .....	163
2. CAS DES REACTIONS DE FISSION.....	164
3. CAS DES REACTIONS DE FUSION .....	164
<b>Radioactivité : réactions nucléaires .....</b>	<b>165</b>
I. Stabilité et instabilité des noyaux .....	165
1. LES PRINCIPALES FORCES AGISSANT DANS LE NOYAU.....	165
2. INSTABILITÉ DU NOYAU.....	165
II. Radioactivité.....	165
1. DEFINITION.....	165
2. PROPRIETES DE LA DESINTEGRATION.....	165

III.	Les divers types de radioactivités.....	166
1.	LOIS DE CONSERVATION .....	166
2.	RADIOACTIVITE ALPHA.....	166
3.	RADIOACTIVITE B - .....	167
4.	RADIOACTIVITE BETA+.....	168
5.	DESEXCIATION GAMMA. ....	169
IV.	Loi de décroissance radioactive. ....	169
1.	NOTATIONS UTILISEES. ....	169
2.	DECROISSANCE EXPONENTIELLE.....	170
3.	DEMI-VIE RADIOACTIVE.....	171
V.	Activité d'une source radioactive.....	172
1.	DEFINITION.....	172
2.	EXPRESSION DE L'ACTIVITE.....	172
3.	PRINCIPE DE LA DATATION D'UN OBJET TRES ANCIEN A L'AIDE D'UN RADIODEMENT.....	172
4.	DANGEROUSITE ET EFFETS BIOLOGIQUES. ....	173

Serigne Abdou Wahab Diop



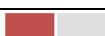
Email 1: [wahabdiop@yahoo.fr](mailto:wahabdiop@yahoo.fr)

Email 2: [diopwahab@hotmail.com](mailto:diopwahab@hotmail.com)

Web: <http://physiquechimie.sharepoint.com>

Professeur de sciences physiques au lycée Seydina Limamou Laye de  
Guediawaye - Dakar

Ce document comporte des notes de mes cours en classe de Terminale S<sub>1</sub> & S<sub>2</sub> au lycée à l'attention de mes élèves et collègues.



# Cinématique du point

La cinématique consiste à analyser de façon purement mathématique le mouvement des corps en les assimilant à des points matériels sans se préoccuper des causes de ce mouvement. Les grandeurs physiques de la cinématique sont le temps, la position, la vitesse et l'accélération.

## I. Notion de système

Dans ce qui suit, ou plus généralement en physique, on s'intéresse aux propriétés d'un objet ou d'un ensemble d'objets: par exemple on s'intéressera au mouvement d'un véhicule, aux interactions entre la Terre et la Lune, etc...., le véhicule, l'ensemble Terre-Lune, etc...., constitue le système étudié.

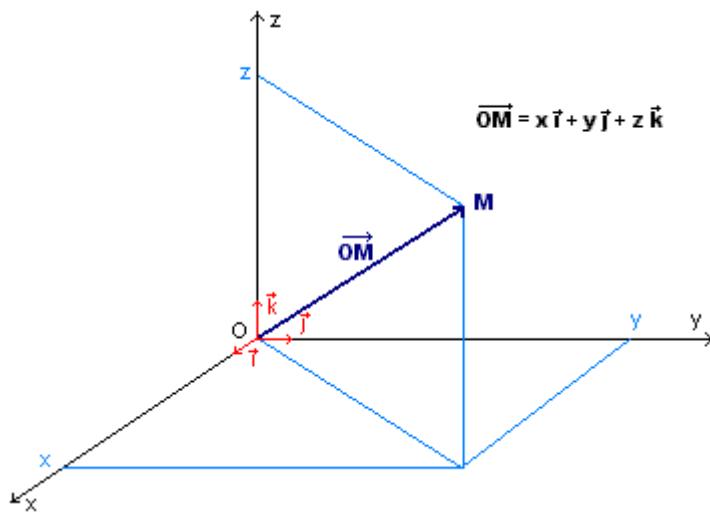
Le système étudié peut être **indéformable**: si la distance de deux points quelconques de ses points demeure invariable au cours de son évolution: les solides constituent un exemple de tels systèmes. Dans le cas contraire, le système est **déformable**: cas de la pâte à modeler par exemple.

Pour ce qui nous concerne, en cinématique et ultérieurement en dynamique, les systèmes que nous considérerons seront ponctuels ou encore des points matériels, c'est-à-dire des solides dont les dimensions sont suffisamment petites pour qu'on puisse les assimilé à un point. En général, on assimilera un solide à un point matériel qui est confondu avec le centre d'inertie du solide et dont la masse est égale à la masse du solide considéré.

## II. Vecteur position

### 1. Coordonnées cartésiennes

La position d'un mobile M, à un instant t est définie dans un repère  $\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  par le vecteur position  $\overrightarrow{OM}$ .



La position du point M est repérée par son vecteur position  $\overrightarrow{OM}$ :  $\overrightarrow{OM} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}$ ;  
 $OM = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

 Serigne Abdou Wahab Diop – Lycee Limamou Laye / <http://physiquechimie.sharepoint.com>

- Si le repère est orthonormé  $x, y, z$  sont appelés coordonnées cartésiennes du point M.
- Si le mobile M est immobile dans le repère  $\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , ses coordonnées sont indépendantes du temps.
- Si M est en mouvement dans le repère  $\mathcal{R}$ , ses coordonnées sont en fonction du temps. Ainsi  $x(t), y(t)$  et  $z(t)$  sont appelées **équations horaires** ou **équations paramétriques** du mouvement.
- Pour déterminer l'équation cartésienne de la trajectoire, on élimine la variable temps  $t$  entre les paramètres  $x, y$  et  $z$ .

Exemple a)

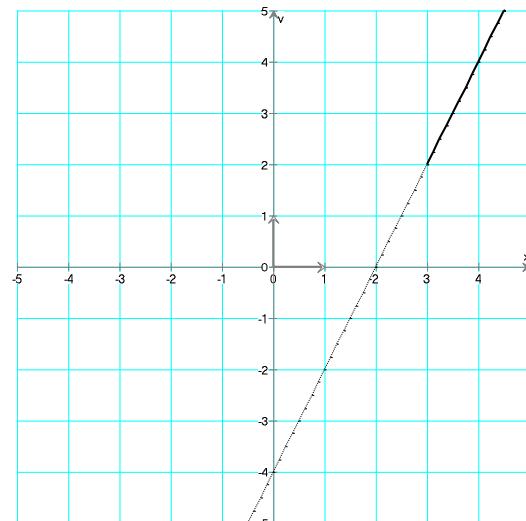
On donne les équations horaires d'un mouvement d'un point M sous la forme:  $\begin{cases} x(t) = 2t + 3 \\ y(t) = 4t + 2 \end{cases}$

Déterminer l'équation de la trajectoire décrite par le point M.

De l'équation  $x = 2t + 3$  on en déduit la valeur de  $t$  en fonction de  $x$ :  $t = \frac{x-3}{2}$  valeur que l'on porte dans l'équation  $y = 4t + 2$ ,  $y = 4 \cdot \frac{x-3}{2} + 2 = 2x - 4$ , l'équation de la trajectoire s'écrit donc:

$$y = 2x - 4$$

Ceci est l'équation d'une droite, mais la trajectoire n'est pas la droite dans sa totalité, c'est en fait la demi-droite correspondant à  $t \geq 0$  (physiquement, le temps est une grandeur positive ou nulle) c'est-à-dire:  $x \geq 3; y \geq 2$ .



Cette trajectoire est **rectiligne** et est représentée en traits épais sur la figure ci-dessus.

Exemple b)

On donne les équations horaires d'un mouvement d'un point M sous la forme:  $\begin{cases} x(t) = t + 1 \\ y(t) = t^2 + 2t \end{cases}$

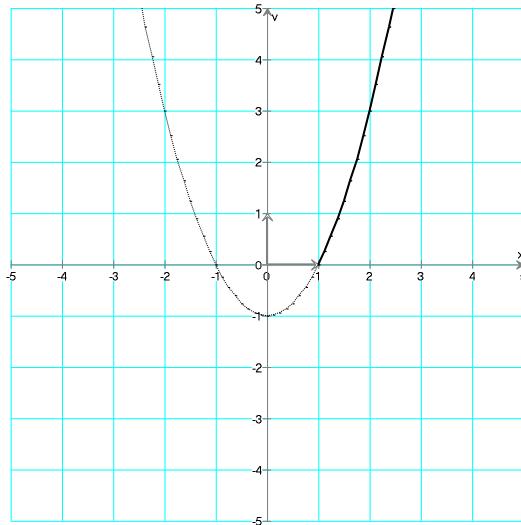
Déterminer l'équation de la trajectoire décrite par le point M.

De l'équation  $x = t + 1$  on déduit la valeur de  $t$  en fonction de  $x$ :  $t = x - 1$  valeur que l'on porte dans l'équation  $y = t^2 + 2t \Rightarrow y = (x-1)^2 + 2(x-1)$ . L'équation de la trajectoire s'écrit donc:

$$y = x^2 - 1$$

Ceci est l'équation d'une parabole à concavité tournée vers le haut, mais la trajectoire n'est pas la parabole dans sa totalité, c'est en fait la branche de parabole correspondant à  $t \geq 0$  (physiquement le temps est une grandeur positive ou nulle) c'est-à-dire  $x \geq 1$ .

Cette trajectoire dans ce cas est curviligne et est représentée en trait épais sur la courbe ci-dessous.



#### Exemple c)

On donne les équations horaires d'un mouvement d'un point M sous la forme:  $\begin{cases} x(t) = 2\cos(t)+2 \\ y(t) = 2\sin(t)-1 \end{cases}$ .

Déterminer l'équation de la trajectoire d'écrite par le point M

Ici le problème est un peu plus délicat à cause de la présence des fonctions trigonométriques, la technique consiste à isoler le cosinus et le sinus et à utiliser la relation:  $\sin^2 a + \cos^2 a = 1$ .

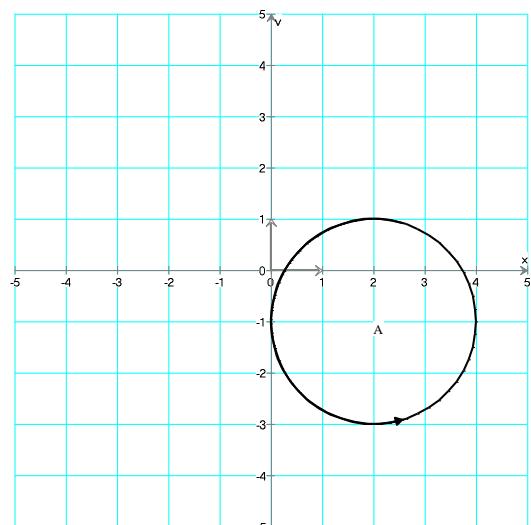
$$x = 2\cos t + 2 \Rightarrow \cos t = \frac{x-2}{2} \text{ et } y = 2\sin t - 1 \Rightarrow$$

$$\sin t = \frac{y+1}{2}$$

$$\sin^2 t + \cos^2 t = 1 \Rightarrow \left(\frac{x-2}{2}\right)^2 + \left(\frac{y+1}{2}\right)^2 = 1, \text{ soit encore}$$

$(x-2)^2 + (y+1)^2 = 2^2$  qui est l'équation d'un cercle de

centre A de coordonnées  $x_A = 2$  et  $y_A = -1$  et de rayon  $R = 2$  (voir figure), la trajectoire est dans ce cas dite circulaire, le sens de parcours du cercle est indiqué par une flèche.

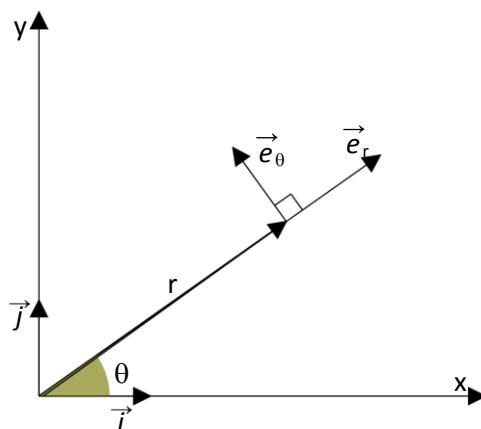


## 2. Coordonnées polaires

Un mobile est repéré par coordonnées polaires  $(r, \theta)$  dans la base  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$  par le vecteur position:  $\vec{OM} = r\vec{e}_r$ .

On notera les relations suivantes entre les coordonnées cartésiennes et polaires :

$$x = r\cos\theta \text{ et } y = r\sin\theta. \text{ En plus } x/y = \tan\theta$$



## III. Vecteur vitesse instantanée:

### 1. DEFINITION

La vitesse instantanée à un instant  $t$  est:

$$\vec{v} = \lim_{t_i \rightarrow t_f} \frac{\vec{M}_i \vec{M}_f}{t_f - t_i} = \lim_{t_i \rightarrow t_f} \frac{\vec{OM}_f - \vec{OM}_i}{t_f - t_i} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{OM}}{\Delta t} = \frac{d \vec{OM}}{dt}$$



Le vecteur vitesse est défini comme la dérivée première du vecteur position par rapport au temps.

Les caractéristiques du vecteur vitesse sont:

- **Point d'application:** point M où l'on veut définir la vitesse.
- **Direction:** la tangente en la trajectoire en ce point M
- **Sens:** celui du mouvement
- **Norme:** l'intensité du vecteur vitesse. Elle s'exprime en mètre par seconde  $m s^{-1}$ .

### 2. VECTEUR VITESSE ET COORDONNEES CARTESIENNES

$$\vec{v} = \frac{d}{dt} \vec{OM} \text{ avec } \vec{OM} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}$$

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt} \vec{i} + \frac{dy}{dt} \vec{j} + \frac{dz}{dt} \vec{k}$$

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}$$

$$\text{On pose: } v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}; \quad v_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y} \quad \text{et} \quad v_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z}$$

$$\vec{V} = \dot{x} \vec{i} + \dot{y} \vec{j} + \dot{z} \vec{k}$$

Nous allons maintenant reprendre les exemples vus plus haut et donner dans chacun des cas, le vecteur vitesse.

#### Exemple a)

On travaille dans ce cas là dans un repère (Ox, Oy). Dans ces conditions:

$$\begin{cases} x(t) = 2t + 3 \\ y(t) = 4t + 2 \end{cases} \Rightarrow V_x = \frac{dx(t)}{dt} = 2; \quad V_y = \frac{dy(t)}{dt} = 4$$

Les composantes du vecteur vitesse  $\vec{V}$  sont indépendante du temps, la norme de ce vecteur est:

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20} \approx 4,47 \text{ ms}^{-1}.$$

La norme est indépendante du temps: le mouvement est rectiligne uniforme. On peut aussi remarquer que  $\vec{V}$  peut être considéré comme le vecteur directeur de la droite d'équation:  $y = 2x - 4$ , c'est-à-dire qu'il est tangente à cette droite donc tangent à la trajectoire du mouvement.

#### Exemple b)

$$\begin{cases} x = t + 1 \\ y = t^2 + 2t \end{cases} \Rightarrow V_x = \frac{dx(t)}{dt} = 1; \quad V_y = \frac{dy(t)}{dt} = 2t + 2$$

$$V = \sqrt{1^2 + (2t+2)^2}$$

Dans ce cas la vitesse n'est pas une constante, elle est une fonction du temps.

#### Exemple c)

$$\begin{cases} x = 2 \cos t + 2 \\ y = 2 \sin t - 1 \end{cases} \Rightarrow V_x = \frac{dx(t)}{dt} = -2 \cdot \sin t; \quad V_y = \frac{dy(t)}{dt} = 2 \cdot \cos t$$

$$V = \sqrt{(-2 \sin t)^2 + (2 \cos t)^2} = \sqrt{4(\sin^2 t + \cos^2 t)} = 2 \text{ ms}^{-1}$$

Ici, la direction du vecteur  $\vec{V}(t)$  n'est pas constante:  $V_x$  et  $V_y$  sont des fonctions du temps, par contre le vecteur vitesse a une norme constante: le mouvement est circulaire uniforme.

#### Exercice à faire à la maison:

Serigne Abdou Wahab Diop – Lycee Limamou Laye / <http://physiquechimie.sharepoint.com>

Dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  le vecteur position d'un mobile M est défini par:

$$\overrightarrow{OM} = 10t \vec{i} + (-5t^2 + 10t) \vec{j}.$$

Les coordonnées sont en mètres et le temps en secondes.

- 1) Déterminer l'équation de la trajectoire. La représenter.
- 2) Donner l'expression du vecteur vitesse du mobile de M.
- 3) En déduire :
  - La valeur de la vitesse à la date  $t = 2\text{s}$
  - La valeur de la vitesse lorsque le mobile passe au sommet de sa trajectoire.

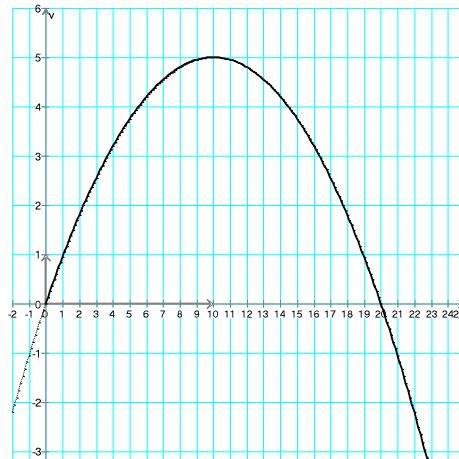
### Solution

$$1) \begin{cases} x = 10t \\ y = -5t^2 + 10t \end{cases} \Rightarrow y = -\frac{x^2}{20} + x \text{ (parabole)}$$

$$2) \overrightarrow{OM} = \begin{cases} x = 10t \\ y = -5t^2 + 10t \end{cases} \Rightarrow \vec{v} = \begin{cases} v_x = 10 \\ v_y = -10t + 10 \end{cases} \Rightarrow \vec{v} = 10 \vec{i} + (-10t + 10) \vec{j}$$

$$3) \text{ A } t = 2\text{s} \quad \vec{v} = \begin{cases} 10 \\ -10 \times (2) + 10 = -10 \end{cases} \Rightarrow v = \sqrt{(v_x)^2 + (v_y)^2} = \sqrt{10^2 + (-10)^2} = 14,1 \text{ m/s.}$$

- La vitesse lorsqu'il passe au sommet de sa trajectoire : il s'agit avant tout de déterminer la date à laquelle le mobile atteint le sommet de la trajectoire.



L'équation de la trajectoire est :  $y = -\frac{x^2}{20} + x$ .

$$\text{Au sommet } y' = 0 = -\frac{2x}{20} + 1 = -\frac{x}{10} + 1 \Rightarrow x_m = 10 \text{ m et } y_m = -\frac{10^2}{20} + 10 = 5 \text{ m.}$$

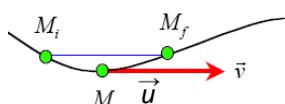
Au sommet  $x = 10t = 10 \Rightarrow t = 1\text{s.}$

$$\text{A } t = 1\text{s} \Rightarrow v_m = \begin{cases} 10 \\ -10(1) + 10 = 0 \end{cases} \Rightarrow v_m = 10 \text{ m/s}$$

**Autre méthode** : au sommet de la trajectoire  $v_y = 0 : v_y = -10t + 10 = 0 \Rightarrow t = 1\text{s}$

### 3. VECTEUR VITESSE ET ABSISSE CURVILINEE

$$\vec{v} = \lim_{t_i \rightarrow t_f} \frac{\widehat{M_i M_f}}{t_f - t_i} = \lim_{t_i \rightarrow t_f} \frac{\widehat{OM_f} - \widehat{OM_i}}{t_f - t_i} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \widehat{OM}}{\Delta t} = \frac{d \widehat{OM}}{dt} = \frac{ds}{dt}$$



$$\boxed{\vec{v} = \frac{ds}{dt} \vec{u} = \vec{v} \vec{u}}$$

$\vec{u}$  est un vecteur unitaire tangent à la trajectoire et orienté dans le sens du mouvement.

## IV. Accélération

### 1. DEFINITION

On appelle vecteur accélération d'un point mobile à la date t, le vecteur dérivé par rapport au temps du vecteur vitesse. Elle s'exprime  $\text{ms}^{-2}$ .

$$\vec{a} = \frac{d}{dt} \vec{v} = \frac{d}{dt} \left( \frac{d}{dt} \overrightarrow{OM} \right) = \frac{d^2}{dt^2} \overrightarrow{OM} \Rightarrow \boxed{\vec{a} = \frac{d^2}{dt^2} \overrightarrow{OM}}$$

$$\boxed{\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2 \overrightarrow{OM}}{dt^2}}$$

### 2. VECTEUR ACCELERATION ET COORDONNEES CARTESIENNES

$$\vec{a} = \frac{d}{dt} \vec{v} = \frac{d^2}{dt^2} \overrightarrow{OM} = \vec{i} \frac{d^2x}{dt^2} + \vec{j} \frac{d^2y}{dt^2} + \vec{k} \frac{d^2z}{dt^2} \Rightarrow \boxed{\vec{a} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}}$$

Nous allons maintenant reprendre les exemples vus plus haut et donner dans chacun des cas, le vecteur accélération ainsi que sa norme.

#### Exemple a)

$$V_x = \frac{dx(t)}{dt} = 2 \Rightarrow a_x = \frac{dV_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = 0 \text{ et } V_y = \frac{dy(t)}{dt} = 4 \Rightarrow a_y = \frac{dV_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} = 0$$

Le vecteur accélération est donc le vecteur nul ( $\vec{a} = \vec{0}$ ).

#### Exemple b)

$$V_x = \frac{dx(t)}{dt} = 1 \Rightarrow a_x = \frac{dV_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = 0 \text{ et } V_y = \frac{dy(t)}{dt} = 2t + 2 \Rightarrow a_y = \frac{dV_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} = 2$$

Le vecteur accélération est un vecteur constant: sens constant et norme constante:  $\vec{a} = 2 \vec{j}$  ( $\text{ms}^{-2}$ )

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 2$$

#### Exemple c)

$$V_x = \frac{dx(t)}{dt} = -2 \cdot \sin t ; V_y = \frac{dy(t)}{dt} = 2 \cdot \cos t$$

$$a_x = \frac{dV_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -2 \cdot \cos t \text{ et } a_y = \frac{dV_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} = -2 \cdot \sin t$$

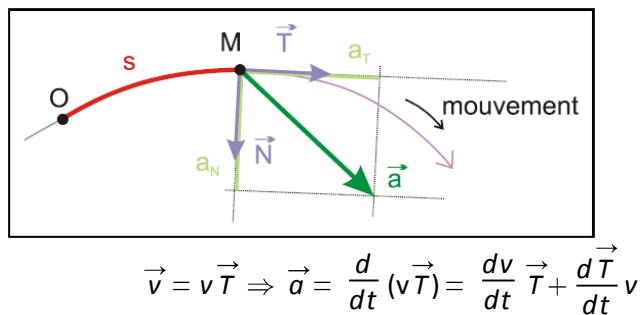
$$\vec{a} = -2(\cos t \vec{i} + \sin t \vec{j})$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{(-2\cos t)^2 + (-2\sin t)^2} = \sqrt{4\cos^2 t + 4\sin^2 t} = 2 \text{ ms}^{-2}$$

Le vecteur accélération a une norme constante et un sens non constant: ce n'est pas un vecteur constant.

### 3. VECTEUR ACCELERATION ET COORDONNEES CURVILIGNES

Soit  $\vec{T}$  le vecteur unitaire tangent en M à la trajectoire et orienté dans le sens du mouvement.



Le vecteur accélération peut se décomposer en deux vecteurs :

- L'accélération tangentielle :  $\vec{a}_t = \frac{dv}{dt} \vec{T}$
- L'accélération normale :  $\vec{a}_n = v \frac{d\vec{T}}{dt}$

Soit  $\vec{N}$  le vecteur unitaire orthogonal à  $\vec{T}$  et orienté vers l'intérieur de la trajectoire. On démontre que :

$$\vec{a}_n = v \frac{d\vec{T}}{dt} = \frac{v^2}{R} \vec{N} \text{ avec } R \text{ le rayon de courbure de la trajectoire.}$$

$$= a_t \vec{T} + a_n \vec{N} \Rightarrow \vec{a} = \frac{dv}{dt} \vec{T} + \frac{v^2}{R} \vec{N}$$

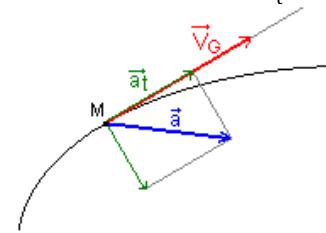
La base  $(\vec{T}, \vec{N})$  constitue la base de Frenet.  $(M, \vec{T}, \vec{N})$  est le repère de Frenet.

### 4. MOUVEMENT ACCELERE, RETARDE OU UNIFORME

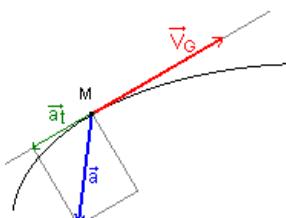
Un mouvement est dit accéléré si la mesure  $\|\vec{v}\|$  de la vitesse augmente, retardé si elle diminue, uniforme si elle est constante.

Lorsque  $v^2$  augmente  $\frac{d\vec{v}^2}{dt} = 2\vec{v} \cdot \frac{d}{dt} \vec{v} = 2\vec{v} \cdot \vec{a} > 0$

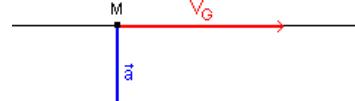
- Si  $v$  augmente le mouvement est accéléré et  $\vec{v} \cdot \vec{a} > 0$  ( $\vec{a}_t$  et  $\vec{V}_G$  sont de même sens)



- Si  $v$  diminue le mouvement est décéléré et  $\vec{v} \cdot \vec{a} < 0$  ( $\vec{a}_t$  et  $\vec{V}_G$  sont de sens opposés)



- Si  $v$  est une constante le mouvement est uniforme et  $\vec{v} \cdot \vec{a} = 0$  ( $\vec{a}_t = \vec{0}$ )



- Si  $\vec{a}$  et  $\vec{V}_G$  ont même direction, le mouvement est rectiligne. (determinant( $\vec{a}$   $\vec{v}$ )=0)



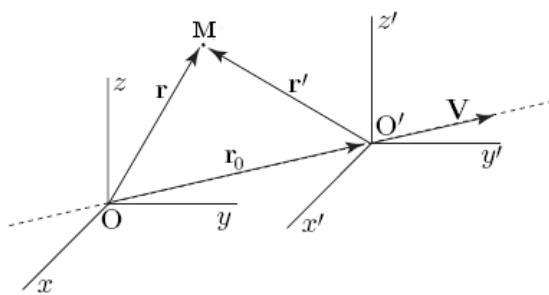
## V. Changement de référentiel

### 1. POSITION DU PROBLEME

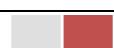
Rappelons, à nouveau, que la trajectoire d'un mobile dépend de l'observateur. Par exemple, pour le passager d'un train, la vitre est immobile et le paysage défile. Il n'en est pas de même pour un promeneur qui s'est arrêté pour regarder passer le train.

Dans cette partie, nous nous proposons d'étudier comment se modifie la vitesse d'un point matériel M quand on change d'observateur. Concrètement, il va s'agir de déterminer les caractéristiques de la vitesse du mouvement de M par rapport à un référentiel mobile  $\mathcal{R}'$  lorsqu'on les connaît dans un autre référentiel fixe  $\mathcal{R}$ .

### 2. LOI DE COMPOSITION DES VITESSES



Deux repères  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$  dont les origines O et O' et les axes coïncident à  $t = 0$ , alors que O' est animé d'une vitesse V par rapport à O.



$$\overrightarrow{OM} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k} \text{ et } \overrightarrow{O'M} = x' \vec{i}' + y' \vec{j}' + z' \vec{k}' \text{ et aussi: } \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$$

$$\vec{v}(M/R) = \frac{d}{dt} \overrightarrow{OM} = \frac{d}{dt} (\overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}) = \frac{d}{dt} \overrightarrow{OO'} + \frac{d}{dt} \overrightarrow{O'M} = \frac{d}{dt} \overrightarrow{OO'} + \frac{d}{dt} (x' \vec{i}' + y' \vec{j}' + z' \vec{k}')$$

$$\vec{v}(M/R) = \underbrace{\frac{d}{dt} \overrightarrow{OO'} + x' \frac{d}{dt} (\vec{i}') + y' \frac{d}{dt} (\vec{j}') + z' \frac{d}{dt} (\vec{k}')}_{\vec{v}(R'/R)} + \underbrace{\frac{d}{dt} x' \vec{i}' + \frac{d}{dt} y' \vec{j}' + \frac{d}{dt} z' \vec{k}'}_{\vec{v}(M/R')}$$

$$\boxed{\vec{v}(M/R) = \vec{v}(M/R') + \vec{v}(R'/R)}$$

$\vec{v}(M/R) = \vec{v}_a$ : vitesse absolue

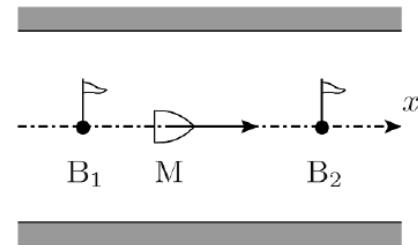
$\vec{v}(M/R') = \vec{v}_r$ : vitesse relative

$\vec{v}(R'/R) = \vec{v}_e$ : vitesse d'entrainement de  $R'$  par rapport à  $R$ , c'est-à-dire la vitesse que le mobile aurait, par rapport au référentiel absolu, s'il était fixe dans le référentiel relatif.

$$\boxed{\vec{V}_a = \vec{V}_r + \vec{V}_e}$$

### Application:

Deux bouées  $B_1$  et  $B_2$ , distantes de  $l$ , sont situées sur un canal, dont le courant a pour vitesse uniforme  $\vec{u}$  par rapport aux berges et s'écoule de  $B_1$  vers  $B_2$ . Ces bouées sont fixes par rapport aux berges. Un rameur, assimilé à un point matériel  $M$ , effectue un aller-retour entre les deux bouées, sa vitesse par rapport au courant (à l'eau) gardant toujours la même norme égale à  $v$  telle que  $v > u$ .



1) Exprimer les vitesses  $\vec{v}_+$  et  $\vec{v}_-$  du rameur par rapport aux berges, respectivement au cours des trajets  $B_1$  vers  $B_2$  et  $B_2$  vers  $B_1$ .

- 2) En déduire la durée  $\tau$  de l'aller-retour du rameur entre les bouées.  
 3) Quelle est la durée  $\tau'$  mise par un personne marchant sur les berges avec la même vitesse  $v$  que celle du rameur par rapport au courant, et qui effectue le même aller-retour entre les bouées ? Comparer les durées  $\tau$  et  $\tau'$  (on pourra faire le rapport).

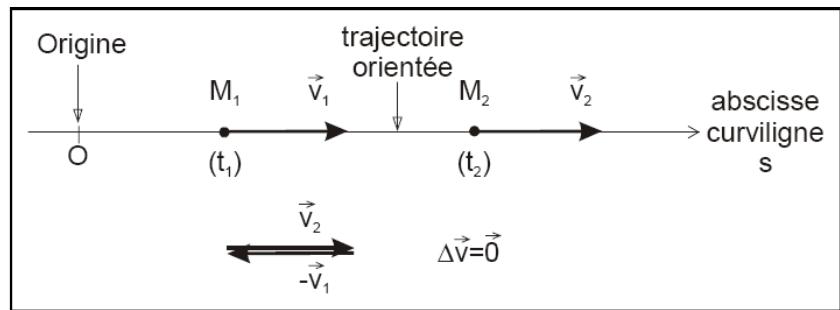
Rép : 1)  $\vec{v}_+ = (u + v) \vec{e}_x$ ;  $\vec{v}_- = (u - v) \vec{e}_x$  2)  $\tau = \frac{2lv}{v^2 - u^2}$ ; 3)  $\tau' = \frac{2l}{v} < \tau$

## VI. Étude de quelques mouvements

### 1. MOUVEMENT RECTILIGNE UNIFORME

#### a. Définition

Un mobile est animé d'un mouvement rectiligne uniforme lorsque sa trajectoire est une droite et le vecteur vitesse constant ( $\vec{v} = v_0 \vec{i}$ ). C'est un mouvement à vecteur accélération nul.



### b. Équation horaire

\* Conditions initiales: A  $t = 0 \Rightarrow x = x_0$  et  $v = v_0$

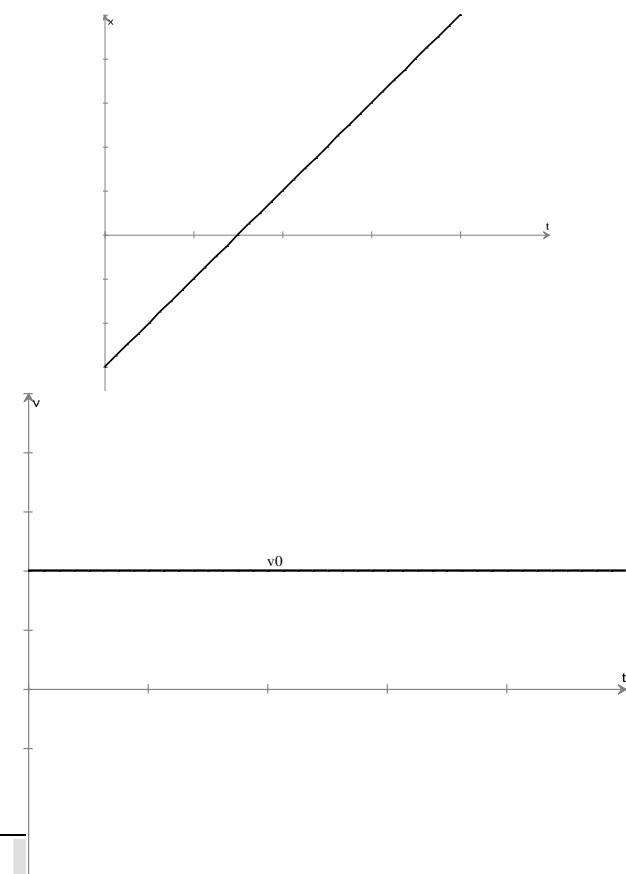
$$v = v_0 = cte \Rightarrow a = \frac{dv}{dt} = 0 \Rightarrow [a = 0] \text{ et } v = v_0 \Rightarrow x = v_0 t + C \text{ (C constante d'intégration}$$

déterminée par les conditions initiales). A  $t=0, x=x_0 \Rightarrow x_0 = v_0 \times 0 + C \Rightarrow C = x_0$  d'où  $[x = v_0 t + x_0]$

$$\begin{cases} a = 0 \\ v = v_0 \\ x = v_0 t + x_0 \end{cases} \Rightarrow \text{équations horaires d'un mouvement rectiligne uniforme}$$

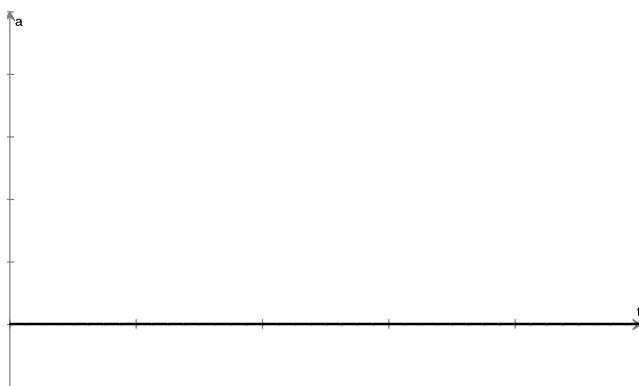
**Remarque:** toutes les grandeurs qui apparaissent dans les équations horaires sont algébriques.

On donne ici les graphes des fonctions  $x$ ,  $v$  et  $a$  en fonction du temps



La pente de la droite donne la vitesse  $V_0$  du mouvement, son ordonnée à l'origine donne l'abscisse  $x_0$  à l'origine des temps

Le diagramme des vitesses est la droite parallèle à l'axe des temps d'ordonnée à l'origine  $V_0$



Le diagramme des accélérations se réduit à l'axe des temps

### c. Application

Les équations paramétriques du mouvement donnant le vecteur position  $\overrightarrow{OM}$  sont:  $\overrightarrow{OM} \begin{cases} x = t \\ y = 2t + 4 \\ z = 0 \end{cases}$

Montrer que ce point est animé d'un mouvement rectiligne uniforme.

- Montrons que le mouvement est rectiligne

$$x = t \text{ et } y = 2t + 4 \Rightarrow [y = 2x + 4] \text{ la trajectoire est une droite.}$$

- Montrons que la vitesse est constante.

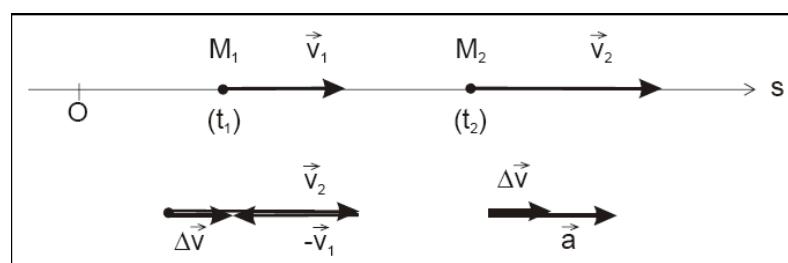
$$\begin{cases} 1 \\ 2 \Rightarrow v = \sqrt{1^2 + 2^2 + 0^2} = 2,23 \text{ m/s} \end{cases} \text{ d'où } v \text{ est une constante}$$

- Conclusion: le mouvement est rectiligne uniforme

## 2. MOUVEMENT RECTILIGNE UNIFORMEMENT VARIE

### a. Définition

Un mobile est animé d'un mouvement rectiligne uniformément varié si sa trajectoire est une droite et son vecteur accélération constant ( $\vec{a} = a_0 \vec{i}$ )



**b. Équations horaires**

$$a = a_0 = \text{cte} \Rightarrow v = at + v_0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0$$

$$v = at + v_0 \Rightarrow t = \frac{v - v_0}{a}$$

$$x - x_0 = \frac{1}{2}a \frac{v - v_0}{a} + v_0 \frac{v - v_0}{a} = \frac{v^2 - v_0^2}{2a} \Rightarrow x - x_0 = \frac{v^2 - v_0^2}{2a} \quad (\text{formule de Torricelli})$$

$$\begin{cases} a = \text{cte} \\ v = at + v_0 \\ x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0 \\ v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0) \end{cases} \Rightarrow \text{équations horaires d'un mouvement rectiligne uniformément varié.}$$

- Autre propriété: les espaces parcourus en des intervalles de temps égaux sont en progression arithmétique. Pour démontrer cela, considérons la loi horaire écrite sous la forme la plus simple, obtenue en choisissant  $x_0 = 0$  et  $v_0 = 0$ .

On a donc:  $x = \frac{1}{2}at^2$

Considérons des dates en progression arithmétique, à partir d'une date origine  $t_0$  quelconque:

$$t_1 = t_0 + \tau, t_2 = t_0 + 2\tau, \dots, t_n = t_0 + n\tau, \dots$$

Considérons les espaces parcourus dans les intervalles de temps ( $t_{n-1}, t_n$ ) et ( $t_n, t_{n+1}$ ):

$$\Delta x_n = x_n - x_{n-1} = \frac{1}{2}a[(t_0 + n\tau)^2 - (t_0 + (n-1)\tau)^2] = \frac{1}{2}a\tau[2t_0 + 2n\tau - \tau]$$

$$\Delta x_{n+1} = x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2}a\tau[2t_0 + 2(n+1)\tau - \tau]$$

Par suite:  $\Delta x_{n+1} - \Delta x_n = a\tau^2$ .

Les espaces parcourus sont bien en progression arithmétique:

$$\Delta x_2 = \Delta x_1 + a\tau^2$$

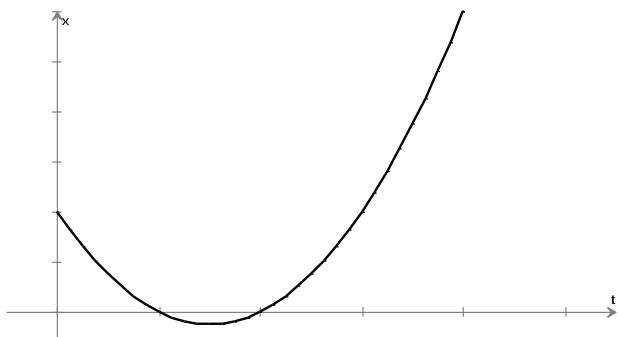
$$\Delta x_3 = \Delta x_2 + a\tau^2 = \Delta x_1 + 2a\tau^2, \dots,$$

$$\Delta x_n = \Delta x_{n-1} + a\tau^2 = \Delta x_1 + (n-1)a\tau^2, \text{ la raison de cette progression est } a\tau^2$$

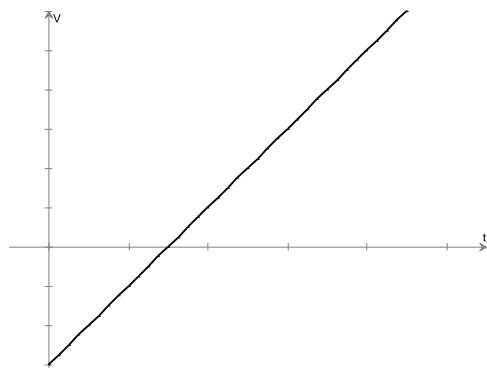
- Au cours d'un mouvement rectiligne uniformément accéléré, les espaces parcourus en des intervalles de temps égaux sont en progression arithmétique.

On donne ici les représentations graphiques de  $x$ ,  $v$  et  $a$  en fonction du temps

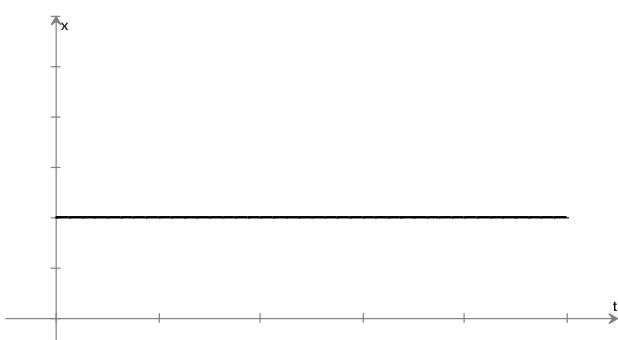




Le diagramme des espaces, est une parabole à concavité tournée vers le haut ou le bas selon que l'accélération  $a$  est positive ou négative; l'ordonnée à l'origine de cette courbe donne  $x_0$ , position du mobile à l'origine des temps à l'origine des temps



Le diagramme des vitesses, est une droite dont la pente est égale à l'accélération et dont l'ordonnée à l'origine est la vitesse initiale (à l'instant  $t = 0$ )  $V_0$  du mobile.



Le diagramme des accélérations, est la droite parallèle à l'axe des temps dont l'ordonnée à l'origine est l'accélération du mouvement  $a$ .

### c. Application

Un point mobile M décrit sur un axe  $O\vec{t}$  un mouvement rectiligne uniformément varié d'accélération  $\vec{a} = 4\vec{t}$ . A l'instant  $t = 0$ , le vecteur vitesse est  $\vec{v}_0 = -8\vec{t}$  et le vecteur position de M est  $\vec{OM}_0 = 2\vec{t}$ .

- 1) Établir les équations horaires  $x(t)$  et  $v(t)$
- 2) Déterminer la date et la position pour lesquelles la vitesse s'annule.
- 3) Entre quelles dates le mouvement est-il accéléré? retardé?

Réponse:

- 1) équations horaires:

$$a = 4 \Rightarrow v = 4t + v_0 \Rightarrow [v = 4t - 8]; x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0 = 2t^2 - 8t + 2 \Rightarrow [x = 2t^2 - 8t + 2]$$

2) date et position où  $v = 0$ 

$$v = 4t - 8 = 0 \Rightarrow t = 2\text{s} ; x = 2(2)^2 - 8(2) + 2 = -6 \Rightarrow x = -6\text{m}$$

3) nature du mouvement

$$\vec{a} \cdot \vec{v} = 4(4t - 8)$$

$t$	0	2	$+\infty$
$a$	+		+
$v$	-	0	+
$\vec{a} \cdot \vec{v}$	-	0	+
Décéléré		Accéléré	

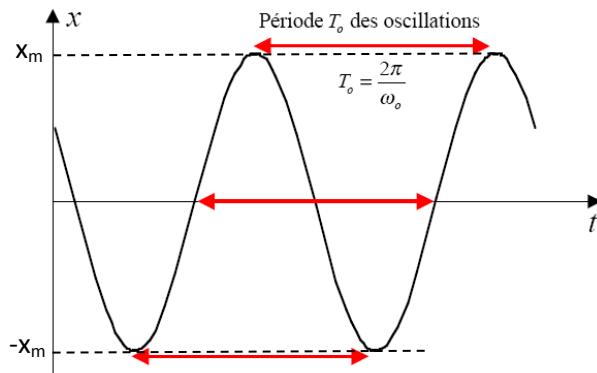
3. MOUVEMENT RECTILIGNE SINUSOIDALa. Définition

Un mobile M est animé d'un mouvement rectiligne sinusoïdal si son équation horaire peut s'écrire sous la forme:  $x = x_m \sin(\omega t + \varphi)$

$x$ : élongation ou abscisse ;  $x_m$ : amplitude maximale (toujours positive);  $\omega$ (rad/s): pulsation;  $(\omega t + \varphi)$ : phase à l'instant de date  $t$ ;  $\varphi$ : phase à l'origine.

b. Position du mobile

$\sin(\omega t + \varphi) \in [-1; 1]$  donc  $x \in [-x_m; x_m]$ : le mobile se déplace sur un segment de droite [AA']. M est animé d'un mouvement de va et vient de part et d'autre de O centre du mouvement.



Les expressions de la période ( $T$ ) et la fréquence ( $N$  ou  $f$ ) sont:  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  et  $f = \frac{1}{T}$

c. Vitesse et accélération

$$x = x_m \sin(\omega t + \varphi) \Rightarrow v = \frac{dx}{dt} = x_m \omega \cos(\omega t + \varphi) \Rightarrow a = \frac{dv}{dt} = -x_m \omega^2 \sin(\omega t + \varphi)$$



$$a = -\omega^2(x_m \sin(\omega t + \varphi)) = -\omega^2 x \Rightarrow \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

C'est une équation différentielle caractéristique d'un mouvement rectiligne sinusoïdal.

#### d. Application

Un mobile est animé d'un mouvement rectiligne sinusoïdal d'axe x'Ox support de la trajectoire. Le point O est le centre du mouvement de période temporelle  $T = 1,00$  s. A l'instant initial  $t_0 = 0$  pris comme origine des dates, la position du mobile est  $x_0 = 1,41$  cm et sa vitesse  $v_0 = 8,88$  cm/s.

- 1) Déterminer la loi horaire de l'elongation du mobile.
- 2) A quelles dates le mobile passe-t-il à l'elongation  $x = -1$  cm en se déplaçant dans le sens négatif?

Réponse:

- 1) loi horaire

$$x(t) = x_m \cos(\omega t + \varphi); \text{ à } t=0 \rightarrow x = x_0 = 1,41 \Rightarrow 1,41 = x_m \cos \varphi \quad (1)$$

$$v = -x_m \omega \sin(\omega t + \varphi); \text{ à } t=0 \rightarrow v = v_0 = 8,88 \Rightarrow 8,88 = -x_m \omega \sin \varphi \quad (2)$$

Sachant que  $\omega = 2\pi$  rad/s les expressions (1) et (2) donnent:  $x_m = \frac{1,41}{\cos \varphi}$  et  $\tan \varphi = -1,0028$

$$\tan \varphi = \tan \left( -\frac{\pi}{4} \right)$$

Noter la relation mathématique  $\tan a = \tan b \Leftrightarrow \begin{cases} a = b + 2k\pi \\ a = \pi + b + 2k\pi \end{cases}$

$$\tan \varphi = \tan \left( -\frac{\pi}{4} \right) \Rightarrow \begin{cases} \varphi = -\frac{\pi}{4} \\ \varphi = -\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3\pi}{4} \end{cases}$$

A  $t = 0$ ,  $v = 8,88$  cm/s > 0  $\Rightarrow -x_m \omega \sin \varphi > 0 \Rightarrow \sin \varphi < 0$  d'où  $\varphi = -\frac{\pi}{4}$  donc  $x_m = \frac{1,41}{\cos \left( -\frac{\pi}{4} \right)} = 2$  cm.

$$x(t) = 2 \cdot \cos \left( 2\pi t - \frac{\pi}{4} \right) \text{ en cm}$$

- 2) dates où le mobile passe par l'elongation  $x = -1$  cm en se déplaçant dans le sens négatif?

On résout pour cela l'équation:  $2 \cos \left( 2\pi t - \frac{\pi}{4} \right) = -1$

On note les relations trigonométriques suivantes:

$$\sin a = \sin b \Leftrightarrow \begin{cases} a = b + 2k\pi \\ a = \pi - b + 2k\pi \end{cases} \text{ et } \cos a = \cos b \Leftrightarrow \begin{cases} a = b + 2k\pi \\ a = -b + 2k\pi \end{cases}$$

$$\cos\left(2\pi t - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \Rightarrow \begin{cases} 2\pi t - \frac{\pi}{4} = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \\ 2\pi t - \frac{\pi}{4} = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$$

Aux dates  $t$ ,  $v = -4\pi \sin\left(2\pi t - \frac{\pi}{4}\right) < 0 \Rightarrow \sin\left(2\pi t - \frac{\pi}{4}\right) > 0$  donc les solutions sont données par la

$$\text{relation: } 2\pi t - \frac{\pi}{4} = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \Rightarrow t = \frac{11}{24} + k$$

Pour  $k = 0 \Rightarrow t = 0,45 \text{ s} \Rightarrow 1^{\text{e}} \text{ passage}$

Pour  $k = 1 \Rightarrow t = 1,45 \text{ s} \Rightarrow 2^{\text{eme}}$  passage ainsi de suite

#### 4. MOUVEMENT CIRCULAIRE UNIFORME

##### a. Définition

Un mobile décrit un mouvement circulaire uniforme si sa trajectoire est un cercle et la norme de son vecteur vitesse constante.

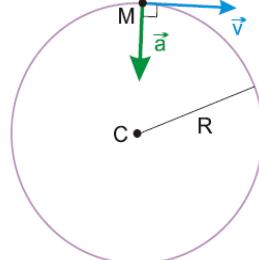
##### b. Accélération

$$s = \widehat{AM} \text{ et } \vec{v} = \frac{ds}{dt} \vec{T} = v \vec{T};$$

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n \Leftrightarrow \vec{a}_T = \frac{d\vec{v}}{dt} \vec{T} = \vec{0} \text{ car } v \text{ est une constante et } \vec{a}_N = \frac{v^2}{R} \vec{N}$$

$\Rightarrow$

$$\vec{a} = \vec{a}_N = \frac{v^2}{R} \vec{N}$$



Le vecteur accélération d'un mouvement circulaire uniforme est dirigé vers le centre de la trajectoire: on dit que l'accélération est **centripète**.

##### c. Équations horaires

La position du mobile peut être repérée par l'abscisse angulaire  $\alpha$ . Par définition la vitesse angulaire  $\omega$  est l'angle balayé pendant l'unité de temps.

$$\omega = \frac{d\alpha}{dt} \text{ (rad/s)}$$

$$\text{Pour un mouvement circulaire uniforme } \omega = \frac{d\alpha}{dt} = \text{cte}; v = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}(R\alpha) = R \frac{d\alpha}{dt} = R\omega$$

$$\Rightarrow v = R\omega$$

$$\vec{a} = \vec{a}_N = \frac{v^2}{R} \vec{N} = R\omega^2 \vec{N}$$



$$\omega = \frac{d\alpha}{dt} = cte \Rightarrow \boxed{\alpha = \omega t + \alpha_0}$$

$$\begin{cases} \vec{a} = \frac{v^2}{R} \vec{N} = R\omega^2 \vec{N} \\ v = R\omega \\ \alpha = \omega t + \alpha_0 \end{cases} \Rightarrow \text{équations horaires d'un mouvement circulaire uniforme.}$$

#### d. Application

Un mobile M est animé dans le plan rapporté au repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  d'un mouvement circulaire. Ces coordonnées s'expriment par :

$$\begin{cases} x = 2\cos\omega t \\ y = 2\sin\omega t \end{cases} \Rightarrow x \text{ et } y \text{ en mètre.}$$

- 1) Montrer que le mouvement est circulaire uniforme.
- 2) Déterminer les coordonnées du vecteur accélération.
- 3) Quelle est l'expression de l'abscisse curviligne  $s$ ? L'origine des abscisses curvilignes est prise au point A de coordonnées cartésienne (2,0).

Réponse:

- 1) mouvement circulaire uniforme
  - Montrons que la trajectoire est un cercle

$$\begin{cases} x = 2\cos\omega t \\ y = 2\sin\omega t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos\omega t = \frac{x}{2} \\ \sin\omega t = \frac{y}{2} \end{cases} \Rightarrow \sin^2\omega t + \cos^2\omega t = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = 4:$$

La trajectoire est un cercle de centre O et de rayon 2:  $\mathcal{C}(O, 2)$ .

- montrons que  $\|\vec{v}\|$  est constante

$\vec{v} = \begin{pmatrix} -2\omega\sin\omega t \\ 2\omega\cos\omega t \end{pmatrix} \Rightarrow v = \sqrt{(v_x)^2 + (v_y)^2} = \sqrt{4\omega^2} = 2\omega$ : la vitesse est constante d'où le mobile est animé d'un mouvement circulaire uniforme.

- 2) coordonnées de  $\vec{a}$ :  $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2\omega^2\cos\omega t \\ -2\omega^2\sin\omega t \end{pmatrix}$
- 3) abscisse  $s$ :  $v = \frac{ds}{dt} \Rightarrow s = vt + s_0 = 2\omega t$  car  $s_0 = 0$

#### 5. MOUVEMENT CIRCULAIRE UNIFORMEMENT VARIE

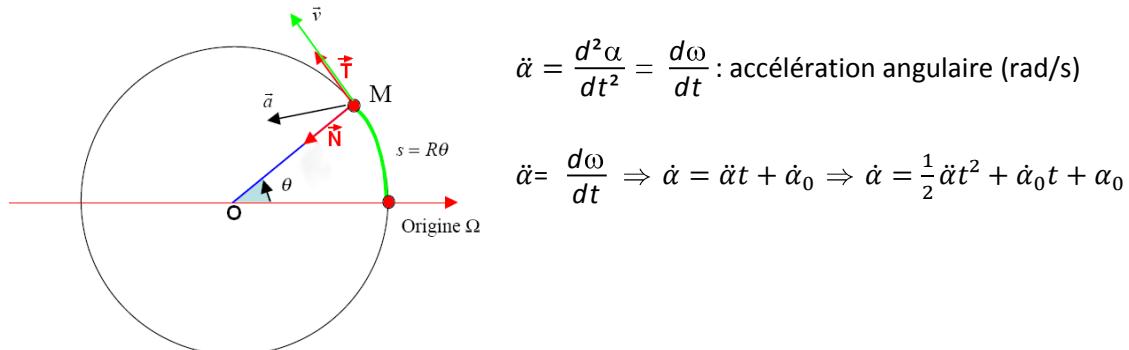
##### a. Définition

Un mobile est animé d'un mouvement circulaire uniformément varié si la trajectoire est un cercle et que son accélération angulaire constante.

**b. Accélération**

$$\vec{a} = \vec{a}_T + \vec{a}_N = \frac{d\vec{v}}{dt} T + \frac{v^2}{R} N \Rightarrow \vec{a} = \frac{d(R\omega)}{dt} T + \frac{v^2}{R} N \Rightarrow \vec{a} = R \frac{d\omega}{dt} T + \frac{v^2}{R} N \Rightarrow \vec{a} = R \frac{d^2\alpha}{dt^2} T + R\omega^2 N$$

$$\vec{a} = R\ddot{\alpha}\vec{N} + R\omega^2\vec{N}$$



$$\ddot{\alpha} = \frac{d^2\alpha}{dt^2} = \frac{d\omega}{dt} : \text{accélération angulaire (rad/s)}$$

$$\ddot{\alpha} = \frac{d\omega}{dt} \Rightarrow \dot{\alpha} = \ddot{\alpha}t + \dot{\alpha}_0 \Rightarrow \dot{\alpha} = \frac{1}{2}\ddot{\alpha}t^2 + \dot{\alpha}_0 t + \alpha_0$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{a} = R\ddot{\alpha}\vec{N} + R\omega^2\vec{N} \\ \dot{\alpha} = \ddot{\alpha}t + \dot{\alpha}_0 \\ \alpha = \frac{1}{2}\ddot{\alpha}t^2 + \dot{\alpha}_0 t + \alpha_0 \\ \alpha_1^2 + \alpha_2^2 = 2\ddot{\alpha}(\alpha_1 - \alpha_2) \end{array} \right\} \Rightarrow \text{équations horaires d'un mouvement circulaire uniformément}$$

**c. application**

Les équations horaires d'un mouvement plan sont:

$$\begin{cases} x = t^2 \\ y = \sqrt{4-t^2} \end{cases}$$

- 1) Quelle est la nature de la trajectoire
- 2) Déterminer le vecteur vitesse et sa valeur.
- 3) En déduire les composantes normales et tangentielles de l'accélération dans la base de Frenet.
- 4) En déduire les composantes cartésiennes du vecteur accélération.
- 5) En déduire que le module de l'accélération est indépendant du repère d'étude.

Réponse

- 1)  $x^2 + y^2 = 4; C(O; 2)$ : la trajectoire est un cercle

$$2) \vec{v} = \vec{T} - \frac{t}{\sqrt{4-t^2}} \vec{J} \text{ et } v = \sqrt{1^2 + \left(-\frac{t}{\sqrt{4-t^2}}\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{4-t^2}} \quad a = \frac{4}{(4-t^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$3) \vec{a}_t = \frac{dv}{dt} = \frac{2t}{(4-t^2)^{\frac{3}{2}}} \text{ et } a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{2}{4-t^2} \Rightarrow \vec{a} = \frac{2t}{(4-t^2)^{\frac{3}{2}}} \vec{T} + \frac{2}{4-t^2} \vec{N}$$



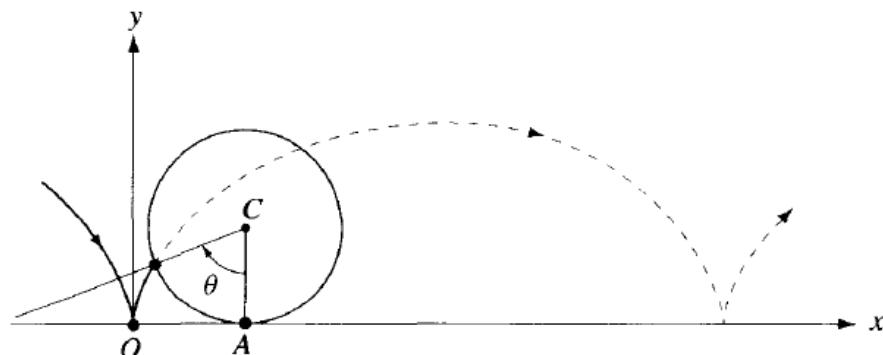
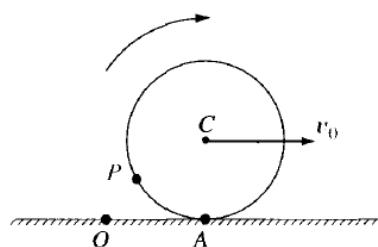
$$4) \quad a_x = 0 ; a_y = -\frac{4}{(4-t^2)^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow \vec{a} = -\frac{4}{(4-t^2)^{\frac{3}{2}}} \vec{j}$$

$$5) \quad \text{Dans le repère cartésien: } a = \frac{4}{(4-t^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\text{Dans la base de Frenet: } a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \frac{4}{(4-t^2)^{\frac{3}{2}}}$$

### 6. MOUVEMENT CYCLOIDAL

Cherchons la trajectoire, la vitesse et l'accélération d'un point  $P$  sur la circonference d'une roue de rayon  $R$  roulant à vitesse  $v_0$  constante. On admet que la roue roule sans glisser



Prenons comme temps initial l'instant où  $P$  quitte le sol et soit  $\theta(t)$  l'angle dont a tourné le rayon  $CP$  à l'instant  $t$ . Nous avons:  $\overrightarrow{OC}(t) = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = v_0 t \vec{i} + R \vec{j}$  et  $\|\overrightarrow{OA}\| = v_0 t = \text{nor}(\widehat{AP}) = R\theta(t)$  car la roue ne roule pas.

$$\overrightarrow{OP}(t) = \overrightarrow{OC}(t) + \overrightarrow{CP}(t) \text{ avec } v_0 t = R\theta(t)$$

En projetant sur les axes  $x$  et  $y$

$$\begin{cases} x(t) = R(\omega t - \sin(\omega t)) \\ y(t) = R(1 - \cos(\omega t)) \end{cases} \text{ où } \omega = \frac{v_0}{R} \text{ et } \theta(t) = \omega t$$

Par dérivation on obtient les vecteurs vitesse et accélération;

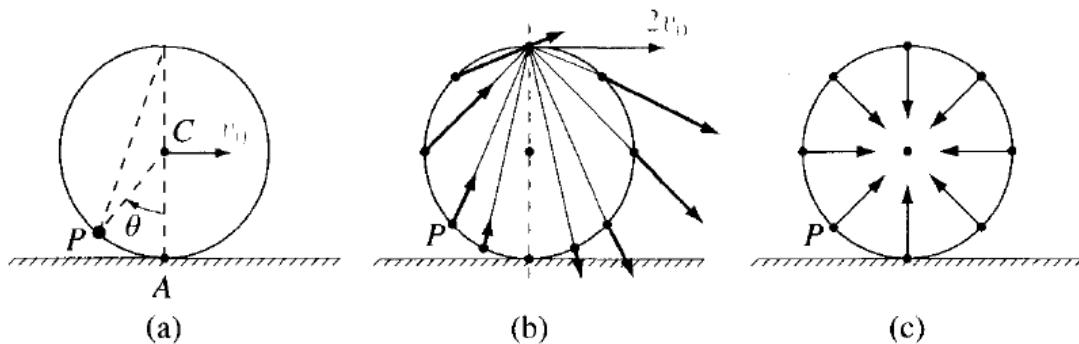
$$\begin{cases} v_x = R\omega(1 - \sin\omega t) \\ v_y = R\omega\sin\omega t \end{cases} \text{ d'où } \|\vec{v}\| = 2R\omega \left| \sin\left(\frac{1}{2}\omega t\right) \right|$$

Pour terminer, on remarquera que le mouvement du point  $P$  sur la circonference est toujours dirigé dans le sens du mouvement de la roue et que sa vitesse varie entre 0 et  $2v_0$ .

La relation  $\frac{v_x}{v_y} = \frac{1 - \cos\theta}{\sin\theta} = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$  montre que le vecteur vitesse  $\vec{v}$  est dirigé vers le sommet de la roue (fig.b)

$$\begin{cases} a_x = R\omega^2 \sin\omega t \\ a_y = R\omega^2 \cos\omega t \end{cases} \text{ d'où } \|\vec{a}\| = R\omega^2$$

On remarquera que l'accélération est constante en norme ; la relation  $\frac{a_x}{a_y} = \tan\theta$  montre que le vecteur  $\vec{a}$  est dirigé vers le centre de la roue (fig.c)



# Bases de la dynamique

## I. Mouvement du centre d'inertie

Le centre d'inertie d'un système matériel est le barycentre des points du système affecté de leur masse respective. Il est donné par la relation barycentrique.

Soit S un solide de masse M constitué des points matériels A<sub>1</sub>, A<sub>2</sub>, ..., A<sub>i</sub> de masses respectives m<sub>1</sub>, m<sub>2</sub>, ..., m<sub>i</sub>. Si G est le centre d'inertie du solide, la relation barycentrique donne:

$$m_1 \vec{GA}_1 + m_2 \vec{GA}_2 + \dots + m_i \vec{GA}_i = \vec{0}$$

Soit O un point quelconque de l'espace:  $\vec{GA}_i = \vec{GO} + \vec{OA}_i$

$$\vec{GO}(m_1 + m_2 + \dots + m_i) + m_1 \vec{OA}_1 + \dots + m_i \vec{OA}_i = \vec{0} \Rightarrow \sum_i m_i \vec{OG} = \sum_i m_i \vec{OA}_i$$

$$\Rightarrow M \vec{OG} = \sum_i m_i \vec{OA}_i$$

Exemple:

Une tige AB homogène et de section constante a pour longueur  $2\ell=72$  cm et pour masse m. On place en A une masselotte de masse 2m et en B une autre de masse 3m. Déterminer la position du centre d'inertie G du solide ainsi constitué.

## II. QUANTITE DE MOUVEMENT

### 1. QUANTITE DE MOUVEMENT D'UN POINT MATERIEL

Soit un point matériel A de masse m animé d'une vitesse  $\vec{v}$ . La quantité de mouvement du point A, notée  $\vec{p}$  est donnée par la relation:  $\vec{p} = m \vec{v}$ . Elle s'exprime en kgm/s.

### 2. QUANTITE DE MOUVEMENT D'UN SOLIDE

Un solide de masse M peut être décomposé en plusieurs points matériels A<sub>i</sub> de masse m<sub>i</sub> et de vecteur vitesse  $\vec{v}_i$ .

$$\vec{p} = \sum_i \vec{p}_i = \sum_i m_i \vec{v}_i = \sum_i m_i \frac{d}{dt} \vec{OA}_i = \frac{d}{dt} \sum_i m_i \vec{OA}_i = \frac{d}{dt} M \vec{OG} \Rightarrow \vec{p} = M \frac{d}{dt} \vec{OG} = M \vec{v}_G$$

$$\boxed{\vec{p} = M \vec{v}_G}$$

où  $\vec{v}_G$  est la vitesse du centre d'inertie du solide.

### III. Relation fondamentale de la dynamique

#### 1. ÉNONCE

Si un ensemble de forces de somme  $\sum \vec{F}$  agissant sur un solide provoque une variation de sa quantité de mouvement  $\vec{P}$ ; il existe une classe de référentiels dits galiléens dans lesquels est vérifiée la relation suivante:

$$\sum \vec{F}_{appliquée} = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

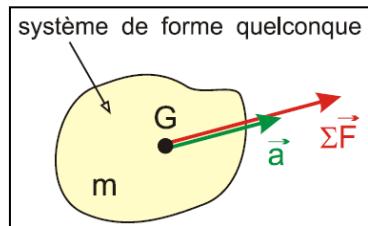
#### 2. CONSEQUENCES

##### a. Théorème du centre d'inertie (2<sup>ème</sup> loi de Newton)

$$\sum \vec{F} = \vec{v}_G \frac{dm}{dt} + m \frac{d\vec{v}_G}{dt} = m \frac{d\vec{v}_G}{dt} \text{ car la masse est invariable (pas toujours le cas)}$$

Si un système de masse totale  $m$  est soumis à plusieurs forces extérieures dont la résultante  $\sum \vec{F}$  n'est pas nulle, alors le centre d'inertie  $G$  du système prend une accélération  $\vec{a}$  liée à la résultante

$$\sum \vec{F} = m \vec{a}_G$$



##### b. Principe d'inertie (1<sup>ère</sup> loi de Newton)

$$\text{Si } \sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \vec{a}_G = \vec{0} \text{ alors } \begin{cases} \vec{v} = \vec{cte} \Rightarrow MRU \\ \vec{v} = \vec{0} \Rightarrow immobilité \end{cases}$$

Si un système de masse  $m$  n'est soumis à aucune force, ou s'il est soumis à un ensemble de forces dont la résultante est nulle, alors le centre d'inertie  $G$  du système décrit un mouvement rectiligne et uniforme. En particulier, si un tel corps est au repos il restera au repos.

##### c. principe des actions réciproques (3<sup>ème</sup> loi de Newton)

Si un corps A exerce une force  $\vec{F}_{B/A}$  sur un corps B, alors le corps B exerce également une force  $\vec{F}_{A/B}$  sur le corps A tel que :  $\vec{F}_{B/A} = - \vec{F}_{A/B}$



## IV. Relation fondamentale de la dynamique de rotation (S1)

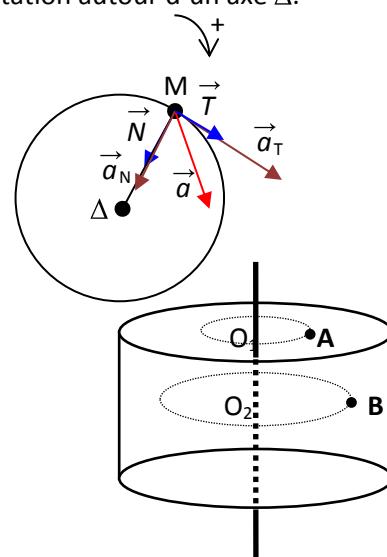
### 1. CAS D'UN POINT MATERIEL

Soit un point matériel de masse  $m$  animé d'un mouvement de rotation autour d'un axe  $\Delta$ .

$$\vec{a} = \vec{a}_T + \vec{a}_N$$

RFD:  $\sum \vec{f} = \vec{F} = m \vec{a} = m \vec{a}_T + m \vec{a}_N \Rightarrow \vec{F} = mR\ddot{\theta} \vec{T} + mR\theta'' \vec{N}$

$$\Rightarrow \mathcal{M}(\vec{F}) = mR^2\ddot{\theta} \text{ avec } \ddot{\theta} = \theta''$$



### 2. CAS D'UN SOLIDE

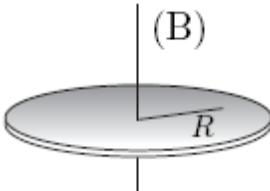
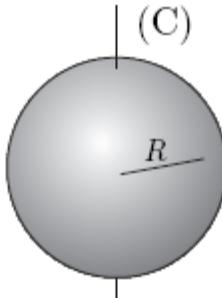
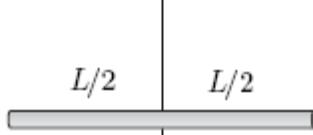
$$\sum_i \mathcal{M} = \sum_i m_i R_i^2 \theta'' = \ddot{\theta} \sum_i m_i R_i^2 = J \ddot{\theta} \Rightarrow \boxed{\sum \mathcal{M} = J \ddot{\theta}}$$

Avec  $J(\text{ms}^2)$ : moment d'inertie du solide par rapport à Δ

Cette relation constitue le théorème de l'accélération angulaire: si un solide est animé d'un mouvement de rotation autour d'un axe, la somme algébrique des moments des forces extérieures qui s'exercent sur le solide est proportionnelle à l'accélération angulaire.

### 3. MOMENT D'INERTIE DE QUELQUES SOLIDES

Système	Schéma	formule
Anneau de masse $m$ et de rayon $R$	(A) 	$J = mR^2$
Manchon ou cylindre creux		$J = mR^2$

<b>Disque homogène ou cylindre homogène</b>		$J = \frac{1}{2} Rr^2$
<b>Sphère homogène par rapport à son diamètre</b>		$J = \frac{2}{5} Rr^2$
<b>Moment d'inertie d'une tige</b>		$J = \frac{1}{12} mL^2$

#### 4. THEOREME DE HUYGENS (S1)

Le théorème de Huygens (aussi appelé théorème de l'axe parallèle) facilite grandement le calcul du moment d'inertie par rapport à un axe quelconque. Soit  $J_0$  le moment d'inertie par rapport à un axe passant par le centre de masse et  $J$  le moment d'inertie par rapport à un autre axe, parallèle au premier et à une distance  $d$  de celui-ci. Alors ce théorème stipule que:

$$J = J_0 + Md^2$$

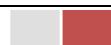
Comme exemple d'application du théorème de l'axe parallèle, calculons le moment d'inertie d'une tige de longueur  $L$  par rapport à un axe perpendiculaire à la tige et passant par l'une de ses extrémités. On trouve alors:

$$J = M\left(\frac{L}{2}\right)^2 + \frac{1}{12}ML^2$$

## V. Théorèmes relatifs aux énergies

### 1. ENERGIE CINETIQUE

$\delta W = \sum \vec{F}_i \cdot d\vec{\ell}$  or d'après la relation fondamentale de la dynamique,  $\sum \vec{F}_i = m \frac{d\vec{v}}{dt}$ . Le travail élémentaire est par conséquent:  $\delta W = m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{\ell}$ . Dans cette expression,  $\frac{d\vec{\ell}}{dt}$  n'est autre que le



vecteur  $\vec{v}$ . D'où l'expression finale  $\delta W = m \vec{v} d\vec{v}$  qui s'écrit encore  $\delta W = d\left(\frac{1}{2}mv^2\right)$ . Le travail total des forces effectué entre les instant  $t_1$  et  $t_2$  est donc  $W_{1 \rightarrow 2} = \int_{v_1}^{v_2} d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$

*La variation d'énergie cinétique d'un solide entre deux instants est égale au travail des forces appliquées à ce solide entre ces deux instants.*

	Translation	Rotation
Expression de $E_c$	$E_c = \frac{1}{2}mV^2$	$E_c = \frac{1}{2}J\omega^2$
Théorème	$\frac{1}{2}m(v_f)^2 - \frac{1}{2}m(v_i)^2 = \sum W(\vec{F})$	$\frac{1}{2}J(\omega_f)^2 - \frac{1}{2}J(\omega_i)^2 = \sum W(\vec{F})$
Expression du travail	$W(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \vec{AB}$	$W(\vec{F}) = \mathcal{M}(\vec{F}/\Delta) \times \theta$

## 2. ENERGIE POTENTIELLE

Pesanteur	Élastique	Torsion
$E_{p_p} = mgh + C$	$E_{p_e} = \frac{1}{2}kx^2 + C$	$E_{p_\mathcal{C}} = \frac{1}{2}C\alpha^2 + C_1$
$\Delta E_p = -W(\vec{f}_{intérieures})$		

## 3. ENERGIE MECANIQUE

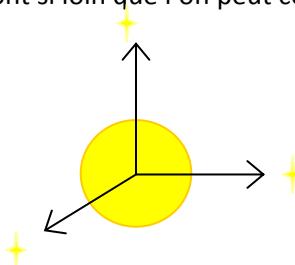
Expression	$E_m = E_c + E_p$ avec $E_p = E_{p_p} + E_{p_e} + E_{p_\mathcal{C}}$
Loi de conservation	$\Delta E = 0$
Loi de non conservation	$\Delta E = W(\vec{f}_{non\ conservative})$

## VI. Référentiels et repères galiléens

Un référentiel galiléen est un référentiel dans lequel le principe d'inertie et la relation fondamentale de la dynamique sont applicables.

### 1. REFERENTIEL DE COPERNIC (HELIOCENTRIQUE)

Il est constitué du centre du soleil comme origine et de trois directions fixes allant du centre du soleil vers trois étoiles lointaines (elles sont si loin que l'on peut considérer leur position fixe).



On utilise ce référentiel pour décrire le mouvement des planètes autour du Soleil. Dans ce référentiel la Terre décrit son orbite en 365,25 jours

### 2. REFERENTIEL GEOCENTRIQUE

Il est constitué du centre de la Terre comme origine et de trois axes dirigés vers les trois étoiles fixes du repère de Copernic.

On utilise ce référentiel pour décrire les mouvements des satellites artificiels ou naturels. Ce référentiel est galiléen. On pourrait définir le même référentiel pour n'importe quelle autre planète. Dans ce référentiel la Terre tourne autour d'elle-même en un jour sidéral (23h 56min 04s) suivant l'axe des pôles.

### 3. REFERENTIEL TERRESTRE

Un repère du référentiel terrestre ou du laboratoire est lié à la Terre. Si les mesures ne demandent pas une très grande précision et si leur durée est très courte on peut considérer ce référentiel comme galiléen.

## VII. Référentiels et repères non galiléens

### 1. POSITION DU PROBLEME

- lorsqu'une voiture freine les passagers sont projetés à l'avant,
- lorsqu'elle accélère, ils sont projetés vers l'arrière,
- lorsqu'elle effectue un virage, ils sont projetés vers le côté.

Pour expliquer la perte d'équilibre des passagers on fait intervenir une force fictive appelée **force d'inertie**:  $\vec{F}_i$ .

### 2. REFERENTIELS NON GALILEENS

Considérons un référentiel  $\mathcal{R}$  et un référentiel  $\mathcal{R}'$  animé d'un mouvement de vitesse  $\vec{V}_e = \vec{V}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$  (vitesse d'entrainement)

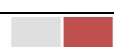
$$\vec{V}_{/\mathcal{R}} = \vec{V}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} + \vec{V}_{/\mathcal{R}} \Rightarrow \vec{V}_a = \vec{V}_e + \vec{V}_r \Rightarrow \frac{d}{dt} \vec{V}_a = \frac{d}{dt} \vec{V}_e + \frac{d}{dt} \vec{V}_r \Rightarrow \boxed{\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r}$$

$\mathcal{R}$  étant galiléen:  $\sum \vec{F} = m \vec{a}_a = m(\vec{a}_e + \vec{a}_r)$ . Si  $\vec{a}_e \neq 0 \Rightarrow \sum \vec{F} \neq m \vec{a}_r$  ( $\mathcal{R}'$  n'est pas galiléen)

- $\mathcal{R}'$  n'est galiléen que si  $\vec{a}_e = \vec{0} \Rightarrow \vec{V}_e = \text{cte} \Rightarrow \mathcal{R}'$  est animé d'un mouvement rectiligne uniforme par rapport à  $\mathcal{R}$
- Si  $\mathcal{R}'$  est accéléré ou retardé par rapport à  $\mathcal{R}$ :  $\vec{a}_e \neq \vec{0} \Rightarrow \mathcal{R}'$  n'est pas galiléen.
- Si  $\mathcal{R}'$  est animé d'un mouvement de rotation par rapport à  $\mathcal{R}$ :  $\vec{a}_e \neq \vec{0} \Rightarrow \mathcal{R}'$  n'est pas galiléen.

### 3. MOUVEMENT DE TRANSLATION ACCELERE OU RETARDE

Soit un mobile M de masse m animé d'un mouvement rectiligne uniformément varié d'accélération  $a$  par rapport au référentiel  $\mathcal{R}$ .



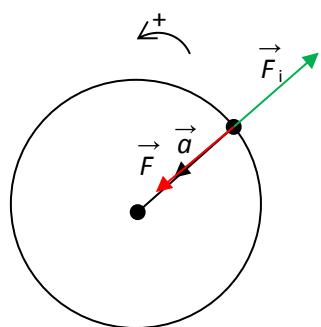
Le TCI dans  $\mathcal{R}$ :  $\vec{F} = \sum \vec{F} = m \vec{a}$

Par rapport au référentiel  $\mathcal{R}'$  lié au mobile:  $\mathcal{R}'$  n'est pas galiléen, le TCI ne s'applique pas mais le mobile est au repos par rapport à ce référentiel donc  $\vec{F} + \vec{F}_i = \vec{0}$  d'où  $\boxed{\vec{F}_i = -m\vec{a}}$

#### 4. MOUVEMENT DE ROTATION UNIFORME

Considérons le mobile M animé d'un mouvement circulaire uniforme par rapport à un référentiel galiléen  $\mathcal{R}$  le TCI s'écrit:  $\vec{F} = \sum \vec{F} = mR\omega^2 \vec{N}$  ( $\vec{F}$  est centripète)

Par rapport à  $\mathcal{R}'$  lié au mobile:  $\vec{F} + \vec{F}_i = \vec{0} \Rightarrow \vec{F}_i = -\vec{F} \Rightarrow \boxed{\vec{F}_i = -mR\omega^2 \vec{N}}$  ( $\vec{F}_i$  est centrifuge)



# Applications des bases de la dynamique

## I. Mouvements rectilignes

### 1. SOLIDE GLISSANT SUR UN PLAN INCLINÉ

#### a. Exercice

Un solide de masse  $m$  glisse sans vitesse initiale sur un plan incliné non lisse d'un angle  $\alpha$  sur l'horizontale. En supposant que le solide est animé d'un mouvement de translation et que les forces qui lui sont appliquées sont constantes.

1) Établir l'expression de l'accélération

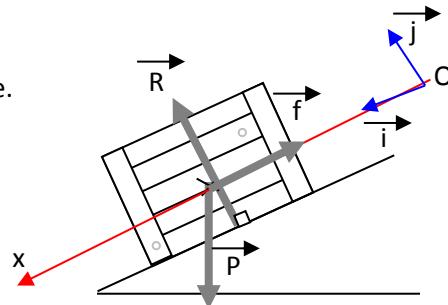
- en appliquant le théorème du centre d'inertie
- en appliquant le théorème de l'énergie cinétique.

2) Donner les équations horaires sachant qu'à  $t=0$ ,  $x_0=0$ .

#### b. Résolution

Système: le solide de masse  $m$

Référentiel: référentiel terrestre



Bilan des forces:  $\vec{P}$ ,  $\vec{R}$  et  $\vec{f}$

1) Détermination de l'accélération

- avec le théorème du centre d'inertie:  $\vec{P} + \vec{f} + \vec{R} = m \vec{a}$

$$\text{Sur } (ox): P \sin \alpha - f = ma \Rightarrow a = g \sin \alpha - \frac{f}{m}$$

- avec le théorème de l'énergie cinétique

Appliquons le théorème de l'énergie cinétique entre  $t_0$  et  $t$ . Soit  $x$  la distance parcourue à l'instant  $t$ :

$$E_C(t) - E_C(t_0) = W(\vec{P}) + W(\vec{R}) + W(\vec{f}) \Rightarrow \frac{1}{2} mv^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = mgx \sin \alpha - fx \Rightarrow \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} mv^2 \right) = \frac{d}{dt} [(mg \sin \alpha - f)x] \Rightarrow$$

$$mv \frac{dv}{dt} = (mg \sin \alpha - f) \frac{dx}{dt} \Rightarrow mva = (mg \sin \alpha - f)v \Rightarrow a = g \sin \alpha - \frac{f}{m} \quad \text{obtenu en simplifiant par } v.$$

2) Équation horaire du mouvement

$$a = g \sin \alpha - \frac{f}{m} = \text{cte} \Rightarrow v = at + v_0 \text{ or à } t=0, v=v_0=0 \Rightarrow v = \left( g \sin \alpha - \frac{f}{m} \right) t$$

$$x = \frac{1}{2} at^2 + v_0 t + x_0 \text{ avec } v_0=0 \text{ et } x_0=0 \text{ d'où la relation: } x = \frac{1}{2} \left( g \sin \alpha - \frac{f}{m} \right) t^2$$

Remarque: lorsque le mouvement s'effectue sans frottement ( $f=0$ ), on peut remarquer que  $a=g \sin \alpha$ .

## 2. SYSTEMES ARTICULES

### a. Exercice

Un corps A de masse  $m_A = 70 \text{ g}$  entraîne dans sa chute un corps B de masse  $m_B = 80\text{g}$  qui glisse sur un plan incliné d'un angle  $\alpha = 30^\circ$ . A et B sont reliés par l'intermédiaire d'un fil inextensible qui passe par la gorge d'une poulie dont on néglige la masse.

Calculer en négligeant tous les frottements, l'accélération et la tension du fil ( $g = 10 \text{ m/s}^2$ )

### b. Résolution

\*système: corps B

\*référentiel: terrestre

\* Bilan des forces:  $\vec{P}_B$ ,  $\vec{R}$  et  $\vec{T}_B$ ;

\* TCI:  $\vec{P}_B + \vec{R} + \vec{T}_B = m_B \vec{a}$

Projetons la relation vectorielle sur l'axe Ox:

$$-P_B \sin \alpha + T_B = m_B a \Rightarrow T_B = m_B (a + g \sin \alpha) \quad (1)$$

\*système: corps A

\*référentiel: terrestre

\* Bilan des forces:  $\vec{P}_A$  et  $\vec{T}_A$

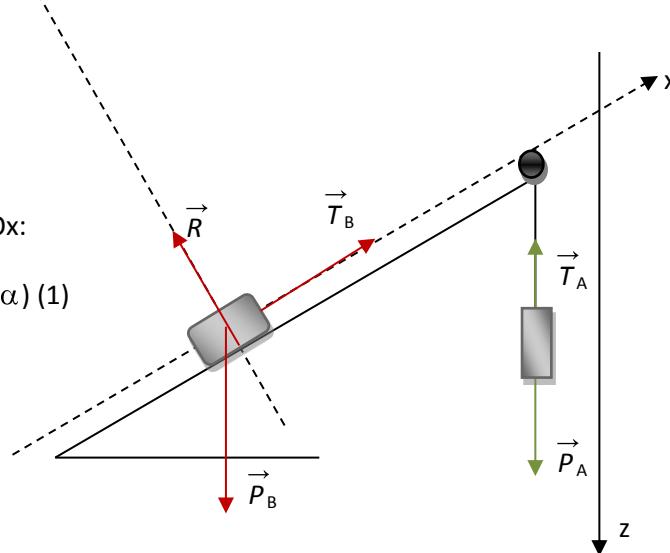
\* TCI:  $\vec{P}_A + \vec{T}_A = m_A \vec{a}$

$$(Oz): P_A - T_A = m_A a \Rightarrow T_A = m_A (g - a) \quad (2)$$

La tension du fil inextensible est partout la même:  $T_A = T_B$

$$m_A (g - a) = m_B (a + g \sin \alpha) \Rightarrow a = g \frac{m_A - m_B \sin \alpha}{m_A + m_B} \Rightarrow \text{AN: } a = 2 \text{ m/s}^2$$

la tension des fils:  $T_B = T_A = m_A (g - a) = 0,56 \text{ N}$



## 3. MOUVEMENT D'UNE PARTICULE DANS LE CHAMP DE PESANTEUR: CAS OU $\vec{G} \parallel \vec{V}_0$

### a. Étude dynamique

Un projectile de masse m est lancé à partir d'un point O verticalement vers le haut avec une vitesse  $\vec{v}_0$  à l'instant de date  $t=0$ .

\*système: projectile de masse m

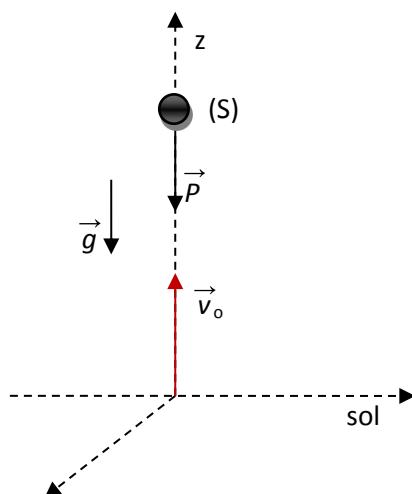
\*Référentiel: terrestre supposé galiléen

\*bilan des forces:  $\vec{P}$  et  $\vec{R}$  (résistance de l'air négligeable)

\*TCI:  $\vec{P} = m \vec{a} \Rightarrow m \vec{g} = m \vec{g} \Rightarrow \vec{a} = \vec{g}$

$$\vec{a} \begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = 0 \\ a_z = -g \end{cases} \Rightarrow \vec{v} \begin{cases} v_x = v_{0x} = 0 \\ v_y = v_{0y} = 0 \\ v_z = -gt + v_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x_0 = 0 \\ y = 0 \\ z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t \end{cases}$$

$v = -gt + v_0$  et  $z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t$



Remarque:

Si  $v_0$  est initialement dirigé vers le haut, le mouvement est d'abord rectiligne uniformément décéléré. Au point le plus élevé  $v = 0$ , ensuite le mouvement est rectiligne uniformément accéléré vers le bas.

### b. Application

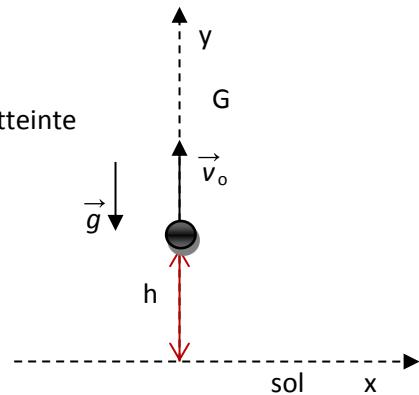
Un gymnaste quitte la surface élastique d'un trampoline avec une vitesse verticale de 30 km/h. Son centre d'inertie est à 2m du sol. Le gymnaste est assimilé à un solide. On suppose que la chute est libre.

- 1) Établir les équations horaires dans un repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$
- 2) Calculer la durée de la montée et la hauteur maximale atteinte par le centre d'inertie du sauteur.

\*système: gymnaste

\*Référentiel: terrestre

\*BF:  $\vec{P}$ ; TCI:  $\vec{P} = m \vec{a}$



1) équations horaires:  $x=0; y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + h = -4,9t^2 + 8,33t + 2$

2) durée montée:  $v_y = 0 \Rightarrow t_1 = \frac{v_0}{g} = 0,85 \text{ s}; \text{ hauteur max } H = y(t_1) = 5,5 \text{ m}$

### 4. MOUVEMENT D'UNE PARTICULE CHARGÉE DANS UN CHAMP $\vec{E}$ UNIFORME: CAS OU $\vec{E} \parallel \vec{V}_0$

\*système: particule chargée

\*référentiel: terrestre

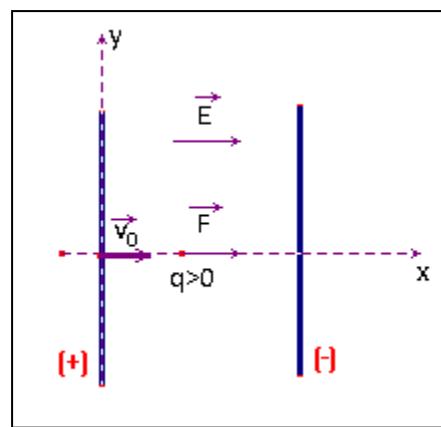
\*BF:  $\vec{F}$  et  $\vec{P}$  (négligeable devant  $\vec{F}$ ); TCI:  $\vec{F} = m \vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \frac{q}{m} \vec{E}$

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \begin{cases} a_x = \frac{q}{m} E \\ a_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{v} = \begin{cases} v_x = \frac{qE}{m} t + v_0 \\ v_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{OM} = \begin{cases} x = \frac{qE}{m} t^2 + v_0 t \\ y = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

C'est un mouvement rectiligne uniformément varié

$$\Delta Ec = \frac{1}{2} mv^2 - \frac{1}{2} mv_0^2 = qU \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2qU}{m} + v_0^2}$$

La particule n'est pas déviée, le mouvement est accéléré si  $q>0$  et décéléré (voire freiné) si  $q<0$ .



## 5. MOUVEMENT D'UNE BILLE DANS UN FLUIDE

Abandonnons, à vitesse nulle, une bille dans un fluide.

### a) bilan des forces

- Le poids  $\vec{P}=m\vec{g}$  de la bille (il est vertical et dirigé vers le bas)
- Les forces de frottement fluide

Pour des objets petits, dont la vitesse par rapport au fluide est faible, on parle d'écoulement laminaire du fluide autour de l'objet et de force de frottement laminaire (absence de turbulence). La valeur de la force de frottement est proportionnelle à la valeur de la vitesse de l'objet.

$$\vec{f} = -h\vec{v} \text{ ou } \vec{f} = -6\pi\eta r\vec{v} \text{ avec } h = 6\pi\eta r$$

$\vec{f}$ : force de frottement laminaire;

$h$ : coefficient de frottement fluide laminaire ( $\text{kg/s}$ ) qui dépend à priori de la viscosité du fluide et de ses dimensions.

$\vec{v}$ : vitesse de l'objet.

- La poussée d'Archimède.

Elle correspond à l'ensemble des forces de pression exercées par le fluide sur l'objet qui y est immergé. On peut énoncer le principe d'Archimède:

**Tout corps plongé dans un liquide subit de la part de celui-ci une force opposée au poids du liquide déplacé par ce corps.**

On notera  $\vec{F}_A$  la poussée d'Archimède, son expression est:  $\vec{F}_A = -\rho_{\text{fluide}} V_{\text{déplacé}} \vec{g}$ , où  $\rho_{\text{fluide}}$  représente la masse volumique du fluide ( $\text{kg/m}^3$ ) et  $V_{\text{déplacé}}$  le volume de la partie de l'objet immergé dans le liquide.

Remarque: la poussée d'Archimède existe dans tout fluide. Par conséquent, elle existe également dans l'air (souvent négligeable).

**b) Équation différentielle du mouvement de chute**

On connaît à présent toutes les forces qui s'exercent sur l'objet en chute verticale:

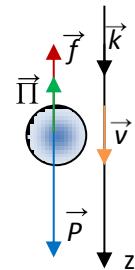
- Son poids  $\vec{P} = m \vec{g}$ ,
- La poussée d'Archimède:  $\vec{F}_A = -\rho_{\text{fluide}} V_{\text{bille}} \vec{g} = -m' \vec{g}$ , où  $m'$  est la masse de fluide de même volume que l'objet réel.
- La force de frottement fluide, supposée ici laminaire  $\vec{f} = -h \vec{v}$

Appliquons la deuxième loi de Newton:  $m \vec{a} = m \vec{g} - m' \vec{g} - h \vec{v} \Rightarrow m \frac{d\vec{v}}{dt} = (m - m') \vec{g} - h \vec{v}$

Si on note  $\alpha$  la quantité  $\frac{m - m'}{m}$ , alors on obtient:  $\boxed{\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{h}{m} \vec{v} = \alpha \vec{g}}$  (1): cette équation est

l'équation différentielle du mouvement.

Suivant  $\vec{k}$ :  $\boxed{\frac{dv}{dt} + \frac{h}{m} v = \alpha g}$  (2)

**c) vitesse limite**

Lorsque la vitesse limite est atteinte, l'accélération est nulle puisque la vitesse reste constante. En imposant  $\frac{dv}{dt} = 0$  dans l'équation différentielle (2), on obtient:

$$\boxed{v_{\lim} = \alpha g \frac{m}{h}}$$

Par une méthode d'intégration on pourra montrer que:  $v = v_{\lim} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$  avec  $\tau = \frac{m}{h}$

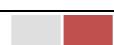
**d) durée du régime initial (avant le régime permanent)**

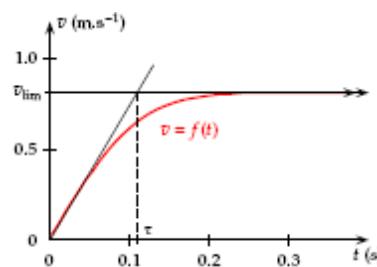
On définit le temps caractéristique  $\tau$  associé à une chute verticale comme étant la date qui correspond, pour la courbe  $v=f(t)$ , au point d'intersection de la tangente à l'origine ( $v=0$ ) et à l'asymptote ( $v_{\lim}$ )

On lâche l'objet sans vitesse, soit  $v=0$ . Pour  $v=0$  à  $t=0$ , l'équation différentielle (2) donne:  $\frac{dv}{dt} = \alpha g$ .

Cela signifie que l'équation de la tangente à l'origine est  $w(t) = \alpha g t$ . La droite tangente à l'origine prend la valeur  $v_{\lim}$  pour  $t = \frac{m}{h}$ . On a donc  $\boxed{\tau = \frac{m}{h}}$ , temps caractéristique de la chute.

La durée du régime initial est voisine de  $\tau$ .





## II. Mouvement paraboliques

### 1. MOUVEMENT D'UN PROJECTILE DANS LE CHAMP DE PESANTEUR: CAS OU $V_0 \neq \vec{g}$

Un projectile, de masse  $m$  est lancé dans le champ de pesanteur  $\vec{g}$  avec une vitesse initiale de lancement  $\vec{v}_0$ . Ce vecteur fait avec l'horizontale un angle aigu  $\alpha$  appelé angle de tir.

#### a. Étude dynamique

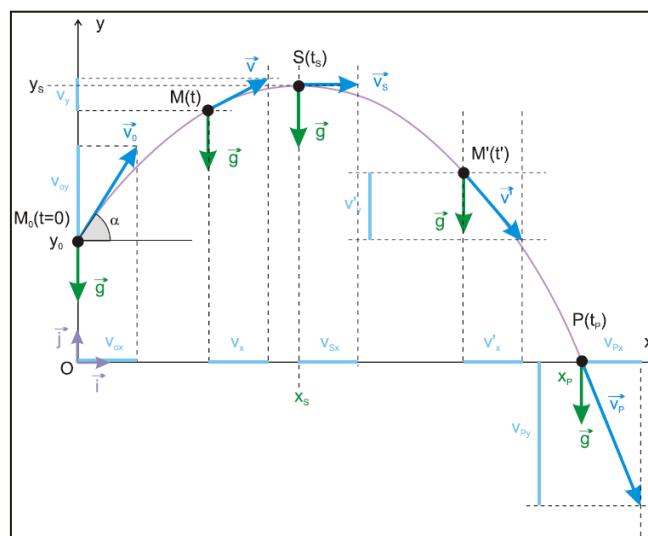
Le système est le projectile de masse  $m$ .

Le référentiel est celui de la Terre.

L'origine du repère cartésien ne coïncide pas forcément avec le point de lancement du projectile.

Bilan des forces:  $\vec{p}$ ; TCI:  $\vec{P} = m \vec{g} \Rightarrow m \vec{a} = m \vec{g} \Rightarrow \vec{a} = \vec{g}$

Conclusion: L'accélération est un vecteur constant dont la norme est indépendante de la masse du projectile. Sa norme est égale à l'intensité de la pesanteur.



$$\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \\ a_z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_x = v_0 \cos \alpha \\ v_y = -gt + v_0 \sin \alpha \\ v_z = 0 \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{OM} \begin{cases} x = v_0 \cos \alpha \cdot t \\ y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin \alpha \cdot t + y_0 \\ z = 0 \end{cases}$$

**Remarque**

$z=0$ , le mouvement est plan et s'effectue dans le plan XOY. La projection du mouvement sur l'axe Ox est un mouvement uniforme alors que la projection du mouvement sur l'axe Oy est un mouvement uniformément varié.

**b. Équation de la trajectoire**

$$x = v_0 \cos \alpha \cdot t \Rightarrow t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha} \Rightarrow \boxed{y = -\frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2 \alpha} + x \tan \alpha + y_0} \text{ équation d'une parabole}$$

**c. Portée horizontale**

La portée est l'abscisse d'un point P d'ordonnée  $y=0$  (si  $y_0=0$ , P est le point d'impact). Pour déterminer  $x_p$ , on résout l'équation  $y=0$ . On traitera pour simplifier le cas où  $y_0=0$ .

$$-\frac{1}{2} g \frac{x_p^2}{v_0^2 \cos^2 \alpha} + x_p \tan \alpha + y_0 = 0 \Rightarrow -\frac{1}{2} g \frac{x_p}{v_0^2 \cos^2 \alpha} + \tan \alpha + y_0 = 0$$

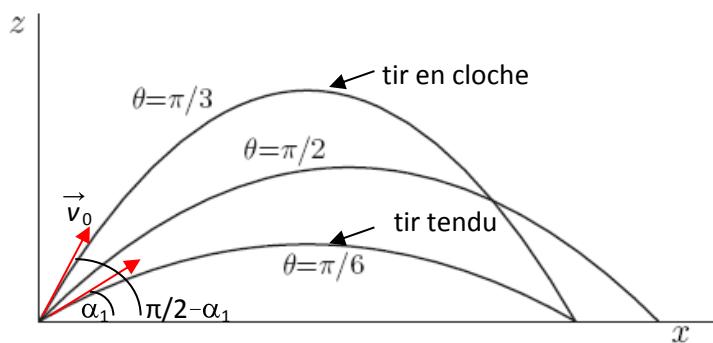
$$\Rightarrow x_p = 2v_0^2 \cos^2 \alpha \frac{\sin \alpha}{g \cos \alpha} = v_0^2 \frac{2 \cos \alpha \cdot \sin \alpha}{g} \Rightarrow x_p = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$$

\*Pour une vitesse  $\vec{v}_0$  donnée, la portée est maximale lorsque  $\sin 2\alpha = 1$  c'est-à-dire  $2\alpha = \frac{\pi}{2}$  soit

$$\alpha = \frac{\pi}{4} (45^\circ) \text{ d'où } \boxed{d_{max} = \frac{v_0^2}{g}}$$

\*pour  $x_p < d_{max}$ , l'équation  $x_p = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$  admet deux solutions  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  telles que:

$$2\alpha_1 = \alpha \text{ ou } 2\alpha_2 = \pi - 2\alpha \Rightarrow \boxed{\alpha_1 = \alpha \text{ et } \alpha_2 = \frac{\pi}{2} - \alpha}$$



Conclusion : Pour une valeur donnée de  $v_0$ , une même portée  $x_p$  est atteinte pour deux angles de tir différents (si  $\alpha$  est différent de  $0^\circ$ ,  $45^\circ$  et  $90^\circ$ ). Ces deux angles sont complémentaires.

#### d. Flèche

La flèche est la hauteur maximale atteinte par le projectile. Au sommet de la trajectoire  $v_y = 0$

$$-gt + v_0 \sin \alpha = 0 \Rightarrow t = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}$$

$$y_F = y(t) = -\frac{1}{2} - g \left( \frac{v_0 \sin \alpha}{g} \right)^2 + v_0 \sin \alpha \frac{(v_0 \sin \alpha)}{g} \Rightarrow \boxed{y_F = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}}$$

$$x_F = v_0 \cos \alpha t = v_0 \cos \alpha \times \frac{v_0 \sin \alpha}{g} \Rightarrow \boxed{x_F = \frac{v_0^2 \sin 2 \alpha}{2g}}$$

#### e. Parabole de sûreté

Comme  $\frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \tan^2 \alpha$  on obtient aussi l'équation de la trajectoire:

$$y = -\frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_0^2} (1 + \tan^2 \alpha) + x \tan \alpha$$

La trajectoire devant contenir le point P de coordonnées  $x_p$  et  $y_p$ , la valeur de  $\alpha$  sera obtenu en

$$\text{résolvant l'équation: } -\frac{1}{2} g \frac{x_p^2}{v_0^2} \tan^2 \alpha + x_p \tan \alpha - \left( \frac{1}{2} g \frac{x_p^2}{v_0^2} + y_p \right) = 0 \quad (1)$$

Cette équation du second degré en  $\tan \alpha$  a deux solutions si son discriminant est positif. A ces deux solutions correspondent deux réglages possibles du tir.

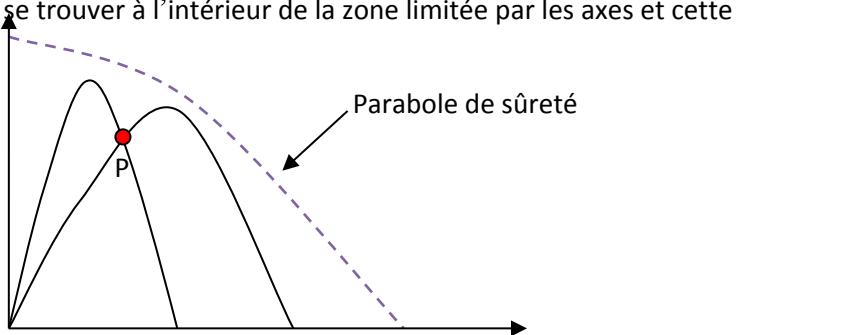
La vitesse  $v_0$  imposée, le tir ne peut atteindre un point P donné que si l'équation (1) admet des racines. Calculons son discriminant

$$\Delta = x_p^2 - \frac{g^2}{v_0^4} x_p^4 - 2 y_p \frac{g}{v_0^2} x_p^2 \geq 0$$

$$\text{Comme } x_p^2 > 0, \text{ on obtient: } y_p \leq -x_p^2 \frac{g}{2v_0^2} + \frac{v_0^2}{2g}$$

La parabole d'équation  $y = -x^2 \frac{g}{2v_0^2} + \frac{v_0^2}{2g}$  sépare l'espace en deux régions. Les points susceptibles

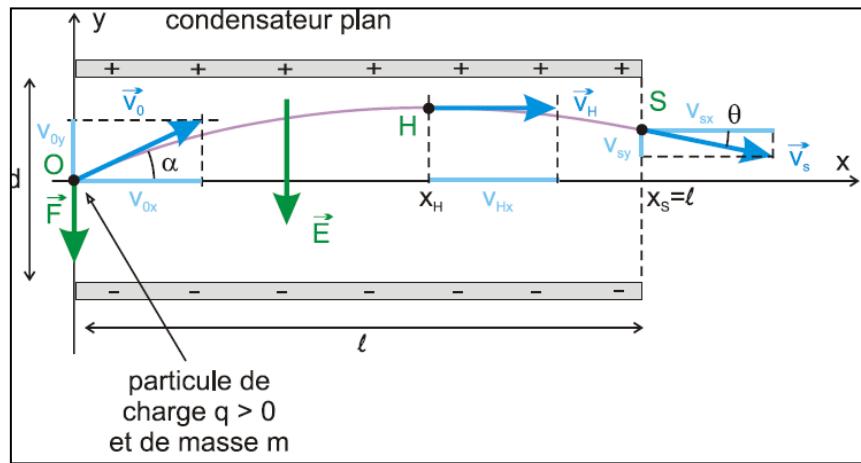
d'être atteints par le tir doivent se trouver à l'intérieur de la zone limitée par les axes et cette parabole, appelée de sûreté.



## 2. MOUVEMENT D'UNE PARTICULE CHARGEÉE DANS E UNIFORME:

a. Cas où  $\vec{v}_0 \perp \vec{E}$ 

A l'instant initial, une particule de masse  $m$  et de charge électrique  $q > 0$  pénètre avec la vitesse  $\vec{v}_0$  dans l'espace compris entre les armatures d'un condensateur plan, auxquelles on a appliqué une tension constante  $U = V_+ - V_- > 0$ . Entre ces plaques s'établit un champ électrique uniforme  $\vec{E}$  (voir schéma) :



\*système: particule de masse  $m$  et de charge positive  $q$

\* référentiel: terrestre

\*BF:  $\vec{F}$  et  $\vec{P}$  (négligeable devant  $\vec{F}$ ); TCl:  $\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \frac{q}{m}\vec{E}$

$$\vec{a} \begin{cases} 0 \\ -\frac{qE}{m} \\ 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{v} \begin{cases} v_0 \cos \alpha \\ -\frac{qE}{m} t + v_0 \sin \alpha \\ 0 \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{OM} \begin{cases} v_0 \cos \alpha \cdot t \\ -\frac{qE}{2m} t^2 + v_0 \sin \alpha \cdot t \\ 0 \end{cases}$$

$z = 0$  le mouvement s'effectue dans le plan XOY

$$x = v_0 \cos \alpha \cdot t \Rightarrow t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha} \Rightarrow y = -\frac{qE}{2mv_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + xt \tan \alpha \quad \text{avec } E = \frac{U}{d} : \text{la trajectoire est une parabole.}$$

Particule au point de sortie S du champ : position, date, vitesse

$$* \text{Abscisse du point S: } x_S = \ell \Rightarrow y_S = -\frac{qE\ell^2}{2mv_0^2 \cos^2 \alpha} + \tan \alpha \cdot \ell$$

$$* \text{La date } t_S \text{ de sortie du champ: } t_S = \frac{\ell}{v_0 \cos \alpha}$$

\* vitesse  $\vec{v}_s$  de la charge à la sortie du champ :  $v_{sx} = v_0 \cos \alpha$  et  $v_{sy} = -\frac{qE\ell}{mv_0^2 \cos \alpha} + v_0 \sin \alpha$

La direction de  $\vec{v}_s$  par rapport à l'axe Ox:  $\tan \theta = \frac{v_{sy}}{v_{sx}}$

Position du point H le plus haut:

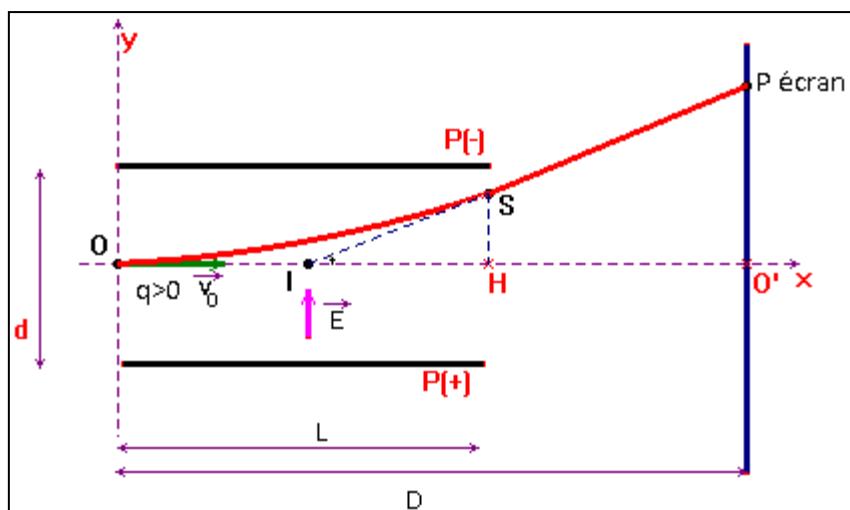
En H, point le plus haut, la coordonnée verticale du vecteur vitesse est nulle:  $v_y(H) = 0$

$$\Rightarrow -\frac{qE}{m} t_H + v_0 \sin \alpha = 0 \Rightarrow t_H = v_0 \frac{m \sin \alpha}{qE} \Rightarrow y_H = -\frac{1}{2} \frac{qE}{m} t_H^2 + v_0 \sin \alpha \cdot t_H$$

Lorsqu'on dispose de valeurs numériques, le calcul est en général simple!

### b. Cas où $\vec{v}_0 \perp \vec{E}$

Considérons une particule chargée  $q > 0$  en mouvement dans un champ électrique  $\vec{E}$  uniforme vertical dirigé vers le haut (voir figure).



Si  $\vec{v}_0 \perp \vec{E}$  alors  $\alpha=0 \Rightarrow y = \frac{qEx^2}{2mv_0^2}$ : parabole d'axe Oy. (Remarquer dans cet exemple le sens de  $\vec{E}$ )

Condition pour que la particule émerge du champ  $\vec{E}$

$$\text{Pour } x=\ell \text{ alors } y < \frac{d}{2}. \text{ Résolvons } y(\ell) < \frac{d}{2} \Rightarrow \frac{qU\ell^2}{2mdv_0^2} < \frac{d}{2} \Rightarrow U < \frac{md^2v_0^2}{q\ell^2} \text{ ou } v_0 > \frac{\ell}{d} \sqrt{\frac{qU}{m}}$$

Déviation électrique

La déviation électrique est l'ordonnée du point d'impact de la particule sur l'écran.  $O'P$  est la déviation électrique. A la sortie du champ électrique  $\vec{F}=0$ : le mouvement est rectiligne uniforme suivant la tangente à la trajectoire (arc de parabole) au point S.

- **RAPPEL MATHEMATIQUE:**

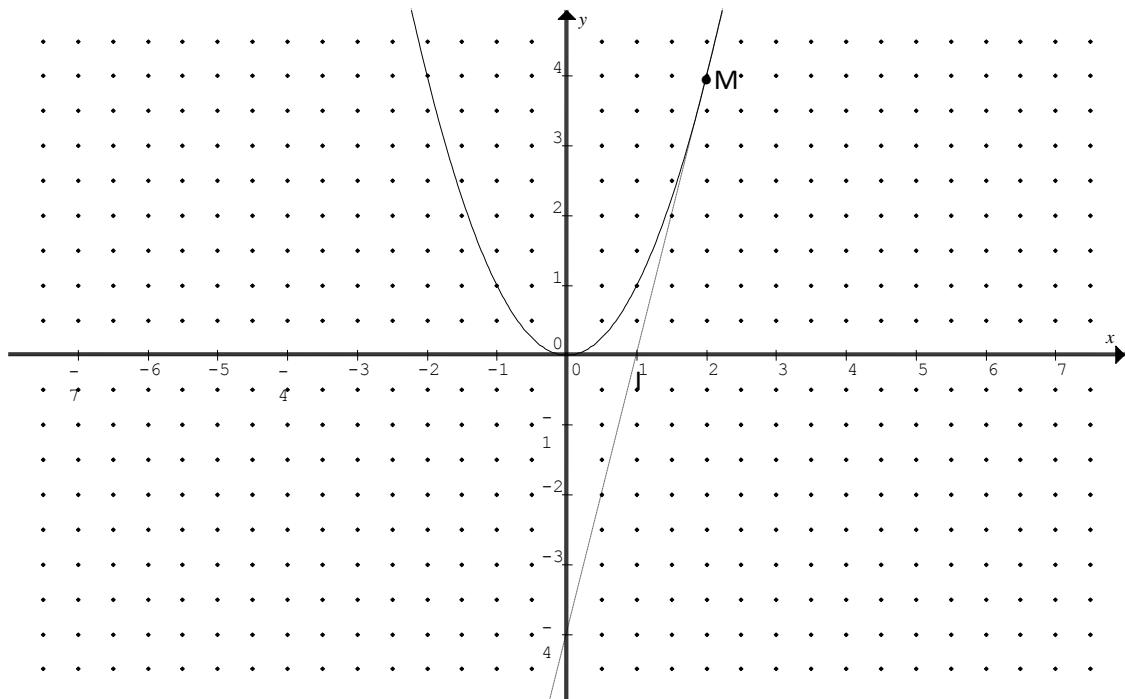
L'équation d'une parabole d'axe OY et de sommet O est de la forme:  $y=ax^2$  (où a est une constante).

Déterminons l'équation de la tangente à la parabole au point  $M(x_M; y_M)$ :  $Y=Ax+B$

$$A = \left( \frac{dy}{dx} \right)_{x=x_M} = 2ax_M \Rightarrow Y = 2ax_M x + B; y_M = Y_M \Rightarrow ax_M^2 = 2ax_M^2 + B \Rightarrow B = -ax_M^2$$

$$\Rightarrow Y = 2ax_M x - ax_M^2$$

$$Y=0 \Rightarrow 2ax_M x - ax_M^2 = 0 \Rightarrow 2ax_M \left( x - \frac{x_M}{2} \right) = 0 \Rightarrow x = \frac{x_M}{2}$$



*La tangente d'une parabole en un point M coupe l'axe des abscisses en un point I tel que*

$$x_I = \frac{x_M}{2}$$

La tangente en la trajectoire au point de sortie S d'abscisse  $\ell$  coupe l'axe des abscisses au point I milieu de OH soit  $x_I = \frac{\ell}{2}$

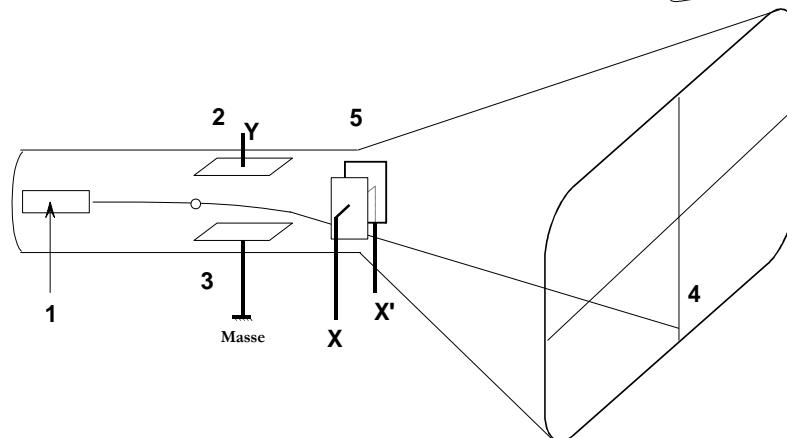
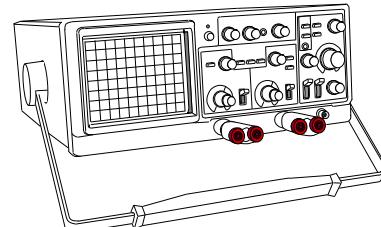
$$\tan \alpha = \frac{SH}{IH} = \frac{\overline{O'P}}{\overline{IO'}} \Rightarrow \frac{y(\ell)}{\frac{\ell}{2}} = \frac{\overline{O'P}}{\frac{D-\ell}{2}} \Rightarrow \frac{2y(\ell)}{\ell} \left( D - \frac{\ell}{2} \right) = 2qE\ell^2 \frac{D - \frac{\ell}{2}}{2\ell m v_0^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\overline{O'P} = \frac{q}{m} \times \frac{E\ell}{v_0^2} \left( D - \frac{\ell}{2} \right)}$$

Remarque: cette expression peut être retrouvée en utilisant les composantes de la vitesse au point S:

$\tan \alpha = \frac{v_{ys}}{v_{xs}} = \frac{\overline{O'P}}{IO'}$ ). La mesure de la déflexion électrique permet aussi de déterminer la charge massique  $\frac{q}{m}$ .

L'oscilloscope utilise le principe de la déviation des particules.



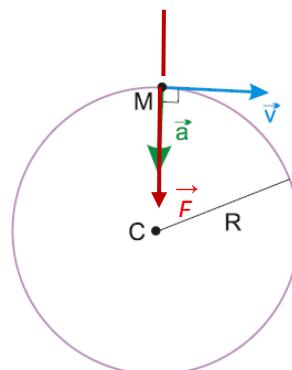
### III. Mouvements circulaires uniformes

#### 1. ÉTUDE DYNAMIQUE

Considérons un mobile M qui décrit un mouvement circulaire uniforme dans un référentiel galiléen.

\*système: mobile M

\*Référentiel: terrestre

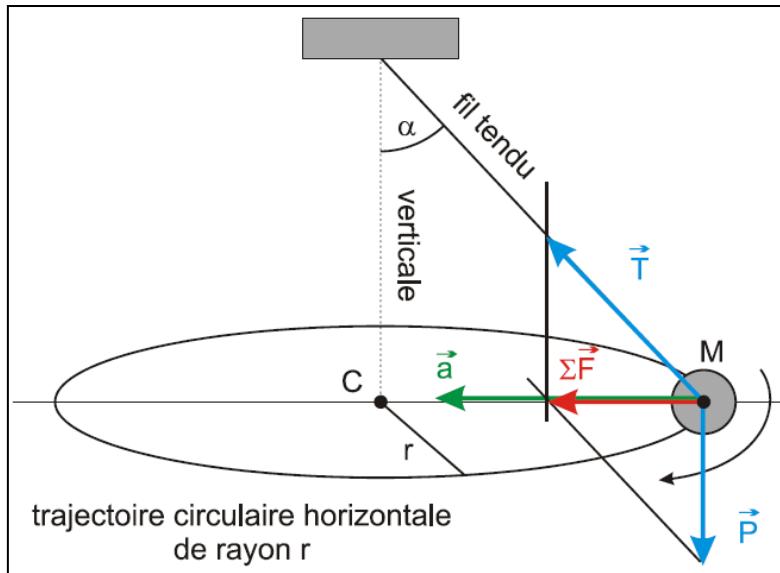


\*TCI:  $\vec{F} = m \vec{a} \Rightarrow \vec{F} = m(\vec{a}_T + \vec{a}_N) = m \frac{dv}{dt} \vec{T} + m \frac{v^2}{R} \vec{N}$

$$\frac{dv}{dt} = 0 \text{ car le mouvement est uniforme: } \vec{F} = \frac{mv^2}{R} \vec{N} \text{ or } v = R\omega \Rightarrow \boxed{\vec{F} = mR\omega^2 \vec{N}}$$

#### 2. PENDULE CONIQUE

Si on fait tourner lentement un moteur fixé à l'extrémité supérieure du pendule, on observe que pour une certaine valeur de la vitesse angulaire  $\omega$ , le pendule s'écarte de la tige et la sphère décrit un cercle horizontal. L'angle  $\alpha$  que fait le fil du pendule avec la verticale dépend de  $\omega$ .



$$\vec{P} + \vec{T} = m \vec{a}; \tan \alpha = \frac{F}{P} = \frac{mr\omega^2}{mg} = \frac{r\omega^2}{g} \text{ avec } \sin \alpha = \frac{r}{\ell} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{\ell \sin \alpha \omega^2}{g} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\Rightarrow \cos \alpha = \frac{g}{\ell \omega^2}. \text{ Lorsque } \omega \text{ augmente } \alpha \text{ augmente: } \cos \alpha \leq 1 \Rightarrow \frac{g}{\ell \omega^2} \leq 1 \Rightarrow \boxed{\omega \geq \sqrt{\frac{g}{\ell}} = \omega_0}$$

$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$  est la vitesse angulaire limite que  $\omega$  doit dépasser pour que le pendule s'écarte de sa position initiale.

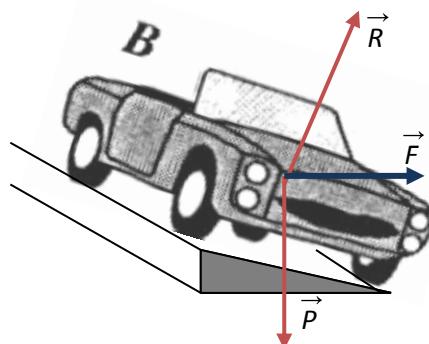
### 3. RELEVEMENT DES VIRAGES

Considérons une voiture de masse  $m$  qui effectue un virage à la vitesse constante sur une route horizontale. Lorsque la voiture effectue le virage le mouvement est circulaire uniforme.

$$\vec{F} = \vec{P} + \vec{R} = m \vec{a} = \frac{mv^2}{r} \vec{n}$$

$\vec{F}$  est situé dans un plan horizontal et dirigé vers le centre de la trajectoire ( $\vec{F}$  est centripète);  $\vec{R}$  est nécessairement incliné d'un angle  $\alpha$  par rapport à la verticale. Pour cela on doit relever la route en inclinant les parties courbes de la route de l'extérieur vers l'intérieur.

$$\tan \alpha = \frac{F}{P} = \frac{r}{mg} = \frac{v^2}{rg} \Rightarrow \boxed{\tan \alpha = \frac{v^2}{rg}}$$



## IV. Mouvement circulaire uniformément varié (S1)

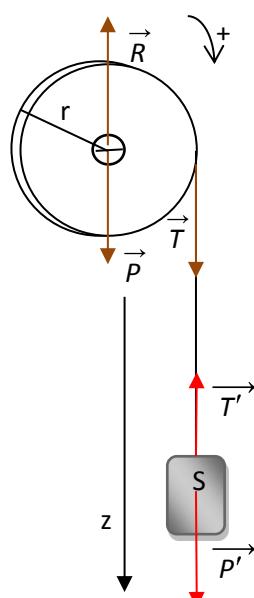
### 1. ÉTUDE DYNAMIQUE

Soit un mobile de masse  $m$ , animé d'un mouvement de rotation autour d'un axe  $\Delta$ .

Système: mobile de masse  $m$ ; référentiel: référentiel terrestre; TAA:  $\sum \vec{F} = J_\Delta \theta''$

### 2. APPLICATION

Une corde inextensible enroulée sur un treuil soutient un solide  $S$  de masse  $m$ . Le treuil assimilable à un cylindre homogène de masse  $M$  et de rayon  $r$  et maintenu en équilibre grâce à une force motrice  $\vec{F}$  appliquée sur la manivelle. A un instant  $t=0$  on enlève la manivelle ( $\vec{F}=0$ ); quelle est la nature du mouvement du treuil à partir de cet instant?



Système: treuil; Réf: référentiel terrestre; forces:  $\vec{P}$ ,  $\vec{R}$ ,  $\vec{T}$

$$\text{TAA: } \mathcal{M}(\vec{P}) + \mathcal{M}(\vec{R}) + \mathcal{M}(\vec{T}) = J\ddot{\theta}$$

$$\mathcal{M}(\vec{P})=0; \mathcal{M}(\vec{R})=0; \mathcal{M}(\vec{T})=\text{Tr} \Rightarrow Tr = J\ddot{\theta} \Rightarrow \boxed{T = \frac{J}{r}\theta''} \quad (1)$$

Système: solide; forces:  $\vec{P}'$  et  $\vec{T}'$ ; TCI:  $\vec{P}' + \vec{T}' = m\vec{a}$

$$\text{Sur zz': } mg - T' = ma \Rightarrow \boxed{T' = m(g-a)} \quad (2)$$

$$\text{La corde est inextensible: } T = T' \Rightarrow \boxed{\frac{J\theta''}{r} = m(g-a)} \quad (3)$$

La corde s'enroule sur le treuil. Si  $\omega$  est la vitesse angulaire du treuil à un instant  $t$  alors:  $v_s = r\omega$

$$a = \frac{dv}{dt} = r \frac{d\omega}{dt} = r\theta'' \Rightarrow \boxed{a = r\theta''}$$

$$(3) \Rightarrow J\theta'' = mg - mr\theta'' \Rightarrow \theta'' \left( \frac{J}{r} + mr \right) = mg \Rightarrow \boxed{\theta'' = \frac{mg}{\frac{J}{r} + mr} = \frac{mrg}{J + mr^2}}$$

$\theta''$  est une constante: le mouvement est circulaire uniformément varié.

$$J = \frac{1}{2}Mr^2 \Rightarrow \ddot{\theta} = \frac{2mg}{r(M+2m)}$$

$$\boxed{a = r\theta'' = \frac{2mg}{M+2m}} = \text{cte} \Rightarrow \text{le mouvement de } S \text{ est rectiligne uniformément varié.}$$

Application: réprendre l'application précédente en appliquant le théorème de l'énergie cinétique appliqué au système {cylindre+solide (S)}

## V. Conservation de la quantité de mouvement

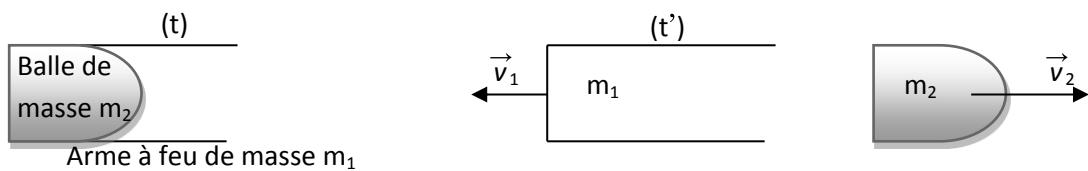
RFD:  $\sum \vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt}$ . Si  $\sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \vec{P} = \text{cte}$



$\sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow$  le système est isolé ou système pseudo-isolé  $\Rightarrow \vec{v} = \vec{0}$  ou  $\vec{v} = \text{cte}$ .

### 1. APPLICATION AU RECOL D'UNE ARME A FEU

Considérons le système formé par une arme à feu et un projectile.



Système: arme + balle;  $\vec{P} + \vec{R} = \vec{0} \Rightarrow$  le système est pseudo-isolé  $\Rightarrow \vec{P} = \text{cte}$

Avant le tir: (t):  $\vec{P} = \vec{0}$

Après le tir (t'):  $\vec{P}' = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2$

Conservation de la quantité de mouvement:  $\vec{P} = \vec{P}'$  d'où  $m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = \vec{0} \Rightarrow \boxed{\vec{v}_1 = -\frac{m_2}{m_1} \vec{v}_2}$

$\vec{v}_1$  est la vitesse de recul de l'arme à feu.

### 2. ÉTUDE DES CHOCS

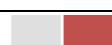
Il y a choc entre deux systèmes lorsque leurs vitesses sont brusquement modifiées par contact pendant une faible durée.

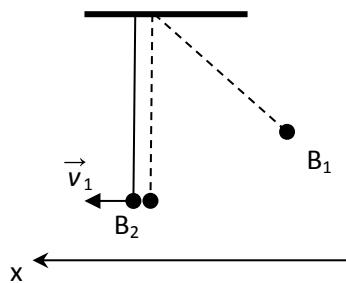
#### a) Choc élastique

Un choc est élastique si après le choc les corps considérés ne subissent aucune déformation. A l'issue d'un choc élastique il y a conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie cinétique.

#### Exemple

Considérons le choc entre deux boules  $B_1$  et  $B_2$  de deux pendules simples de même longueur et très proches. On écarte la boule  $B_1$  d'un angle  $\theta$  et on la libère sans vitesse initiale. A l'instant du choc avec  $B_2$  sa vitesse  $\vec{v}_1$  est horizontale. Déterminer en fonction de  $v_1$  les vitesses après le choc.





Supposons que le choc est élastique.

	Quantité de mouvement		Énergie cinétique	
	B <sub>1</sub>	B <sub>2</sub>	B <sub>1</sub>	B <sub>2</sub>
Avant le choc	$\vec{P}_1 = m_1 \vec{v}_1$	$\vec{P}_2 = 0$	$E_{C1} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2$	$E_{C2} = 0$
Après le choc	$\vec{P}'_1 = m_1 \vec{v}'_1$	$\vec{P}'_2 = m_2 \vec{v}'_2$	$E'C_1 = \frac{1}{2} m_1 v'_1^2$	$E'C_2 = \frac{1}{2} m_2 v'_2^2$

Conservation de la quantité de mouvement pour le système {B<sub>1</sub>; B<sub>2</sub>}:

$$\vec{P}_1 + \vec{P}_2 = \vec{P}'_1 + \vec{P}'_2 \Rightarrow m_1 \vec{v}_1 + \vec{0} = m_1 \vec{v}'_1 + m_2 \vec{v}'_2 \Rightarrow [m_1(\vec{v}_1 - \vec{v}'_1) = m_2 \vec{v}'_2] \quad (1)$$

Projetons la relation (1) sur l'axe Ox:  $[m_1(v_1 - v'_1) = m_2 v'_2] \quad (1')$

Conservation de l'énergie cinétique:

$$E_{C1} + E_{C2} = E'C_1 + E'C_2 \Rightarrow \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + 0 = \frac{1}{2} m_1 v'_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v'_2^2 \Rightarrow [m_1(v_1^2 - v'_1^2) = m_2 v'_2^2] \quad (2)$$

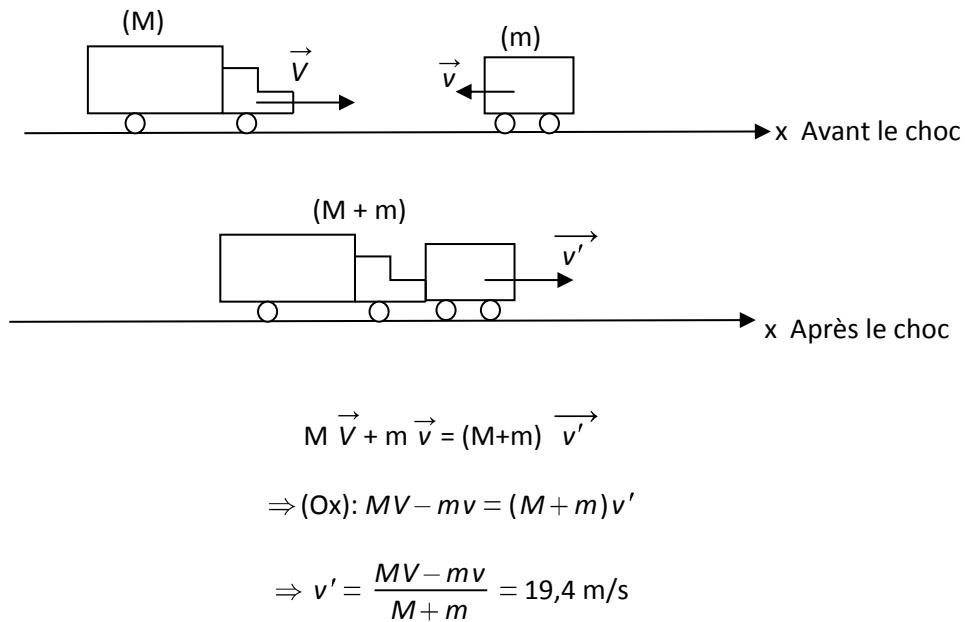
$$\frac{2}{1'} \Rightarrow [v_1 + v'_1 = v'_2] \quad (3). \text{ En éliminant } v'_2 \text{ entre (1') et (3)} \Rightarrow [v'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1] \text{ et } [v'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1]$$

### b) Choc mou

C'est un choc à l'issu duquel les corps considérés sont déformés. Il y a conservation de la quantité de mouvement et non conservation de l'énergie cinétique.

Exemple:

Une locomotive de masse M=50t se déplace sur une ligne rectiligne horizontale avec une vitesse V=72 km/h. En sens contraire vient un wagon de masse m=1t avec une vitesse v=30 km/h. La locomotive heurte le wagon et continue à rouler en poussant ce dernier. Quelle est leur vitesse commune?



### 3. DECOLLAGE D'UNE FUSEE

A t=0, une fusée à un étage de masse  $m_0$  décolle.

On définit : le débit massique des gaz brûlés  $\mu = dm / dt$  ( $\mu$  est supposé constant)  
la vitesse d'éjection des gaz par rapport à la fusée  $u > 0$  ( $u$  est supposé constant)

On suppose que  $g$  reste uniforme lors du lancement.

- En prenant pour système la fusée à l'instant  $t$ , exprimer sa masse et sa vitesse aux instants  $t$  et  $t + dt$

Le système a une masse variable. On va donc utiliser la 2<sup>ème</sup> loi de Newton sous la forme :  $dp / dt = \Sigma$  forces extérieures, où  $p = mv$  est la quantité de mouvement du système.

A l'instant  $t$ , la fusée a : pour masse :  $m(t) = m_0 - \mu t$   
pour vitesse :  $v(t)$

A l'instant  $t + dt$ , la fusée a : pour masse :  $m(t+dt) = m(t) - dm$  où  $dm = \mu dt$   
pour vitesse :  $v(t+dt) = v(t) + dv$

- Exprimer la masse et la vitesse du gaz éjecté entre ces 2 instants



Le gaz éjecté entre ces 2 instants a : pour masse  $dm = \mu dt$   
pour vitesse  $v(t) - u$  (en projection sur l'axe (Oz))

- En utilisant la 2<sup>ème</sup> loi de Newton pour l'ensemble fusée + gaz, montrer que la vitesse de la fusée vérifie l'équation différentielle suivante :  $m dv / dt = \mu u - mg$

A l'instant  $t + dt$ , la quantité de mouvement du système est donc égale à :  
 $p + dp = (m - dm)(v + dv) + dm(v - u)$   
 $= mv - vdm + mdv - dmdv + vdm - udm$

Or  $dmdv \approx 0$  donc  $p + dp = mv + mdv - udm$

$p = mv$  donc  $dp = mdv - udm$

En négligeant les frottements de l'air, la seule force extérieure appliquée au système est son poids, donc  $dp / dt = -mgdt$

et  $m dv/dt - u dm/dt = -mg$

Avec  $\mu = dm/dt$ , on obtient bien  $m dv / dt = \mu u - mg$

4. Définir la force de poussée. A quelle condition la fusée décolle-t-elle ?

La force de poussée est égale à  $\mu u$  : c'est le produit du débit massique des gaz brûlés par la vitesse d'éjection de ces gaz par rapport à la fusée.

La fusée décolle SSI  $\mu u > m_0 g$

5. Résoudre cette équation en exprimant  $v$  en fonction de  $t$ . Déterminer la vitesse maximale. A quelle condition la vitesse peut-elle atteindre des valeurs élevées pour une fusée à un étage ?

$dv / dt = \mu u / m - g$

d'où  $dv = \mu u dt / (m_0 - \mu t) - gdt$

En intégrant entre  $t=0$  et  $t$ , on obtient :  $v = u \ln(m_0 / (m_0 - \mu t)) - gt$

La vitesse maximale est telle que  $v_{max} < u \ln(m_0 / m_{vide})$

$v_{max}$  ne peut être grand que si  $m_0 / m_{vide} \gg 1$ .

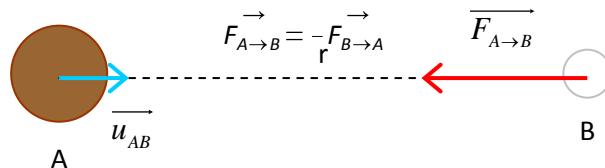
La fusée à un étage doit emporter beaucoup de carburant pour que sa vitesse soit élevée.

# Gravitation universelle

## I. Interactions gravitationnelles: loi de Newton

Énoncé (Isaac Newton, 1667) : deux corps ponctuels dont la répartition de masse est sphérique, de masses  $m_A$  et  $m_B$ , séparés d'une distance  $r$ , sont soumis aux forces de gravitation universelles dont l'expression est :

$$\vec{F}_{A \rightarrow B} = -G \frac{m_A m_B}{r^2} \vec{u}_{AB}$$



Constante de gravitation universelle :  $G=6,67259 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$

Remarque: Les forces de gravitation s'exercent aussi bien à des distances astronomiques entre les corps célestes qu'à des distances microscopiques entre des atomes, des noyaux etc....

## II. Champ de gravitation

### 1. OBJET PONCTUEL

Considérons en point O de l'espace, un objet ponctuel de masse M et, en P un objet ponctuel de masse m. La force gravitationnelle exercée par la masse M sur la masse m s'écrit:

$$\vec{F} = -\frac{GmM}{r^2} \vec{u} = m \left( -\frac{GM}{r^2} \right) \vec{u} = m \vec{\mathcal{G}}(P)$$



$\vec{\mathcal{G}}(P)$  est le champ de gravitation créé par la masse M au point P. Il s'exprime en  $\text{m/s}^2$ .

$$\vec{\mathcal{G}}(P) = -\frac{GM}{r^2} \vec{u}$$

Remarque: le champ de gravitation existe même à l'absence de masse m au point P.

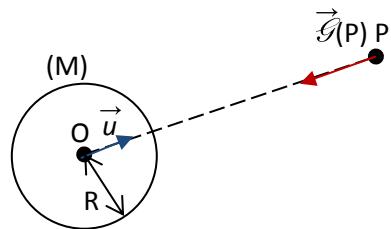
### 2. OBJET DE SYMETRIE SPHERIQUE

- On dit qu'un objet a une répartition sphérique de masse lorsque la masse volumique  $\rho$  ne dépend que de la distance  $r$ . On admettra que le soleil, les planètes et leurs satellites présentent une telle symétrie.
- Newton a montré qu'une répartition de masse de symétrie sphérique, de centre O et de masse M, crée en un point extérieur P un champ gravitationnel identique à celui d'un corps ponctuel de masse M placé en O.



$$\vec{G}(P) = -\frac{GM}{r^2} \vec{u}$$

- A la surface de la Terre:  $r = R \Rightarrow \vec{G}(P) = -\frac{GM}{R^2} \vec{u}$
- pour  $r > R \Rightarrow \vec{G}(P) = -\frac{GM}{r^2} \vec{u}$



Remarque: cette expression n'est valable qu'à l'extérieur et sur la surface même de la répartition de masse de symétrie sphérique. Ce champ est centripète car il est dirigé vers le centre O.

### 3. FORCE GRAVITATIONNELLE CREEE PAR UN OBJET PLACE DANS UN CHAMP DE GRAVITATION

Un objet ponctuel de masse m placé en P dans le champ de gravitation  $\vec{G}(P)$  subisse l'action de la force gravitationnelle tel que:

$$\vec{F} = m \vec{G}(P)$$

### 4. APPLICATION

- 1) Calculer la valeur de la force de gravitation s'exerçant entre le proton et l'électron d'un atome d'hydrogène lorsqu'ils sont séparés de 0,053 μm.
- 2) Comparer la valeur de cette force au poids du proton à la surface de la Terre. Conclure.

On donne:  $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$  et  $m_p = 1,6 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$

Réponse: 1)  $F = \frac{G m_e m_p}{r^2} = 3,6 \cdot 10^{-47} \text{ N}$       2)  $P = m_p g = 16,79 \cdot 10^{-27} \text{ N}$ ;  $\frac{P}{F} = 4,6 \cdot 10^{20}$

$P \ll F$ : la force gravitationnelle est négligeable devant le poids pour des distances astronomiques.

### 5. CHAMP DE GRAVITATION DE LA TERRE

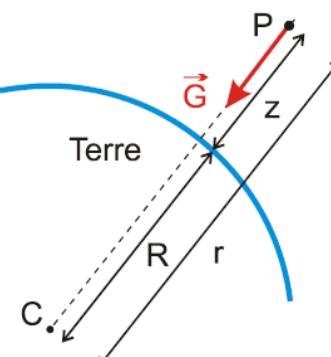
La Terre peut être considérée comme un corps de répartition sphérique de masse, de centre C, de rayon  $R_T$  et de masse  $M_T$ . En un point P tel que  $r > R_T$  le champ créé par la terre est:  $\vec{G}(P) = -\frac{GM}{r^2} \vec{u}$

- A la surface de la Terre  $r = R_T$

$$\vec{G}(0) = g_0 = \frac{GM_T}{R_T^2} = 9,8 \text{ m/s}^2 \Rightarrow g_0 R_T^2 = GM_T \text{ avec}$$

$$M_T = 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg} \text{ et } R_T = 6,38 \cdot 10^6 \text{ m}$$

Le champ de pesanteur est le champ de gravitation créé par la Terre sur sa surface.



- A une altitude h:  $r = R_T + h$ :  $\boxed{\vec{G}(P) = g_0 \frac{R_T^2}{(R_T + h)^2} \vec{u}}$

Application: Comparer les valeurs des champs de gravitation créés par la Terre et le Soleil à la surface de la Terre.

$$\text{Réponse: } \frac{g_0}{\mathcal{G}_s} = M_T \frac{(d - R_T)^2}{MsR_T^2} = 2,7 \cdot 10^{30} \Rightarrow g_0 > \mathcal{G}_s$$

## 6. CHAMP DE GRAVITATION ET CHAMP DE PESANTEUR

On ne fait généralement pas de distinction entre:

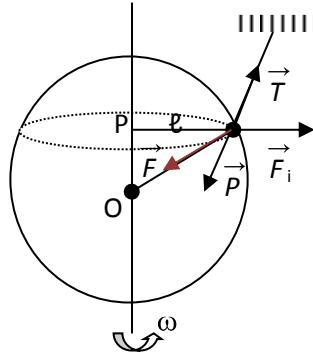
la force d'attraction de la Terre :  $\vec{F} = m\vec{\mathcal{G}}$  ( $\mathcal{G}$ : intensité du champ de gravitation) et le poids :  $\vec{P} = m\vec{g}$  ( $g$ : intensité du champ de pesanteur ou accélération de chute libre)

La détermination de  $g$  par la chute libre se fait dans un repère terrestre, qui, à cause de la rotation de la Terre, n'est pas galiléen ; il s'en suit qu'en toute rigueur  $\vec{\mathcal{G}} \neq \vec{g}$ . Mais comme la vitesse angulaire de la Terre est relativement faible, ces deux forces sont pratiquement identiques et on peut écrire en première approximation :  $g \approx \mathcal{G}$

A la surface d'une Terre sphérique (masse terrestre =  $5,9742 \cdot 10^{24}$  kg, rayon terrestre moyen = 6371 km)  $g_0 = 9,82$  N/kg.

A cause de la rotation terrestre et de l'aplatissement de la Terre (rayon polaire = 6357 km, rayon équatorial = 6378 km),  $g_0$  varie avec la latitude du lieu : équateur :  $g_0 = 9,78$  m/s<sup>2</sup>; Luxembourg :  $g_0 = 9,81$  m/s<sup>2</sup>; aux pôles  $g_0 = 9,83$  m/s<sup>2</sup> (Unités : m/s<sup>2</sup> ou N/kg).

Il existe une légère différence entre  $\vec{F}$  et  $\vec{P}$ , cette différence provient de la rotation de la Terre sur elle-même.



$$\vec{F}_i = -m\ell\omega^2\vec{N}: \omega \text{ vitesse angulaire de la rotation de la Terre sur elle-même.}$$

Système: M; référentiel: lié au point M; CE:  $\vec{T} + \vec{F} + \vec{F}_i = \vec{0} \Rightarrow \vec{F} + \vec{F}_i = -\vec{T}$  or  $\vec{P} = -\vec{T} \Rightarrow \vec{P} = \vec{F} + \vec{F}_i$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{P} = \vec{F} - m\ell\omega^2\vec{N}}$$

## III. Énergie potentielle de gravitation

Soit un corps (1) de masse  $m_1$  qui passe d'une position (1) à une autre position (2) soumis à une force conservative  $\vec{F}$ , on peut écrire alors:  $\Delta Ep = Ep_1 - Ep_2 = -W(\vec{F})$



Supposons que le corps (1) passe de l'orbite  $r_1$  à  $r_2$  ( $r_1 > r_2$ ) entre les instants  $t_1$  et  $t_2$  dans le champ de gravitation:

$$\delta\omega = \vec{F} \cdot \overrightarrow{\delta r} = F \cdot \delta r \cos(\vec{F}, \overrightarrow{\delta r}) = -F \cdot \delta r \text{ avec } \vec{F} = -\frac{Gm_0m_1}{r^2} \vec{u} \Rightarrow W_{1 \rightarrow 2}(\vec{F}) = - \int \frac{Gm_0m_1}{r^2} \delta r = \frac{Gm_0m_1}{r}$$

$$\Delta Ep = Ep_1 - Ep_2 = -W(\vec{F}) = -\frac{Gm_0m_1}{r}$$

Si  $r \rightarrow +\infty$ ,  $Ep \rightarrow 0$ , à l'infini l'énergie potentielle est nulle c'est la référence.

$$\Delta E = E_\infty - Ep = \frac{Gm_0m_1}{r} \Rightarrow Ep = -\frac{Gm_0m_1}{r} \text{ d'où l'énergie potentielle de gravitation terrestre}$$

$$\text{s'écrit sous la forme: } Ep = -\frac{GM_T m}{R_T + h}$$

## IV. Mouvement circulaire des satellites terrestres

### 1. ACCELERATION D'UN SATELLITE

Considérons un satellite de masse  $m$  qui tourne autour de la Terre à une altitude  $z$  (le rayon de son orbite est  $r$ )

Système : {un satellite de la Terre}

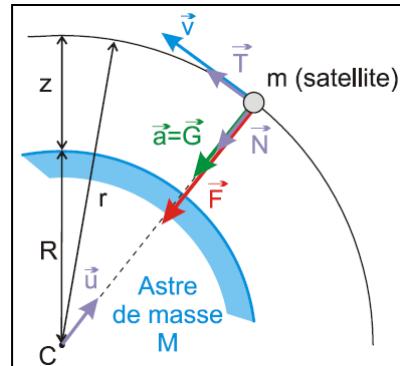
Référentiel : géocentrique

Forces extérieures :  $\vec{F}_{T/\text{sat}}$

2<sup>ème</sup> loi de Newton :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m_{sat} \cdot \vec{a}_{sat} \rightarrow \vec{F}_{T \rightarrow sat} = m_{sat} \cdot \vec{a}_{sat}$$

$$-\frac{G \cdot m_T \cdot m_{sat}}{r^2} \cdot \vec{u} = m_{sat} \cdot \vec{a}_{sat} \rightarrow \vec{a}_{sat} = -\frac{G \cdot m_T}{r^2} \cdot \vec{u}$$



$$\vec{a}_{sat} = \frac{G \cdot m_T}{r^2} \vec{N}$$

$\vec{a}$  est centripète donc le mouvement est circulaire de centre O confondu avec le centre de la Terre. L'accélération est indépendante de la masse du satellite. Elle ne dépend que du rayon de l'orbite.

## 2. SATELLITE A TRAJECTOIRE CIRCULAIRE

## a. Expression de la vitesse

$$\text{En général : } \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{T} + \frac{\vec{v}^2}{r} \cdot \vec{N}$$

$$\text{Or : } \vec{a} = \frac{G \cdot m_T}{r^2} \cdot \vec{N} \text{ donc } \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{T} = \vec{0} \Rightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} = 0$$

$v = \text{constante}$

Le mouvement est circulaire uniforme

$$\begin{cases} \vec{a} = \frac{\vec{v}^2}{r} \cdot \vec{N} & (\text{Frenet}) \\ \vec{a} = \frac{G \cdot m_T}{r^2} \cdot \vec{N} & (\text{Newton}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\vec{v}^2}{r} \cdot \vec{N} = \frac{G \cdot m_T}{r^2} \cdot \vec{N} \Rightarrow v^2 = \frac{G \cdot m_T}{r}$$

$$v = \sqrt{\frac{Gm_T}{r}}$$

$$v = \sqrt{\frac{Gm_T}{R+z}} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{g_0 R_T^2}{R_T+z}} \text{ car } Gm_T = g_0 R_T^2 \text{ et } r = R_T + z$$

La vitesse dépend du rayon de l'orbite. Plus le rayon est grand, plus la vitesse est petite.

$R_T$  : rayon de la Terre  $R_T=6380$  km ;  $z$  : altitude du satellite

## a. Première vitesse cosmique

La première vitesse cosmique représente la vitesse de satellisation minimale autour de la Terre. Vitesse minimale qu'il faut théoriquement communiquer à un corps, au départ de la Terre, pour le satelliser autour d'elle en orbite basse  $r \approx R_T$ . Elle est déterminée par la relation:

$$\frac{v_1^2}{r} = \frac{GM_T}{r^2}$$

où :

- $r$  est le rayon de l'orbite, assimilé au rayon terrestre (6370 km, bien qu'en réalité une orbite n'échappe pas à l'usure de l'atmosphère terrestre que si elle est à une altitude supérieure à 200 kilomètres),
- $M_T$  est la masse de la Terre (environ  $6 \times 10^{24}$  kg),
- $G$  est la constante de gravitation.



Cette relation signifie que la force de gravitation exercée par la Terre ( $\frac{GMm}{R_T^2}$ , m étant la masse de la fusée) est exactement compensée par la force centrifuge ( $\frac{mv_1^2}{R_T}$ ) de la fusée quand celle-ci est en orbite circulaire. La première vitesse cosmique vaut ainsi

$$v_1 = \sqrt{\frac{GM_T}{R_T}} \approx 7,9 \text{ km/s}$$

### **b. Deuxième vitesse cosmique ou vitesse de libération**

La deuxième vitesse cosmique correspond à la vitesse de libération d'un corps quittant la Terre. C'est la vitesse minimale au-delà de laquelle un corps peut s'éloigner définitivement de la Terre, c'est-à-dire l'amener à l'infini avec une vitesse nulle, en tout cas tant que l'on néglige la présence du Soleil et de notre Galaxie.

Appliquons la conservation de l'énergie mécanique:  $\Delta E=0$

$$\begin{aligned} E_\infty - E_{sol} &= (Ec_\infty + Ep_\infty) - (Ec_{sol} + Ep_{sol}) = (0+0) - \left(\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{R}\right) = 0 \\ \Rightarrow v_2 &= \sqrt{\frac{2GM}{R}} = \sqrt{2Rg_0} = 11,2 \text{ km/s} \end{aligned}$$

$$\text{Remarque: } v_2 = v_1\sqrt{2}$$

Cette équation qui décrit que la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle de gravitation se compensent, conférant une énergie totale nulle à la fusée, condition nécessaire à ce qu'elle puisse s'échapper de l'attraction terrestre.

Remarque:

À noter qu'ici, il n'y a pas d'ambigüité sur la quantité R qui correspond au rayon terrestre, puisque c'est de là qu'est lancée la fusée, contrairement à la première vitesse cosmique où la quantité R était censée représenter le rayon d'une orbite basse, légèrement supérieur (d'environ 3%) au rayon terrestre. La vitesse de libération augmente avec la compacité de l'astre support, c'est-à-dire son rapport M/R. Par exemple, celle de Jupiter est de 59,5 km/s.

### **c. Troisième vitesse cosmique**

La troisième vitesse cosmique est définie comme étant la vitesse de libération d'un corps quittant le système solaire depuis l'orbite terrestre. Elle est déterminée de la même façon que la seconde vitesse cosmique, si ce n'est qu'il faut tenir compte de l'énergie potentielle de gravitation de la Terre et du Soleil, et du fait que la Terre est elle-même animée d'une certaine vitesse  $v_T$  sur son orbite. Ainsi,

$$\frac{(v_3 + v_T)^2}{2} = \frac{GM_s}{d} + \frac{GM}{R},$$

où :

- $d$  correspondant à la distance Terre-Soleil, soit une unité astronomique (environ 150 millions de kilomètres) et,
- $M_s$  correspond à la masse du Soleil.

Or la vitesse de la Terre sur son orbite correspond à la première vitesse cosmique du Soleil pour une distance d'une unité astronomique, soit:

$$v_T = \sqrt{\frac{GM_s}{d}}$$

Par conséquent :  $v_3 = \sqrt{\frac{2GM_s}{d} + \frac{2GM}{R}} - \sqrt{\frac{GM_s}{d}} \approx 13,8 \text{ km/s}$

#### *d. Étude de la période*

La période de révolution d'un satellite est la durée que met le satellite pour effectuer le tour de son astre attracteur. On la note  $T$ .

$$v = \frac{2\pi r}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi r}{v} \Rightarrow T = \frac{2\pi r}{\sqrt{\frac{G \cdot m_T}{r}}}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{Gm_T}}$$

La période est indépendante de la masse et dépend de l'altitude. Cette durée, mesurée dans le référentiel géocentrique est différente de celle mesurée par un observateur terrestre, car celui-ci est entraîné par le mouvement de rotation de la Terre autour de l'axe des pôles.

#### *e. loi de Kepler*

En mettant au carré l'expression de la période on retrouve la 3<sup>ème</sup> loi de Kepler

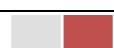
$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{Gm_T} \quad \text{ou} \quad \frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{R^2 g_0}$$

On peut déterminer la masse d'un corps attracteur connaissant la période et le rayon de l'orbite d'un de ses satellites.

### 3. SATELLITES GEOSTATIONNAIRES

Un satellite géostationnaire a une position fixe par rapport à la Terre. Par rapport au référentiel géocentrique, il a un mouvement circulaire uniforme.

Il se situe dans le plan de l'équateur, évolue d'Ouest en Est, et sa période de révolution est celle de la Terre (23h 56min 04s)



$$r = \sqrt[3]{\frac{T^2 G m_T}{4\pi^2}}$$

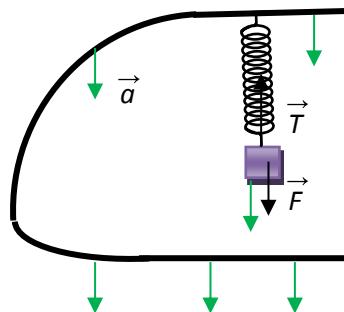
$$z = \left( G m_T \frac{T^2}{4\pi^2} \right)^{\frac{1}{3}} - R_T \approx 36000 \text{ km}$$

Un satellite géostationnaire évolue en orbite circulaire à une altitude proche de 36 000 km et avec une vitesse voisine de 3,1 km/s.

#### 4. ETAT D'IMPESANTEUR DANS UN SATELLITE

Lorsqu'un satellite est sur son orbite, tout objet situé à l'intérieur du satellite semble "flotter", comme s'il n'était plus soumis à son poids.

Un astronaute veut mesurer le poids apparent d'un objet de masse  $m$  et de centre de masse  $C$ . Pour cela il suspend cet objet à l'extrémité d'un ressort accroché au plafond du satellite.



Du point de vu de l'astronaute l'objet est soumis à son poids apparent  $\vec{P}$  et à la tension  $\vec{T}$  due au ressort. L'objet étant immobile:  $\vec{P} + \vec{T} = \vec{0}$ .

Vu du référentiel géocentrique, l'objet est soumis à la force gravitationnelle  $\vec{F}$  et à la tension  $\vec{T}$ . On a donc:  $m\vec{a} = \vec{F} + \vec{T}$ ; l'objet étant fixe à l'intérieur du satellite, son accélération est égale à celle du satellite. Soit  $\vec{a} = -G \frac{M}{r^2} \vec{u}$

$$m\vec{a} = m\vec{a} + \vec{T} \Rightarrow \vec{T} = \vec{0} \text{ d'où } \vec{P} = \vec{0}$$

La tension est nulle, l'objet reste en équilibre sans être retenu par le ressort. L'astronaute en déduit que le poids apparent de l'objet est nul, d'où l'impression d'impesanteur. L'astronaute est lui-même en impesanteur.

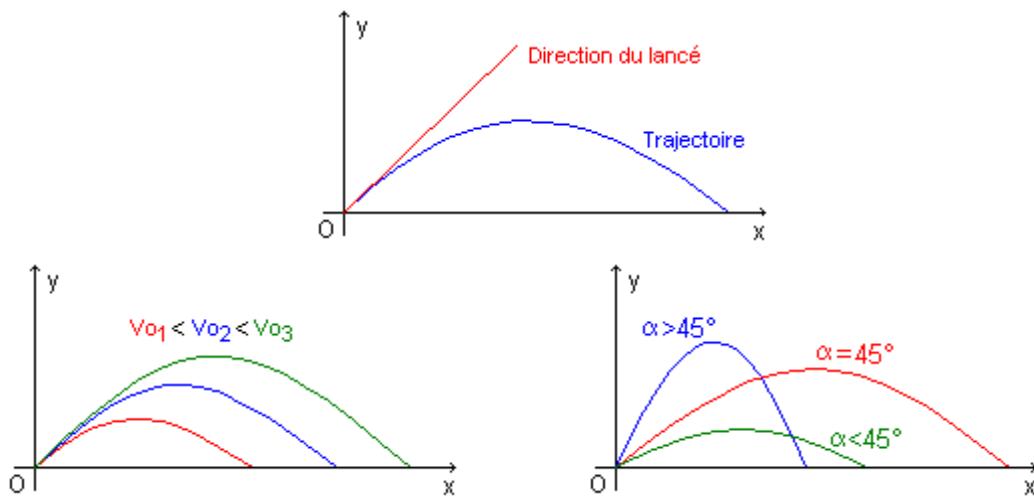
**L'impesanteur est due au fait que l'astronaute subit la même accélération que le satellite: ils sont tous deux en "chute" par rapport à la Terre. L'astronaute n'a plus besoin d'aucun appui pour rester en équilibre dans la cabine, car la réaction exercée par la paroi est nulle.**

## V. La satellisation

### 1. CHUTE LIBRE PARABOLIQUE

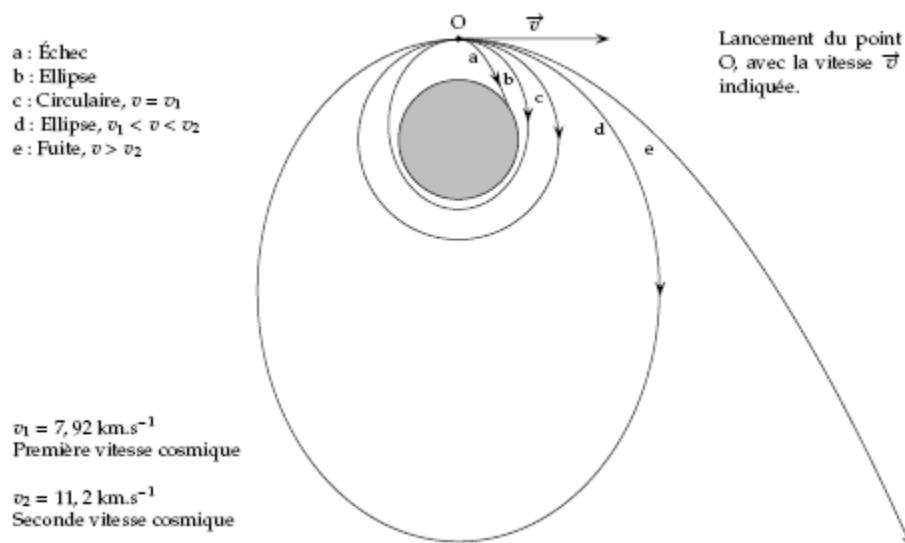
Lorsqu'on lance un objet placé au voisinage de la Terre avec une vitesse  $V_0$ , le mouvement de cet objet est parabolique (images ci-contre).

Remarque: La trajectoire dépend de la valeur de la vitesse initiale et de l'angle que fait la direction du lancé avec l'horizontale.



### 2. SATELLISATION

Lorsque qu'on lance un objet d'un point proche de la Terre avec une vitesse de direction tangente à la surface terrestre, plusieurs cas sont possibles.



# Oscillations mécaniques libres

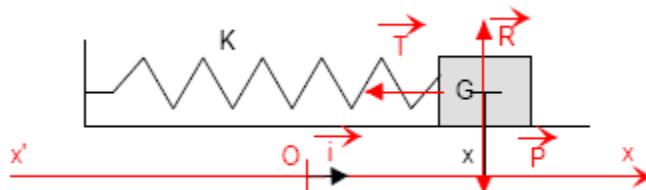
## I. Généralités

- un mouvement périodique est un mouvement qui se répète de manière identique à des intervalles de temps réguliers.
- un mouvement oscillatoire est un mouvement périodique de va et de vient de part et d'autre d'une position d'équilibre.
- la période est la durée d'une oscillation complète.
- les oscillations sont dites libres lorsque le système une fois, le système, écarté de sa position d'équilibre est abandonné à lui-même.
- s'il n'existe aucune force de frottement (énergie mécanique E constante:  $\Delta E=0$ ) les oscillations ne sont pas amorties et le mouvement continu indéfiniment.
- s'il existe des forces de frottement le système perd de l'énergie mécanique ( $\Delta E=W(\vec{f})$ ) les oscillations sont progressivement amorties et le système finit par s'arrêter.

## II. Oscillateurs en translation

### 1. PENDULE ELASTIQUE HORIZONTAL

On suppose que la masse  $m$  glissant sans frottement sur un plan horizontal est reliée à l'une des extrémités d'un ressort de raideur  $k$ , l'autre extrémité étant fixe. Soit le repère  $(G_o, \vec{i}, \vec{j})$ .



#### a) Équation différentielle du mouvement

Système : la masse  $m$

Référentiel : laboratoire

Bilan des forces :  $\vec{R}$ ,  $\vec{P}$  et  $\vec{T}$

Théorème du centre d'inertie :  $\vec{P} + \vec{T} + \vec{R} = m \vec{a}$

Projetons la relation vectorielle sur l'axe  $xx'$  :  $0 + 0 - T = m \ddot{x} \Rightarrow -kx = m \ddot{x}$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m} x = 0$$

$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$  est l'équation différentielle d'un mouvement harmonique.

b) Solution de l'équation différentielle

Posons  $\omega_0^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ . Cette équation a pour solution :  $x = x_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$ ;  $x_m > 0$  et  $\varphi \in [0; 2\pi[$  sont des constantes déterminées à partir des conditions initiales.  $\omega_0$  est la pulsation propre de l'oscillateur.

- preuve: On notera  $\ddot{x} = x''$  et  $\dot{x} = x'$

$$x = x_m \cos(\omega_0 t + \varphi); \dot{x} = -x_m \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi); \ddot{x} = -x_m \omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\text{Calculons } \ddot{x} + \frac{k}{m}x = -x_m \omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi) + \frac{k}{m}x_m \cos(\omega_0 t + \varphi) = 0 \text{ car } \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

$x = x_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$  est bien solution de l'équation différentielle.

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}: \text{pulsation propre}; T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}: \text{période propre}; f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}: \text{fréquence}$$

propre.

Application: Montrer que  $x(t) = x_m \sin(\omega_0 t + \varphi)$  est également solution de l'équation différentielle du mouvement

Remarque: l'amplitude des oscillations dépend des conditions initiales sur la vitesse et la position

$$\begin{cases} x(t) = X_m \cos(\omega_0 t + \varphi) \\ \dot{x}(t) = -\omega_0 X_m \sin(\omega_0 t + \varphi) \end{cases} \Rightarrow \text{à } t = 0 \begin{cases} x(0) = x_0 = X_m \cos \varphi \\ \dot{x}(0) = v_0 = -\omega_0 X_m \sin \varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_m \cos \varphi = x_0 \\ X_m \sin \varphi = -\frac{v_0}{\omega_0} \end{cases}$$

$$\text{Comme } (X_m \cos \varphi)^2 + (X_m \sin \varphi)^2 = X_m^2, \text{ on obtient : } X_m = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2}$$

c) Représentation graphique

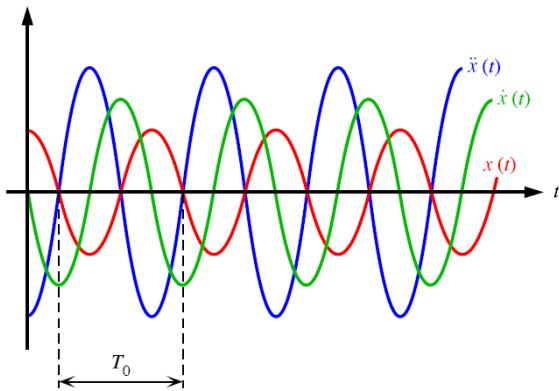
$$x = x_m \cos(\omega_0 t + \varphi);$$

$$\dot{x} = -x_m \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) = \omega_0 x_m \cos\left(\omega_0 t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \dot{x} \text{ est en avance de } \frac{\pi}{2} \text{ par rapport à } x \\ (\text{quadratures de phase})$$

$$\ddot{x} = -x_m \omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi) = -\omega_0^2 x \Rightarrow \ddot{x} \text{ et } x \text{ sont en opposition de phase.}$$

Les facteurs qui multiplient les fonctions trigonométriques sont les valeurs maximales de la vitesse  $v_{\max} = x_m \omega_0$  et de l'accélération  $a_{\max} = x_m \omega_0^2$





**d) étude énergétique**

$$\text{A un instant } t \text{ donné: } Em = Ec + Ep_e = \frac{1}{2}mx'^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

$$E = \frac{1}{2}m[-x_m\omega_0\sin(\omega_0t + \varphi)]^2 + \frac{1}{2}k[x_m\cos(\omega_0t + \varphi)]^2 = \frac{1}{2}kx_m^2$$

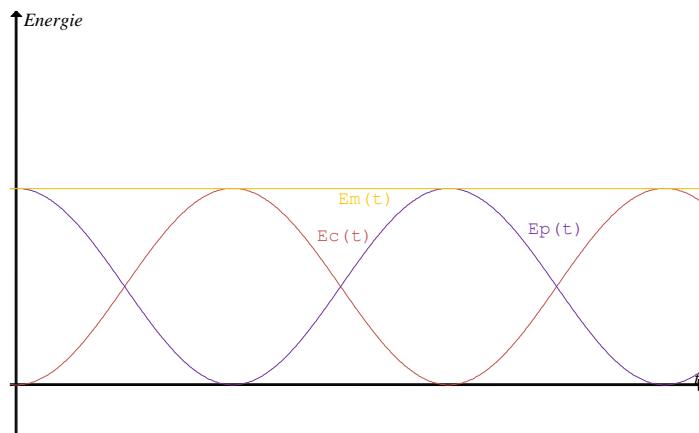
$$E = \frac{1}{2}kx_m^2 = \frac{1}{2}m\omega_0^2x_m^2 = \frac{1}{2}mv_m^2 \text{ avec } v_m = x_m\omega_0$$

Le système est conservatif car l'énergie mécanique est constante. Donnons une représentation graphiquement de  $Ep$ ,  $Ec$  et  $E$  dans le cas où  $x = x_m\cos\omega t$

$$Ep = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kx_m^2\cos^2\omega t = \frac{1}{4}kx_m^2(1 + \cos 2\omega t)$$

$$Ec = \frac{1}{2}mx'^2 = \frac{1}{2}m\omega^2x_m^2\sin^2\omega t = \frac{1}{4}kx_m^2(1 - \cos 2\omega t)$$

Les deux fonctions  $Ep$  et  $Ec$  sont périodiques de période  $\frac{\pi}{\omega} = \frac{T_0}{2}$ .



Au cours du mouvement, il y a échange mutuel et permanent des formes cinétique et potentielle de l'énergie.

$$\text{Réciproque: } E = \frac{1}{2}mx'^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

$$E = \text{cte} \Rightarrow \frac{dE}{dt} = 0 = mx''x' + kx'x = x'(mx'' + kx) = 0 \Rightarrow x \neq 0 \text{ donc } mx'' + kx = 0$$

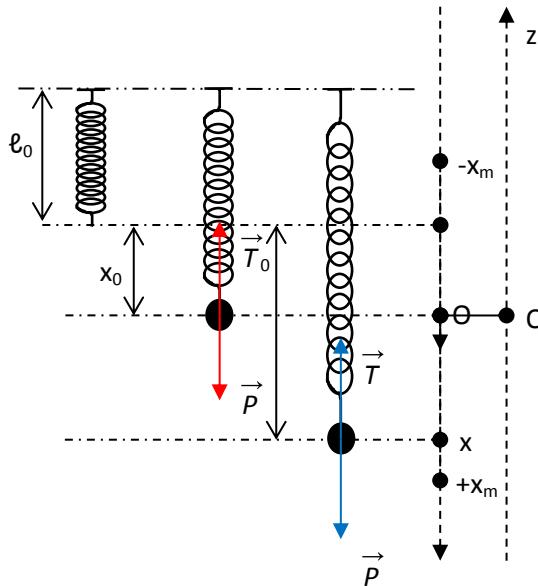
## 2. PENDULE ELASTIQUE VERTICAL

### a) équation différentielle

$$\text{A l'équilibre: } \vec{T}_0 + \vec{P} = \vec{0} \Rightarrow (\text{Ox}): -kx_0 + mg = 0 \quad (1)$$

$$\text{En mouvement: } \vec{T} + \vec{P} = m \vec{a} \Rightarrow (\text{Ox}): -k(x_0 + x) + mg = mx'' \quad (2)$$

$$(1) \text{ et } (2) \Rightarrow -kx = mx'' \Rightarrow \boxed{mx'' + kx = 0}$$



### b) étude énergétique

$$E = Ec + Ep_e + Ep_p = \frac{1}{2}mx'^2 + \frac{1}{2}k(x_0 + x)^2 - mgx$$

$$E = \frac{1}{2}mx'^2 + \frac{1}{2}k(x_0^2 + 2xx_0 + x^2) - mgx = \frac{1}{2}mx'^2 + \frac{1}{2}k(x_0^2 + x^2) + x(kx_0 - mg) \text{ or } -kx_0 + mg = 0$$

$$\text{d'où: } \boxed{E = \frac{1}{2}mx'^2 + \frac{1}{2}k(x_0^2 + x^2)}$$

Montrons que E est une constante

$$E = \frac{1}{2}mx_m^2\omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi) + \frac{1}{2}kx_0^2 + \frac{1}{2}kx_m^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi)$$



$$\Rightarrow E = \frac{1}{2}kx_m^2 + \frac{1}{2}kx_0^2 = cte$$

L'énergie mécanique se conserve: le système est conservatif.

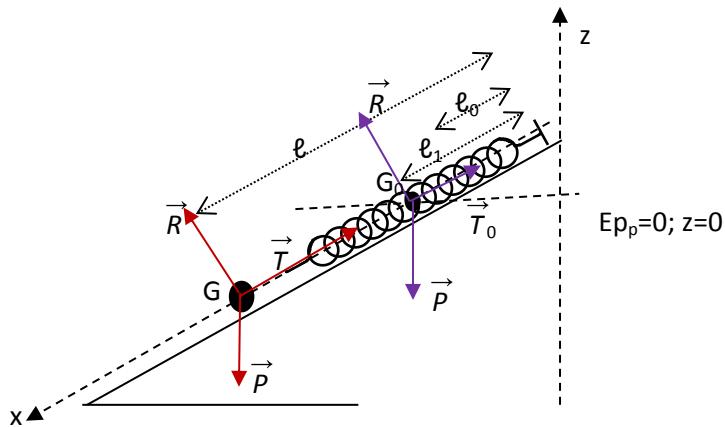
\*Réciproque:

$$E = \frac{1}{2}mx'^2 + \frac{1}{2}k(x_0^2 + x^2): E=cte \Rightarrow \frac{dE}{dt} = 0 \Rightarrow mx''x' + \frac{1}{2} \times 2xx' = x'(mx'' + kx) = 0; x' \neq 0 \text{ alors}$$

$$mx'' + kx = 0$$

### 3. PENDULE ELASTIQUE SUR UN PLAN INCLINÉ

#### a) étude dynamique



$$\text{A l'équilibre: } \vec{R} + \vec{P} + \vec{T}_0 = \vec{0} \Rightarrow G_0x: 0 + mg\sin\alpha - k(l_1 - l_0) = 0 \quad (1)$$

$$\text{En mouvement: } \vec{R} + \vec{P} + \vec{T} = m\vec{a} \Rightarrow (G_0x): 0 + mg\sin\alpha - k(l - l_0) = mx'' \quad (2)$$

Introduisons  $\ell_1$  dans l'expression (2):

$$mg\sin\alpha - k(\ell + \ell_1 - \ell_1 - \ell_0) = mx'' \Rightarrow mg\sin\alpha - k(\ell_1 - \ell_0) - k(\ell - \ell_1) = mx'' \Rightarrow mx'' + k(\ell - \ell_1) = 0$$

car  $mg\sin\alpha - k(\ell_1 - \ell_0) = 0$  d'après (1) d'où en posant  $x = (\ell - \ell_1)$ , on a:  $mx'' + kx = 0$

#### b) étude énergétique

$$E = \frac{1}{2}mx'^2 + \frac{1}{2}k(x + \ell_1 - \ell_0) - mgx\sin\alpha$$

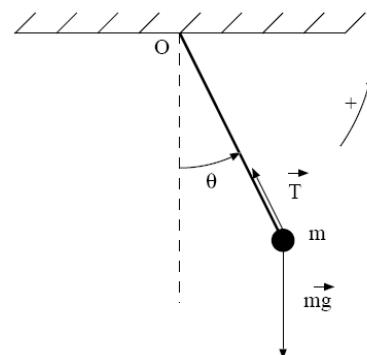
$$\frac{dE}{dt} = mx''x' + \frac{1}{2}k \times 2x'(x + \ell_1 - \ell_0) - mgx'\sin\alpha = x' [mx'' + kx + k(\ell_1 - \ell_0) - mg\sin\alpha] = 0$$

puisque  $+mg\sin\alpha - k(\ell_1 - \ell_0) = 0$  donc:  $mx'' + kx = 0$

### III. Oscillateurs en rotation

#### 1. PENDULE SIMPLE

Un pendule simple d'une longueur  $\ell$  est écarté de sa position d'équilibre d'un angle  $\theta_0$  puis abandonné à lui-même.



#### a) Application de la conservation de l'énergie mécanique

La position de (m) sur la verticale est prise pour origine:  $E_p=0$  et  $z=0$  (l'axe z est supposé ascendant). La masse m est repérée à un instant t par son abscisse angulaire  $\theta$  ou élongation.

$$E = Ec + Ep = \frac{1}{2}J\omega^2 + mg\ell(1-\cos\theta) = \frac{1}{2}\frac{v^2}{\ell^2} + mg\ell(1-\cos\theta)$$

$$v = \pm \ell\omega = \pm \ell \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow v^2 = \ell^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$$

$$E = \frac{1}{2} \frac{J}{\ell^2} \ell^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + mg\ell(1-\cos\theta) \Rightarrow E = \frac{1}{2} J \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + mg\ell(1-\cos\theta)$$

$E$  est une constante  $\frac{dE}{dt} = J\theta''\theta' + mg\ell\theta'\sin\theta = \theta'(J\theta'' + mg\ell\sin\theta) = 0 \Rightarrow J\theta'' + mg\ell\sin\theta = 0$

Pour de faible oscillations ( $\theta < 10^\circ$ ):  $\sin\theta \approx \tan\theta \approx \theta$  (en radian) d'où  $\boxed{\theta'' + \frac{mg\ell}{J}\theta = 0}$

On a:  $J = m\ell^2 \Rightarrow \theta'' + \frac{g}{\ell}\theta = 0 \Rightarrow \boxed{\theta'' + \omega_0^2\theta = 0}$  avec  $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$ . Par analogie cette équation a pour

solution:  $\boxed{\theta = \theta_m \cos\left(\sqrt{\frac{g}{\ell}}t + \varphi\right)}$

#### b) Application du théorème de l'accélération angulaire (S1)

TAA:  $\sum \mathcal{M}(\vec{F}) = J\theta'' \Rightarrow \mathcal{M}(\vec{T}) + \mathcal{M}(\vec{P}) = m\ell^2\theta'' \Rightarrow 0 - mg\ell\sin\theta = m\ell^2\theta''$

Pour  $\theta \leq 10^\circ$   $\boxed{\theta'' + \frac{g}{\ell}\theta = 0}$



## 2. PENDULE PESANT

G: centre d'inertie du solide

$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2} J \omega^2 + mgd(1 - \cos\theta)$$

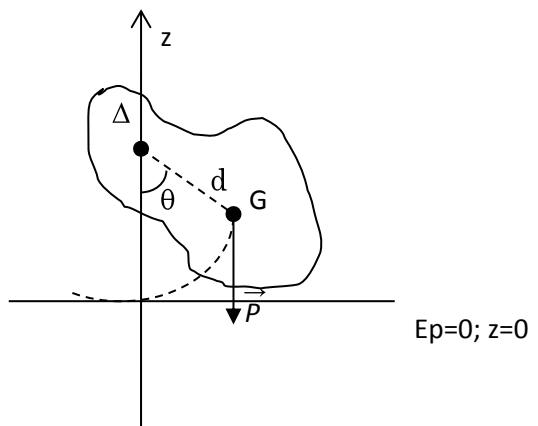
$$E = \frac{1}{2} J \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 + mgd(1 - \cos\theta)$$

$$E \text{ est une constante } \frac{dE}{dt} = J\theta''\theta' + mgd\theta'\sin\theta$$

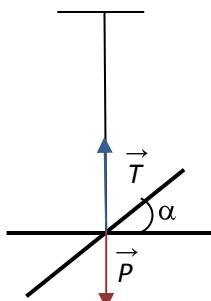
$$\frac{dE}{dt} = \theta'(J\theta'' + mgdsin\theta) = 0 \Rightarrow J\theta'' + mgdsin\theta = 0$$

Pour de faible oscillations ( $\theta < 10^\circ$ ):  $\sin\theta \approx \tan\theta \approx \theta$  (en

$$\text{radian}) \text{ d'où } \theta'' + \omega_0^2\theta = 0 \text{ avec } \omega_0^2 = \frac{mgd}{J}$$



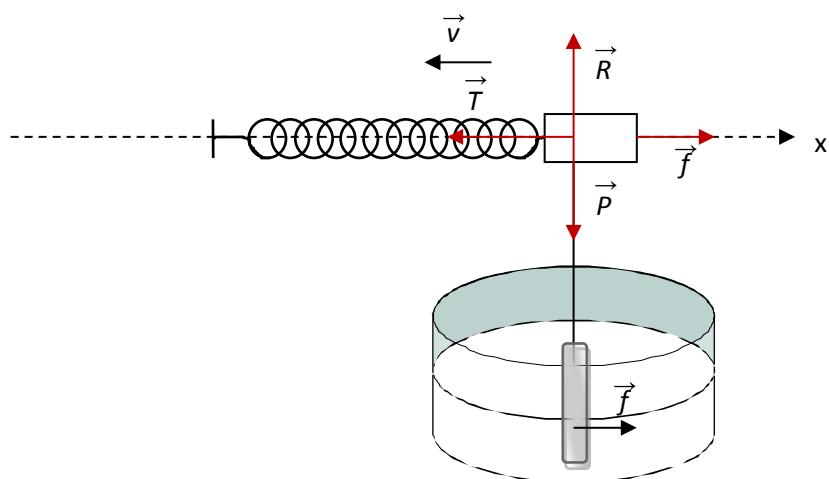
## 3. PENDULE DE TORSION



$$\text{TAA: } M(\vec{P}) + M(\vec{T}) + M(C) = J\alpha'' \Rightarrow 0 + 0 - C\alpha = J\alpha'' \text{ d'où } \alpha'' + \frac{C}{J}\alpha = 0$$

$$\boxed{\alpha'' + \omega_0^2\alpha = 0} \text{ avec } \omega_0 = \sqrt{\frac{C}{J}}$$

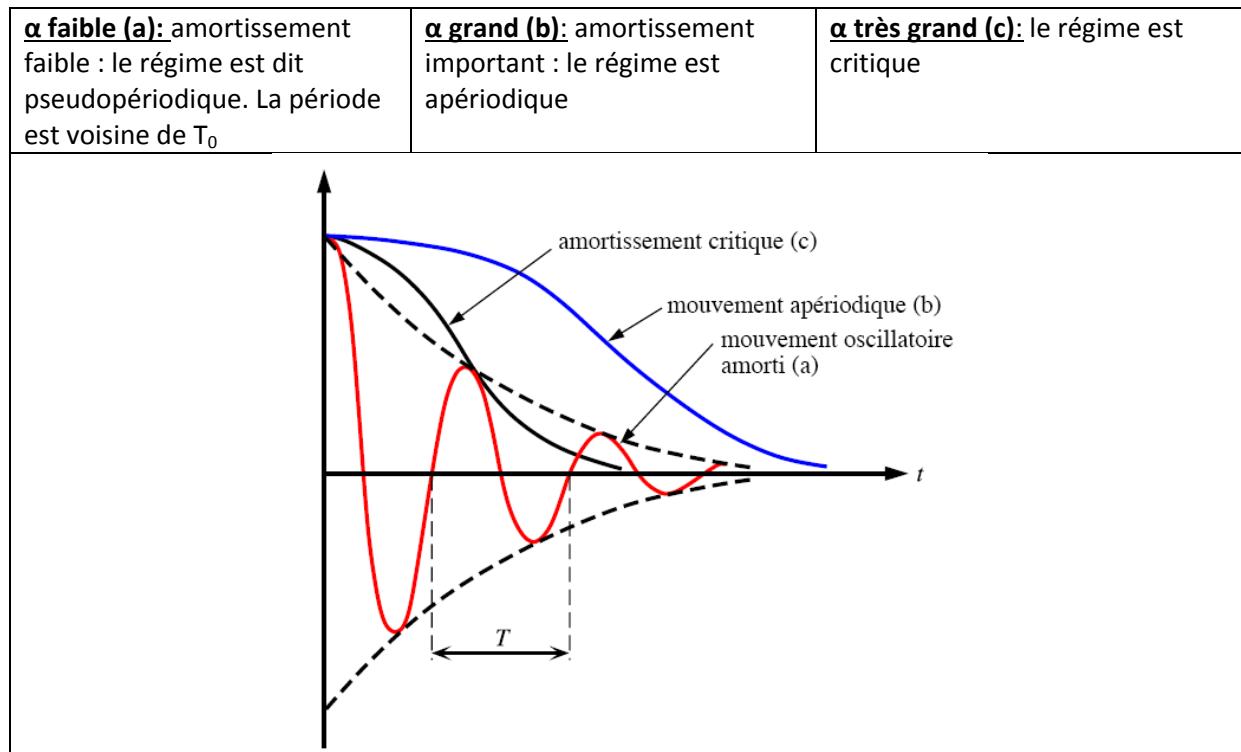
## IV. Oscillateurs mécaniques amortis



La force de frottement a pour expression  $\vec{f} = -\alpha \vec{V}$  (où  $\alpha$  est le coefficient de frottement).

$$\text{TCI: } \vec{R} + \vec{T} + \vec{P} + \vec{f} = m \vec{a} \Rightarrow -kx - \alpha v = mx'' \Rightarrow m \frac{d^2x}{dt^2} + \alpha \frac{dx}{dt} + kx = 0$$

système amorti. La courbe  $x=f(t)$  présente trois types suivant les valeurs de  $\alpha$ .



## V. Association de ressorts

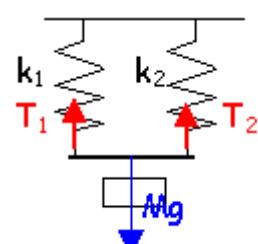
### 1. ASSOCIATION EN PARALLELE

Quel ressort unique est équivalent à ce dispositif (longueur initiale et raideur) ?

$l_0$  : longueur à vide du ressort 1

$l'_0$  : longueur à vide du ressort 2

$l$  longueur commune de chaque ressort



corrigé

$$T_1 = k_1(l - l_0); T_2 = k_2(l - l'_0);$$

$$\text{A l'équilibre : } Mg = k_1(l - l_0) + k_2(l - l'_0)$$

$$Mg = (k_1 + k_2)l - (k_1 l_0 + k_2 l'_0)$$

$$Mg = (k_1 + k_2)[l - (k_1 l_0 + k_2 l'_0) / (k_1 + k_2)]$$

raideur du ressort unique :  $k_1 + k_2$

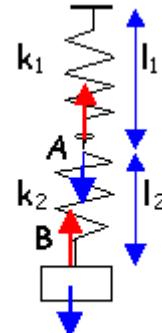
longueur à vide de ce ressort :  $(k_1 l_0 + k_2 l'_0) / (k_1 + k_2)$

si les deux ressorts sont identiques : 2 k et  $l_0$

## 2. ASSOCIATION EN SERIE

Quel ressort unique est équivalent à ce dispositif (longueur initiale et raideur) ?

$l_0$  : longueur à vide du ressort 1 ;  $l'_0$  : longueur à vide du ressort 2.



corrigé

en A point immobile et sans masse les deux tensions sont égales

$$T_1 = T_2 = k_1(l_1 - l_0) = k_2(l_2 - l'_0)$$

$$\text{en B : } Mg = k_2(l_2 - l'_0)$$

l'allongement du système est

$$\Delta l = (l_1 + l_2) - (l_0 + l'_0)$$

$$\Delta l = (l_2 - l'_0) + (l_1 - l_0) = (l_2 + l'_0) + \frac{k_2}{k_1}(l_2 - l'_0)$$

$$\Delta l = (l_2 - l'_0) [1 + \frac{k_2}{k_1}]$$

$$Mg = \frac{k_2}{[1 + \frac{k_2}{k_1}]} \Delta l$$

raideur du ressort unique :  $\frac{k_2}{[1 + \frac{k_2}{k_1}]} = k_1 k_2 / (k_1 + k_2)$

longueur à vide de ce ressort :  $l_0 + l'_0$

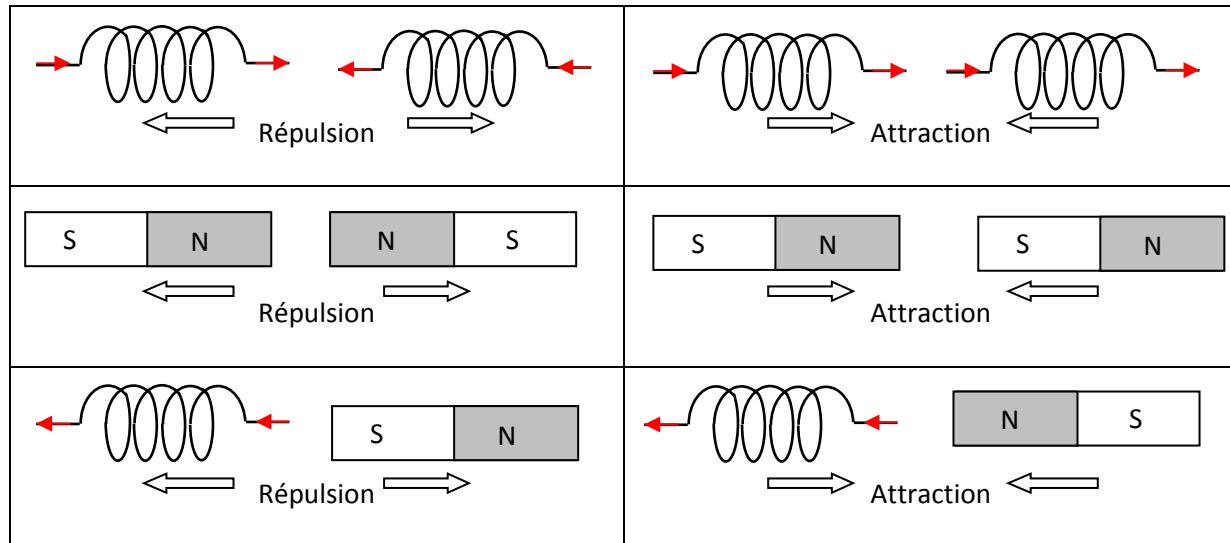
si les deux ressorts sont identiques : 0,5 k et  $2l_0$

# Généralités sur les champs magnétiques

## I. Interactions électromagnétiques

### 1. MISE EN EVIDENCE

Les bobines sont parcourues par des courants continus d'intensité I.



N: pôle nord et S: pôle sud

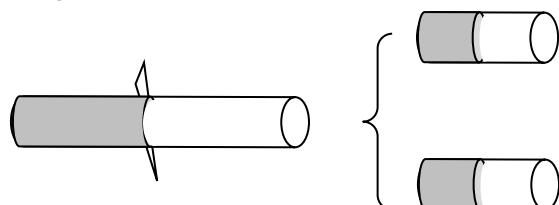
Les expériences montrent:

- des bobines parcourues par des courants de sens contraires se repoussent; elles s'attirent si les courants sont de même sens.
- des pôles d'aimant de même nom se repoussent et des pôles de noms différents s'attirent.

### 2. POLES D'UN AIMANT, FACES D'UNE BOBINE

L'action d'un pôle d'aimant sur une bobine dépend du sens du courant qui la parcourt. Les faces d'une bobine se comportent alors comme les pôles d'un aimant.

#### a. Expérience de l'aimant brisé



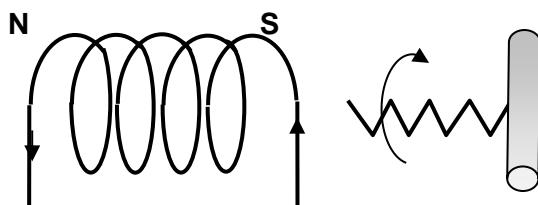
On ne peut pas séparer les deux pôles d'un aimant. En brisant un aimant, on obtient deux aimants ayant chacun un pôle Nord et un pôle Sud.

#### b. Faces d'une bobine

On détermine les noms des faces d'une bobine par les règles d'orientation selon le sens du courant.

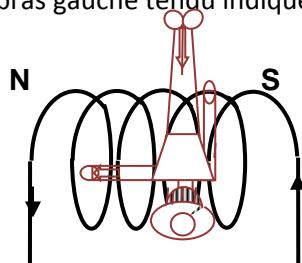
- Le tir bouchon

Lorsque le tir bouchon tourne dans le sens du courant, il progresse de la face Sud vers la face Nord à l'intérieur de la bobine.



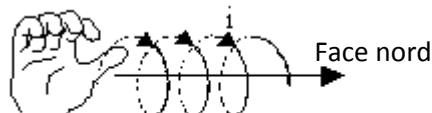
- Le bonhomme d'Ampère

Le bonhomme d'Ampère couché sur le fil regarde vers l'intérieur de la bobine. Le courant lui entre par les pieds et sort par la tête. Son bras gauche tendu indique la face Nord.



- La main droite

La main droite disposée dans le sens du courant, la paume tournée vers l'intérieur de la bobine et la face Nord est indiquée par le pouce.



## II. Champ magnétique

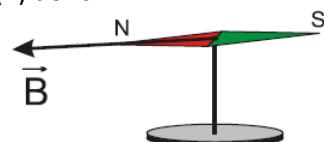
### 1. VECTEUR CHAMP MAGNETIQUE

Un aimant agit à distance sur un autre aimant: il modifie les propriétés de l'espace qui l'environne.

Nous dirons que l'espace environnant un aimant ou une bobine parcourue par un courant est le siège d'un champ magnétique.

Le champ magnétique en un point P est représenté par un vecteur noté  $\vec{B}(P)$  dont:

- Le point d'application est le point P
- La direction est celle de l'aiguille aimantée (boussole) placée en P
- Son sens est dirigé du pôle sud vers le pôle nord de l'aiguille aimantée.
- Sa norme peut être déterminée par le calcul ou par mesure à l'aide d'un teslamètre à sonde de Hall.



Remarque: l'unité du champ magnétique dans le SI est le tesla (symbole T)

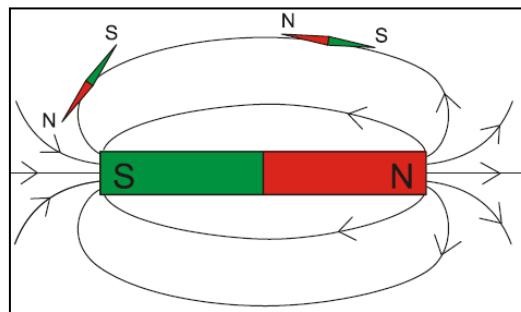
### 2. SPECTRES MAGNETIQUES

- Une ligne de champ est une courbe tangente en chacun de ses points avec le vecteur champ magnétique  $\vec{B}$ . Elle est orientée dans le sens de  $\vec{B}$ .
- Deux lignes de champ ne se coupent jamais parce qu'il n'existe qu'un seul vecteur champ magnétique en un point.
- L'ensemble des lignes de champ magnétique constitue le spectre du champ magnétique.



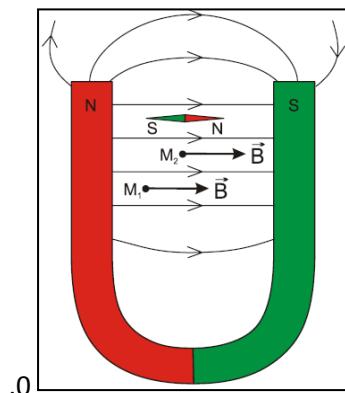
#### a. Spectre d'un champ magnétique créé par un aimant droit

- Près des pôles les lignes de champ sont resserrées: le champ y est plus intense.
- Les lignes de champ quittent le pôle nord pour converger vers le pôle sud.



#### b. Spectre d'un champ magnétique créé par un aimant en U

Entre les deux branches de l'aimant en U, les lignes de champ sont parallèles et de même sens. Dans cette région le champ magnétique est uniforme.

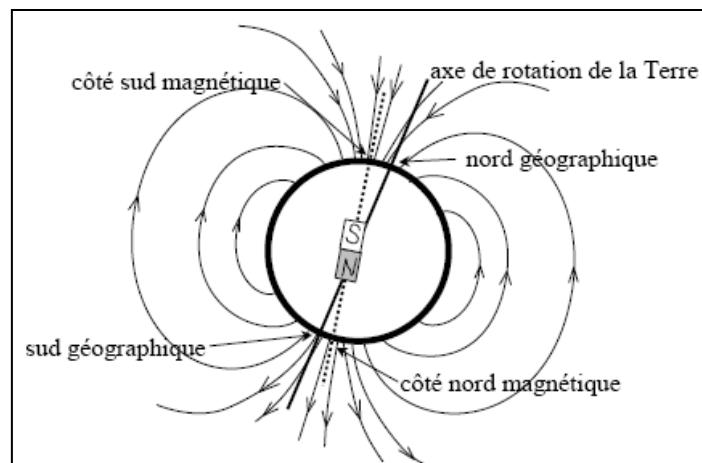


### 3. CHAMP MAGNETIQUE TERRESTRE

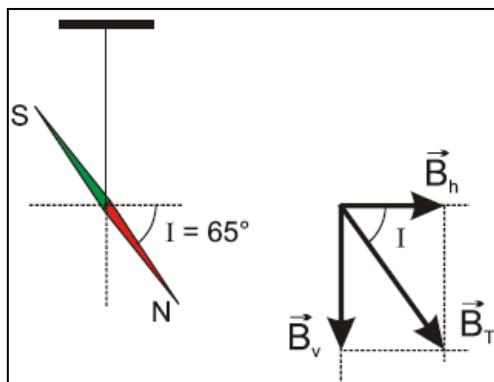
Plaçons plusieurs boussoles (ou aiguilles aimantées) dans une région de l'espace loin de toute source apparente de champ magnétique. Nous constatons qu'elles s'orientent toutes suivant la même direction. Cette direction particulière est due à la présence dans l'espace d'un champ magnétique: c'est le champ magnétique terrestre  $\vec{B}_T$ .



Le champ magnétique terrestre peut-être considéré comme le champ créé par un aimant droit placé au centre de la Terre (en réalité, la magnétosphère est déformée par le vent solaire).



- Le méridien géographique est le plan vertical qui contient le point considéré et l'axe nord sud des pôles.
- Le plan du méridien magnétique est le plan vertical contenant la direction du champ magnétique du point considéré.
- L'angle formé par les deux plans s'appelle la déclinaison ( $D$ ).
- L'angle que fait  $\vec{B}_T$  et l'horizontal du point considéré est appelé inclinaison ( $i$ ).



Le champ magnétique terrestre est la résultante de deux composantes:

- $\vec{B}_H$ : composante horizontale du champ magnétique terrestre au point M.
- $\vec{B}_V$ : composante verticale du champ magnétique terrestre au point M.

$$\vec{B} = \vec{B}_H + \vec{B}_V$$

Exemple: à Paris  $i = 65^\circ$  et  $B = 4,7 \cdot 10^{-5} T$ .

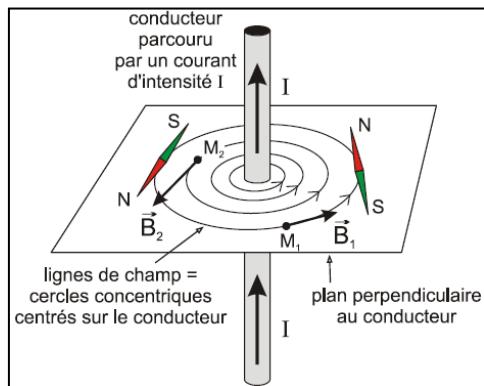
$$\begin{aligned} B_H &= B \cos(i) \Rightarrow B_H = 4,7 \cdot 10^{-5} \cdot \cos(65^\circ) \\ &\Rightarrow B_H = 2,0 \cdot 10^{-5} T \end{aligned}$$

Remarque: le champ magnétique terrestre se superpose toujours aux champs créés par les autres sources (aimants, courant) devant lesquels il est d'ailleurs souvent négligeable.

#### 4. CHAMPS CREEES PAR LES COURANTS

##### a. Conducteur rectiligne parcouru par un courant

- Les lignes de champ sont des cercles concentriques
- Les caractéristiques du champ créé en un point  $M_1$  appartenant au plan  $\pi$  sont les suivantes:



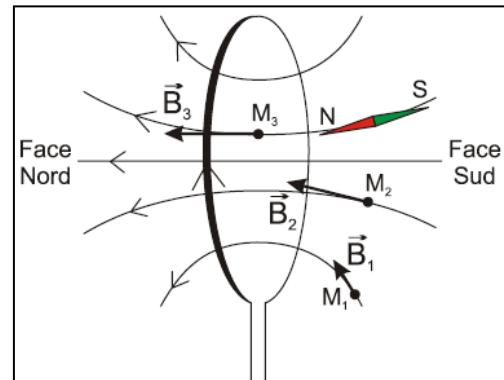
- Direction: celle de la tangente en  $M_1$  à la ligne de champ
- Sens: son sens est donné par plusieurs règles parmi lesquelles le bonhomme d'Ampère (le bras gauche indique le sens de  $\vec{B}$ ) et la main droite (la paume tournée vers le point où on veut définir le champ, le pouce indique le sens de  $\vec{B}$ ).
- Norme: on a montré qu'en se plaçant à la distance  $d$  d'un conducteur rectiligne parcouru par un courant  $I$ , le champ magnétique vaut

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi d} \quad (\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ SI: perméabilité du vide})$$

##### b. Bobine plate

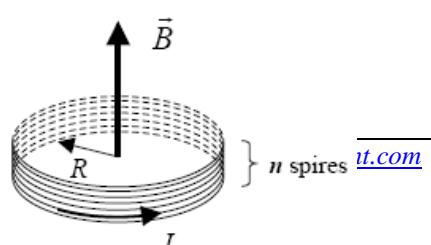
- Les lignes de champ appartiennent au plan  $\pi$  perpendiculaire à la bobine.
- Le sens de  $\vec{B}$  est donné par la règle du bonhomme d'Ampère (un bonhomme d'Ampère placé sur la bobine, le courant entrant par ses pieds et sortant par sa tête, indique le sens du champ magnétique par son bras gauche lorsqu'il regarde le centre de la bobine) ou de la main droite.
- Au centre de la bobine, l'intensité de  $\vec{B}$  est égale à:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2 R}, \quad R \text{ rayon de la bobine.}$$



Remarque: si la bobine comprend  $n$  spires (enroulements):

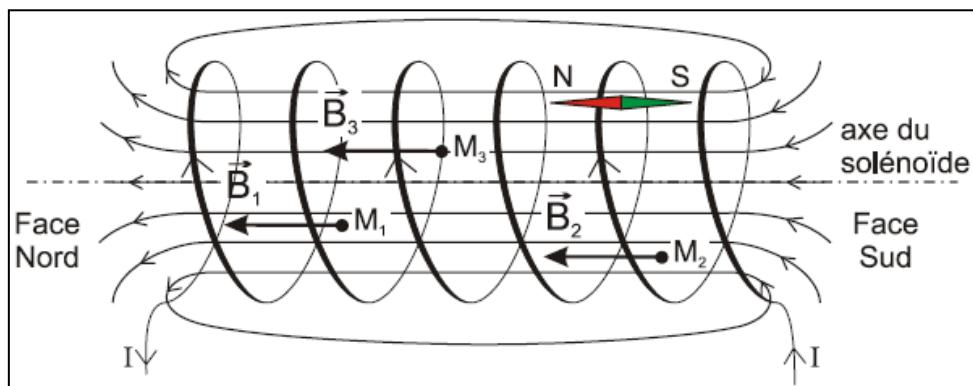
$$B = \frac{\mu_0 n I}{2R}$$



### c. Champ magnétique créé par un solénoïde

Définition: Un solénoïde est une bobine longue dont sa longueur  $L$  est supérieure à dix fois son rayon  $r$  ( $L > 10r$ ).

Sens du champ: Un bonhomme d'Ampère placé sur les fils du solénoïde, le courant entrant par ses pieds et sortant par sa tête, indique le sens du champ magnétique par son bras gauche lorsqu'il regarde le centre du solénoïde.



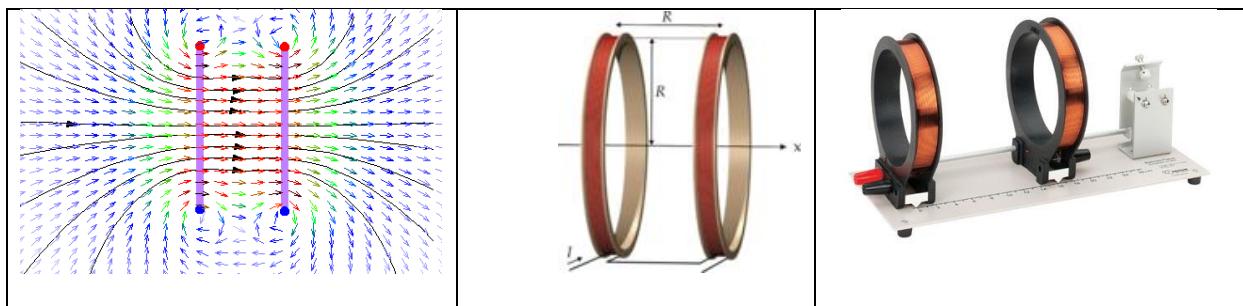
A l'intérieur d'un solénoïde long:

- Les lignes de champ sont parallèles (les vecteurs champs  $\vec{B}$  sont colinéaires et de même sens).
- Le champ magnétique conserve la même valeur, on dit qu'il est uniforme.
- L'intensité du champ magnétique  $B$  au centre d'une bobine longue de  $N$  spires, de longueur  $L$  parcourue par un courant  $I$  vaut : On pose  $n = \frac{N}{L}$

$$B = \mu_0 \cdot n \cdot I \quad \text{avec} \quad \left\{ \begin{array}{l} B: \text{Champ magnétique à l'intérieur du solénoïde en teslas (T).} \\ \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ S.I} \text{ (perméabilité magnétique du vide)} \\ n: \text{nombre de spires par mètre du solénoïde (spires.m}^{-1}\text{).} \\ I: \text{Intensité du courant circulant dans le solénoïde en ampères (A).} \end{array} \right.$$

### d. Bobines d'Helmholtz

Les bobines d'Helmholtz sont deux bobines plates, identiques, coaxiales, de même rayon séparées par une distance égale à leur rayon. Elles sont parcourues par le même courant dans le même sens. Elles créent un champ magnétique uniforme dans la région de l'espace comprise entre les deux bobines.



# Mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique uniforme

## I. Force magnétique

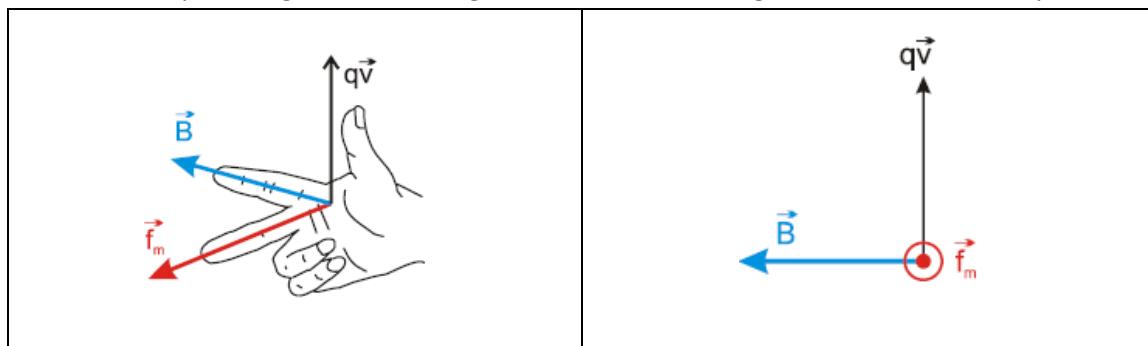
### 1. RELATION DE LORENTZ

Une charge  $q$  qui se déplace avec une vitesse  $\vec{v}$  dans un champ magnétique caractérisé par le vecteur  $\vec{B}$  subit une force magnétique appelée force de Lorentz  $\vec{F}$  donnée par : 
$$\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$$

Cette relation fait intervenir un opérateur mathématique appelé produit vectoriel (noté " $\wedge$ ").

### 2. CARACTERISTIQUES DE LA FORCE DE LORENTZ

- Point d'application: c'est la particule elle-même considérée comme ponctuelle
- Direction: perpendiculaire à  $q\vec{v}$  et à  $\vec{B}$ , donc au plan formé  $q\vec{v}$  et  $\vec{B}$
- Sens : déterminé par la règle des trois doigts de la main droite (règle d'orientation de l'espace)

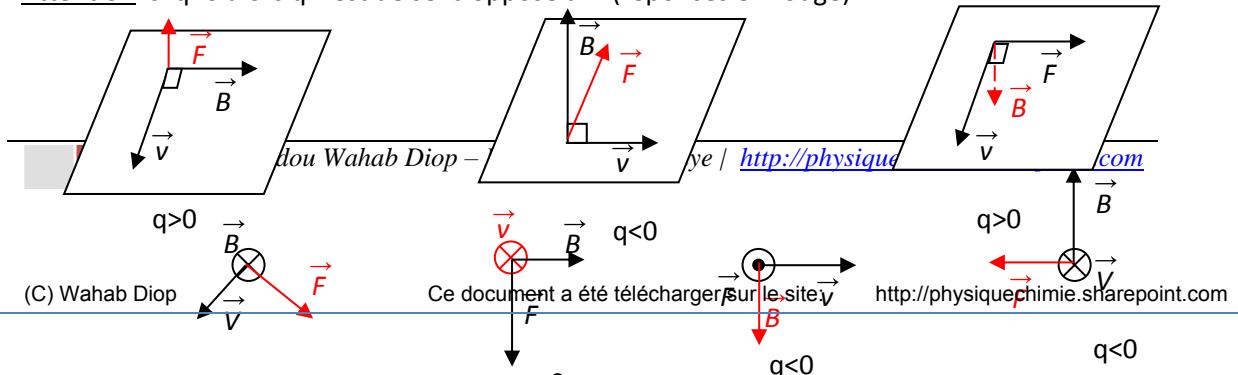


- Norme:  $F = |q\vec{v} \cdot \vec{B}| = |qvB \sin \alpha|$

### 3. APPLICATION

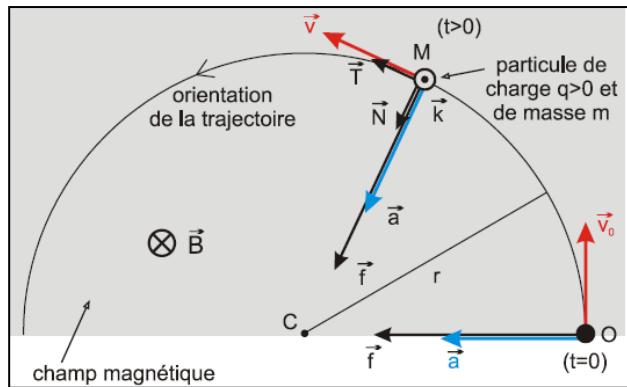
Représenter dans chaque cas, le vecteur manquant en respectant le type de représentation choisie.

Attention: si  $q < 0$  alors  $q\vec{v}$  est de sens opposé à  $\vec{v}$  (réponses en rouge)



## II. Étude théorique du mouvement dans le cas où la vitesse initiale est perpendiculaire au champ magnétique

Données: A l'instant initial une particule de masse  $m$  et de charge électrique  $q$  pénètre avec la vitesse  $\vec{v}_0$  dans une région de l'espace où règne un champ magnétique uniforme  $\vec{B}$ . On suppose que  $\vec{v}_0$  est perpendiculaire à  $\vec{B}$



### 1. EXPRESSION DE L'ACCELERATION

Système: particule chargée; référentiel: terrestre; BF:  $\vec{F}$  et  $\vec{P}$  (négligeable devant  $\vec{F}$ )

$$\text{TCI: } \vec{F} = m \vec{a} \Rightarrow q \vec{v} \wedge \vec{B} = m \vec{a} \Rightarrow \boxed{\vec{a} = \frac{q}{m} \vec{v} \wedge \vec{B}}$$

Remarque:  $\vec{a} \perp \vec{v}$  et  $\vec{a} \perp \vec{B}$ . Son sens dépend du signe de  $q$ .

### 2. NATURE DU MOUVEMENT

- Le mouvement est uniforme:

$$\vec{F} = q \vec{v} \wedge \vec{B} \Rightarrow \vec{F} \perp \vec{v} \Rightarrow \mathcal{P}(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \vec{v} = 0 \text{ or } \mathcal{P}(\vec{F}) = \frac{dEc}{dt} = 0 \Rightarrow Ec = \frac{1}{2}mv^2 = cte \Rightarrow v = v_0 = cte.$$

La vitesse  $v$  est égale à la vitesse  $v_0$  au point d'entrée dans le champ magnétique.

- Le mouvement est plan

$$\vec{a} \perp \vec{B} \Rightarrow a_k = 0 \Rightarrow v_k = cte = 0 \Rightarrow z = cte = z_0 = 0 \text{ (d'après les conditions initiales)} \Rightarrow z = 0.$$

Au cours du mouvement le vecteur  $\vec{v}$  reste dans le plan ( $\vec{N}, \vec{T}$ ): la trajectoire de la particule est située dans le plan orthogonal à  $\vec{B}$  passant par O et contenant  $\vec{v}_0$ .

- La trajectoire est circulaire

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} T + \frac{\vec{v}^2}{\rho} \vec{N}, \text{ la vitesse est constante donc } \frac{d\vec{v}}{dt} = 0 \text{ d'où } \vec{a} = \frac{\vec{v}^2}{\rho} \vec{N}$$

$$\vec{a} = \frac{q}{m} \vec{v} \wedge \vec{B} = \frac{v^2}{\rho} \vec{N} \Rightarrow \frac{|q|}{m} B v_0 = \frac{v_0^2}{\rho} \text{ d'où } \rho = \frac{mv_0}{|q|B} = cte = R \Rightarrow R = \frac{mv_0}{|q|B}$$

La trajectoire est curviligne et possède un rayon de courbure constant donc c'est un cercle.

- conclusion:

Une particule chargée entrant dans un champ magnétique avec une vitesse perpendiculaire au champ décrit un mouvement circulaire et uniforme dans un plan perpendiculaire au champ.

Le rayon de la trajectoire est donné par l'expression:  $R = \frac{mv_0}{|q|B}$

### 3. VITESSE LINÉAIRE, VITESSE ANGULAIRE, PÉRIODE, FREQUENCE

- La vitesse linéaire de la particule est:  $v = |q| \frac{BR}{m}$
- La vitesse angulaire est reliée à la vitesse linéaire par  $\omega = \frac{v}{r} \Rightarrow \omega = \frac{|q|B}{m}$
- La période est reliée à la vitesse angulaire par  $T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow T = 2\pi \frac{m}{|q|B}$
- La fréquence est reliée à la période par  $f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi} \frac{|q|B}{m}$

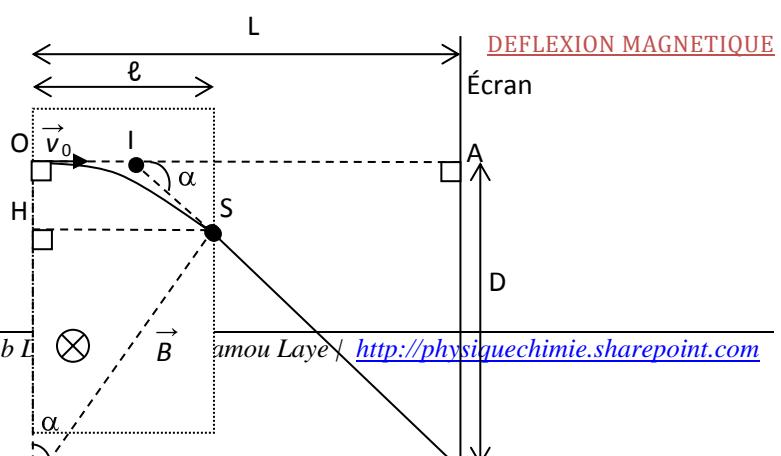
Les expressions montrent que  $\omega$ ,  $T$  et  $f$  sont indépendants du rayon  $r$  et de la vitesse  $v$ .

### 4. REMARQUES IMPORTANTES

- La force de Lorentz  $\vec{F}$  est centripète. C'est elle qui est à l'origine du mouvement circulaire et uniforme !
- Si  $\vec{v}_0$  est parallèle à  $\vec{B}$ , la force de Lorentz est nulle et la particule décrit un mouvement rectiligne et uniforme à travers le champ (Newton I).
- Si l'angle entre  $\vec{v}_0$  et  $\vec{B}$  est différent de  $0^\circ$  et de  $90^\circ$ , la particule décrit un mouvement uniforme hélicoïdal (trajectoire = hélice).

## III. Applications pratiques

### 1. ÉTUDE DE LA



Serigne Abdou Wahab Diop amou Laye <http://physiquechimie.sharepoint.com>

$\ell \ll L$  et  $\alpha$  très petit. En absence de champ les particules arrivent en A. Étudions la déflexion D.

$\alpha = (\overrightarrow{CO}, \overrightarrow{CS}) = (\overrightarrow{IA'}, \overrightarrow{IA})$  sont deux angles à côtés  $\perp$

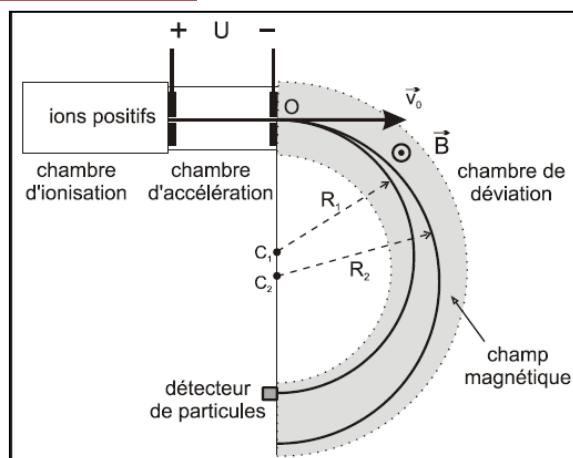
Pour le triangle HCS:  $\sin \alpha = \frac{HS}{CS} = \frac{\ell}{R}$ . Pour le triangle A'IA:  $\tan \alpha = \frac{AA'}{IA} = \frac{D}{IA}$

Première approximation:  $\ell \ll L \Rightarrow IA \approx OA = L$ ; 2<sup>e</sup> approximation:  $\alpha \leq 10^\circ \Rightarrow \alpha(\text{rad}) \approx \sin \alpha \approx \tan \alpha$

$$\text{Donc } \frac{\ell}{R} = \frac{D}{L} \Rightarrow D = \frac{\ell L}{R} \text{ or } R = \frac{mv_0}{|q|B} \text{ d'où } D = \frac{|q|}{m} \times \frac{\ell LB}{v_0}$$

La mesure de la déflexion D permet de calculer la charge massique  $\frac{q}{m}$ .

## 2. SPECTROGRAPHE DE MASSE



Chambres d'ionisation: On y produit des ions de même charge  $q$  mais de masses  $m_1$  et  $m_2$  différentes.

Chambre d'accélération: A travers une première fente, les ions pénètrent dans cette chambre avec une vitesse négligeable. Ils sont accélérés par la tension  $U > 0$  et sortent avec une vitesse

$$v_0 = \sqrt{(2|q|) \frac{U}{m}}$$

Chambre de déviation: Les ions sont déviés par un champ magnétique  $\vec{B}$  et ont pour trajectoire des demi-cercles dont les rayons  $R_1$  et  $R_2$  dépendent des masses  $m_1$  et  $m_2$ .

$$\text{L'expression de } R \text{ et de } v_0 \Rightarrow R_1 = \frac{1}{B} \sqrt{\frac{2Um_1}{|q|}} \text{ et } R_2 = \frac{1}{B} \sqrt{\frac{2Um_2}{|q|}}$$

Le rayon de la trajectoire augmente avec la masse.

On arrive ainsi à recueillir sur le détecteur des particules de même masse ; la position du détecteur permet de déterminer le rayon R de la trajectoire. Connaissant la charge q, on détermine la masse m de la particule.

$C_1C_2$  est la distance entre les deux points d'impact:  $C_1C_2 = 2R_2 - 2R_1 = \sqrt{\frac{8U}{|q|B^2}} (\sqrt{m_2} - \sqrt{m_1})$

### 3. FILTRE DE VITESSE

#### Étude d'un exemple:

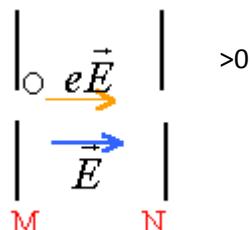
Une chambre d'ionisation produit des ions  $^{20}\text{Ne}^+$  et  $^{22}\text{Ne}^+$  de masses respectives  $m_1$  et  $m_2$ . Le poids est négligeable devant les forces électromagnétiques et leur mouvement a eu lieu dans le vide.

Les ions pénètrent avec une vitesse initiale négligeable dans un accélérateur où ils sont soumis à un champ électrique uniforme créé par une tension  $U_0 = V_M - V_N$  établie entre deux plaques conductrices M et N. On désigne par  $v_1$  et  $v_2$  les vitesses des ions  $^{20}\text{Ne}^+$  et  $^{22}\text{Ne}^+$  lors du passage en O<sub>1</sub>. Charge élémentaire  $e=1,6 \cdot 10^{-19}$  C.

- Représenter sur un schéma le vecteur champ électrique et donner le signe de  $U_0$ . Justifier.
- Exprimer la vitesse de l'ion  $^{20}\text{Ne}^+$  à la sortie de l'accélérateur en fonction de sa masse et de  $U_0$ .
- Calculer cette vitesse si la valeur absolue de la tension vaut  $2 \cdot 10^4$  V; masse atomique molaire de l'ion  $^{20}\text{Ne}^+ = 0,02 \text{ kg mol}^{-1}$ ; nombre d'Avogadro =  $6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ .
- Montrer qu'en O<sub>1</sub>:  $m_1 v_1^2 = m_2 v_2^2$ ; en déduire la valeur de  $v_2$ . Masse atomique molaire de l'ion  $^{22}\text{Ne}^+ = 0,022 \text{ kg mol}^{-1}$ .
- Au delà de O<sub>1</sub> les ions entrent dans un sélecteur de vitesse limité par les plaques P et Q. Dans cette région ils sont soumis simultanément à un champ électrique uniforme créé par une tension positive  $U = V_Q - V_P$  et à un champ magnétique perpendiculaire aux vecteurs vitesses et au champ électrique. Représenter les champs sur un schéma afin que les forces électriques et magnétiques soient opposées.
- On règle la tension U de telle façon que le mouvement des ions  $^{20}\text{Ne}^+$  soit rectiligne et uniforme de trajectoire O<sub>1</sub>O<sub>2</sub>. Représenter les forces qui agissent sur l'autre ion  $^{22}\text{Ne}^+$  ainsi que le vecteur vitesse  $v_1$ .
- Exprimer U en fonction de  $v_1$ , d (distance des plaques P et Q) et du champ magnétique. Calculer U si  $B=0,1 \text{ T}$  et  $d=5 \text{ cm}$ .
- Dans quelle direction seront déviés les ions  $^{22}\text{Ne}^+$ . Justifier le nom "filtre de vitesse" donné à la région limitée par P et Q.

#### Résolution

- Entre O et O<sub>1</sub> les ions sont accélérés : seule la force électrique travaille, donc son travail est moteur :  $q U_{MN} > 0$ . La charge q est positive donc  $U_{MN}$  soit  $V_M > V_N$ . Le champ électrique pointe vers le plus petit potentiel donc vers N.
- le théorème de l'énergie cinétique s'écrit entre M et N:

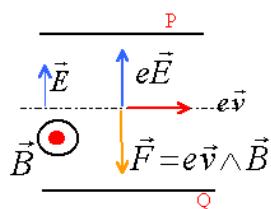


$$0,5 m_1 v_1^2 = e U_0 \Rightarrow v_1^2 = \frac{2 e U_0}{m_1}$$

- c) calculer la masse en kg :  $\frac{0,02}{6,02 \cdot 10^{-23}} = 3,322 \cdot 10^{-26} \text{ kg} \Rightarrow$   
 $v_1^2 = 2 \times 1,6 \cdot 10^{-19} \times 2 \cdot 10^4 / 3,322 \cdot 10^{-26} = 1,928 \cdot 10^{11} \Rightarrow v_1 = 4,39 \cdot 10^5 \text{ m s}^{-1}$ .
- d) même travail pour l'autre ion :  $0,5 m_2 v_2^2 = e U_0 \Rightarrow m_2 v_2^2 = m_1 v_1^2 = 2 e U_0$

$$v_2^2 = m_1 / m_2 v_1^2 \text{ d'où } v_2 = 4,186 \cdot 10^5 \text{ m s}^{-1}$$

- e) représentation



- f) La tension  $U_{QP}$  est positive : le champ électrique pointe vers le plus petit potentiel soit vers P. La charge q est positive, alors la force électrique a le sens du champ électrique. La force magnétique opposée (mouvement uniforme) à la force électrique pointe vers Q. Le vecteur charge fois vitesse pointe vers la droite. La règle de la main droite donne le sens du champ magnétique.
- g) Le mouvement de l'ion  $^{20}\text{Ne}^+$  étant rectiligne uniforme, la somme des forces est nulle. La norme des forces est égale:  $\Rightarrow eE = ev_1B$  ou  $E = U/d = v_1B$  soit  $U = d v_1 B$

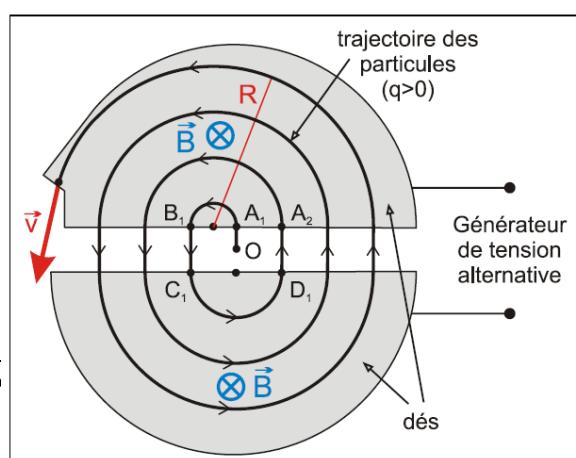
$$U = 0,05 \cdot 4,39 \cdot 10^5 \cdot 0,1 = 2195 \text{ V}$$

- h) mouvement de l'ion  $^{22}\text{Ne}^+$ : la force électrique ne dépend que de la charge et de la tension U, elle n'est pas modifiée. La force magnétique est proportionnelle à la vitesse de l'ion : or cet ion plus massif a une vitesse plus faible que  $v_1$ . La force magnétique sera plus petite que la force électrique. La somme des forces n'est pas nulle, elle est égale à une force verticale dirigée vers P, de norme constante. Le mouvement de cet ion  $^{22}\text{Ne}^+$  sera uniformément accéléré : la trajectoire sera un arc de parabole. Cet ion ne pourra pas sortir par le trou  $O_2$ , (tant qu'on ne modifie pas la tension U) il va heurter la paroi du sélecteur de vitesse. Seuls les ions  $^{20}\text{Ne}^+$  sortiront par le trou  $O_2$ .

#### 4. CYCLOTRON

Le principe du cyclotron a été découvert en 1929 par E. O. LAWRENCE aux USA. Un cyclotron est un accélérateur de particules chargées. Il comporte deux électrodes creuses (des demi-cylindres plats) en forme de la lettre "D", les "dee" (en anglais) ou "dés" (en français), entre lesquelles est appliquée une tension alternative haute fréquence. Les deux "dés" baignent dans un champ magnétique uniforme. En son centre (point O) se trouve une source qui fournit des ions, le plus souvent positifs : protons,

<http://physiquechimie.sharepoint.com> /Serigne Abd...



deutons (particules formées d'un proton et d'un neutron), particules alpha (particules formées par 2 protons et 2 neutrons), etc.....

Ces particules sont accélérées vers le "dé" supérieur, où elles arrivent en A<sub>1</sub> avec une vitesse v<sub>A1</sub>. Elles décrivent alors avec la vitesse v<sub>A1</sub> constante un demi-cercle. Au moment précis où elles s'apprêtent à sortir du dé (point B<sub>1</sub>), la tension appliquée entre les deux "dés" a changé de signe : les particules sont accélérées vers le "dé" inférieur (entre B<sub>1</sub> et C<sub>1</sub>) : sa nouvelle vitesse est v<sub>C1</sub> > v<sub>A1</sub>. Dans le "dé" inférieur les particules décrivent aussi un demi-cercle, de rayon supérieur au précédent, avec la vitesse v<sub>C1</sub> constante. Lorsqu'elles sortent (point D<sub>1</sub>) la polarité des "dés" a encore changé : les particules sont accélérées vers le "dé" supérieur (entre D<sub>1</sub> et A<sub>2</sub>) et entrent dans ce "dé" avec la vitesse v<sub>A2</sub> > v<sub>C1</sub>.

A chaque traversée de l'intervalle entre les "dés", la tension appliquée accélère les particules. Lorsque les particules sont à l'intérieur des "dés", elles décrivent des demi-cercles avec des vitesses de plus en plus grandes, et donc avec des rayons de plus en plus grands.

La durée de parcours des demi-cercles est constante et égale à la demi-période :  $\frac{T}{2} = \frac{\pi m}{|q|B}$ .

Après avoir tourné quelques centaines de tours, les particules arrivent à la périphérie des "dés" (rayon R) et sortent tangentiellement à la trajectoire avec la vitesse v. Elles peuvent alors être utilisées comme projectiles corpusculaires de haute énergie.

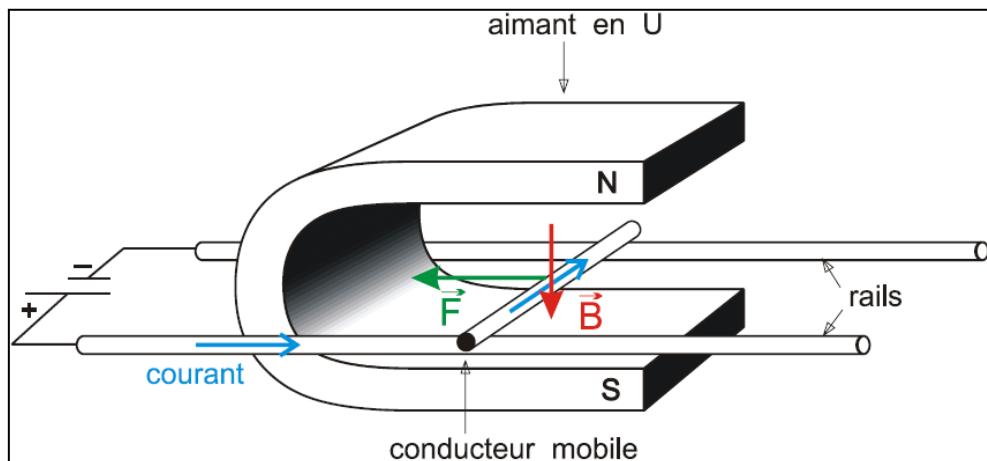
$$\text{Vitesse : } v = |q| \frac{BR}{m} \quad \text{Énergie cinétique des particules : } Ec = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} \frac{q^2 B^2 R^2}{m}$$

# Loi de Laplace

## I. Action d'un champ magnétique uniforme sur un élément de courant

### 1. ÉTUDE EXPERIMENTALE

#### a) Expérience des rails de Laplace

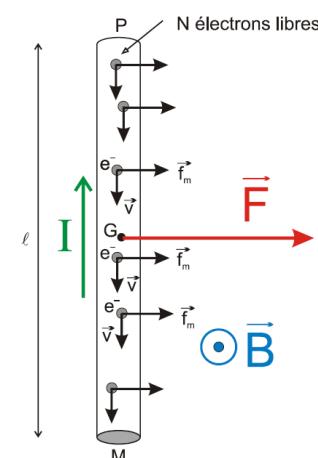


#### b) Observation

Lorsque le courant passe le conducteur mobile roule vers la gauche où vers la droite selon le sens du courant et selon le sens du champ magnétique.

#### c) Interprétation

Le passage du courant dans le conducteur est dû à un déplacement de porteurs de charge qui sont des électrons. Sur chaque électron s'exerce une force de Lorentz  $\vec{F} = q \vec{v} \wedge \vec{B}$ . Donc le conducteur est soumis à un ensemble de forces réparties dont la résultante est appelée force de Laplace.



### 2. LOI DE LAPLACE

#### a) Énoncé

Un conducteur rectiligne de longueur  $\ell$  parcouru par un courant d'intensité  $I$  placé dans un champ magnétique uniforme  $\vec{B}$  est soumis à la force de Laplace

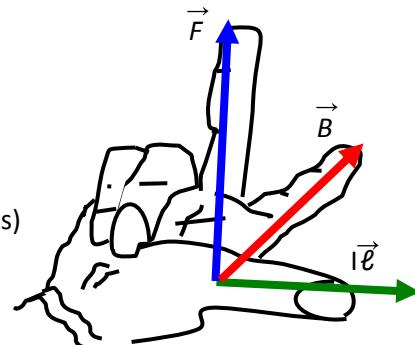
$$\vec{F} = I \vec{\ell} \wedge \vec{B}$$

Le sens de  $\vec{\ell}$  est celui du courant. La longueur  $\ell$  est la partie du conducteur qui est à la fois parcourue par le courant et plongée dans le champ magnétique  $\vec{B}$ ;

Remarque:  $\vec{F}_{\text{Laplace}} = \sum \vec{F}_{\text{Lorentz}} = \sum q \vec{v} \wedge \vec{B} = \sum q \frac{\partial \vec{\ell}}{\partial t} \wedge \vec{B} = \sum \delta I \vec{\delta \ell} \wedge \vec{B} = I \vec{\ell} \wedge \vec{B}$

### b) Caractéristiques de la force de Laplace

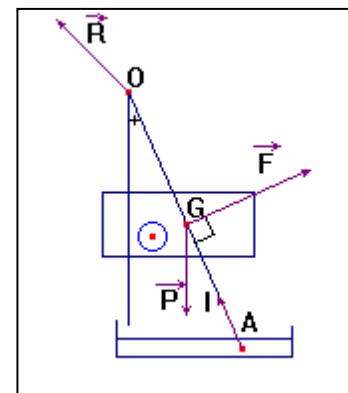
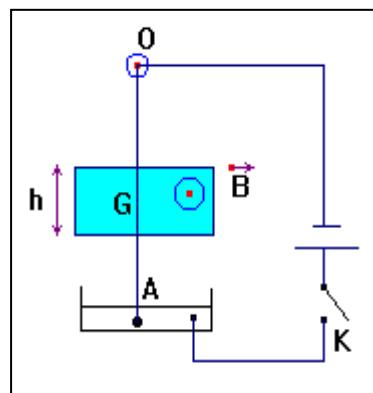
- direction:  $\vec{F} \perp (\vec{\ell}, \vec{B})$
- sens:  $(\vec{\ell}, \vec{B}, \vec{F})$  forme un trièdre direct (règle des trois doigts)
- norme:  $F = I \ell B |\sin \alpha|$  avec  $\alpha = (\vec{\ell}; \vec{B})$



### c) Exercice d'application

Une tige de cuivre OA, de masse  $m = 8,3 \text{ g}$ , homogène, de longueur  $L=30 \text{ cm}$ , peut se mouvoir dans un plan vertical autour de l'axe  $\Delta$  perpendiculaire au plan de la figure, passant par O. L'extrémité A plonge dans une cuve à mercure qui assure le contact électrique avec le reste du circuit. Sur une hauteur  $h = 3 \text{ cm}$ , la partie centrale de la tige est placée dans un champ magnétique  $\vec{B}$  uniforme et parallèle à  $\Delta$ , pointant vers le lecteur.

1. Que se passe-t-il quand l'interrupteur K est ouvert ?
2. Que se passe-t-il quand l'interrupteur K est fermé ?
3. Quand  $I=10\text{A}$ , la tige dévie de  $\theta = 5^\circ$  et reste en équilibre. Faire le schéma. En déduire la valeur de  $\vec{B}$ . Comment peut-on réaliser expérimentalement un tel champ magnétique ?



#### Résolution:

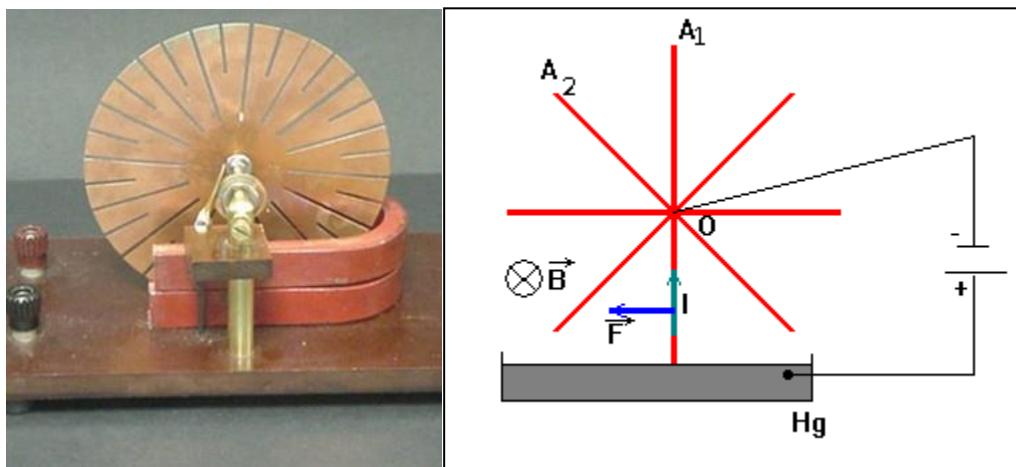
1. K ouvert :  $I = 0\text{A}$ . Puisque  $I=0$ , il n'y a pas de force de Laplace
2. K fermé :  $I \neq 0$  et circule de A vers O et la tige est déviée.

3.  $F = I\ell B$  avec  $\ell = \frac{h}{\cos\theta} \Rightarrow F = \frac{IhB}{\cos\theta}$ . La tige est en équilibre :  $\mathcal{M}(\vec{P}) + \mathcal{M}(\vec{R}) + \mathcal{M}(\vec{F}) = 0$
4.  $\frac{-mgL\sin\theta}{2} + \frac{FL}{2} = 0$  d'où  $F = mgsin\theta$  (1)

$$\frac{IhB}{\cos\theta} = mg \sin\theta \text{ d'où } B = \frac{mgsin2\theta}{2Ih} = 2,3 \cdot 10^{-2} \text{ T}$$

## II. Applications

### 1. ROUE DE BARLOW



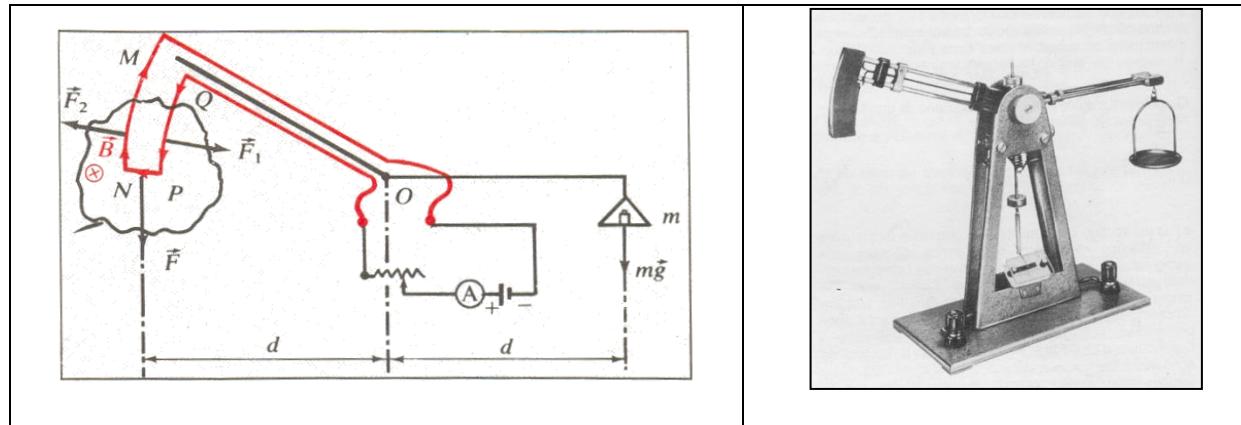
Une roue de rayon en cuivre de longueur  $\ell$  peut tourner autour d'un axe perpendiculaire au plan de la roue et passant par le point O. Ce dispositif placé dans un champ magnétique uniforme perpendiculaire au plan de la roue se met à tourner.

La roue tourne car lorsqu'un rayon parcouru par un courant entre dans l'espace où règne un champ magnétique, il est soumis à la force de Laplace  $\vec{F} (\perp \text{ au rayon et contenue dans le plan de la roue})$ . Cette force entraîne la roue et avant que ce rayon ne sorte du mercure, le rayon suivant pénètre dans celui-ci et subit à son tour la force de Laplace, ainsi de suite...

La puissance développée par la force électromagnétique est:

$$\mathcal{P}(\vec{F}) = \mathcal{M}(\vec{F}_\Delta) \times \omega \text{ or } F = I\ell B \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = IB\ell \text{ et } \mathcal{M}(\vec{F}_\Delta) = F \frac{\ell}{2} \Rightarrow \boxed{\mathcal{P}(\vec{F}) = I\ell^2 \frac{B}{2} \omega}$$

## 2. BALANCE DE COTTON



On pose  $NP=\ell$ . Une surcharge de masse  $m$  est placée dans une nacelle et déséquilibre la balance. Un courant de sens convenable est envoyé dans le conducteur MNPQ. On règle son intensité pour rétablir l'équilibre.

Compte tenu de la forme des conducteurs MN et PQ (arcs de cercle de centre O), les moments des forces  $\vec{F}_1$  et  $\vec{F}_2$  sont nuls. La condition d'équilibre s'écrit:

$$\mathcal{M}(\vec{R}) + \mathcal{M}(\vec{P_0}) + \mathcal{M}(\vec{F}) + \mathcal{M}(\vec{F_1}) + \mathcal{M}(\vec{F_2}) + \mathcal{M}(\vec{P}) = 0, \text{ soit } I\ell B d = mgd \text{ d'où } B = \frac{mg}{I\ell}$$

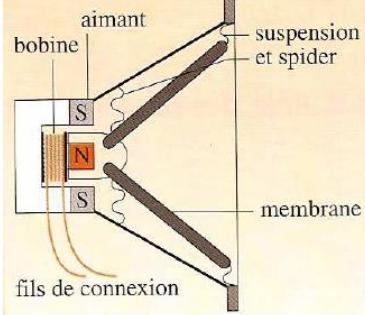
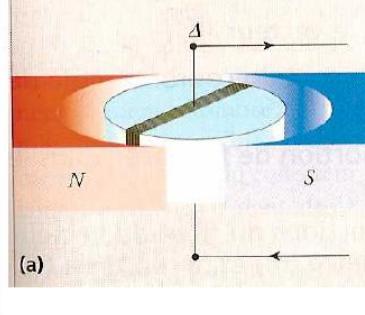
Remarque: la balance de Cotton permet de déterminer l'intensité du champ magnétique

## 3. HAUT PARLEUR ELECTRODYNAMIQUE

Le haut parleur est une bobine solidaire d'une membrane M, placé à l'intérieur d'un aimant particulier, cet aimant crée un champ magnétique uniforme  $\vec{B}$  et radial ( $\vec{B}$  parallèle au plan des spires). Lorsque la bobine est parcourue par un courant d'intensité I, chaque élément de longueur  $\partial\ell$  (assimilable à un segment de droite) appartenant à une spire subit la force de Laplace  $\partial\vec{F} = \partial\ell \wedge \vec{B}$  perpendiculairement au plan de la spire.

Suivant que le sens de I soit entrant ou sortant, la membrane M est attirée ou repoussée. Si I varie alternativement la membrane vibrera et émet un son de même fréquence que le courant alternatif.



Le haut parleur	Le moteur électrique
	

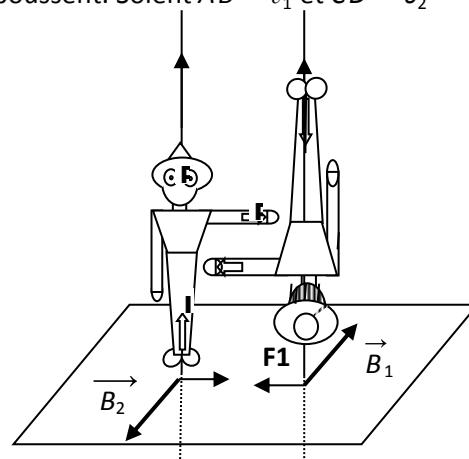
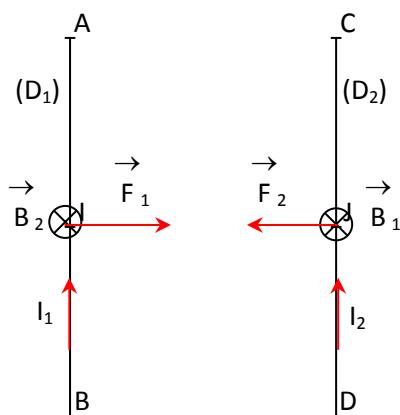
Le courant est alternatif, la bobine et donc la membrane, sont animées d'un mouvement vibratoire

Le rotor, constitué d'une bobine, s'oriente suivant le champ magnétique créé par un aimant fixe, le stator. Le courant change de sens dans le rotor à chaque demi-tour grâce à des balais et des collecteurs.

### III. Interaction entre deux courants rectilignes et parallèles

#### 1. EXPÉRIENCE

Si les courants qui parcourent les deux conducteurs sont dans le même sens, les conducteurs s'attirent et si les courants sont de sens contraires ils se repoussent. Soient  $AB = \ell_1$  et  $CD = \ell_2$



#### 2. INTERPRETATION

- Le courant  $I_1$  crée en tout point du conducteur  $CD$  un champ magnétique  $\vec{B}_1 \perp$  au plan formé par les deux conducteurs ( $B_1 = 2.10^{-7} \frac{I_1}{d}$ ).  $\vec{B}_1$  exerce en tout point du conducteur  $CD$  une force de Laplace dont la résultante s'applique en  $M_2$  milieu de  $CD$ .

$$\vec{F}_2 = I_2 \vec{\ell}_2 \wedge \vec{B}_1 \Rightarrow F_2 = I_2 \ell_2 B_1 = I_2 \ell_2 \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1}{d} \Rightarrow F_2 = \frac{\mu_0}{2\pi} I_1 I_2 \frac{\ell_2}{d}$$

- Un raisonnement analogue permet de déterminer la force qui s'exerce sur le conducteur  $AB$

$$\vec{F}_1 = I_1 \vec{\ell}_1 \wedge \vec{B}_2 \Rightarrow F_1 = I_1 \ell_1 B_2 = I_1 \ell_1 \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_2}{d} \Rightarrow F_1 = \frac{\mu_0}{2\pi} I_1 I_2 \frac{\ell_1}{d}$$

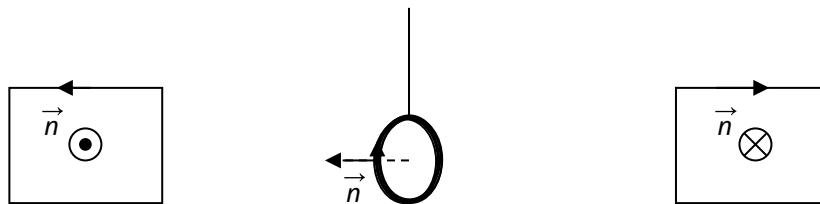
### 3. DEFINITION LEGALE DE L'AMPERE

L'Ampère est l'intensité du courant constant qui passant dans deux conducteurs rectilignes et parallèles de longueur infinie et de section constante, placés à 1 m l'un de l'autre dans le vide, produit entre ces conducteurs une force de  $2 \cdot 10^{-7}$  N par mètre de longueur.

## IV. Action d'un champ magnétique sur un cadre rectangulaire

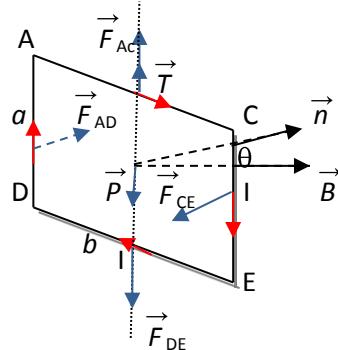
### 1. NORMALE AU PLAN D'UN CADRE

La normale au plan d'un cadre est le vecteur unitaire  $\vec{n}$  dont la direction est directement perpendiculaire au plan du cadre, son sens est donné par la main droite ou l'observateur d'Ampère.



### 2. FORCE DE LAPLACE S'EXERÇANT SUR UN CADRE

Considérons un cadre rectangulaire parcouru par un courant I dans un champ magnétique uniforme  $\vec{B}$



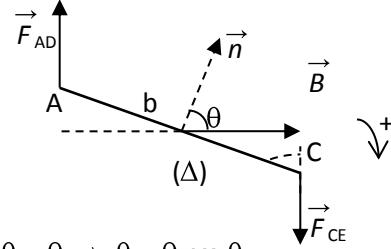
Soit  $AC = DE = b$  et  $AD = CE = a$ . On a:  $F_{AC} = F_{DE} = IbB$  et  $F_{AD} = F_{CE} = IabB$

### 3. MOMENT DES FORCES DE LAPLACE

- $\mathcal{M}(F_{AC}) = \mathcal{M}(F_{DE}) = 0$
- $\mathcal{M}(F_{AD}) = F_{AD} \times \frac{b}{2} \sin \theta = IabB \times \frac{b}{2} \sin \theta = \frac{IBS}{2} \sin \theta$  avec  $S=ab$ =surface du cadre et  $\theta = (\vec{B}; \vec{S})$  car  $\vec{S} = S\vec{n}$
- $\mathcal{M}(F_{CE}) = F_{CE} \times \frac{b}{2} \sin \theta = \frac{IBS}{2} \sin \theta$

### 4. POSITION D'EQUILIBRE DU CADRE

Condition d'équilibre:  $\sum \mathcal{M} = 0 \Rightarrow \sum \mathcal{M} = IBs \sin \theta = 0 \Rightarrow \sin \theta = 0 \Rightarrow \theta = 0$  ou  $\theta = \pi$



- $\theta=0$ ,  $\vec{B}$  et  $\vec{n}$  sont parallèles et de même sens: écarté de sa position d'équilibre le cadre tend à y revenir. On dit que l'équilibre est **stable**.
- $\theta=\pi$ ,  $\vec{B}$  et  $\vec{n}$  sont parallèles et de sens contraire: écarté de sa position d'équilibre le cadre s'en éloigne définitivement. On dit que l'équilibre est **instable**.

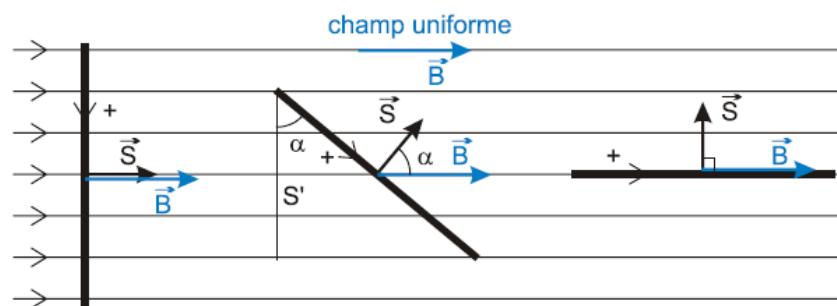
## V. Notion de flux magnétique

### 1. FLUX MAGNETIQUE A TRAVERS UN CONTOUR PLAN

Par définition, le flux magnétique à travers un contour délimité par une surface S est le nombre de lignes de champ magnétiques qui traverse ce contour fermé. Son expression est:

$$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = BS \times \cos\theta \text{ avec } \theta = (\vec{B}; \vec{S}) \text{ car } \vec{S} = S\vec{n}$$

Le flux magnétique s'exprime en Weber (symbole: Wb)



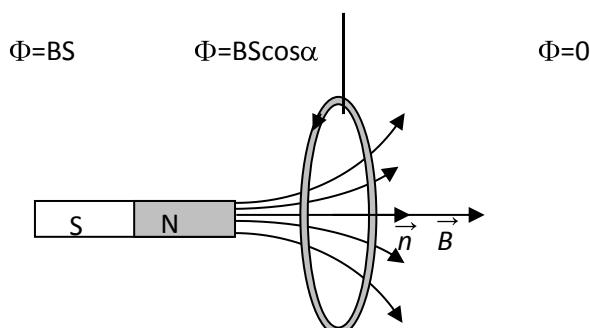
Remarque: si  $\vec{B} \parallel \vec{n}$  et de sens contraire:  $\Phi = -BS$

### 2. FLUX A TRAVERS UN CIRCUIT

Soit un circuit comportant N spires (cadre ou bobine) placé dans un champ magnétique uniforme  $\vec{B}$

$$\boxed{\Phi = NBS \times \cos\theta}$$

### 3. REGLE DU FLUX MAXIMAL

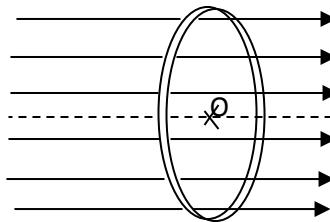


- Lorsqu'on approche le pôle nord d'un aimant de la face sud d'une bobine, elle s'emboîte sur l'aimant (attraction nord-sud)

- Lorsqu'on approche le pôle sud de l'aimant, la bobine est repoussée, elle retourne et revient en présentant sa face nord et s'emboîte dans l'aimant.
- On observe les mêmes faits si on inverse le sens du courant qui traverse la bobine.

Généralisation: règle du flux maximal

Un circuit plan, libre de se déplacer, placé dans un champ magnétique  $\vec{B}$  tant à se déplacer de façon que le flux magnétique qui le traverse soit maximal ( $\vec{B} \parallel \vec{n}$  et de même sens). Le sens du parcourt choisi étant celui du courant.



# Induction électromagnétique

## I. Rappels: algébrisation des grandeurs physiques (i et u)

### 1. CONVENTION RECEPTEUR

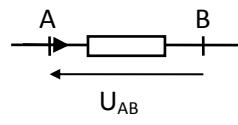
Soit un dipôle (AB) quelconque:

- Si  $i_{AB}>0$  alors  $u_{AB}$  ainsi représentée est positive
- Si  $i_{AB}<0 \Rightarrow u_{AB}<0$

Remarque: les flèches de i et de u sont opposées.

### 2. LOI D'OHM GENERALISEE

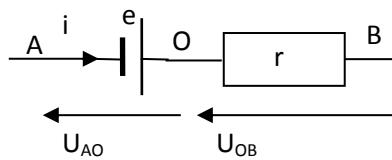
#### a) Conducteur ohmique



Pour un conducteur ohmique de résistance R:  $U = RI$

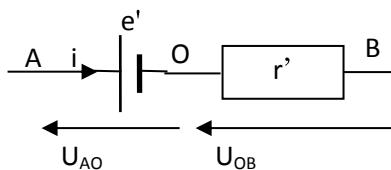
### b) Générateur

Un générateur peut être représenté par une f.e.m. et une résistance interne r.



$$u_{AB} = u_{AO} + u_{OB} = -e + ri \text{ donc la tension positive est } u = e - ri$$

### c) Récepteur actif ou générateur en opposition



$$u_{AB} = u_{AO} + u_{OB} = e' + r'i \Rightarrow u = r'i + e' \text{ où } e' \text{ est la f.c.é.m.}$$

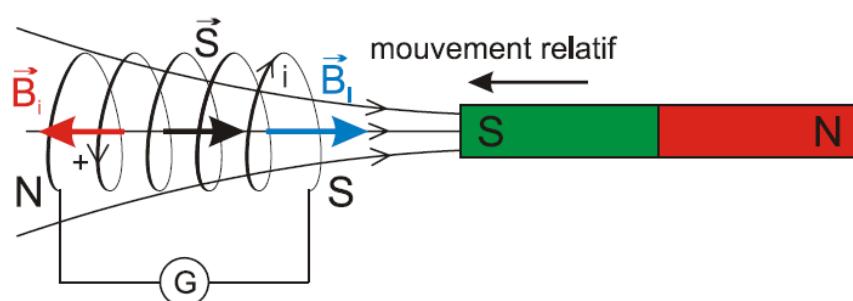
## II. Phénomène d'induction

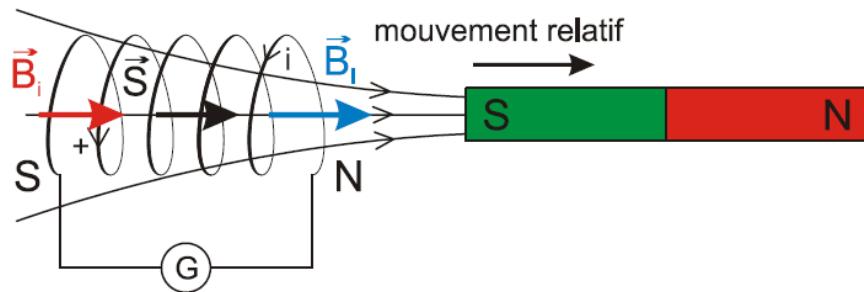
### 1. ÉTUDE EXPERIMENTALE

#### a) Expérience 1

- Bobine fixe, aimant mobile

Lorsqu'on approche l'aimant de la bobine, le galvanomètre indique le passage d'un courant qui s'annule dès que le déplacement cesse. Eloignons l'aimant de la bobine un courant circule dans celle-ci en sens inverse. L'intensité du courant est d'autant plus grande que le déplacement est plus rapide.



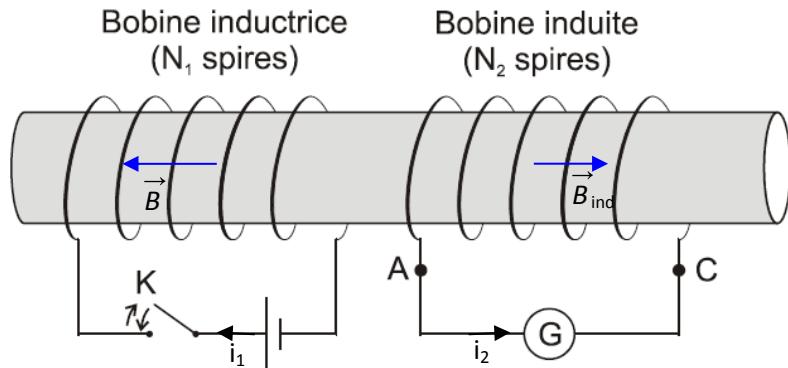


- Bobine mobile, aimant fixe

On observe les mêmes faits expérimentaux.

Le courant qui apparaît dans la bobine alors que le circuit ne comporte pas de générateur est le courant induit. La bobine dans laquelle circule le courant induit est l'induite. La source de champ magnétique (ici l'aimant) est l'inducteur. Ce phénomène est appelé induction électromagnétique.

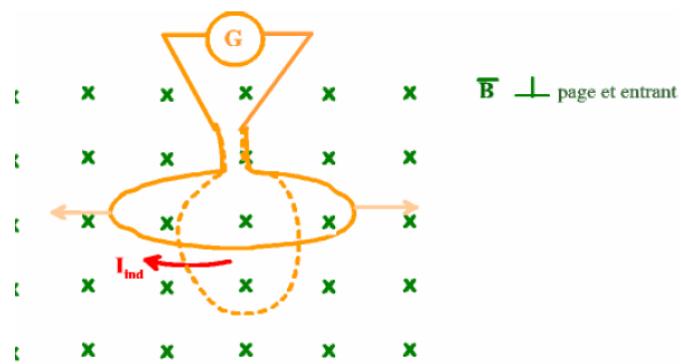
#### b) Expérience 2



- Fermons l'interrupteur K, l'établissement du courant  $i_1$  dans le solénoïde crée un courant induit  $i_2$  dans la bobine (car  $i_1$  varie de 0 à  $i_1$ ).  $i_2$  devient nulle dès que  $i_1$  est constant.
- Si nous ouvrons l'interrupteur K ( $i_1$  passe de  $i_1$  à 0), un courant  $i_2$  est créé dans la bobine en sens inverse.
- De même si K est fermé en faisant varier  $i_1$  à l'aide d'un rhéostat monté dans le circuit, on crée un courant induit dans la bobine.

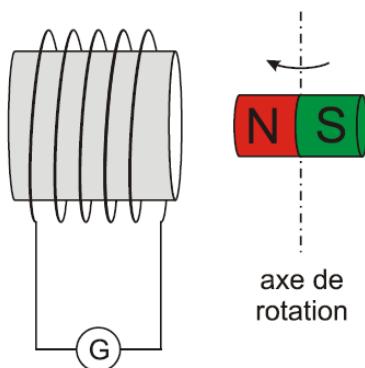
#### c) Expérience 3





La bobine étant placée dans un champ magnétique, si nous la déformons rapidement un courant induit circule dans la bobine. Ce courant s'annule dès que cesse cette déformation.

#### d) Expérience 4



Plaçons un aimant horizontal, mobile autour d'un axe vertical, près d'une bobine d'axe horizontal, connectée à un galvanomètre. Faisons tourner cet aimant à vitesse angulaire constante.

Observation : Un courant induit circule dans la bobine dans un sens, puis dans l'autre, puis de nouveau dans le premier sens, et ainsi de suite : la bobine est parcourue par un courant alternatif de fréquence égale à celle du mouvement de rotation.

On fait la même observation si l'aimant est fixe et que la bobine tourne à vitesse angulaire constante

#### 2. INTERPRETATION

- Dans l'expérience 1, en déplaçant l'aimant le nombre de lignes de champ qui traverse la bobine augmente ou diminue. Donc il y a variation du flux magnétique à travers la bobine. Cette variation de flux magnétique est la cause du courant induit. Ceci est justifié par les expériences suivantes:
- dans l'expérience 2, on fait varier  $\vec{B}$  en agissant sur  $i_1$ .
- dans l'expérience 3, on fait varier la surface S de la bobine.
- dans l'expérience 4, on fait varier l'angle  $\theta$  formé par  $\vec{B}$  et  $\vec{S}$ .

Toutes les grandeurs  $\vec{B}$ , S et  $\theta$  sont des facteurs de l'expression du flux magnétique  $\Phi = BS \cos\theta$

### 3. CONCLUSION

Dans toute variation du flux magnétique à travers un circuit fermé s'accompagne de la production d'un courant induit dans le circuit. Le courant induit apparaît dès que commence les variations du flux et disparaît dès que cesse cette variation: la cause et l'effet ont la même durée.

### 4. SENS DU COURANT INDUIT: LOI DE LENZ

Le sens du courant induit est tel que par ses effets il s'oppose à la cause qui lui donne naissance. Le courant induit crée un champ  $\vec{B}_{\text{ind}}$  (champ magnétique induit) qui s'oppose à la variation  $\vec{\Delta B}$  de l'inducteur.

## III. Force électromotrice d'induction

### 1. FEM. INDIUITE MOYENNE

Durant le phénomène d'induction, le flux magnétique est une fonction du temps. Si pendant une durée  $\Delta t$  la variation du flux est  $\Delta\Phi$ , la f.e.m. induite moyenne est:

$$e_m = - \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$$

### 2. FEM. INDIUITE INSTANTANÉE

$$e = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} e_m = - \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = - \frac{d\Phi}{dt} \Rightarrow e = - \frac{d\Phi}{dt}$$

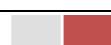
Le signe moins (-) traduit la loi de Lenz

- Si  $\Phi$  augmente  $\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} > 0 \Rightarrow e < 0$ , le courant circule dans le sens négatif et s'oppose à l'augmentation du flux.
- Si  $\Phi$  diminue,  $\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} < 0 \Rightarrow e > 0$ , le courant circule dans le sens positif et s'oppose à la diminution du flux.

### 3. INTENSITÉ DU COURANT INDUIT

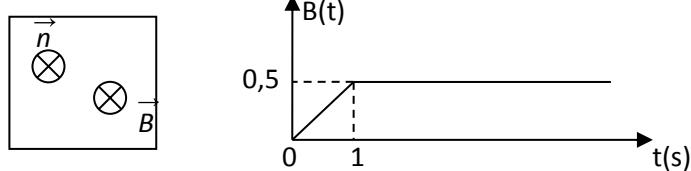
Si  $R$  est la résistance totale du circuit, l'intensité du courant induit est donné par la loi de Pouillet

$$i = \frac{\sum e - \sum e'}{\sum R} = \frac{e}{R} \Rightarrow i = \frac{e}{R} = - \frac{1}{R} \frac{d\Phi}{dt}$$



#### 4. APPLICATION

Une spire carré de résistance  $R=0,1\Omega$ , de coté  $a=10\text{ cm}$  est placé dans un champ magnétique comme l'indique la figure.



- Déterminer le sens du courant induit
- Déterminer la f.e.m. induite
- Déterminer l'intensité du courant

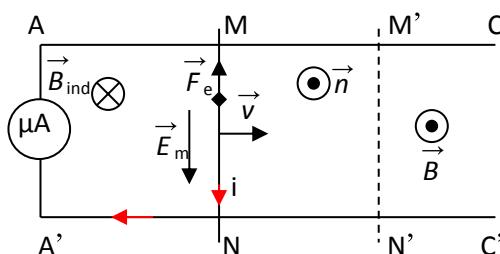
Réponse:  $B = 0,5t \Rightarrow e = -5 \cdot 10^{-5}V \Rightarrow i = \frac{e}{R} = 5 \cdot 10^{-4}A$  sur  $t \in [0;1]$  et  $B = 0,5 \Rightarrow e = 0V \Rightarrow i = 0$  sur  $t \in ]1; +\infty[$

#### 5. CHAMP ELECTROMOTEUR D'INDUCTION

##### a) Expérience

- AC et A'C' sont des rails conducteurs et horizontaux;
- MN est une tige conductrice de longueur  $\ell \perp$  aux rails.

Si nous déplaçons la tige MN avec une vitesse constante  $\vec{v}$  parallèle aux rails, un courant est créé dans le circuit de la tige et des rails.



##### b) Interprétation

Considérons un électron libre de la tige MN, quand on déplace la tige avec une vitesse  $\vec{v}$ , cet électron est entraîné avec la même vitesse  $\vec{v}$ . Il s'exerce sur cet électron une force de Lorentz  $\vec{F} = q \vec{v} \wedge \vec{B}$ . Le déplacement des électrons entraîne un courant en sens inverse: c'est le courant induit.

L'expression  $\vec{v} \wedge \vec{B}$  est homogène à un champ électrique car les électrons se déplacent de N vers M.

$\boxed{\vec{E}_m = \vec{v} \wedge \vec{B}}$   $\vec{E}_m$  est le champ électromoteur. Le trièdre  $(\vec{v}, \vec{B}, \vec{E}_m)$  est direct.

Remarque: le champ électromoteur  $\vec{E}_m$  a toujours le même sens que i.

##### c) Autres relations

###### • F.e.m. induite

Pendant le déplacement la tige MN reçoit du travail mécanique et fournit au circuit du travail électrique donc elle se comporte comme un générateur dont la f.e.m. est:

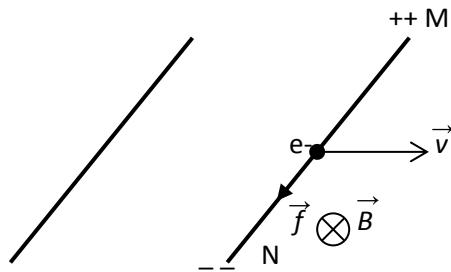
$$E = \frac{W_{N \rightarrow M}(\vec{F})}{q} = \frac{\vec{F} \cdot \vec{NM}}{q} = \vec{E}_m \cdot \vec{NM} = -vB\ell \Rightarrow [e = -vB\ell]$$

Autre méthode:  $e = -\frac{d\Phi}{dt}$  or  $\Phi = BS$

À  $t=0$ ;  $\Phi_0 = BS_0$  et à une date  $t$ ,  $\Phi(t) = B(S_0 + \ell x) = BS_0 + B\ell x = \Phi_0 + B\ell x$

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d\Phi_0}{dt} - B\ell \frac{dx}{dt} = -B\ell v$$

- F.é.m. en circuit ouvert

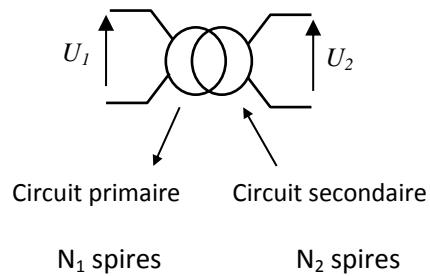


En circuit ouvert la tige se comporte comme un générateur:  $U_{MN} = -e = Bv\ell$

#### IV. Applications: Le transformateur

Le transformateur sert à abaisser ou éléver la valeur efficace d'une tension sinusoïdale avec des pertes très faibles. Une des principales utilisations des transformateurs est le transport de l'énergie électrique par la SENELEC (ligne à haute tension).

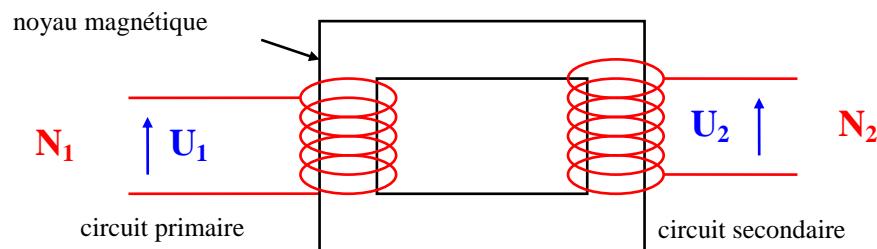
Le symbole d'un transformateur est:



Un transformateur est composé de :

- une bobine composée de  $N_1$  spires appelée circuit primaire.
- une bobine composée de  $N_2$  spires appelée circuit secondaire.
- un circuit magnétique fermé constitué de feuillets métalliques isolés les uns des autres qui canalise les lignes de champ.





*Petite explication !*

$U_1$  est une ddp sinusoïdale, donc le flux magnétique créé par  $N_1$  varie, et donc le flux magnétique à travers  $N_2$  varie, et il produit, d'après la loi de Faraday, une f.e.m. induite  $U_2$  sinusoïdale.

On appelle rapport de transformation :  $m = \frac{U_2}{U_1} = \frac{N_2}{N_1} = \frac{I_1}{I_2}$  (pour un transformateur idéal)

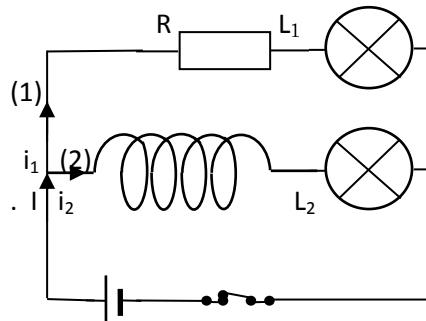
Si  $N_2 > N_1$ : le transformateur est [survolteur \(élévateur de tension\)](#)

Si  $N_2 < N_1$ : le transformateur est [sous-volteur \(abaisseur de tension\)](#)

# Auto-induction électromagnétique

## I. Phénomène d'auto induction

### 1. INFLUENCE D'UNE BOBINE DANS UN CIRCUIT

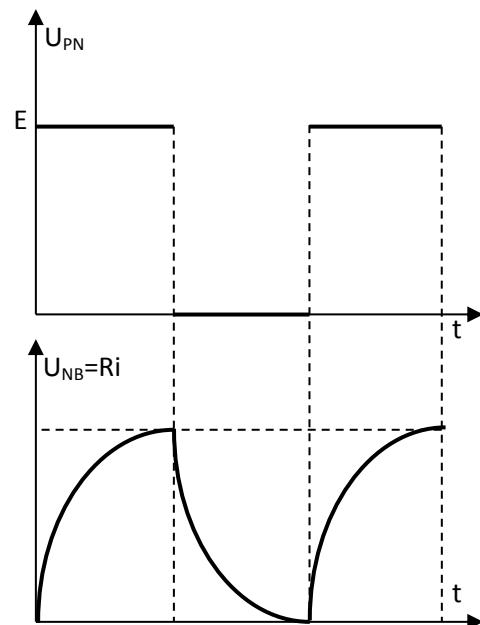
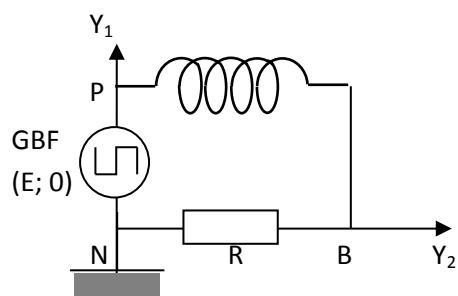


Les lampes  $L_1$  et  $L_2$  sont des lampes identiques.

- Si on ferme K,  $L_1$  s'allume instantanément mais  $L_2$  s'allume progressivement.
- Si on ouvre K,  $L_1$  s'éteint très tôt alors que  $L_2$  s'éteint progressivement.

La bobine est donc la cause du retard à l'établissement ou l'annulation du courant dans la branche 2.

### 2. VISUALISATION A L'OSCILLOSCOPE



Lorsque la tension aux bornes du générateur est maximale, l'intensité du courant n'atteint pas immédiatement sa valeur maximale. De même si la tension est nulle, le courant  $i$  diminue progressivement avant de s'annuler.

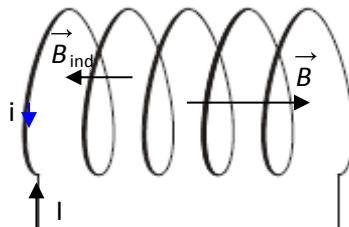
#### Définition:

Une bobine placée dans un circuit s'oppose à l'établissement et à l'annulation du courant : c'est le phénomène d'auto induction.



### 3. INTERPRETATION

Lorsque  $i$  varie, le champ magnétique créé par le courant varie dans le circuit, donc le flux propre à travers le circuit varie, ce qui engendre une f.e.m. induite qui par ses effets va s'opposer à la cause qui lui a donné naissance (loi de Lenz): c'est le phénomène d'auto induction.



## II. Force électromotrice d'auto induction

### 1. INDUCTANCE D'UNE BOBINE

Lorsque le circuit est parcouru par un courant, il crée un champ proportionnel à l'intensité du courant. Le flux propre qui traverse ce circuit étant proportionnel à  $B$  et donc proportionnel à  $i$ .

On pose:  $\boxed{\Phi = Li}$  où  $L$  est le coefficient de proportionnalité: c'est une constante positive (car  $i$  et  $\Phi$  varie toujours dans le même sens).

$L$  est appelé auto induction ou inductance ou coefficient de self inductance ou self. Elle s'exprime en Henry (H).  $L$  ne dépend que de la géométrie du circuit.

Considérons un solénoïde de rayon  $R$  et de longueur  $\ell$  comportant  $N$  spires et parcouru par un courant variable  $i$ .

$$\Phi = Li = NBS \Rightarrow L = \frac{NBS}{i} \text{ or } B = \mu_0 ni = \mu_0 \frac{N}{\ell} i$$

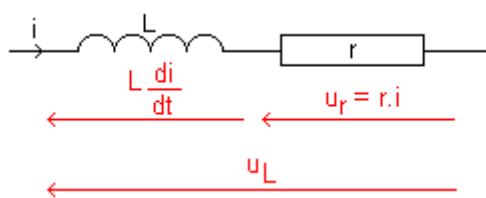
$$L = N^2 \mu_0 \frac{S}{\ell} \Rightarrow \boxed{L = \frac{N^2 \mu_0 \pi R^2}{\ell}}$$

### 2. F.E.M. D'AUTO INDUCTION

$$e = - \frac{d\Phi}{dt} = - \frac{d}{dt} (Li) = - L \frac{di}{dt} \Rightarrow \boxed{e = - L \frac{di}{dt}}$$

### 3. TENSION AUX BORNES D'UNE BOBINE

Si la résistance de la bobine n'est pas négligeable, celle-ci peut-être considérée comme l'association en série d'un conducteur ohmique et d'une bobine de résistance nulle.



$$U_L = ri - e = ri + \frac{Ldi}{dt} \Rightarrow U_L = ri + \frac{Ldi}{dt}$$

équation différentielle en  $i$  du 1<sup>e</sup> ordre.

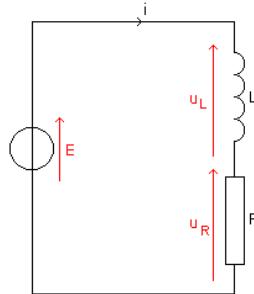
### Remarques

- Dans le cas où la bobine est une inductance pure, sa résistance est nulle et la tension à ses bornes s'écrit  $u_L = L \frac{di}{dt}$ .
- En régime permanent, le courant est constant ( $i=\text{cte}$ ), la tension aux bornes de la bobine s'écrit  $u_L=ri$ : la bobine se comporte comme un conducteur ohmique.

## III. Réponse d'un dipôle RL

### 1. ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE

La loi d'additivité des tensions:  $U_L + U_R = E \Rightarrow L \frac{di}{dt} + Ri = E$  équation différentielle.



### 2. LOI D'ETABLISSEMENT DU COURANT

Remarque préalable: en régime permanent, le courant est constant.  $i=\text{cte} \Rightarrow \frac{di}{dt} = 0 \Rightarrow i = \frac{E}{R}$

Vérifions que  $i = A + Be^{-\frac{t}{\tau}}$  est solution de l'équation différentielle.

$\frac{di}{dt} = -\frac{B}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}$ . L'équation différentielle s'écrit alors:

$$A + Be^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{L}{R} \left( -\frac{B}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} \right) = \frac{E}{R} \Rightarrow A + B \left( 1 - \frac{L}{R\tau} \right) e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{E}{R}$$

Cette équation est vérifiée quelque soit le paramètre  $t$ , d'où le système:

$$\begin{cases} A = \frac{E}{R} \\ 1 - \frac{L}{R\tau} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{E}{R} \\ \tau = \frac{L}{R} \end{cases}$$

On en déduit que l'intensité du courant s'écrit  $i = \frac{E}{R} + Be^{-\frac{t}{\tau}}$  avec  $\tau = \frac{L}{R}$ .

$$\begin{aligned} \text{D'autre part, à } t=0, i=0 &\Rightarrow 0 = \frac{E}{R} + B.e^0 \\ &\Rightarrow B = -\frac{E}{R} \\ &\Rightarrow i = \frac{E}{R} - \frac{E}{R}.e^{-\frac{t}{\tau}} \\ &\Rightarrow \boxed{i = \frac{E}{R}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})} \end{aligned}$$

Par la méthode de résolution de l'équation différentielle:  $Ri + \frac{Ldi}{dt} = E$

Soit  $i_1$  la solution de l'équation différentielle sans second membre:

$$Ri + L \frac{di}{dt} = 0 \Rightarrow Ldi = -Ridt \Rightarrow \frac{di}{i} = -\frac{R}{L} dt. \text{ Posons } \tau = \frac{L}{R}$$

En intégrant:  $\ln i = -\frac{R}{L}t + k \Rightarrow i_1 = e^{-\frac{t}{\tau} + k} = e^{-\frac{t}{\tau}} \times e^k \Rightarrow \boxed{i_1 = Ke^{-\frac{t}{\tau}}}$  avec  $K = e^k$

Soit  $i_2$  une solution particulière de l'équation avec second membre:

$$i_2 = \text{cte} \Rightarrow \frac{di_2}{dt} = 0 \Rightarrow Ri_2 = E \Rightarrow \boxed{i_2 = \frac{E}{R}}$$

La solution de l'équation différentielle est:  $i = i_1 + i_2 = Ke^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{E}{R}$

$K$  est déterminé par les conditions initiales: à  $t=0$ ;  $i=0 = K + \frac{E}{R} \Rightarrow K = -\frac{E}{R}$  d'où  $\boxed{i = \frac{E}{R}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})}$

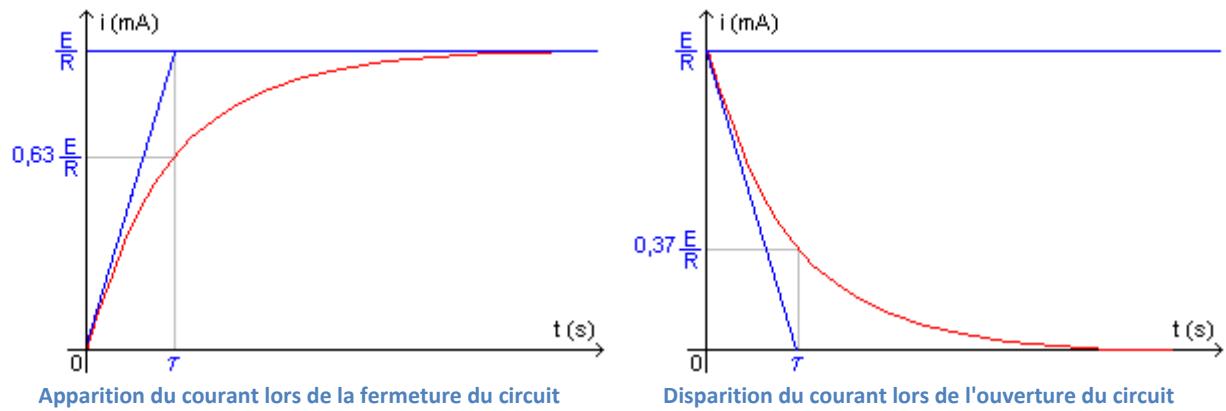
### 3. LOI D'ANNULATION DU COURANT

A  $t'=0$ ,  $E=0 \Rightarrow L \frac{di}{dt} + Ri = 0$ . L'équation a pour solution:  $\boxed{i = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}}$

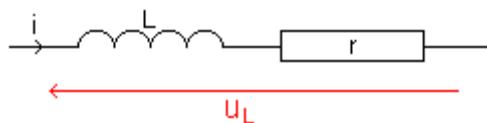
### 4. CONSTANTE DE TEMPS

La grandeur  $\tau = \frac{L}{R}$  est appelée constante de temps du circuit. Son unité est la seconde (s). La constante de temps fournit un ordre de grandeur de la durée de la réponse d'un circuit RL

- Après une durée  $\tau$ , l'intensité est égale à 63% de sa valeur maximale.
- Après une durée  $5\tau$ , l'intensité est égale à 99% de sa valeur maximale.
- $\tau$  est généralement très faible: le régime transitoire s'éteint très rapidement.



#### IV. Énergie emmagasinée dans une bobine



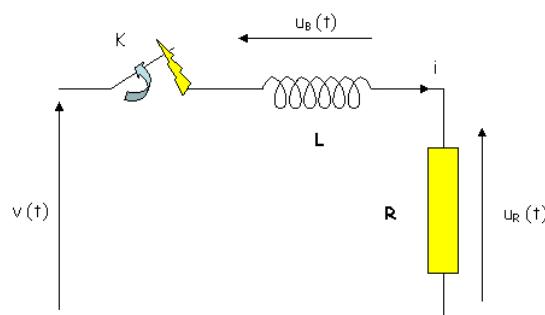
$$\mathcal{P} = ui = (ri + L \frac{di}{dt})i = ri^2 + Li \frac{di}{dt} \Rightarrow \mathcal{P} = \mathcal{P}_j + \mathcal{P}_m$$

$$\mathcal{P}_m = Li \frac{di}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} Li^2 \right) = \frac{dE}{dt}, \text{ par analogie: } E = \frac{1}{2} Li^2$$

- Lorsque le courant s'établit, la bobine emmagasine de l'énergie  $E = \frac{1}{2} Li^2$ : ceci crée un retard à l'établissement du courant.
- Quand il y a rupture du courant, la bobine restitue l'énergie emmagasinée: ceci entraîne un retard à l'annulation du courant.

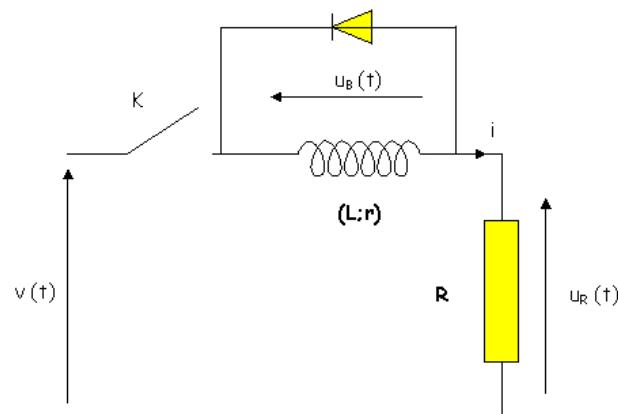
#### V. Suppression d'un courant dans un circuit inductif :

La tension  $v(t)$  est constante et égale à  $E$ , un courant d'intensité constante circule dans le circuit. A l'instant  $t = 0$ , l'interrupteur  $K$  s'ouvre instantanément. Le courant d'intensité  $i$ , qui circulait dans une bobine  $B$  et une résistance  $R$  est interrompu comme l'indique le schéma suivant. La résistance interne de la bobine est négligée, seule l'inductance  $L$  est prise en compte.



L'ouverture de l'interrupteur provoque un arc électrique car il ne peut y avoir de discontinuités de l'intensité d'un courant traversant un circuit fortement inductif. L'intensité du courant ne pouvant subir de brusques variations, pendant un court instant, le courant circule entre les deux lames de l'interrupteur. Une surtension apparaît, elle est proportionnelle à la valeur de  $L \frac{di}{dt}$ .

Pour ouvrir un circuit inductif il faut permettre au courant de s'annuler de façon continue, une diode est placée sur les bornes de la bobine permettant ainsi au courant de continuer à circuler jusqu'à son annulation, comme sur le schéma suivant.



La diode utilisée est appelée diode de roue libre. Ce terme est employé lorsque la bobine restitue l'énergie emmagasinée sur elle-même. Alors que l'interrupteur était fermé la bobine a stocké de l'énergie, le circuit s'ouvrant cette énergie doit être restituée, la diode de roue libre permet cette opération.

# Condensateurs: dipôle RC

## I. Le condensateur

### 1. DEFINITION ET SYMBOLE

Un condensateur est constitué de deux conducteurs métalliques (les armatures) en influence mutuelle, séparés par un isolant (le diélectrique). Le symbole est:



On notera qu'un circuit série comportant un condensateur est un circuit ouvert. Il ne laisse donc pas passer un courant permanent. Un condensateur ne peut s'utiliser qu'en courant variable ou en régime transitoire.

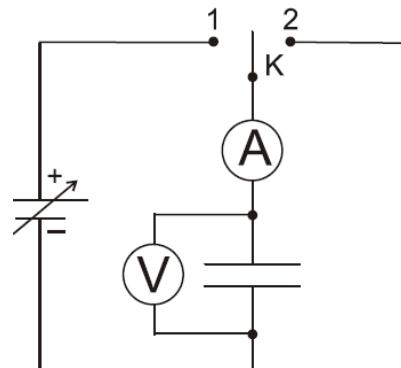


### 2. CHARGE ET DECHARGE D'UN CONDENSATEUR

#### a) Dispositif expérimental

L'interrupteur K peut être fermé soit en position 1 soit en position 2.

A est un ampèremètre très sensible, présentant une caractéristique intéressante: lorsqu'il est parcouru par une impulsion de courant (courant de brève durée), la déviation maximale de l'aiguille est proportionnelle à la charge totale Q qui l'a traversé.



#### b) Charge du condensateur

Fermons K en 1 : l'aiguille de A dévie brièvement.

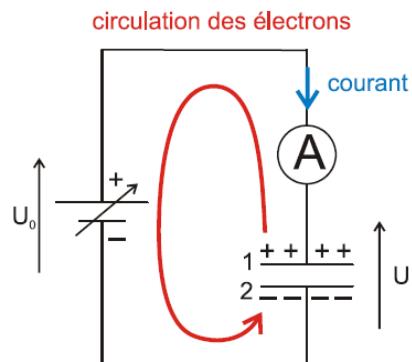
Le pôle + du générateur attire quelques électrons de l'armature 1, les propulse vers le pôle – d'où ils sont repoussés vers l'armature 2.

Cette circulation d'électrons donne lieu à une impulsion de courant indiquée par l'ampèremètre. Cette impulsion de courant amène une charge  $Q_1 > 0$  sur l'armature 1 et  $Q_2 < 0$  sur l'armature 2 du condensateur. On a évidemment:  $Q_1 = -Q_2$ .

La présence des charges est indiquée par l'existence d'une tension U aux bornes du condensateur.

L'impulsion de courant s'arrête dès que  $U = U_0$ : aucun courant ne circule plus dans le circuit. On dit alors que l'on a chargé le condensateur, sa charge vaut  $Q = |Q_1| = |Q_2|$

**Remarque :** La charge Q du condensateur est la valeur absolue de la charge qui s'accumule sur l'une de ses armatures. (La charge totale des 2 armatures est évidemment nulle !)



Ouvrons K : l'aiguille de A ne dévie pas. Aucun courant ne circule. Le condensateur reste chargé. Sa tension est toujours  $U=U_0$  et sa charge Q.

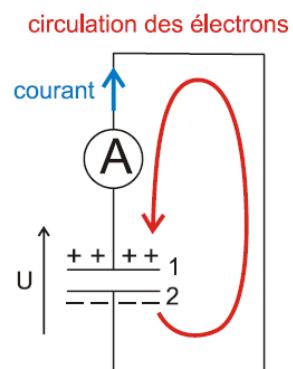
### c) Décharge du condensateur

Fermons K en 2 : l'aiguille de A dévie brièvement dans l'autre sens.

Le condensateur chargé est court-circuité. Les électrons de l'armature 2 circulent à travers le circuit pour compenser le défaut d'électrons sur l'armature 1.

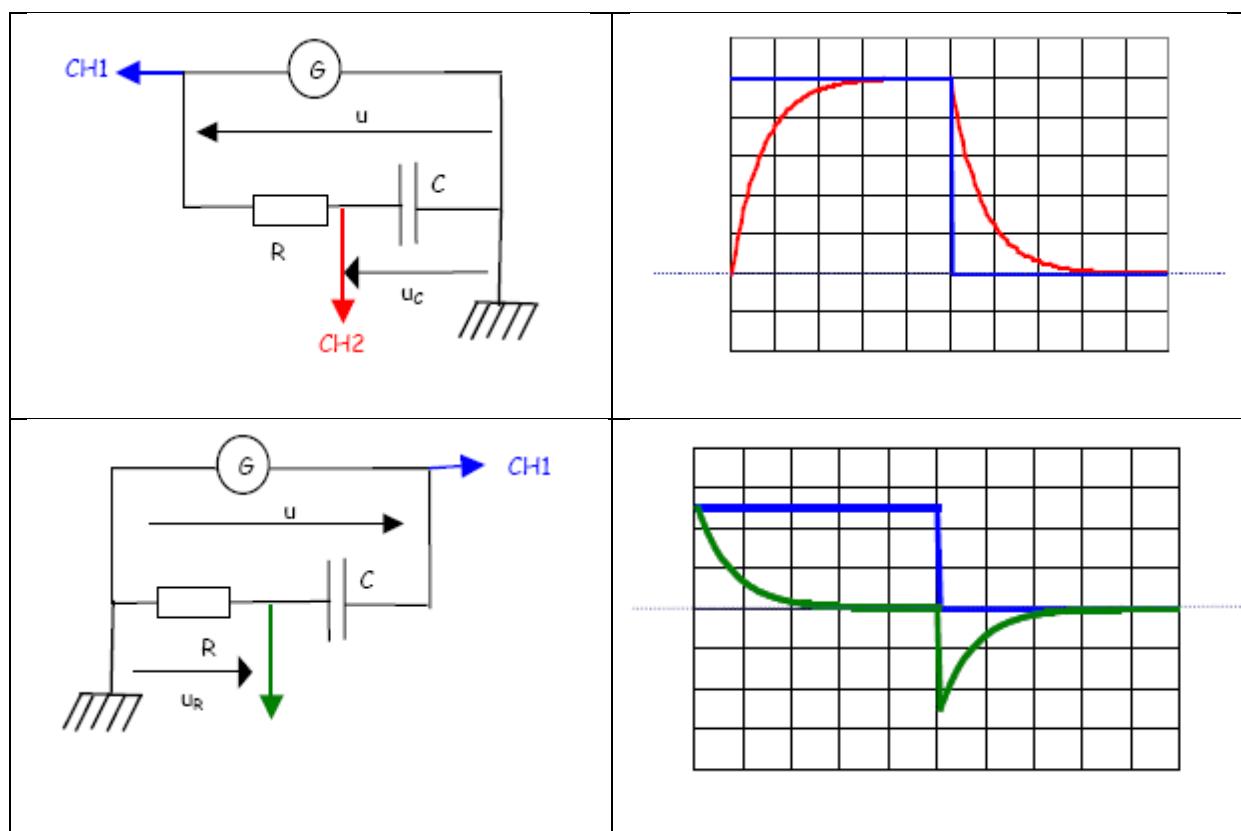
La circulation d'électrons s'arrête si les deux armatures sont neutres, c.-à-d. si  $U = 0$  et  $Q = 0$ .

Lorsqu'on relie les armatures d'un condensateur chargé par un conducteur, on décharge le condensateur. La tension à ses bornes ainsi que sa charge s'annulent.



### 3. VISUALISATION A L'OSCILLOSCOPE

Le générateur délivre une tension à échelon de valeur E et 0

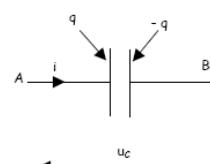


### 4. RELATION ENTRE LA CHARGE ET L'INTENSITE DU COURANT

Conventions de signe- Relation entre i et q

On oriente le dipôle de A vers B: On place  $u_C$  sur le schéma. Soit q la charge de l'armature A (à l'instant considéré) par laquelle entre le sens positif.

$$\text{On a toujours : } i_{AB} = \frac{dq_A}{dt} = \frac{dq}{dt} \text{ ou } i_{BA} = \frac{dq_B}{dt} = -\frac{dq}{dt}$$



Remarque : Si  $i$  est constant  $i = I$  et on a alors  $I = \frac{q}{t}$ .  $q$  étant la charge à l'instant  $t$ .

### 5. CAPACITE D'UN CONDENSATEUR

L'expérience montre qu'un condensateur soumis à une tension  $u_C$  prend une charge  $q$  proportionnelle à  $u_C$  telle que:

$$q = C u_C \quad \text{avec} \quad \begin{cases} q: \text{charge prise par le condensateur en coulomb (C)} \\ u_C: \text{tension électrique régnant aux bornes du condensateur en volt (V)} \\ C: \text{capacité du condensateur en farad (F)} \end{cases}$$

Remarque: le farad est une unité représentant une très grande capacité, rarement rencontrée en électronique ou au laboratoire. On utilise couramment les sous multiples:  $1\text{mF}=10^{-3}\text{F}$ ,  $1\mu\text{F}=10^{-6}\text{F}$ ,  $1\text{nF}=10^{-9}\text{F}$  (nanofarad) et  $1\text{pF}=10^{-12}\text{F}$  (picofarad).

Pour un condensateur plan  $C = \frac{\epsilon \cdot S}{d}$  où  $\epsilon$  est une constante dépendant du diélectrique.

Si le diélectrique est le vide:  $C = \epsilon_0 \frac{S}{d} \cdot \epsilon_0$  est la **permittivité du vide** =  $8,54 \cdot 10^{-12}$  u.S.I.

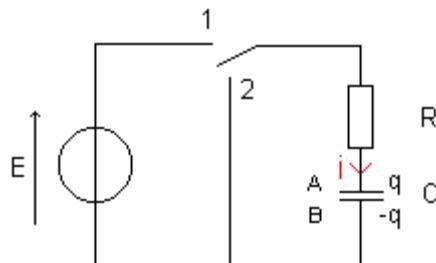
Pour un autre diélectrique :  $C = \epsilon \frac{S}{d}$ .  $\epsilon$  est la **permittivité du diélectrique** >  $\epsilon_0$

Très souvent, on exprime la permittivité d'un diélectrique à l'aide de celle du vide. On définit la

**permittivité relative du diélectrique**  $\epsilon_r$  à l'aide de :  $\epsilon_r = \frac{\epsilon}{\epsilon_0}$

$$\text{Finalement : } C = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{S}{d} = \epsilon_r C_{vide}$$

## II. Réponse d'un dipôle RC à un échelon de tension



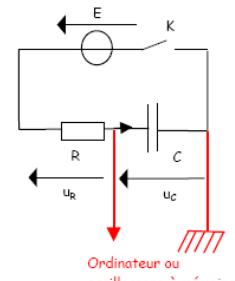
### 1. ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES VÉRIFIÉES PAR LA TENSION $u_C$

#### a) la phase de charge du condensateur.

Le courant circule dans le sens positif (convention récepteur).

La loi d'additivité des tensions appliquée aux bornes du dipôle RC permet d'écrire:  $u_R + u_C = E$

La loi d'Ohm appliquée au dipôle ohmique permet d'écrire:  $u_R = R i$ .



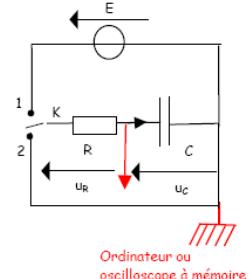
Selon la convention récepteur:  $i = \frac{dq}{dt}$  mais  $q = Cu_C \Rightarrow i = C \frac{du_C}{dt}$  et  $u_R = RC \frac{du_C}{dt}$ .

Finalement l'équation différentielle cherchée s'écrit:  $RC \frac{du_C}{dt} + u_C = E$

### b) La phase de décharge du condensateur.

Le courant circule dans le sens négatif mais la convention récepteur est toujours en vigueur. La tension imposée par le générateur est alors 0.

L'équation différentielle est alors:  $RC \frac{du_C}{dt} + u_C = 0$ .



### 2. SOLUTIONS DES EQUATIONS DIFFÉRENTIELLES PRÉCEDENTES.

La fonction numérique  $u_C = Ae^{-\frac{t}{\tau}} + B$  (où A, B et  $\tau$  sont des constantes) est bien solution des équations différentielles.

### a) Cas de la charge du condensateur.

La fonction numérique  $u_C = Ae^{-t/\tau} + B$  est solution de l'équation différentielle  $RC \frac{du_C}{dt} + u_C = E$  si cette équation est vérifiée par la fonction numérique proposée et par sa dérivée.

Or:  $\frac{du_C}{dt} = -\frac{A}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}$ . En reportant cette expression de  $\frac{du_C}{dt}$  et de  $u_C$  dans l'équation différentielle on a:  $-\frac{RCA}{\tau} e^{-t/\tau} + Ae^{-\frac{t}{\tau}} + B = E$  ou encore:  $Ae^{-\frac{t}{\tau}} \left(1 - \frac{RC}{\tau}\right) + B = E$

Cette équation devant être vérifiée quelque soit la date t. On a donc les deux conditions suivantes:

$B = E$  et  $1 - \frac{RC}{\tau} = 0 \Rightarrow \boxed{\tau = RC}$  : la fonction numérique  $u_C$  s'écrit donc provisoirement  $u_C = Ae^{-t/RC} + E$ :

Il est possible de donner un sens physique à la constante mathématique A en examinant la valeur de  $u_C$  à l'instant  $t=0$  (conditions aux limites). A cette date  $u_C=0$  alors  $0=A+E \Rightarrow A=-E$  d'où la solution de l'équation différentielle lors de la charge:

$$\boxed{u_C = E(1 - e^{-t/RC})}$$

### b) Cas de la décharge du condensateur.

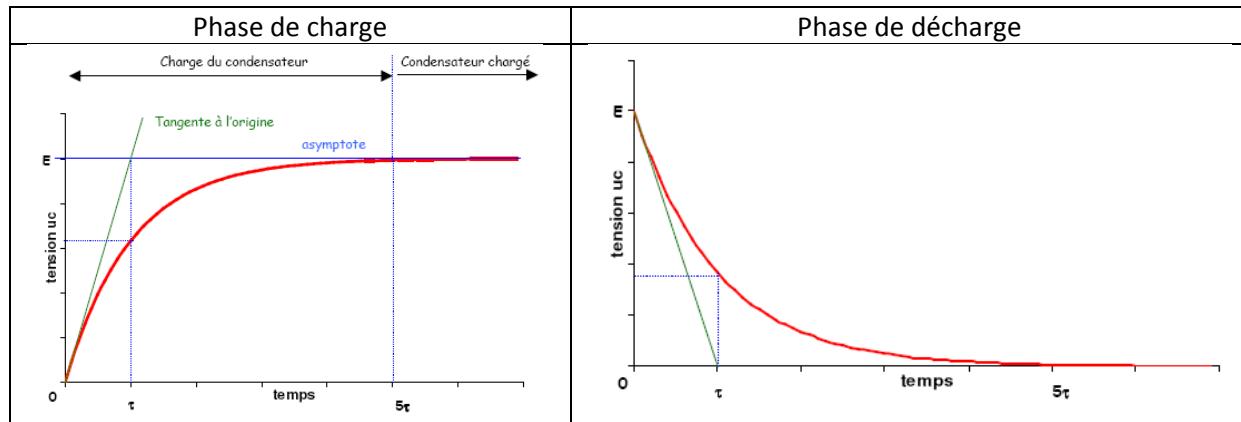
En introduisant les expressions de  $u_C$  et de  $\frac{du_C}{dt}$  dans l'équation différentielle de la décharge on a:

$Ae^{-\frac{t}{\tau}}(1 - \frac{RC}{\tau}) + B = 0$  cette équation devant être vérifiée quelque soit la date t. On a donc les deux conditions suivantes:  $B=0$  et  $1 - \frac{RC}{\tau} = 0 \Rightarrow \boxed{\tau = RC}$

La fonction numérique  $u_C$  s'écrit donc provisoirement:  $u_C = Ae^{-t/RC}$

Il est possible de donner un sens physique à la constante mathématique A en examinant la valeur de  $u_C$  à l'instant  $t=0$  (début de la décharge). A cette date  $u_C=E$  alors  $A=E$  et la solution de l'équation différentielle de la décharge s'écrit  $\boxed{u_C = Ee^{-t/RC}}$ .

Les résultats précédents sont résumés ci-contre.



### 3. REPONSE EN INTENSITE.

Dans la partie précédente, nous nous sommes intéressés à la réponse du dipôle RC en tension. C'est-à-dire que nous avons examiné l'évolution de la tension aux bornes du condensateur.

Il est intéressant d'examiner la réponse en intensité. C'est-à-dire d'étudier l'évolution de l'intensité i du courant dans le dipôle RC au cours du temps lors du cycle charge-décharge.

Dans les deux cas (charge ou décharge) on a d'après la loi d'Ohm:  $i = \frac{u_R}{R}$

#### a) Étude de la charge

La loi d'additivité des tensions s'écrit:  $E = u_C + u_R \Rightarrow u_R = E - u_C$ , on en déduit:  $i = \frac{E - u_C}{R}$

Pendant la charge l'expression de  $u_C$  est:  $u_C = E - Ee^{-t/RC}$  alors  $i = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$

Cette expression de i montre que l'intensité du courant de charge décroît aux cours de la charge, de la valeur  $i_0 = \frac{E}{R}$  à la valeur voisine de 0 (le condensateur est chargé). Cela signifie que plus la phase de charge avance plus il est difficile de charger le condensateur.

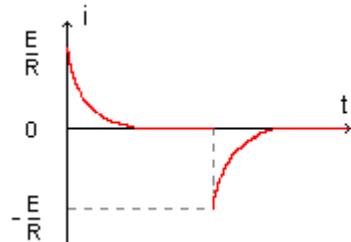


b) Étude de la décharge.

La loi d'additivité des tensions s'écrit:  $0 = u_C + u_R \Rightarrow u_R = -u_C$  on en déduit:  $i = -\frac{u_C}{R}$

Pendant la décharge l'expression de  $u_C$  est:  $u_C = E e^{-t/RC}$  alors  $i = -\frac{E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$

Cette expression montre que le courant circule dans le sens négatif et croît de la valeur  $i_0 = -\frac{E}{R}$  (valeur à l'instant  $t=0$  correspondant au début de la décharge) à une valeur proche de 0. Entre la fin de la phase de charge et le début de la phase de décharge il apparaît une discontinuité dans la fonction  $i=f(t)$  qui correspond à l'inversion du sens du courant.



Cette évolution de l'intensité est résumée sur le schéma ci-contre.

**4. CONSTANTE DE TEMPS DU DIPOLE RC.**

Le facteur  $\tau = RC$  apparaît aussi bien dans les équations différentielles de charge et de décharge que dans les expressions de  $u_C$  et  $i$ .

$\tau = RC$ , homogène à une durée, est appelé constante de temps du dipôle RC et s'exprime en seconde (si  $R$  est en ohm ( $\Omega$ ) et  $C$  en farad ( $F$ )). C'est une durée caractéristique du dipôle RC qui nous donne un ordre de grandeur de la durée de la charge ou de la décharge du condensateur.

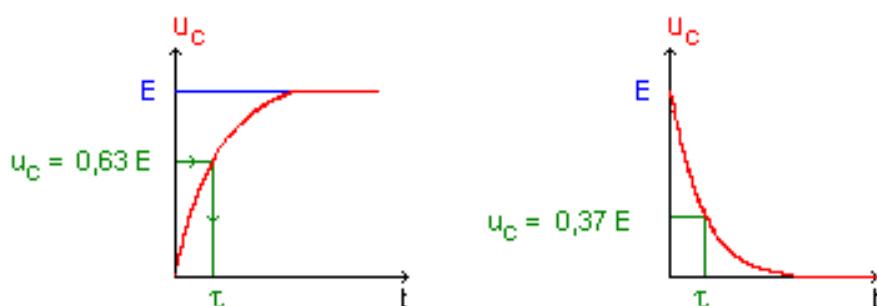
Détermination expérimentale de la constante de temps.

- Méthode des 63%**

Examinons la valeur que prend  $u_C$  lors de la charge du condensateur lorsque  $t = \tau$ . en reprenant l'expression  $u_C = E(1 - e^{-t/RC})$ , à la date  $t = \tau$ : on a:

$$u_C(\tau) = E(1 - e^{-1}) \Rightarrow u_C(\tau) = 0,63 E$$

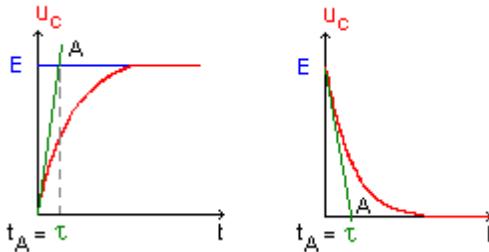
Il suffit alors de lire sur le graphe  $u_C=f(t)$  la valeur de  $t$  (voir ci-dessous). Le même raisonnement appliqué à la décharge du condensateur donne  $t = \tau$  pour  $u_C = 0,37E$ .



- Méthode de la tangente à l'origine.**

$$U_c = E \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \Rightarrow \frac{d(U_c)}{dt} = \frac{E}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} \Rightarrow \left(\frac{du_c}{dt}\right)_{t=0} = \frac{E}{\tau} = a$$

Si l'on note A le point d'intersection de la tangente à l'origine et de la droite  $u_c=E$ , alors l'abscisse de A est  $t_A$ . Avec ces notations, le coefficient directeur de la tangente à l'origine est:  $a=E/t_A$ . En comparant les deux expressions du coefficient directeur de la tangente à l'origine on a:  $\tau = t_A$ . Le même raisonnement appliqué à la décharge conduit aux deux constructions présentées ci-contre:



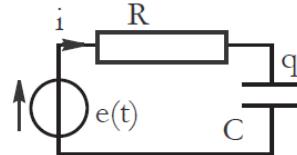
### III. Énergie emmagasinée dans un condensateur.

#### 1. RELATION DONNANT CETTE ENERGIE.

La puissance fournie au circuit par le générateur, de résistance interne négligeable, vaut :

$$\mathcal{P}_f(t) = e(t)i(t) = \left(Ri + \frac{q}{C}\right)i$$

avec  $i = \frac{dq}{dt}$ , il vient :  $qi = q\frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}q^2\right)$ .



$$\rightarrow \text{d'où : } \mathcal{P}_f = \underbrace{Ri^2}_{\text{dissipée par effet JOULE ds R}} + \underbrace{\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\frac{q^2}{C}\right)}_{\text{emmagasinée dans C à la date t}}$$

L'énergie emmagasinée dans un condensateur de capacité C aux bornes duquel règne une tension  $u_c$  est:

$$E_c = \frac{1}{2} C u_c^2$$

$\left\{ \begin{array}{l} E: \text{énergie électrique en joule (J)} \\ C: \text{capacité du condensateur en farad (F)} \\ u_c: \text{tension entre les armatures du condensateur en volt (V)} \end{array} \right.$

$$E = \frac{QU}{2} = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

Cette énergie  $E_c$  est emmagasinée par le condensateur : elle n'est pas dissipée (perdue), mais stockée tant que le régime est continu.

#### 2. ORDRE DE GRANDEUR DE LA DUREE DU TRANSFERT D'ENERGIE.

L'énergie est transférée du générateur vers le condensateur lors de la phase de charge et du condensateur vers le circuit de décharge lors de la phase de décharge.

L'évolution de la tension aux bornes du condensateur se fait de façon continue en une durée dont l'ordre de grandeur est  $t$ . Ces transferts d'énergie ne sont donc pas instantanés (même s'ils peuvent être très brefs comme dans le cas d'un flash). L'ordre de grandeur de la durée de ces transferts est  $\tau$ .

### 3. ASSOCIATION DE CONDENSATEURS (RAPPEL 1E S)

- En série:  $\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$  soit 
$$\frac{1}{C_{eq}} = \sum_i^n \frac{1}{C_i}$$
- En parallèle:  $C_{eq} = C_1 + C_2$  soit 
$$C_{eq} = \sum_i^n C_i$$

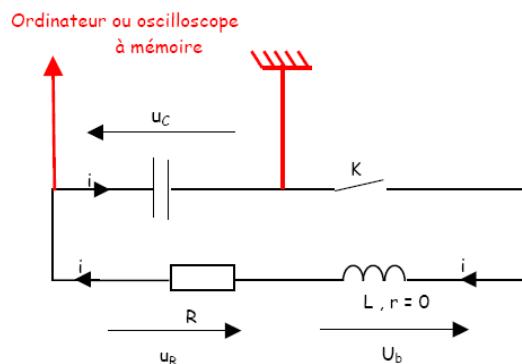
# Oscillations électriques libres: circuit LC

Un oscillateur électrique libre est constitué d'un condensateur de capacité  $C$  initialement chargé et d'une bobine ( $L, r$ ).

## I. Décharge d'un condensateur dans une bobine : étude expérimentale

### 1. MONTAGE (AVEC OSCILLOSCOPE A MEMOIRE)

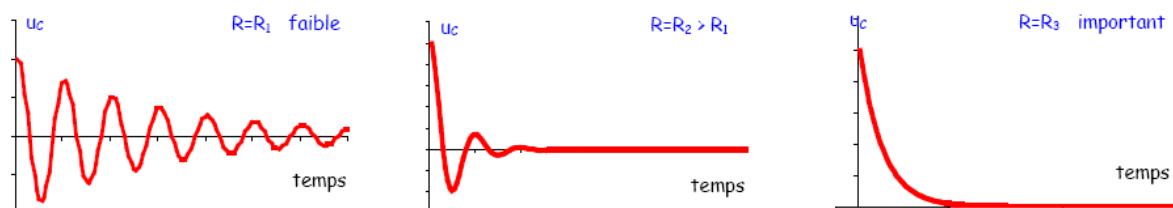
A  $t = 0$  on ferme l'interrupteur  $K$ , le condensateur est chargé :  $u_C(0) = U > 0$



On enregistre la tension  $u_C$  aux bornes du condensateur, pour différentes valeurs de la résistance  $R$ . ( $R_1, R_2, R_3$ )

Les courbes obtenues sont représentées ci-dessous

### 2. COURBES, POUR PLUSIEURS RESISTANCES



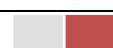
### Observations:

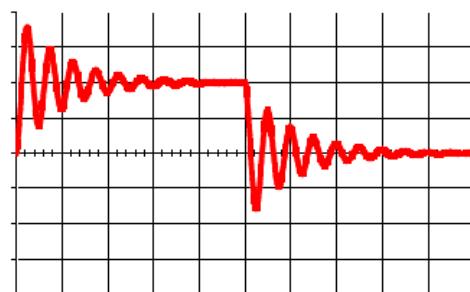
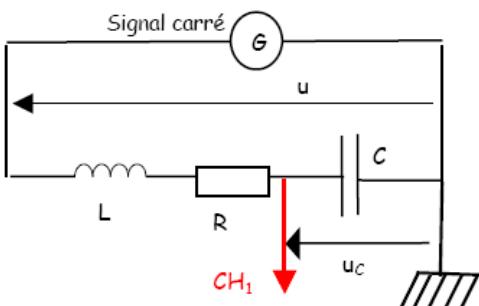
- faible résistance : oscillations amorties
- Plus la résistance est grande et plus l'amortissement est important.
- Si la résistance dépasse une certaine valeur, il n'y a plus d'oscillations

### 3. REMARQUE : MONTAGE AVEC OSCILLOSCOPE CLASSIQUE

Il faut utiliser un GBF délivrant une tension en créneaux ( $u = E$  ou  $0$ )

La décharge du condensateur correspond à la demi-période du GBF pour laquelle la tension  $u$  est nulle.



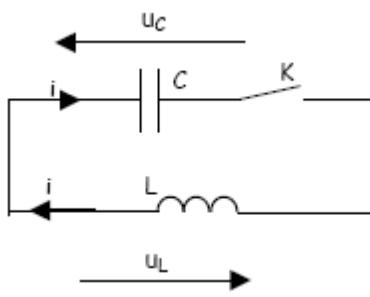


#### 4. CONCLUSION

Selon la valeur de la résistance on observe des oscillations amorties, ou pas d'oscillations.  
Plus la résistance est faible et moins les oscillations sont amorties.  
Que verrait-on dans un circuit LC sans résistance ?

## II. Décharge d'un condensateur dans une bobine idéale (LC)

### 1. ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE



Condition initiale : A t = 0 , on ferme K

- l'énergie est stockée dans le condensateur  $u_c(0) = U_0 (>0)$
- il n'y a pas d'énergie dans la bobine  $i(0) = 0$

On choisit un sens positif (i). La loi des mailles donne :  $u_c + u_L = 0$

Avec  $i = \frac{dq}{dt}$ ,  $u_L = L \frac{di}{dt}$  et  $q = Cu_c$  on obtient:  $\boxed{\frac{d^2 u_c}{dt^2} + \frac{1}{LC} u_c = 0}$  (équation différentielle du second ordre sans terme du premier)

### 2. SOLUTION

La solution est de la forme:  $u_c = U_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$  : on a des oscillations sinusoïdales avec:

- $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$  pulsation propre du circuit
- $T_0$ : période des oscillations
- $U_0$ : amplitude
- $\varphi$ : phase initiale, dépend des conditions initiales.

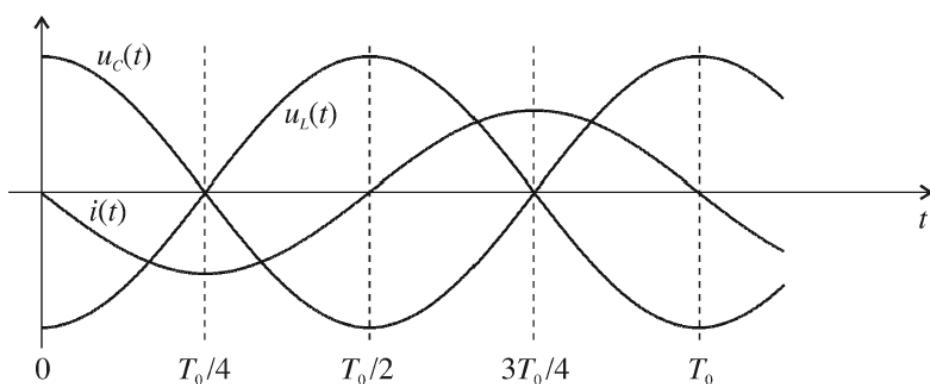
Si on dérive deux fois on obtient:  $\frac{d^2 u_c}{dt^2} = -U_0\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi) = -\omega_0^2 u_c$ . D'après l'équation différentielle on obtient:  $T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$

D'après la condition initiale on obtient  $\varphi = 0$

### 3. VARIATION DE L'INTENSITÉ , DES TENSION U<sub>C</sub> ET U<sub>L</sub> EN FONCTION DU TEMPS

$$u_c = U_0 \cos \omega_0 t \text{ et } i = C \frac{du_c}{dt} = -CU_0 \omega_0 \sin \omega_0 t.$$

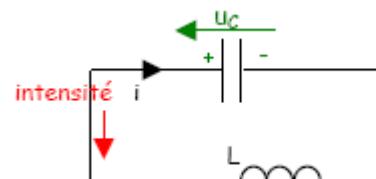
Les courbes sont:



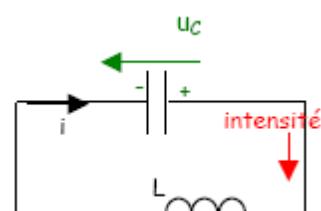
La décharge d'un condensateur dans une bobine non résistive produit un courant sinusoïdal de même période propre  $T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$  et de même fréquence propre  $f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$  que la tension aux bornes du condensateur.

#### Interprétation

- A  $t = 0$   $u_c = U_0 > 0$  et  $i = 0$
- ensuite le condensateur se décharge  $u_c$  diminue, le courant circule dans le sens négatif avec  $|i|$  croissant.
- A  $t = \frac{T_0}{4}$  le condensateur est déchargé  $u_c = 0$  et  $i = -I_{\max}$
- ensuite la bobine donne son énergie en s'opposant à la diminution de l'intensité : le condensateur se charge alors, mais avec les signes des armatures inverses des précédents.



- A  $t = \frac{T_0}{2}$  la bobine a libéré toute son énergie et le condensateur est chargé  $u_c = -U_0 < 0$  et  $i = 0$
- ensuite le condensateur se décharge, le courant circulant dans le sens positif avec  $|i|$  croissant.
- Etc.

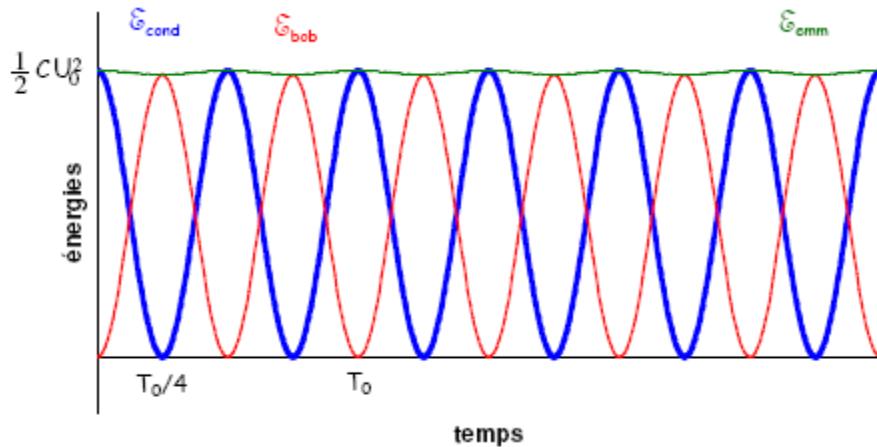


#### 4. ÉTUDE ENERGETIQUE

A un instant quelconque  $t$ , l'énergie emmagasinée

- dans le condensateur est:  $\mathcal{E}_{cond} = \frac{1}{2}CU_c^2 = \frac{1}{2}CU_0^2\cos^2\omega_0 t$
- dans la bobine est :  $\mathcal{E}_{bob} = \frac{1}{2}Li^2 = \frac{1}{2}LC^2U_0^2\omega_0^2\sin^2\omega_0 t = \frac{1}{2}CU_0^2\sin^2\omega_0 t$

Donc l'énergie totale emmagasinée est:  $\mathcal{E}_{emm} = \frac{1}{2}CU_0^2$ . Indépendante du temps elle est donc constante.



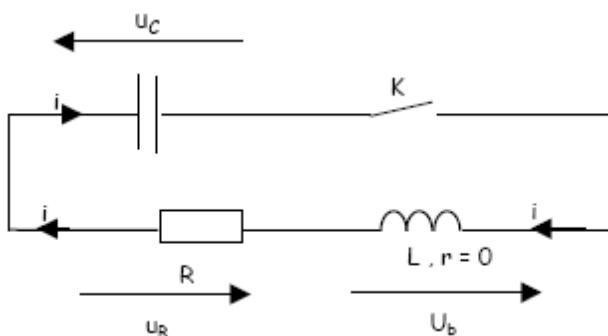
Remarque : les courbes ont pour période  $\frac{T_0}{2}$

Au cours des oscillations l'énergie totale se conserve. Il y a transfert d'énergie du condensateur vers la bobine et inversement.

Lorsque l'énergie dans la bobine est maximale, celle dans le condensateur est nulle et inversement.

### III. Influence de la résistance du circuit sur les oscillations (RLC libre)

#### 1. ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE



La loi des mailles donne:  $u_c + u_R + u_L = 0$ . Avec  $i = \frac{dq}{dt}$ ,  $u_L = L \frac{di}{dt}$ ,  $u_R = Ri$  et  $q = Cu_c$  on obtient:

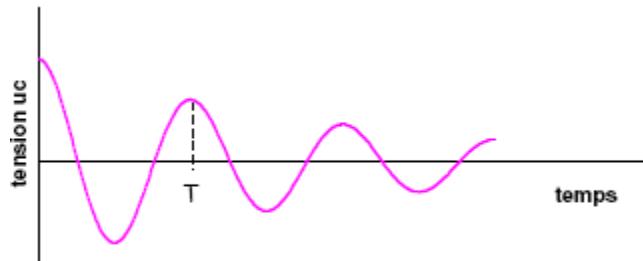
$$\frac{d^2 u_c}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du_c}{dt} + \frac{1}{LC} u_c = 0 \quad (\text{équation différentielle du second ordre sans second membre})$$

## 2. LES DIFFERENTS REGIMES

Il existe une valeur limite ( $R_c = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$  résistance critique) en dessous de laquelle on observe des oscillations amorties.

$R$	$R < R_c$	$R = R_c$	$R > R_c$
régime	Pseudo-périodique	critique	apériodique

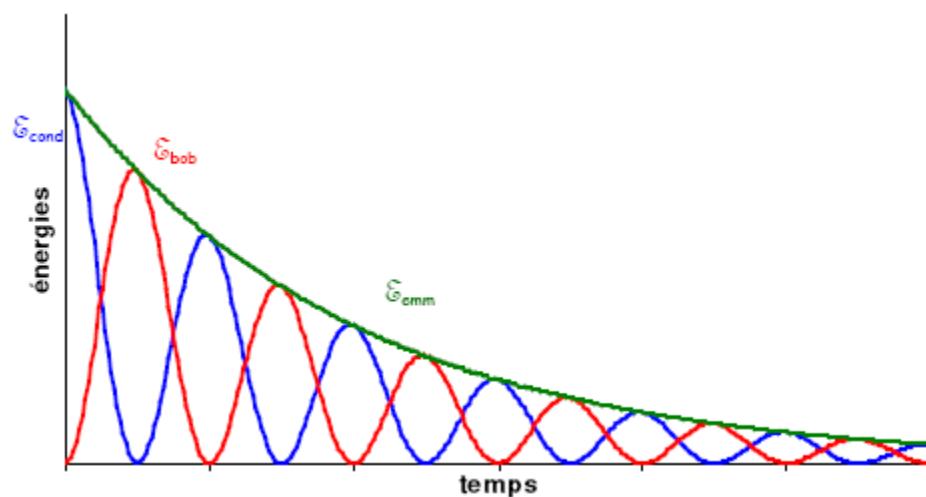
Régime pseudo-périodique : on a une pseudo-période  $T$



Si l'amortissement n'est pas trop important,  $T \approx T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$

## 3. ÉTUDE ENERGETIQUE DU REGIME PSEUDOPERIODIQUE

L'amplitude des oscillations diminue. L'énergie totale emmagasinée diminue : il y a perte d'énergie par effet Joule



$$E = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} + \frac{1}{2} Li^2 \Rightarrow \frac{dE}{dt} = i \left( \frac{q}{C} + L \frac{di}{dt} \right) = -Ri^2 \Rightarrow \boxed{\frac{dE}{dt} = -Ri^2}$$

#### IV. Analogie électromécanique

$$x'' = \frac{d^2x}{dt^2} \text{ et } q'' = \frac{d^2q}{dt^2}$$

SYSTEME		OSCILLATEUR MECANIQUE	CIRCUIT OSCILLANT
Non amorti	Équation différentielle	$x'' + \frac{k}{m}x = 0$	$q'' + \frac{1}{LC}q = 0$
	Pulsation propre	$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$	$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$
	Équation de l'oscillation	$x = x_m \sin(\omega_0 t + \varphi)$	$q = Q_m \sin(\omega_0 t + \varphi)$
	Énergie à l'instant t	$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$ $E = cte$	$E = \frac{1}{2}Li^2 + \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$ $E = cte$
	Autres expressions de l'énergie d'oscillation	Énergie cinétique maximale: $E = \frac{1}{2}mv_m^2$ Énergie potentielle d'élasticité maximale: $E = \frac{1}{2}kx_m^2$	Énergie potentielle magnétique maximale: $E = \frac{1}{2}Li_m^2$ Énergie potentielle électrostatique maximale: $E = \frac{1}{2}\frac{Q_m^2}{C}$
Amorti	Équation différentielle*	$\sum \vec{F} = m \vec{a}$ $-kx - \alpha v = mx''$ $mx'' + \alpha x' + kx = 0$	$\sum u = u_B$ $\frac{q}{C} + Ri = -L \frac{di}{dt}$ $Lq'' + Rq' + \frac{1}{C}q = 0$

\* Les équations données ici à titre indicatif ne donnent pas lieu à une étude détaillée en S<sub>2</sub>. Aucun exercice ne portera donc sur l'amortissement.

Analogie entre les grandeurs mécaniques et électriques	<b>m</b> masse	$\Leftrightarrow$	<b>L</b> inductance
	<b>k</b> coefficient de raideur du ressort	$\Leftrightarrow$	$\frac{1}{C}$ , <b>C</b> capacité du condensateur
	<b>x</b> élongation	$\Leftrightarrow$	<b>q</b> charge électrique
	<b>v</b> vitesse	$\Leftrightarrow$	<b>i</b> intensité
	<b>F</b> force	$\Leftrightarrow$	<b>u</b> tension

# Oscillations électriques forcées en régime sinusoïdal: circuit RLC série

Un circuit RLC en série initialement chargé est le siège d'oscillations électriques libres mais amorties car le circuit dissipe de l'énergie par effet joule. Pour compenser ces pertes d'énergie on peut appliquer une tension sinusoïdale au circuit RLC: on a ainsi des oscillations électriques forcées.

## I. Généralités sur le courant alternatif

### 1. DEFINITION

Un courant alternatif sinusoïdal est un courant dont l'intensité est une fonction sinusoïdale du temps:  $i = I_m \sin(\omega t + \varphi)$  avec:

- $I_m$  intensité maximale
- $\omega$  la pulsation imposée par le générateur
- $\omega t + \varphi$  phase à l'instant  $t$
- $\varphi$  phase à l'origine

### 2. INTENSITE ET TENSION EFFICACES

#### a) Intensité efficace

- l'intensité efficace d'un courant alternatif  $I_{eff}$  est égale à l'intensité  $I$  d'un courant continu qui passant dans un même conducteur de résistance  $R$  y produirait durant chaque période les mêmes effets caloriques:  $W = RI^2T = RI_{eff}T$
- considérons un dipôle AB de Résistance  $R$  parcouru par un courant alternatif sinusoïdal de période  $T$ ; si  $\mathcal{P}$  est la puissance reçue par le conducteur pendant l'intervalle de temps  $dt$ , l'énergie reçue sera égale à  $dW = \mathcal{P}dt = RI^2dt$ . Durant une période  $T$ :

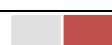
$$W = \int_0^T \mathcal{P}dt = \int_0^T RI^2 dt .$$

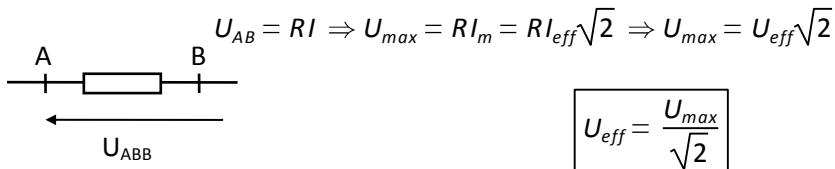
En prenant  $\varphi = 0$  on obtient  $i = I_m \sin(\omega t) \Rightarrow i^2 = I_m^2 \sin^2(\omega t)$  or  $\sin^2(\alpha) = \frac{1-\cos(2\alpha)}{2}$

$$\Rightarrow W = \int_0^T RI_m^2 \sin^2(\omega t) dt = \int_0^T R \frac{I_m^2}{2} (1 - \cos(2\omega t)) dt$$

$$\Rightarrow W = R \frac{I_m^2}{2} \int_0^T dt - R \frac{I_m^2}{2} \int_0^T \cos(2\omega t) dt \Rightarrow W = RI_m^2 \frac{T}{2} \text{ or d'après la définition de } I_{eff} \text{ on a}$$

$$W = RI_{eff}^2 T \Rightarrow W = RI_{eff}^2 T = RI_m^2 \frac{T}{2} \Rightarrow \frac{I_m^2}{2} = I_{eff}^2 \Rightarrow I_{eff} = \boxed{\frac{I_{max}}{\sqrt{2}}}$$



**b) tension efficace**

Remarque: en courant alternatif l'ampèremètre et le voltmètre mesurent les valeurs efficaces, les valeurs maximales sont mesurées par l'oscilloscope.

**3. IMPEDANCE D'UN DIPOLE**

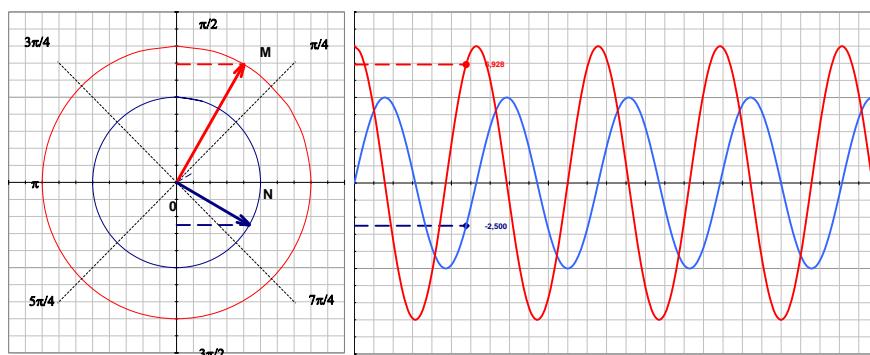
On définit l'impédance d'un dipôle Z le rapport:  $Z = \frac{U_{eff}}{I_{eff}} = \frac{U_{max}}{I_{max}}$  Z s'exprime en ohm( $\Omega$ ) et dépend

de la fréquence du courant alternatif.

L'inverse de l'impédance  $y = \frac{1}{Z}$  est appelé admittance, elle s'exprime en siemens (symbole S)

**II. Représentation de Fresnel d'une valeur sinusoïdale****1. PRINCIPE**

- Considérons un vecteur  $\overrightarrow{OM}$  de module  $a$  qui tourne dans le plan ( $O, \vec{i}, \vec{j}$ ) autour de son origine O avec une vitesse angulaire  $\omega$  constante. Si à  $t = 0$  l'angle  $(\overrightarrow{OM}, \vec{i}) = \varphi$  est la phase à l'origine et à un instant  $t$  quelconque la phase est l'angle  $\omega t + \varphi = (\overrightarrow{OM}, \vec{i})$ . Projetons l'extrémité du vecteur  $\overrightarrow{OM}$  sur l'axe  $\vec{j}$ , la valeur algébrique de la projection est à l'instant  $t$   $y = a \sin(\omega t + \varphi)$



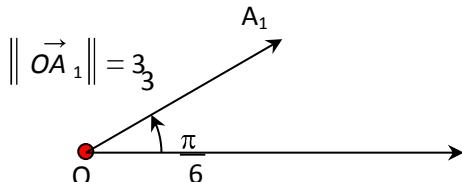
Dans l'exemple:  $\overrightarrow{OM} = 8 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$  et  $\overrightarrow{ON} = 5 \cdot \sin(\omega t)$

- Le mouvement de la projection du vecteur  $\overrightarrow{OM}$  sur l'axe Oy est en mouvement sinusoïdal d'amplitude  $a = \|\overrightarrow{OM}\|$  de pulsation  $\omega$  (vitesse angulaire du vecteur tournant  $\overrightarrow{OM}$ ) et de phase à l'origine  $\varphi = (\overrightarrow{OM}, \vec{i})$  à  $t = 0$ .

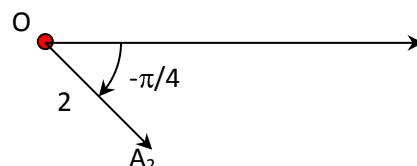
- Réiproquement on peut faire correspondre un vecteur tournant à toute fonction sinusoïdale  $y = a \sin(\omega t + \varphi)$ . Par convention on représente la fonction  $y$  par un vecteur tournant  $\overrightarrow{OM}$  dans sa position initiale.

Exemples: représentons les vecteurs tournant associés aux fonctions sinusoïdales:

$$y_1 = 3 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right) \text{ et } y_2 = 2 \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow \overrightarrow{OA}_1 = \left(3; \frac{\pi}{6}\right) \text{ et } \overrightarrow{OA}_2 = \left(2; -\frac{\pi}{4}\right)$$

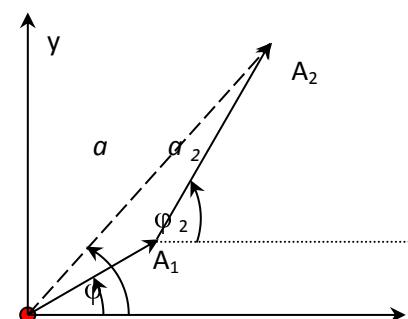
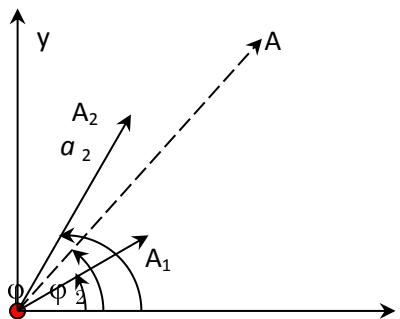


$$\| \overrightarrow{OA}_2 \| = 2$$



## 2. SOMME DE DEUX GRANDEURS SINUSOIDALES DE MEME PULSATION

Soient  $y_1 = a_1 \sin(\omega t + \varphi_1)$  et  $y_2 = a_2 \sin(\omega t + \varphi_2)$ . Déterminons la somme  $y = y_1 + y_2$



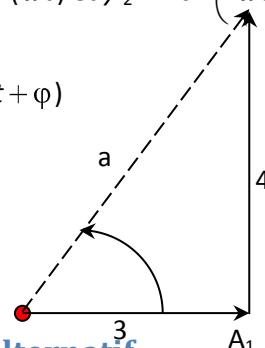
$y = y_1 + y_2 = a \sin(\omega t + \varphi)$  où  $a$  et  $\varphi$  sont des constantes déterminées par le calcul ou graphiquement.

Application: déterminer la somme  $y = y_1 + y_2$  avec  $y_1 = 3 \sin(\omega t)$  et  $y_2 = 4 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$

On pose:  $\| \overrightarrow{OA}_1 \| = 3$ ;  $\| \overrightarrow{OA}_2 \| = 4$  et  $y = y_1 + y_2 = a \times \sin(\omega t + \varphi)$

$$a = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

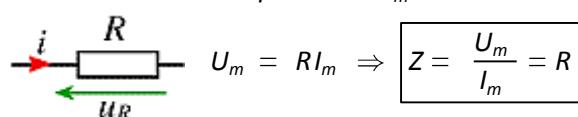
$$\tan \varphi = \frac{4}{3} \Rightarrow \varphi = 0,93 \text{ rad d'où } y = 5 \times \sin(\omega t + 0,93)$$



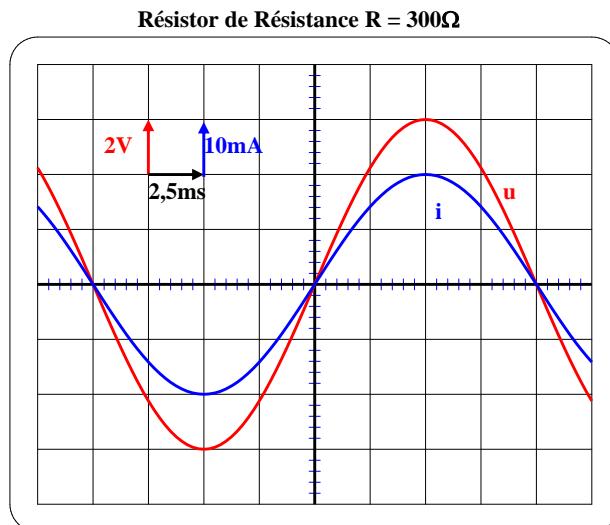
## III. Étude de quelques dipôles en courant alternatif

### 1. RESISTOR

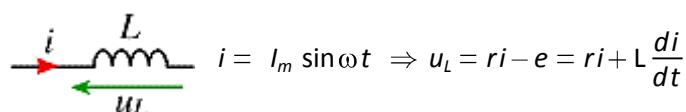
On pose  $i = I_m \sin \omega t$  donc  $u = Ri = RI_m \sin \omega t = U_m \sin \omega t$  avec



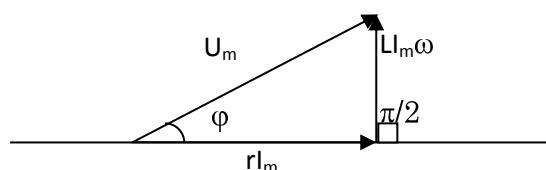
$i$  et  $u$  sont en phase, le déphasage  $\varphi = 0$



## 2. BOBINE( $R; L$ )



$$u_L = rI_m \sin \omega t + LI_m \omega \sin \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right) = U_m \sin(\omega t + \varphi)$$

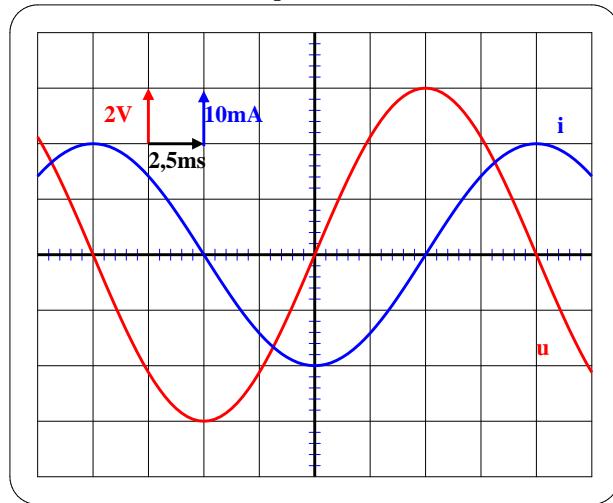


Théorème de Pythagore:  $U_m^2 = r^2 I_m^2 + L^2 I_m^2 \omega^2$  d'où l'impédance:  $Z = \frac{U_m}{I_m} = \sqrt{r^2 + L^2 \omega^2}$  et

$$\tan \varphi = \frac{L \omega I_m}{r I_m} = \frac{L \omega}{r} \Rightarrow \boxed{\tan \varphi = \frac{L \omega}{r}}$$

$u$  et  $i$  sont déphasés:  $u$  est en avance de  $\varphi$  sur  $i$

Remarque: le terme  $L\omega$  est appelé **réactance d'induction**. Elle s'exprime en  $\Omega$ .

Bobine d'impédance  $L = 0,95\text{H}$ 

On détermine graphiquement le déphasage par la relation:  $\begin{cases} 2\pi \rightarrow T \\ \varphi \rightarrow t \end{cases} \Rightarrow \boxed{\varphi = \frac{2\pi t}{T}}$

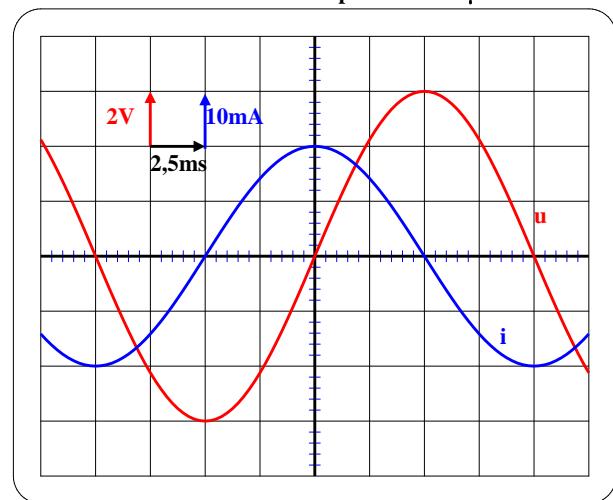
Exemple:  $\varphi = \frac{2\pi \cdot 2}{8} = \frac{\pi}{2}$  (bobine pure  $r=0$ )

### 3. CAPACITE

$$\text{Circuit : } i = I_m \sin \omega t; u_C = \frac{q}{C} = \frac{1}{C} \int i dt = -\frac{I_m}{C\omega} \cos \omega t = \frac{I_m}{C\omega} \sin \left( \omega t - \frac{\pi}{2} \right)$$

on a  $U_m = \frac{I_m}{C\omega}$  d'où  $\boxed{Z = \frac{1}{C\omega}}$

u et i sont déphasés: u est en retard de  $\frac{\pi}{2}$  sur i ( $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ )

Condensateur de capacité  $C = 10\mu\text{F}$ 

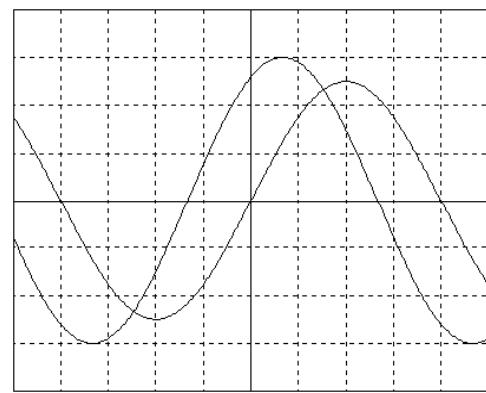
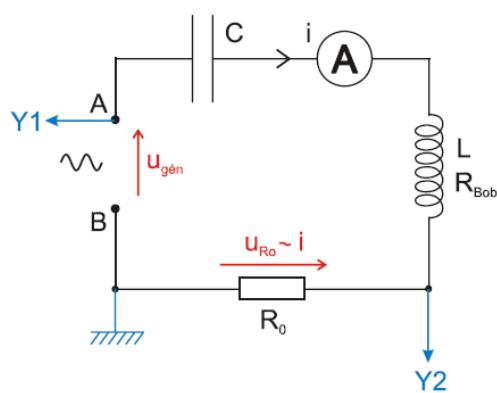
Remarque: la grandeur  $\frac{1}{C\omega}$  s'exprime en  $\Omega$ , elle est appelée **réactance de capacité**.



## IV. Circuit RLC série en régime sinusoïdal forcé

### 1. OSCILLATIONS FORCÉES

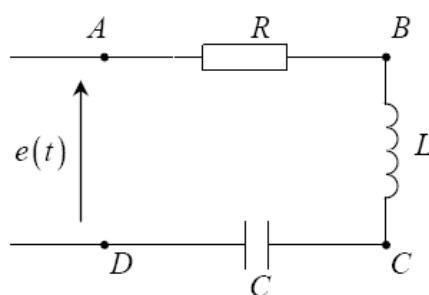
- Excitation:** Un générateur excite un circuit RLC avec une tension alternative sinusoïdale  $u_g$  de fréquence variable.
- Réponse:** Le circuit répond à cette excitation par un courant alternatif d'intensité  $i$ , dont nous visualisons à l'aide de la courbe de  $u_R$ .
- En même temps, nous visualisons les courbes de  $u_g$  (inversée) et  $i$  en fonction du temps à l'aide d'un oscilloscophe.



- les deux sinusoïdes ont la même période et déphasées
- l'une représente la tension imposée par le GBF et l'autre représente les variations de l'intensité du courant ( $u=Ri$ )
- le circuit oscille avec une pulsation imposée par le générateur souvent différente de la pulsation propre  $\omega_0$ : les oscillations sont forcées.

### 2. IMPEDANCE ET DEPHASAGE DU DIPOLE RLC

#### a) équation différentielle



La loi d'additivité des tensions:  $u_{AD} = u_{AB} + u_{BC} + u_{CD}$

$$u_{AB} = Ri = R \frac{dq}{dt}; u_{BC} = -e = L \frac{di}{dt} = L \frac{d^2q}{dt^2}; u_{CD} = \frac{q}{C}$$

$$\Rightarrow e(t) = L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C}$$

équation différentielle d'un circuit RLC

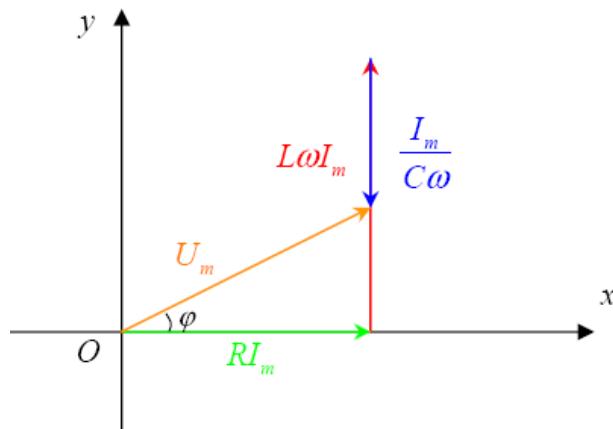
**b) impédance du circuit RLC**

$$e(t) = L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} \Rightarrow e(t) = L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int idt$$

on pose  $i = I_m \sin \omega t$  et  $e(t) = U_m \sin(\omega t + \varphi)$

$$\frac{di}{dt} = I_m \omega \cos \omega t = I_m \omega \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right); \int idt = -\frac{I_m}{\omega} \cos \omega t = \frac{I_m}{\omega} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$e(t) = L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int idt \Rightarrow U_m \sin(\omega t + \varphi) = L I_m \omega \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) + R I_m \sin \omega t + \frac{I_m}{C \omega} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$



Théorème de Pythagore:  $U_m^2 = (RI_m)^2 + \left(L\omega I_m - \frac{I_m}{C\omega}\right)^2 \Rightarrow U_m = I_m \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$  d'où

$$\text{l'impédance: } Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$$

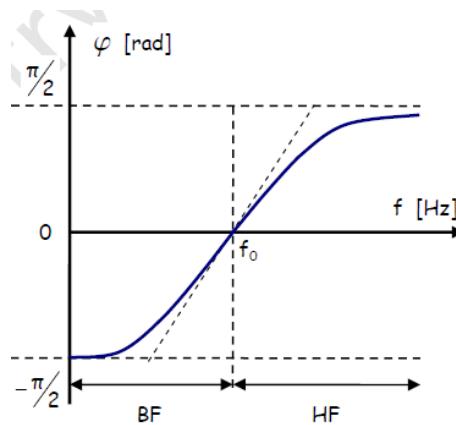
Remarque: le terme  $L\omega - \frac{1}{C\omega}$  est appelé **réactance** du circuit RLC.

**c) déphasage**

$$\cos \varphi = \frac{RI_m}{U_m} = \frac{RI_m}{ZI_m} = \frac{R}{Z} \Rightarrow \boxed{\cos \varphi = \frac{R}{Z}}$$

$$\tan \varphi = \frac{L\omega I_m - \frac{I_m}{C\omega}}{RI_m} \Rightarrow \boxed{\tan \varphi = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R} = \frac{L}{R} \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega}} \text{ avec } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ pulsation propre}$$





Remarque:

- si  $L\omega > \frac{1}{C\omega}$  ( $\omega > \omega_0$ ) l'effet d'inductance l'emporte sur l'effet de capacité:  $\tan\varphi > 0 \Rightarrow \sin\varphi > 0$  donc  $\varphi > 0$ : u est en avance de φ sur i.
- si  $L\omega < \frac{1}{C\omega}$  ( $\omega < \omega_0$ ) l'effet de capacité l'emporte sur l'effet d'inductance :  $\tan\varphi < 0 \Rightarrow \sin\varphi < 0$  donc  $\varphi < 0$ : u est en retard de φ sur i.
- si  $L\omega = \frac{1}{C\omega}$  ( $\omega = \omega_0$ )  $\tan\varphi = 0 \Rightarrow \sin\varphi = 0$  donc  $\varphi = 0$ : u et i sont phase: c'est la **résonance**.

### 3. RESONANCE D'INTENSITE

Lorsqu'on varie la fréquence du générateur, on observe deux sinusoïdes de même fréquence mais on remarque que l'amplitude de la sinusoïde visualisant i passe par un maximum puis décroît. La fonction  $I=f(\omega)$  ou  $I=f(N)$  passe par un maximum pour  $\omega=\omega_0$ : c'est la résonance d'intensité. On dit que le dipôle RLC est un résonateur et le générateur un excitateur.

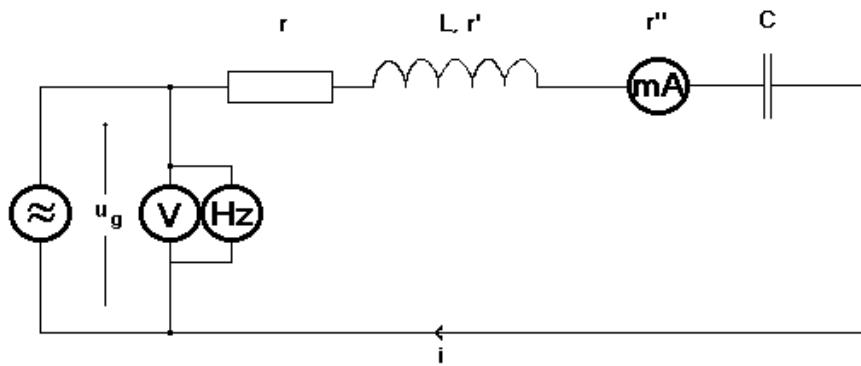
#### Propriétés de la résonance

A la résonance I est maximale ( $I = \frac{U}{Z}$ ) c'est-à-dire donc Z minimale.  $Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$  est minimale si  $L\omega - \frac{1}{C\omega} = 0 \Rightarrow LC\omega^2 = 1 \Rightarrow \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0$ ;  $\omega = \omega_0 \Rightarrow Z=R$  et  $\tan\varphi=0$

A la résonance:

- $\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$
- $Z = R$ : le dipôle se comporte comme un conducteur ohmique de résistance R.
- $\varphi=0$ , u et i sont en phase

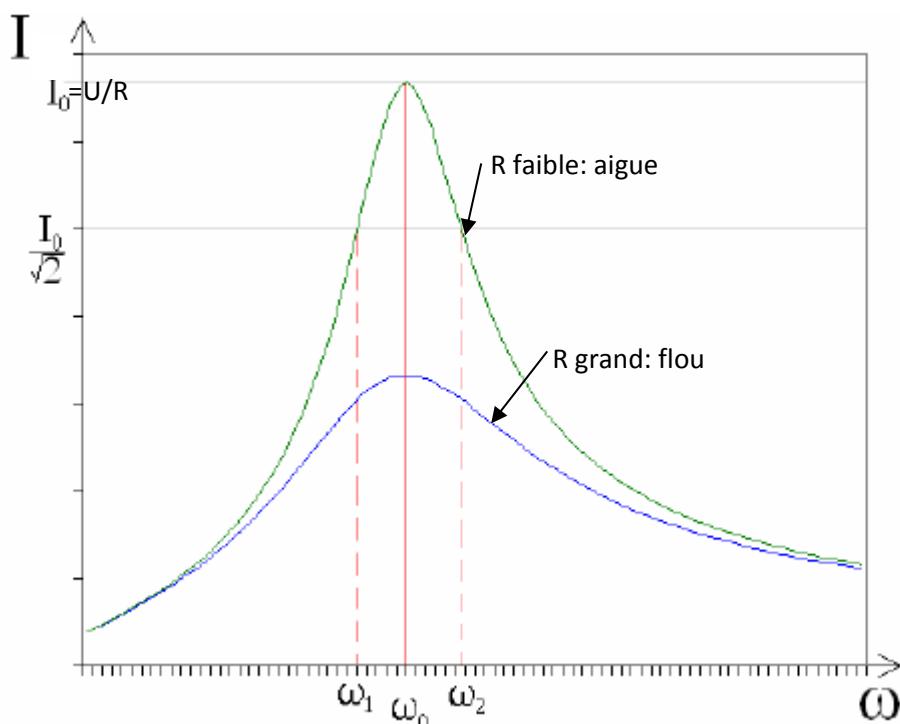
## 4. COURBE DE RESONANCE D'INTENSITE



On pose:  $R = r + r'$

En maintenant  $U$  constante, faisons varier  $\omega$  ou la fréquence  $N$  et relevons à l'aide de l'ampèremètre les différentes valeurs de  $I$ . Traçons la courbe  $I=f(\omega)$

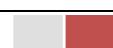
$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}}$$



Cette courbe est appelée courbe de résonance.  $\omega_0 = 2\pi N_0$  est la fréquence de résonance, où  $I$  est à

son maximum  $I_0 = \frac{U}{R}$ .

L'intensité du courant est nulle à fréquence nulle (à cause du condensateur) et à fréquence infinie (à cause de l'inducteur).



### 5. BANDE PASSANTE

La bande passante à "trois décibels", ou encore à 3dB, du dipôle RLC est l'intervalle de fréquence pour lequel  $I \geq \frac{I_0}{\sqrt{2}}$ . Les pulsations  $\omega_1$  et  $\omega_2$ , limites de la bande passante à 3dB, sont telles que:

$I(\omega_1) = I(\omega_2) = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$ . La largeur de la bande passante à 3 dB est égale à:  $\boxed{\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1}$ .

$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}} = \frac{U}{R \sqrt{1 + \left(\frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}\right)^2}} = \frac{I_0}{\sqrt{1 + \left(\frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}\right)^2}}$$

$\omega_1$  et  $\omega_2$  sont définis par  $I(\omega) = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$  on a donc:

$$\sqrt{1 + \left(\frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}\right)^2} = \sqrt{2} \Rightarrow \left(\frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}\right)^2 = 1 \Rightarrow \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R} = \pm 1$$

$$L\omega - \frac{1}{C\omega} = R \quad (1) \quad \text{ou} \quad L\omega - \frac{1}{C\omega} = -R \quad (2)$$

$$(1) \Rightarrow LC\omega^2 - RC\omega - 1 = 0 \Rightarrow \Delta = R^2 C^2 + 4LC > 0 \Rightarrow$$

$$\omega = \frac{RC + \sqrt{\Delta}}{2LC} \text{ et } \omega' = \frac{RC - \sqrt{\Delta}}{2LC} \text{ (à rejeter car négatif)}$$

$$(2) \Rightarrow LC\omega^2 + RC\omega - 1 = 0 \Rightarrow \Delta = R^2 C^2 + 4LC > 0 \Rightarrow$$

$$\omega'' = \frac{-RC + \sqrt{\Delta}}{2LC} \text{ et } \omega''' = \frac{-RC - \sqrt{\Delta}}{2LC} \text{ (à rejeter car négatif)}$$

$$\text{On a donc } \omega_1 = \frac{-RC + \sqrt{\Delta}}{2LC} \text{ et } \omega_2 = \frac{RC + \sqrt{\Delta}}{2LC} \text{ et enfin } \omega_2 - \omega_1 = \frac{2RC}{2LC} \Rightarrow \boxed{\Delta\omega = \frac{R}{L}}$$

$$\text{On a aussi } \Delta\omega = 2\pi\Delta N \Rightarrow \boxed{\Delta N = \frac{R}{2\pi L}}$$

La largeur de la bande passante ne dépend que des caractéristiques du dipôle RLC.

### 6. FACTEUR DE QUALITE

L'acuité des courbes de résonances est caractérisée par le facteur de qualité Q du circuit.

$$\boxed{Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}} \Rightarrow \boxed{Q = \frac{1}{RC\omega_0}} \text{ (sans unité)}$$

Plus Q est petit, plus la courbe est large et que le circuit est moins sélectif. La valeur du facteur de qualité est d'autant plus grande que la résistance totale du circuit est petite.

$$Q = \frac{\sqrt{\frac{L}{C}}}{R} \quad (\text{à ne pas confondre avec la charge du condensateur!})$$

### 7. PHENOMENE DE SURTENSION

La tension maximale du condensateur à la résonance est  $U_c = \frac{I_0}{C\omega_0}$  or  $I_0 = \frac{U}{R}$

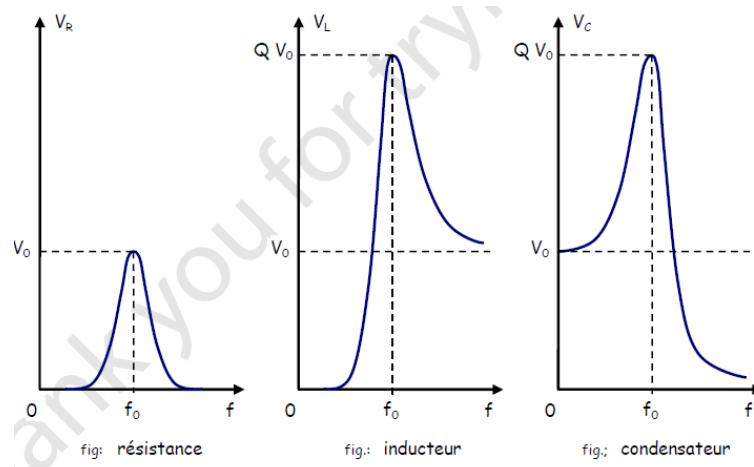
$$\Rightarrow U_c = \frac{U}{RC\omega_0} \Rightarrow \boxed{U_c = QU}$$

La tension maximale aux bornes de la bobine à la résonance est:  $U_b = L\omega_0 I_0 = L \frac{U}{R} \omega_0 \frac{\omega_0}{\omega_0}$

$$\Rightarrow U_b = \frac{U}{RC\omega_0} \Rightarrow \boxed{U_b = QU}$$

On observe un phénomène de surtension aux bornes du condensateur et de la bobine à la résonance. L'amplitude  $U_c$  de la tension aux bornes du condensateur est très supérieure à celle délivrée par le générateur.

Les amplitudes de tension efficace en fonction de la fréquence sont représentées qualitativement ci-dessous:



## V. Puissance en courant alternatif

### 1. PUISSANCE INSTANTANEE

La définition de la puissance instantanée reçue par un dipôle est la même que celle de la puissance en régime continu. Pour un dipôle (AB) quelconque, la puissance instantanée reçue est définie par:

$$\boxed{p(t) = u_{AB}(t)i_{AB}(t)}$$

en régime sinusoïdal, on a  $i(t) = I_m \cos(\omega t)$  et  $u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi)$ , on a donc:

$$\boxed{p(t) = U_m I_m \cos(\omega t) \cos(\omega t + \varphi)}$$



$p(t)$  est donnée par le produit de deux fonctions sinusoïdales. On peut utiliser les relations trigonométriques pour se ramener à une somme de sinusoïdes.

$$\begin{cases} \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ \cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b \end{cases} \Rightarrow \cos(a+b) + \cos(a-b) = 2 \cos a \cos b$$

$$\begin{cases} a = \omega t \\ b = \omega t + \varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b = 2\omega t + \varphi \\ a-b = -\varphi \end{cases} \text{ donc on a}$$

$$p(t) = U_m I_m [\cos(2\omega t + \varphi) + \cos(\varphi)]$$

On constate que  $p(t)$  est la somme de deux termes: un terme sinusoïdal mais de fréquence double et un terme constant.

## 2. PUISSANCE MOYENNE

$$\langle p \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{U_m I_m}{2} [\cos(\omega t + \varphi) + \cos \varphi] dt = \frac{U_m I_m}{2} \cos \varphi$$

$$\Rightarrow \langle p \rangle = \frac{U_m I_m}{2} \cos \varphi \quad \text{ou } \langle p \rangle = UI \cos \varphi$$

Cette puissance est appelée puissance active

$$\frac{U_m I_m}{2} = UI: \text{Puissance apparente en VA(volt-Ampère)}$$

$\cos \varphi$ : facteur de puissance (sans unité)

- cas d'un résistor

$$\begin{cases} U_m = RI_m \\ \varphi = 0 \end{cases} \Rightarrow \langle p \rangle = \frac{RI_m^2}{2}$$

On définit les grandeurs efficaces à partir de cette relation: l'intensité efficace est l'intensité qui devrait parcourir R en courant continu pour obtenir le même dégagement de chaleur (même énergie dissipée)

$$I_{eff}^2 = \frac{I_m^2}{2} \Rightarrow I_{eff} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$$

- cas d'une bobine parfaite

$$\begin{cases} U_m = Z_L I_m = L \omega I_m \\ \varphi = +\frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \langle P \rangle = \frac{L \omega I_m^2}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0,$$

on constate donc qu'une bobine parfaite ne consomme pas d'énergie.

- cas d'un condensateur

$$\begin{cases} U_m = Z_C I_m = \frac{I_m}{C\omega} \\ \varphi = -\frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \langle P \rangle = \frac{I_m^2}{2C\omega} \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0,$$

un condensateur ne consomme pas d'énergie.

Attention, la puissance instantanée reçue par un condensateur ou une bobine n'est toujours pas nulle.

$$p_L(t) = \frac{U_m I_m}{2} \cos\left(2\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ et } p_C(t) = \frac{U_m I_m}{2} \cos\left(2\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

Lorsqu'une bobine et un condensateur sont en série dans un circuit, leurs puissances sont en opposition de phase. Quand  $p_L(t)$  est à son maximum,  $p_C(t)$  est à son minimum, et inversement.

Dans un circuit RLC, la bobine et le condensateur vont échanger de l'énergie. Ces échanges d'énergie seront d'autant plus forts que la pulsation imposée par le GBF sera proche de la fréquence propre du circuit  $f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$  : c'est le phénomène de résonance.

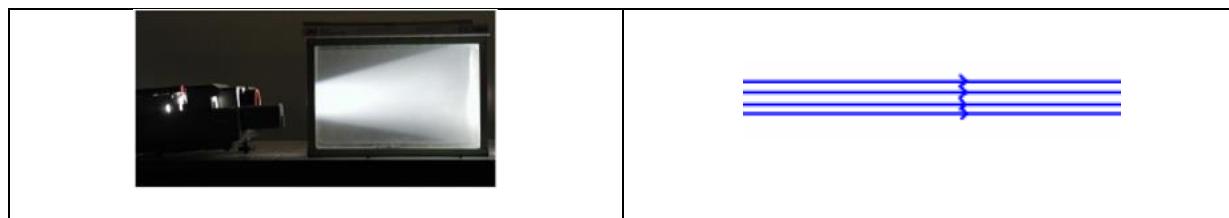


# Interférences lumineuses

## I. Modèle du rayon lumineux

### 1. OPTIQUE GEOMETRIQUE

Dans un milieu transparent, homogène et isotrope, la lumière se propage en ligne droite. Le rayon lumineux est un modèle qui représente le trajet suivi par la lumière.

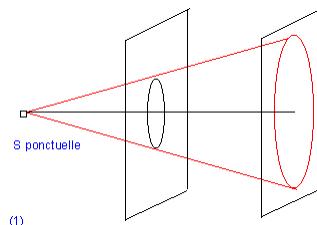


### 2. LIMITE DE L'OPTIQUE GEOMETRIQUE

Dirigeons un faisceau lumineux sur un écran portant une ouverture.

- OUVERTURE DE GRANDE DIMENSION : PHENOMENE DE DIAPHRAGME

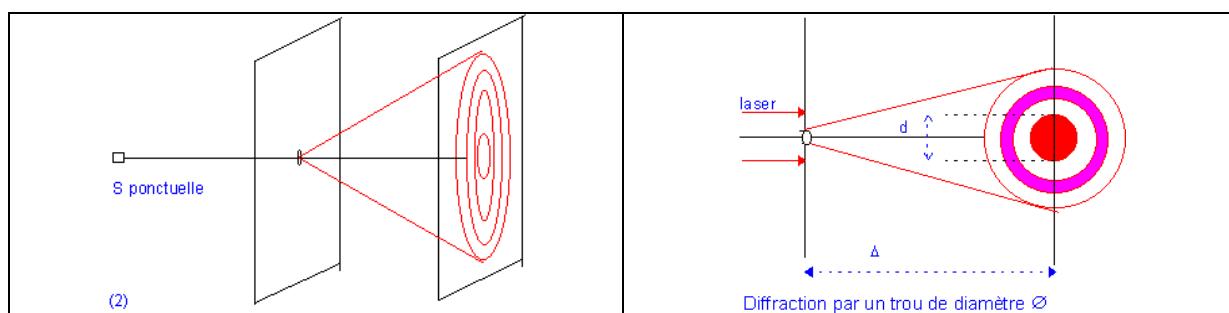
La lumière épouse la forme de la fente à sa traversée : on dit qu'elle est diaphragmée par la fente.



- OUVERTURE DE QUELQUE MILLIMETRE : PHENOMENE DE DIFFRACTION

Pour isoler un rayon lumineux on peut réduire la fente ou le diamètre de l'ouverture circulaire.

Réalisons l'expérience suivante:

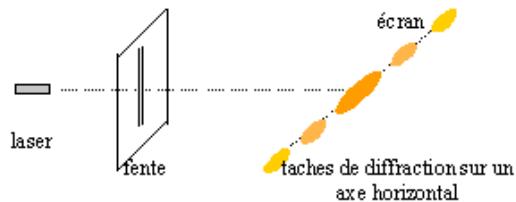


On observe sur l'écran une figure de diffraction. Ce phénomène se produit lorsque l'ouverture par laquelle passe la lumière est de petite taille. On dit que l'ouverture a diffracté (émet dans toutes les directions) la lumière du laser.

Remarque:

- Plus l'ouverture est petite, plus le phénomène de diffraction est marqué.

- Le phénomène de diffraction met en défaut le principe de propagation rectiligne de la lumière dans un milieu homogène. Le concept de rayon lumineux apparaît comme une approximation consistant à négliger le phénomène de diffraction.
- Si l'ouverture est une fente, on observe la figure ci-contre.



## II. Modèle ondulatoire de la lumière

De façon générale, la lumière peut-être considérée comme une onde électromagnétique. En particulier, la lumière émise par le laser peut-être décrite comme **une onde électromagnétique sinusoïdale de fréquence donnée**.

### 1. PROPAGATION

La lumière se propage dans le vide, et dans les milieux transparents (air, eau, gaz, verre, etc.). Dans le vide, la célérité de la lumière est  $c = 299\ 792\ 458\ \text{m.s}^{-1}$  (on retiendra  $c \approx 3 \cdot 10^8\ \text{m.s}^{-1}$ ).

Remarque:

- La célérité de la lumière dans le vide ne dépend pas de la fréquence de l'onde.
- La célérité de la lumière dans l'air est pratiquement égale à celle dans le vide ( $c_{\text{air}} \approx c_{\text{vide}}$ ).
- Dans un milieu matériel transparent, la vitesse  $v$  est inférieure à  $C$  :

$$v = \frac{C}{n} \quad \text{avec } n > 1 \quad (\text{indice de réfraction du milieu}).$$

### 2. LES PERIODICITES

Une onde lumineuse a une double périodicité

- une périodicité temporelle  $T$
- une périodicité spatiale, de période  $\lambda$  appelé longueur d'onde.

La fréquence notée  $v$  pour une onde lumineuse, caractérise la périodicité temporelle et ne dépend que du milieu :  $v = \frac{1}{T}$

La longueur d'onde  $\lambda_0$  dans le vide ou dans l'air et la fréquence  $v$  sont liées par l'expression :

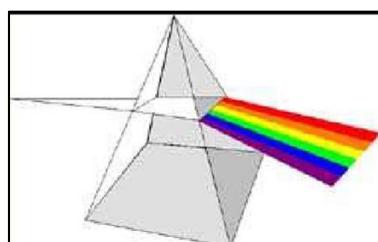
$$\lambda_0 = CT = \frac{C}{v}$$

Remarque : la diffraction d'une onde par une ouverture se manifeste lorsque les dimensions de celle-ci sont de l'ordre de la longueur d'onde.

### III. Couleur et longueur d'onde

#### 1. LUMIERE POLYCHROMATIQUE

La lumière blanche peut être décomposée à l'aide d'un prisme en plusieurs lumières colorées. La lumière blanche est polychromatique (constituée de plusieurs couleurs).



#### 2. LUMIERE MONOCHROMATIQUE

Définition : On appelle lumière monochromatique une onde électromagnétique progressive sinusoïdale de fréquence donnée. La couleur de cette lumière est liée à la valeur de sa fréquence.

#### 3. LUMIERE VISIBLE

Définition : On appelle lumière une onde électromagnétique visible par l'oeil humain.

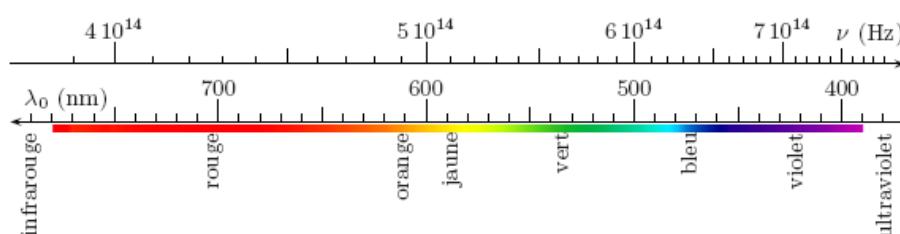
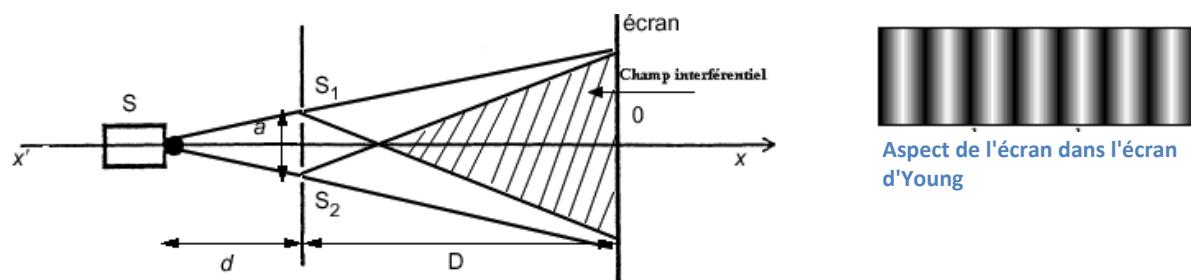
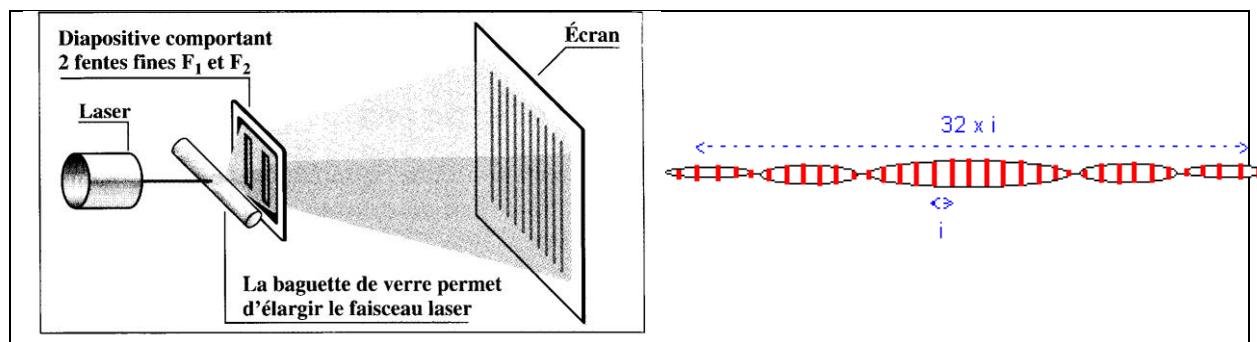


FIG. 1.1 – Fréquences et longueurs d'onde dans le vide de la lumière.

### IV. Interférences lumineuses : Expérience de la double fente de Young

#### 1. MISE EN EVIDENCE DES INTERFERENCES LUMINEUSES





## 2. OBSERVATIONS

On observe sur l'écran E une tâche de diffraction striée de fines bandes sombres (ou franges) rectilignes, parallèles, équidistantes et de direction normale à la direction  $S_1S_2$ . L'ensemble des franges alternativement claires et sombres constituent des franges d'interférences.

## 3. INTERPRETATION THÉORIQUE

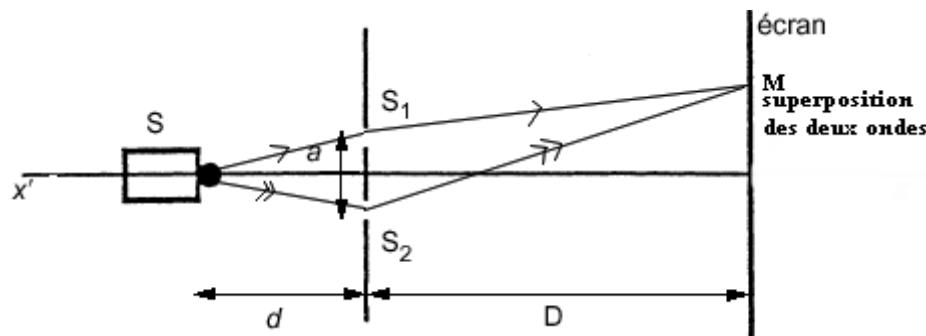
Pour expliquer les résultats de l'expérience, il faut considérer le caractère ondulatoire de la lumière

### Interférences constructives et destructives

En un point M d'une frange brillante se superposent les ondes lumineuses issues des fentes  $S_1$  et  $S_2$ , arrivant en phase : les interférences sont *constructives*.

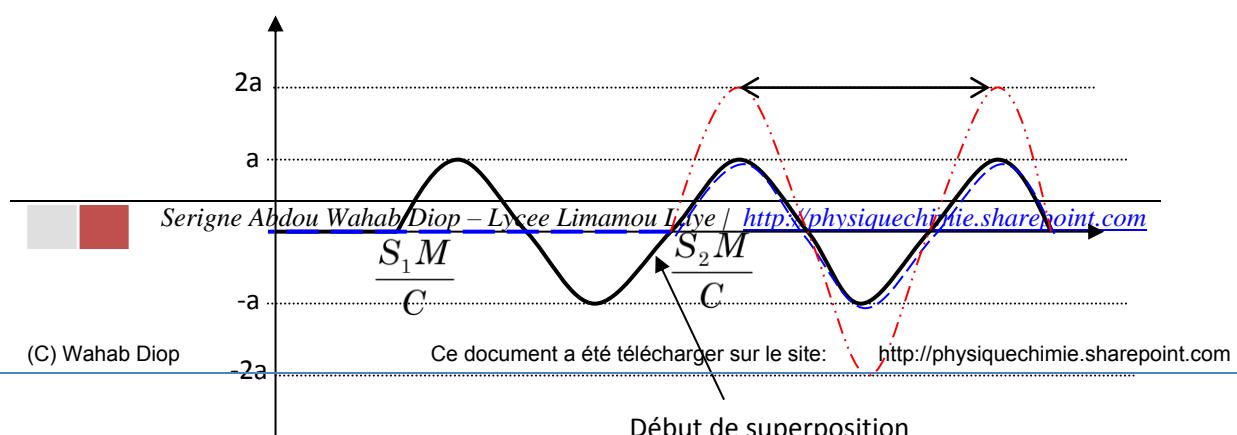
En un point M d'une frange sombre se superposent les ondes lumineuses issues des fentes  $S_1$  et  $S_2$ , arrivant en opposition de phase : les interférences sont *destructives*.

### Déférence de marche : ordre d'interférence



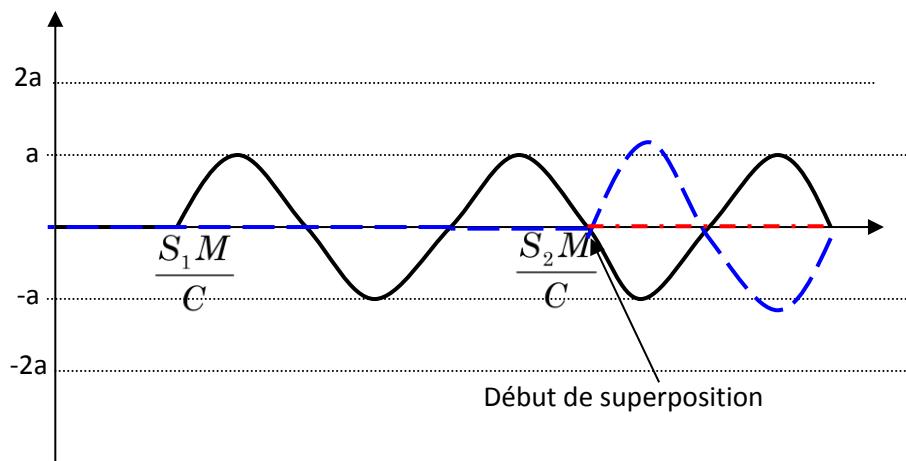
La différence de marche  $\delta$  des ondes issues de  $S_1$  et  $S_2$  au point d'observation M est :

$$\delta = (SS_2 + S_2M) - (SS_1 + S_1M) \text{ or } SS_1 = SS_2, \text{ alors } \boxed{\delta = S_2M - S_1M}$$



$$(\Delta t)_m = \frac{S_2 M}{C} - \frac{S_1 M}{C} = kT \Rightarrow (S_2 M) - (S_1 M) = k\lambda \text{ avec } k \text{ un entier quelconque (ordre d'interférence)}$$

En un point brillant :  $\delta = k\lambda$  avec  $k=0, 1, 2, \dots$



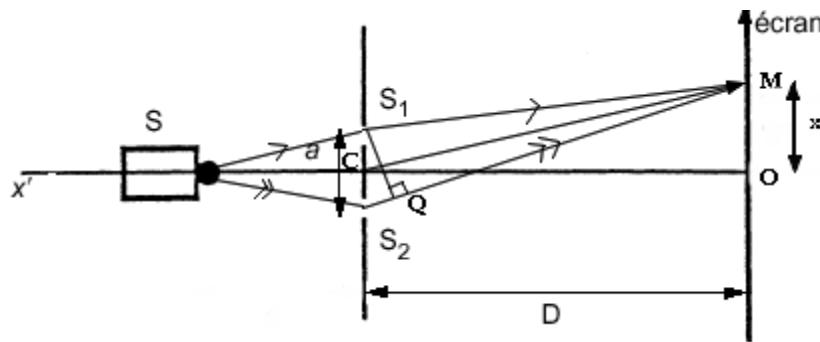
$$(\Delta t)_m = \frac{S_2 M}{C} - \frac{S_1 M}{C} = kT + \frac{T}{2} \Rightarrow (S_2 M) - (S_1 M) = \left(k + \frac{1}{2}\right)\lambda \text{ avec } k \text{ ordre d'interférence}$$

En un point sombre  $\delta = \left(k + \frac{1}{2}\right)\lambda$

En résumé :  $\begin{cases} \delta = k\lambda \Rightarrow \text{frange claire} \\ \delta = \left(k + \frac{1}{2}\right)\lambda \Rightarrow \text{frange sombre} \end{cases}$

#### Position des franges sombres et claires

#### Première méthode:



$$\text{On a } S_1M = QM \text{ et } \delta = S_2Q$$

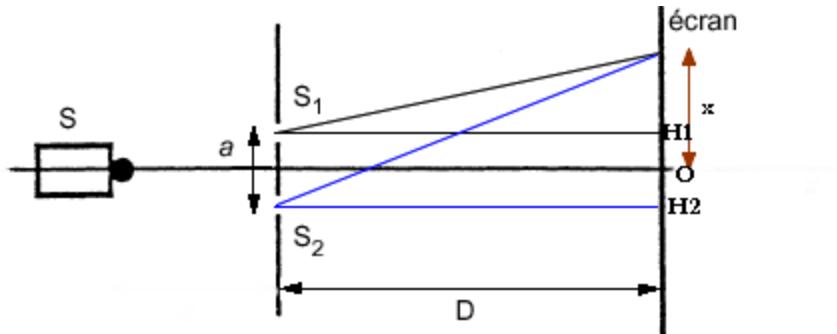
Les angles  $\widehat{S_2S_1Q} = \widehat{OCM}$  sont égaux. Puisque les angles sont petits, on a

$$\sin(\widehat{S_2S_1Q}) = \tan(\widehat{OCM}) \text{ approximativement } \frac{\delta}{a} = \frac{x}{D} \Rightarrow \delta = \frac{x a}{D}$$

$$\delta = \frac{ax}{D} = k\lambda \Rightarrow x = \frac{k\lambda D}{a} \text{ pour les franges claires}$$

$$\delta = \frac{ax}{D} = \left(k + \frac{1}{2}\right)\lambda \Rightarrow x = \frac{\left(k + \frac{1}{2}\right)\lambda D}{a} \text{ pour les franges sombres}$$

### Deuxième méthode



$\boxed{\delta = S_2M - S_1M}$  En appliquant le théorème de Pythagore dans les triangles  $S_1MH_1$  et  $S_2MH_2$  on a:

$$(S_2M)^2 = S_2H_2^2 + H_2M^2 = D^2 + \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 \text{ et } (S_1M)^2 = S_1H_1^2 + H_1M^2 = D^2 + \left(x - \frac{a}{2}\right)^2$$

$$(S_2M)^2 - (S_1M)^2 = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 = 2ax$$

Les distances  $S_1M$  et  $S_2M$  étant voisines de  $D$  (car  $D \gg a$  et  $D \gg x$ )  $\Rightarrow$

$$(S_2M)^2 - (S_1M)^2 = (S_2M - S_1M)(S_2M + S_1M) \Rightarrow (S_2M - S_1M) = [(S_2M)^2 - (S_1M)^2]/(S_2M + S_1M)$$

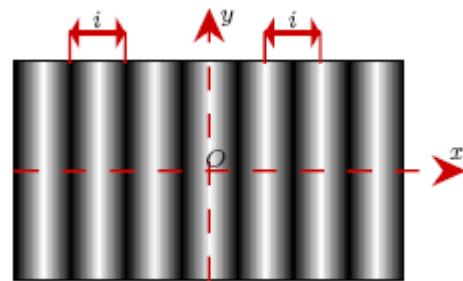


$$(S_2M - S_1M) = \frac{2ax}{2D} = \frac{ax}{D} = \delta \Rightarrow \boxed{\delta = \frac{ax}{D}}$$

### Interfranges

La distance  $i$  entre les milieux de deux franges brillantes consécutives est la même qu'entre deux franges sombres consécutives: cette distance est appelée interfrange.

$$i = (\lambda + 1) \frac{D}{a} - \lambda \frac{D}{a} = \lambda \frac{D}{a} \Rightarrow \boxed{i = \lambda \frac{D}{a}}$$



### Conditions d'interférence

Pour obtenir des interférences lumineuses, les sources doivent être mutuellement cohérentes. Pour cela les sources doivent obéir à deux conditions:

- elles doivent être synchrone, c'est-à-dire avoir la même fréquence et la même amplitude
- elles doivent présenter entre elles un déphasage constant.

### Ordre d'interférence

L'ordre d'interférence en un point M de l'écran où la différence de marche  $\delta$  est définie par :

$$p = \frac{\delta}{\lambda} \text{ où } \lambda \text{ est la longueur d'onde de la radiation.}$$

- Si le point M est le milieu d'une frange brillante, on a alors :

$$p = \frac{\delta}{\lambda} \text{ or } \delta = k\lambda \leftrightarrow p = \frac{\delta}{\lambda} = k : \text{Les franges brillantes ont un ordre d'interférence entier.}$$

- Si le point M est le milieu d'une frange sombre on a alors :

$$p = \frac{\delta}{\lambda} \text{ or } \delta = \frac{(2k+1)}{2}\lambda \leftrightarrow p = \frac{\delta}{\lambda} = k + \frac{1}{2} : \text{Les franges sombres ont un ordre d'interférence demi-entier.}$$

## 4. INTERFÉRENCES EN LUMIÈRE BLANCHE

### a) Spectre de la lumière blanche

La dispersion de la lumière blanche (lumière du soleil) par un prisme montre que celle-ci est formée d'une infinie de radiations allant du rouge au violet et présentant toutes les couleurs de l'arc-en-ciel ; l'ensemble de ces radiations (couleurs) constitue le spectre de la lumière blanche.

Ces radiations ne sont pas séparées : On dit que le spectre de la lumière blanche est un spectre continu; elle est donc constituée de toutes les radiations qui apparaissent dans l'arc-en-ciel.

### b) Franges en lumière blanche

Remplaçons la source de la lumière monochromatique (laser) dans l'expérience des fentes de Young précédente par une source de lumière blanche.

Nous observons sur l'écran une frange centrale brillante, blanche. Et de part et d'autre de la frange centrale blanche, quelques franges irisées (colorées) et un peu plus loin l'écran devient uniformément blanchâtre.

### c) Interprétations

La lumière blanche étant constituée par un mélange de toutes les radiations visibles allant de  $(0,4\mu\text{m}) < \lambda \text{ visible} < (0,8\mu\text{m})$ , l'éclairement de l'écran résulte de la superposition des systèmes de franges donnée par chaque lumière monochromatique.

Au centre O de l'écran, l'existence de la frange centrale blanche est due à la superposition de franges brillantes de couleurs différentes.

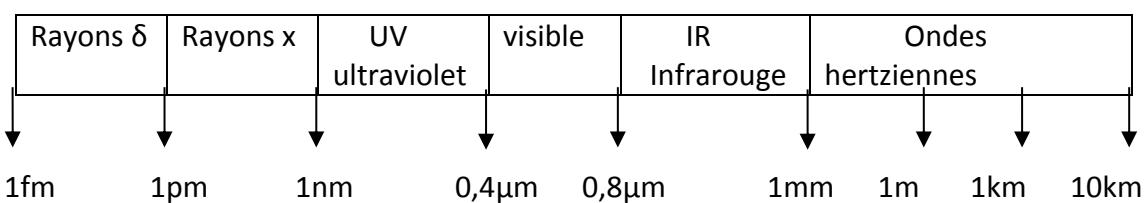
Lorsqu'on s'écarte de O, comme  $i = \frac{\lambda D}{a}$  dépend de  $\lambda$ , les systèmes de franges ne coïncident plus. A proximité de O, on voit quelques franges brillantes irisées.

Au-delà d'une distance plus grande de la frange centrale, la superposition des diverses franges est tellement complexe que l'œil ne voit plus que du blanc grisâtre appelé blanc d'ordre supérieur. Lorsqu'on analyse ce blanc au spectroscope, on voit des bandes noires qui correspondent aux radiations manquantes et que l'on désigne sous le nom de cannelures : on parle pour cette raison de spectre cannelé.

**Remarque :** Les radiations manquantes en un point donné sont celles qui y présentent une frange obscure donc celles pour lesquelles au point considéré  $S = (2K+1) \frac{\lambda}{2}$ .

### d) Domaine des ondes électromagnétiques

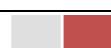
L'observation de franges d'interférences à partir d'une source de lumière (onde électromagnétique) permet de calculer la longueur d'onde  $\lambda$  (en m) de cette source en mesurant l'interfrange. La connaissance de  $\lambda$  permet d'identifier cette source et de préciser sa place sur l'échelle des ondes électromagnétiques.



### CONCLUSION

Le phénomène d'interférences lumineuses n'est pas seulement une preuve du caractère ondulatoire de la lumière, mais c'est aussi une méthode de mesure physique de longueur d'onde d'une source monochromatique.

Application: Hologramme



L'hologramme est une méthode qui permet d'obtenir une image en trois dimensions d'un objet à partir d'un enregistrement sur plaque photographique. L'enregistrement est obtenu par des interférences de la lumière provenant directement du laser et de la lumière diffusée par l'objet éclairé avec le même laser. Eclairée par cette même lumière, l'enregistrement restitue une image virtuelle en trois dimensions.

#### Exercice d'application

La lumière issue d'une fente source horizontale S éclaire un plan vertical P portant 2 fentes très fines  $S_1$  et  $S_2$  horizontales et distantes de 3 mm.  $S_1$  et  $S_2$  sont équidistantes de S. Sur un écran E placé à 3 mètres du plan des fentes  $S_1$  et  $S_2$ , on observe des franges d'interférences.

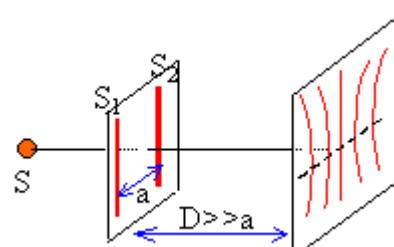
- 1 Faire un schéma du dispositif
- 2 Quelle est la direction des franges observées ?
- 3 Entre la 10ème frange brillante située au dessus de la frange centrale et la 10ème frange brillante située au dessous de la frange centrale, on mesure 11,8 mm. Quelle est la longueur d'ondes de la lumière monochromatique utilisée? Quelle est sa fréquence?
- 4 On remplace la source monochromatique précédente par une source qui émet 2 longueurs d'onde: 467 nm et 700nm. Chacune de ces longueurs d'onde donne son système de franges. Que voit-on au centre de la figure d'interférences? pourquoi? A quelle distance minimale de la frange centrale pourra-t-on observer la superposition des franges brillantes des deux radiations ?
- 5 La lampe utilisée est maintenant une lampe à halogène qui émet une lumière blanche dont la composition spectrale est proche de celle qu'émet le Soleil. Que peut-on observer au centre de l'écran ?

#### Corrigé:

franges parallèles aux fentes sources

interfrange noté  $i$  (m) : distance séparant deux franges consécutives de même nature

$i = \text{longueur d'onde } n \text{ m} \text{ fois distance à l'écran } D \text{ ( m) divisé par distance des fentes } a \text{ ( m)}$



la frange centrale est brillante, elle correspond à une différence de marche nulle

20 interfranges correspondent à 11,8 mm = 0,00118 m

$$i = 11,8 / 20 = 0,59 \text{ mm} = 0,59 \cdot 10^{-3} \text{ m} = \text{longueur d'onde} * 3 / 0,003$$

$$n \text{ m} = 0,59 \cdot 10^{-3} * 0,003 / 3 = 590 \text{ nm. fréquence(Hz)} = \text{célérité (m/s) divisée par longueur d'onde nm} = 3 \cdot 10^8 / 5,9 \cdot 10^{-7} = 5 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$$

chaque radiation donne un système de franges d'interférences.

pour chaque système la frange centrale est brillante

$$i_1 = 467 \cdot 10^{-9} \cdot 3 / 0,003 = 0,467 \text{ mm} = 467 \text{ nm}$$

$$\text{et } i_2 = 700 \cdot 110^{-9} \cdot 3 / 0,003 = 700 \text{ nm}$$

chercher le plus petit multiple commun à  $i_1$  et  $i_2$ .

---

Les radiations monochromatiques constituant la source sont indépendantes : elles ne peuvent pas interférer même lorsque leurs longueurs d'onde sont voisines.

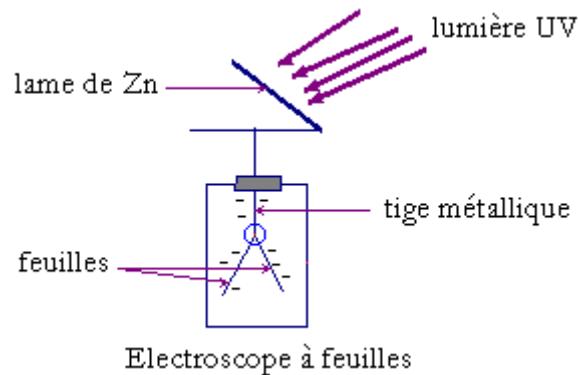
La frange centrale commune à toutes les radiations est blanche, son spectre est celui de la source.

La figure d'interférences résulte de la superposition d'une infinité de figures d'interférences.

# Effet photoélectrique

## I. Mise en évidence de l'effet électrique

### 1. EXPERIENCE DE HERTZ (1887)



On envoie un faisceau de lumière riche en rayons ultraviolet sur une lame de zinc reliée à un électroscopie initialement chargé, on constate que:

- Si l'électroscopie est chargé positivement: il ne se passe rien (les feuilles restent écarter)



- Si l'électroscopie est chargé négativement il se décharge (les feuilles retombent): l'électroscopie se décharge.
- Si on interpose sur le trajet de la lumière une lame de verre le phénomène ne se produit plus.

## 2. ANALYSE DE L'EXPERIENCE

Lorsque la lame de zinc et le plateau de l'électroscopie sont chargés négativement, ils portent un excédent d'électrons. Quand la lame est exposée à la lumière, des électrons sont arrachés du métal: c'est l'effet photoélectrique.

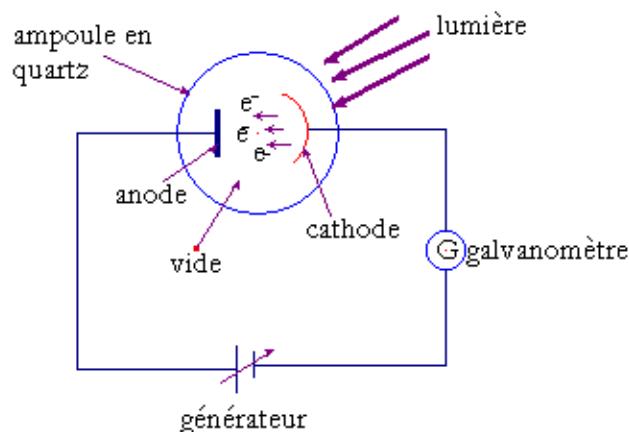
- si l'électroscopie est chargé  $\oplus$  on peut considérer que les électrons extraits sont réattirés par la lame.
- Si l'électroscopie est chargé négativement, les électrons extraits sont repoussés par la lame qui se charge  $\oplus$ . Les charges négatives portées par l'électroscopie viennent neutraliser les charges positives de la lame donc l'électroscopie se décharge et les feuilles tombent.
- L'électroscopie est chargé négativement, si on intercale une lame de verre sur le trajet de la lumière, celui-ci ne se décharge pas car le verre absorbe le rayonnement ultraviolet : l'électroscopie ne se décharge plus même après une illumination prolongée. Seules certaines radiations sont capables de provoquer dans le cas du zinc l'émission d'électrons.

## 3. CONCLUSION

L'effet photoélectrique est l'émission d'électrons par un métal lorsqu'il est éclairé par une lumière convenable.

## 4. CAS DE LA CELLULE PHOTOELECTRIQUE

Lorsqu'elle est éclairée par une lumière convenable la cathode C émet des électrons. Ces électrons sont captés par l'anode A qui est porté à un potentiel positif. Il en résulte dans le circuit extérieur un courant de faible intensité décelé par le galvanomètre G.



## II. Interprétation de l'effet photoélectrique

### 1. HYPOTHESE D'EINSTEIN

Pour extraire un électron dans un métal il faut fournir de l'énergie appelée énergie d'extraction. Einstein interprète l'effet photoélectrique en formulant les hypothèses (ou postulats) suivantes.

- la lumière est constituée par un ensemble de corpuscules, appelés photons, transportant chacun un quantum (des quanta) d'énergie.
- Un photon a une charge nulle et une masse nulle; il se déplace à la vitesse de la lumière, soit  $C \approx 3.10^8 \text{ m/s}$  dans le vide.
- Chaque photon d'un rayonnement monochromatique de fréquence  $\nu$  transporte un quantum d'énergie:  $E = h \cdot \nu = \frac{hC}{\lambda}$  avec  $h$  la constante de Planck ( $h = 6,623 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$ ),  $C$  la vitesse de lumière dans le vide (en m/s) et  $\lambda$  la longueur d'onde dans le vide (en m).  $E$  s'exprime en joule (J).
- L'effet photoélectrique correspond à l'interaction (choc) entre un photon incident et un électron du métal avec transfert de l'énergie du photon à l'électron extrait.

## 2. SEUIL PHOTOELECTRIQUE

L'effet photoélectrique ne se produit que si l'énergie du photon incident  $E = h\nu$  est supérieure au travail d'extraction  $W_0$  d'un électron du métal. ( $W_0 = h\nu_0$  énergie d'extraction qui ne dépend que de la nature du métal).

$\nu_0$  est la fréquence seuil ( $\nu_0 = \frac{C}{\lambda_0}$ ,  $\lambda_0$  la longueur d'onde seuil).

- si l'énergie du photon n'est pas suffisante ( $\nu < \nu_0$  ou  $\lambda > \lambda_0$ ), le photon est réfléchi et l'électron n'est pas éjecté du métal.
- si l'énergie du photon est suffisante ( $\nu > \nu_0$  ou  $\lambda < \lambda_0$ ), toute l'énergie du photon est cédée à l'électron qui sort du métal avec une vitesse d'éjection souvent non nulle.

Évaluons la vitesse d'éjection des électrons de l'atome. Soit  $E_C$  l'énergie cinétique des électrons.

$$E_C = E - W_0 = h(\nu - \nu_0) = hC\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_0}\right)$$

$$\boxed{\frac{1}{2}m(v_{max})^2 = h(\nu - \nu_0) = hC\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_0}\right)}$$

$m$  est la masse d'un électron:  $m = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ .

## 3. PUISANCE D'UN FAISCEAU MONOCHROMATIQUE

Le nombre  $N$  de photons transportés par un seconde par un rayonnement monochromatique de fréquence  $\nu$  est lié à la puissance  $\mathcal{P}$  du faisceau par:  $\mathcal{P} = N \cdot h \cdot \nu$

## III. Dualité onde corpuscule

- certains phénomènes (interférence, diffraction) s'expliquent en considérant que la lumière se comporte comme une onde électromagnétique: c'est la théorie ondulatoire développée par Maxwell et Fresnel au 19<sup>e</sup> siècle.



- d'autres phénomènes par contre (effet photoélectrique, les réactions photochimiques) s'expliquent par la théorie corpusculaire: la lumière a une structure discontinue. Constituée de grains de photons.
- ces deux théories (corpusculaire et ondulatoire) en apparence antagonistes sont incomplètes mais complémentaires. Louis de Broglie en 1923 a eu l'idée d'associer ces deux théories: c'est la théorie de la mécanique quantique. Dans cette théorie la lumière se comporte à la fois comme un flux de particules et comme une onde. A toute onde électromagnétique de fréquence  $\nu$  on associe des photons d'énergie  $E=h\nu$ . Suivant le phénomène physique l'un des aspects de la lumière s'estompe tandis que l'autre s'affirme. Si  $\nu$  est élevée ( $\lambda$  faible) l'aspect corpusculaire l'emporte et si  $\nu$  est faible ( $\lambda$  élevé) l'aspect ondulatoire l'emporte.

### Exercice d'application

Une lumière poly chromatique comprenant 3 radiations ( $\lambda_1=450 \text{ nm}$  ;  $\lambda_2= 610 \text{ nm}$  ;  $\lambda_3=750 \text{ nm}$ ) irradie un échantillon de potassium, contenu dans une ampoule. L'énergie d'ionisation vaut 2,14 eV (énergie nécessaire à arracher un électron de l'atome de potassium).

1. Etablir la relation  $E(\text{eV}) = 1241 / \lambda(\text{nm})$
2. quelle(s) radiation(s) donne(nt) lieu à l'effet photoélectrique ?
3. Quelle est la vitesse des électrons expulsés du métal ?

Masse de l'électron  $9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ .

Corrigé

$$\text{Énergie du photon } E = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$$

$$E (\text{joule}) = 6,62 \cdot 10^{-34} * 3 \cdot 10^8 / \lambda \quad (1)$$

$$1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J et } 1 \text{ nm} = 10^{-9} \text{ nm}$$

diviser l'expression (1) par  $1,6 \cdot 10^{-19}$  et multiplier par  $10^9$ .

$$E (\text{eV}) = 1241 / \lambda (\text{nm})$$

Utiliser la relation précédente pour calculer l'énergie associée à chaque photon

$$E_1 = 1241 / 450 = 2,76 \text{ eV} ; E_2 = 2,03 \text{ eV} ; E_3 = 1,65 \text{ eV}$$

Seule la radiation  $\lambda_1$  est suffisamment énergétique.

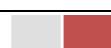
L'électron arraché de l'atome emporte :

$$2,76 - 2,14 = 0,62 \text{ eV sous forme d'énergie cinétique}$$

$$0,5 mV^2 = 0,62 * 1,6 \cdot 10^{-19} = 10^{-19} \text{ J}$$

$$V^2 = 10^{-19} / (0,5 * 9,31 \cdot 10^{-31}) = 2,2 \cdot 10^{11}$$

$$\text{vitesse} = 4,7 \cdot 10^5 \text{ ms}^{-1}.$$



# Niveaux d'énergie de l'atome

Le spectre d'un atome est l'ensemble des radiations échangées (émises ou absorbées) par l'atome avec le milieu extérieur; ces radiations sont sous forme d'ondes électromagnétiques qui peuvent appartenir au domaine visible, de l'UV, de l'IR, ... L'étude du spectre d'un atome permet d'avoir des renseignements sur l'atome.

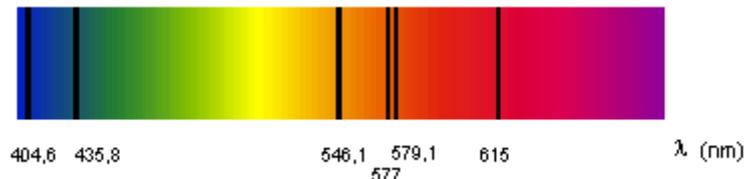
## I. Spectre atomique

### 1. SPECTRE D'EMISSION ET D'ABSORPTION

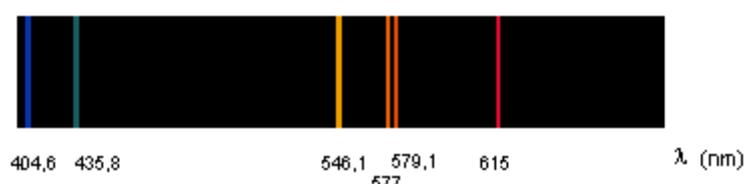
- convenablement excités, les atomes d'un gaz sous faible pression peuvent émettre une lumière dont le spectre est constitué de raies fines (spectre d'émission).
- Si on place une substance sur un trajet de la lumière, l'analyse de la lumière à la sortie de cette substance montre qu'une partie des radiations est absorbée par la substance (l'étude des radiations absorbées en fonction de  $\lambda$  constitue le spectre d'absorption de la radiation).

Exemples: Comparaison des spectres de raies d'émission et d'absorption

Par exemple, si sur le trajet du faisceau de lumière blanche on place une lampe contenant de la vapeur de mercure, alors on observe, sur l'écran, le spectre suivant :



Les raies noires correspondent aux radiations absorbées. Les radiations absentes du spectre d'absorption sont les mêmes que celles qui sont présentes dans le spectre d'émission.

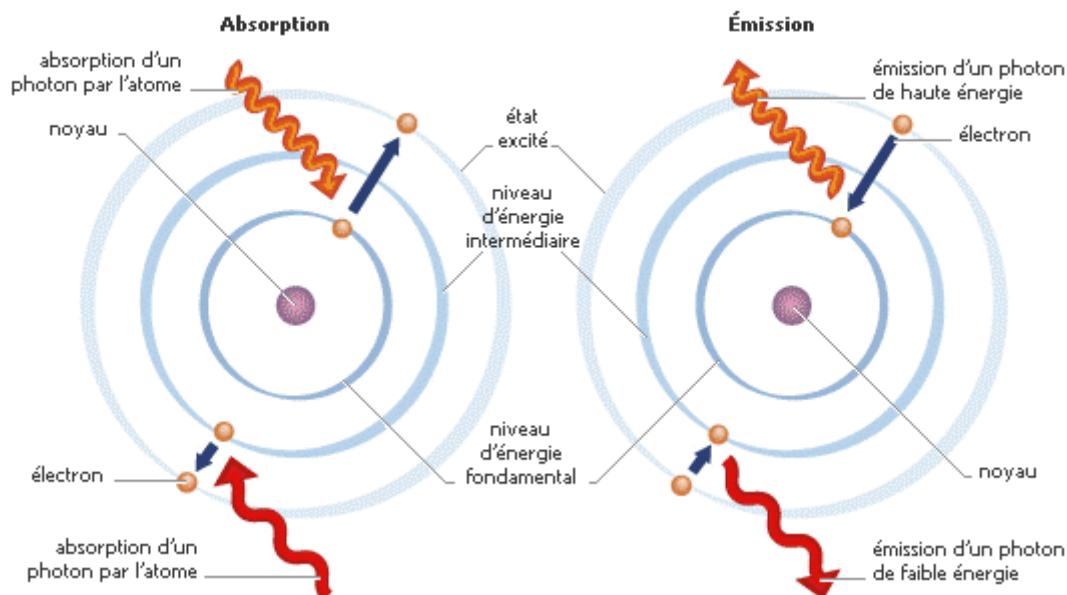


Les raies d'émission d'un atome correspondent exactement à celles d'absorption, les spectres d'émission et d'absorption sont complémentaires. Un atome ne peut émettre que de la lumière qu'il absorbe.

### 2. INTERPRETATION

#### a. Postulats de Bohr: quantification de l'énergie de l'atome.

- l'énergie d'un atome ne peut prendre qu'un certains nombres de valeurs discontinues et croissantes  $E_1, E_2, \dots, E_p, \dots, E_n$ : on dit que l'énergie de l'atome est quantifiée.
- l'atome ne peut exister que dans certains états d'énergie bien définis appelés niveaux d'énergie ou états stationnaires d'énergie.
- l'émission d'un photon de fréquence  $v_{n,p}$  correspond au passage de l'atome d'un niveau d'énergie supérieur  $E_n$  à un niveau d'énergie inférieur  $E_p$ .
- l'absorption d'un photon de fréquence  $v_{n,p}$  correspond au passage de l'atome d'un niveau d'énergie inférieur  $E_p$  à un niveau d'énergie supérieur  $E_n$ .



**b. Interprétation.**

Un atome ne peut passer d'un niveau d'énergie  $E_n$  à un niveau d'énergie  $E_p$  que par absorption ou émission d'un seul photon ou quantum d'énergie  $E=h\nu$  (spectre continu). Cette transition n'affecte qu'un seul électron de l'atome. La fréquence du photon émis ou absorbé est :

$$v_{n,p} = \frac{|E_n - E_p|}{h}$$

Il n'est pas possible qu'un photon d'énergie  $E'=h\nu' > |E_n - E_p|$  cède une partie de son énergie et repartie par l'excédant; seuls peuvent être émis ou absorbés les photons dont l'énergie est rigoureusement égale à la différence des valeurs possibles d'énergie de l'atome.

Remarque: un électron qui possède une énergie cinétique  $E_C > |E_n - E_p|$  peut céder à un atome l'énergie juste nécessaire à l'exciter et repartir avec l'excès d'énergie.



## II. Niveaux d'énergie de l'atome d'hydrogène.

### 1. ÉNERGIE DE L'ATOME D'HYDROGÈNE

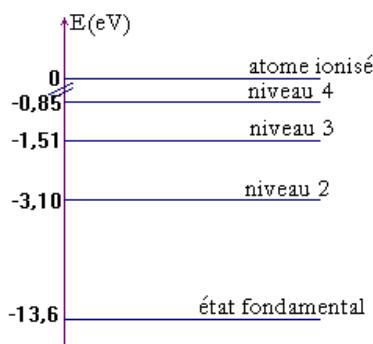
#### a. Expression

En étudiant le spectre des atomes, Bohr a montré que les valeurs possibles de l'énergie de l'atome

$$d'h\ddot{o}drog\acute{e}ne forment une suite de la forme: E_n(eV) = -\frac{13,6}{n^2} = -\frac{E_0}{n^2}, n \in \mathbb{N}^*$$

$$E_n(eV) = -\frac{13,6}{n^2} = -\frac{E_0}{n^2}$$

n est le nombre quantique principal. L'énergie de l'atome est quantifiée, elle dépend de n.



#### b. État fondamental, état excité

- l'état fondamental correspond à l'état d'énergie minimale ( $n=1 \Rightarrow E_1=-13,6 \text{ eV}$ ): c'est l'état le plus stable;

- lorsque  $n>1 \Rightarrow$  l'atome est dans l'un des états excités. L'état excité a toujours tendance à revenir à son état fondamental: on dit qu'il se désexcite.

#### c. Energie d'ionisation

L'énergie d'ionisation de l'atome d'hydrogène à partir de son état fondamental est l'énergie qu'il faut fournir à l'électron pour l'amener du niveau  $n=1$  à l'infini.

$$E_i = E_{\infty} - E_1 = 0 - (-13,6) = 13,6 \text{ eV}$$

### 2. SERIE DE RAIES D'EMISSION

L'ensemble des raies qui constituent le spectre d'émission de l'atome d'hydrogène peut être placé en séries. Une série correspond aux transitions qui aboutissent au même niveau d'énergie.

- la première série a été découverte par Balmer. Elle comporte les raies des transitions aboutissant au niveau d'énergie  $n=2$ ;  $h\nu_{n,2} = E_n - E_2$  avec  $n>2$ .

- Série de Lyman: elle comporte toutes les transitions qui correspondent au retour à l'état fondamental  $n=1$  (UV: ultra violet)
- Série de Paschen: retour à l'état  $n=3$  (IR: infrarouge)
- Série de Brackett: retour à l'état  $n=4$  (IR)
- Série de PFund: retour à l'état  $n=5$  (IR)

Considérons le passage de l'électron de l'atome d'hydrogène d'un niveau  $n$  à  $p$  tel que  $p < n$ . En calculant le nombre d'onde ( $\sigma = \frac{1}{\lambda}$ ) du photon émis, on peut retrouver la relation empirique de

Balmer: 
$$\boxed{\frac{1}{\lambda} = R_H \left( \frac{1}{p^2} - \frac{1}{n^2} \right)}$$
 où  $R_H = 1,096776 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}$

$$E = E_n - E_p \text{ avec } E_n(eV) = -\frac{13,6}{n^2} = -\frac{E_0}{n^2}$$

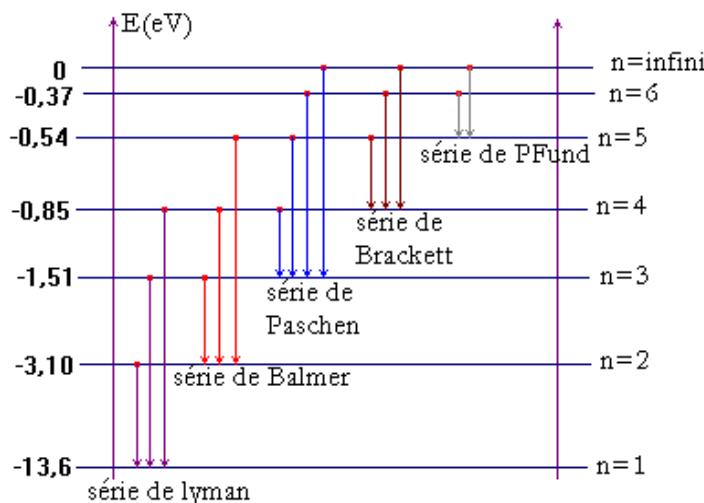
$$h \frac{C}{\nu} = -\frac{E_0}{n^2} - \left( -\frac{E_0}{p^2} \right) = -\frac{E_0}{n^2} + \frac{E_0}{p^2} = E_0 \left( \frac{1}{p^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

$$\boxed{\frac{1}{\lambda} = \frac{E_0}{hC} \left( \frac{1}{p^2} - \frac{1}{n^2} \right)} \Rightarrow \boxed{\frac{1}{\lambda} = R_H \left( \frac{1}{p^2} - \frac{1}{n^2} \right)}$$
 avec  $R_H$  constante de Rydberg

$$R_H = \frac{E_0}{hC} = \frac{13,6 \times 1,6 \cdot 10^{-19}}{6,62 \cdot 10^{-34} \times 3 \cdot 10^8} = 1,09 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}$$

### 3. DIAGRAMME D'ENERGIE

On représente sur un axe vertical les différents niveaux d'énergie de l'atome d'hydrogène. Des flèches verticales indiquent les transitions électroniques possibles et des longueurs d'ondes.



### III. Généralisation aux autres atomes

#### 1. LES IONS HYDROGENOÏDES

Ce sont les ions qui ne possèdent qu'un seul électron. Exemple:  $\text{He}^+$ ;  $\text{Li}^{2+}$ ; ....

Pour ces ions le diagramme d'énergie est analogue à celui de l'hydrogène; et toute fois plus la charge du noyau est importante plus les énergies des différents niveaux sont faibles. On admettra la relation suivante:

$$E_n = -E_0 \frac{Z^2}{n^2} = -13,6 \times \frac{Z^2}{n^2} \quad \text{avec } E_n \text{ en eV et } Z=\text{nombre de charge (numéro atomique)}$$

Exemple:  $\text{He}^+(Z=2) \Rightarrow E_n = -\frac{13,6 \times 4}{n^2}$

$$\text{Li}^{2+}(Z=3) \Rightarrow E_n = -\frac{13,6 \times 9}{n^2}$$

#### 2. LES IONS POLY ELECTRONIQUES

Les spectres lumineux des autres atomes sont plus complexes à cause de la présence de plusieurs électrons; les raies caractéristiques sont plus nombreuses que pour l'atome d'hydrogène et toute fois:

- une raie spectrale correspond au passage d'un seul électron d'un niveau d'énergie à un autre. Ces niveaux d'énergie sont beaucoup plus complexes que ceux des atomes d'hydrogène car ils sont caractérisés par d'autres nombres quantiques principaux.
- L'absorption d'un photon de longueur d'onde  $\lambda$  appartenant au visible correspond au niveau d'énergie des électrons externes (périphériques)
- l'absorption des rayons X ( $0,01 \text{ \AA} \leq \lambda \leq 0,02 \text{ \AA}$ ) correspond à des niveaux d'énergie des électrons internes.
- Il y a des analogies entre les spectres des éléments d'une même colonne; ceci est une preuve de la similitude de leur configuration électronique).

#### COMPLEMENT TS1 : QUANTIFICATION DE BOHR

**b) Etude des orbites : Modèle classique de Rutherford**

Considérons un atome d'hydrogène et admettons que, conformément au modèle planétaire de Rutherford, l'électron de charge  $q_e = -e$  et de masse  $m$  tourne avec une vitesse linéaire  $v$  autour du proton de charge  $q_p = e$  et de masse  $m_p \gg m$ .

Système : électron soumis à la force de Coulomb d'intensité  $F_C = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q_e q_p|}{r^2}$

Repère : repère de Frenet

D'après le 2<sup>e</sup> principe de Newton :

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

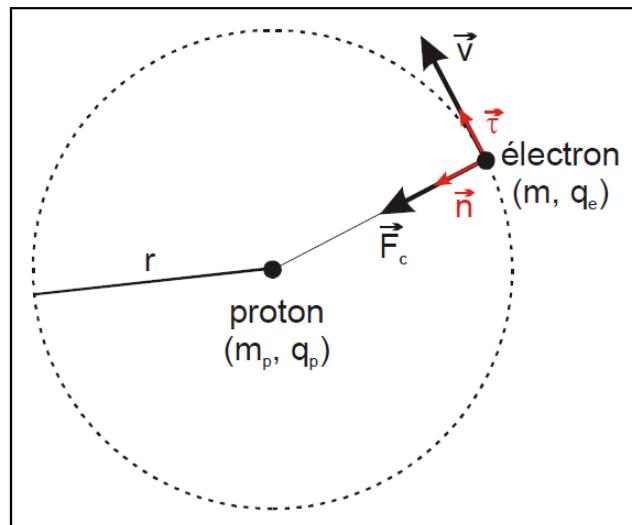
Selon la normale :  $F_C = ma_n$

En remplaçant :

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q_e q_p|}{r^2} = m \frac{v^2}{r} \quad (1)$$

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r} = mv^2 \quad (1)$$

$$r = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 mv^2} \quad (2)$$



**Conclusion :** D'après la théorie classique, tous les rayons sont permis car il n'existe aucune condition limitant les valeurs possibles de  $v$ .

**c) Etude des orbites : Modèle de Bohr**

D'après le 1<sup>er</sup> postulat de Bohr, seules les orbites dont les rayons sont définis par

$$mv_n r_n = n \frac{\hbar}{2\pi}$$

permettent à l'électron de graviter sans émission de rayonnement autour du proton. Les vitesses possibles sont ainsi données par :

$$v_n = \frac{n\hbar}{2\pi mr_n} \quad (3)$$

En remplaçant l'expression (3) dans l'expression (2) on trouve :

$$r_n = \frac{\epsilon_0 \hbar^2}{\pi m e^2} n^2 \quad (4)$$

### Conclusions :

- En tenant compte du 1<sup>er</sup> postulat de Bohr, on constate que  $r_n$  ne peut pas prendre n'importe quelle valeur. Les orbites permises sont situées sur des couches sphériques et concentriques (Schalen) de rayons discrets  $r_1 ; r_2 ; r_3 ;$  etc. autour du noyau. Pour cette raison, le modèle de Bohr est encore appelé « modèle des couches » (Schalenmodell)

$n = 1$	couche K
$n = 2$	couche L
$n = 3$	couche M
etc.	

- Les rayons des différentes couches K, L, M, ..., sont proportionnels **au carré du nombre quantique principal  $n$**  :  $r_n \sim n^2$

L'orbite la plus proche du proton est celle correspondant à la couche K ( $n = 1$ ). Le rayon de cette orbite vaut :

$$r_1 = \frac{\epsilon_0 h^2}{\pi m e^2} = 0,529 \cdot 10^{-10} \text{ m}$$

On l'appelle « **rayon de Bohr** ».

L'expression (4) s'écrit : → 
$$\boxed{r_n = r_1 n^2}$$

Le travail total est alors la somme de tous les travaux élémentaires où x a varié de la valeur r jusqu'à l'infini.

$$W(\vec{F}_{\text{ext.}}) = \int_r^\infty dW(\vec{F}_{\text{ext.}})$$

En remplaçant dans l'expression trouvée précédemment on obtient :

$$\begin{aligned} E_p(r) = -W(\vec{F}_{\text{ext.}}) &= - \int_r^\infty dW(\vec{F}_{\text{ext.}}) = - \int_r^\infty \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{x^2} dx = - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \int_r^\infty \frac{dx}{x^2} \\ &= - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \left[ -\frac{1}{x} \right]_r^\infty \\ &= - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \end{aligned}$$

L'énergie potentielle du système proton – électron correspondant au rayon orbital r vaut :

$$\boxed{E_p(r) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}}$$

### b) Energie cinétique

La masse du proton est si grande, comparée à celle de l'électron, qu'en première approximation on peut considérer le proton comme restant immobile. Toute l'énergie cinétique est ainsi attribuée au mouvement de l'électron autour du proton.

Elle vaut, en fonction du rayon  $r$  de l'orbite d'après l'expression (1) :

$$E_c(r) = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r}$$

$$E_c(r) = -\frac{1}{2}E_p(r)$$

### c) Energie de l'atome H

$$E(r) = E_p(r) + E_c(r) = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}$$

Vu que les rayons sont quantifiés ( $r_n = r_1 n^2$ ), l'énergie l'est certainement aussi !

$$E(r_n) = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_n}$$

(5)

## 3. Niveaux d'énergie de l'atome H

### a) Expression fondamentale

On vient de montrer que : (3) →  $E(r_n) = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_n}$

d'autre part, les rayons  $r_n$  s'écrivent : (1) →  $r_n = \frac{\epsilon_0 h^2}{\pi m e^2} n^2$

On en tire l'expression de l'énergie de l'atome H en fonction du nombre quantique principal :

$$E_n = -\frac{me^4}{8\epsilon_0^2 h^2} \frac{1}{n^2} \quad (6)$$

Si  $n = 1$ , l'énergie de l'atome d'hydrogène vaut :  $E_1 = -21,8 \cdot 10^{-19} \text{ J} = -13,6 \text{ eV}$

C'est l'énergie d'un atome d'hydrogène dans lequel l'électron se trouve sur la couche K.

La relation (6) peut s'écrire plus simplement :  $E_n = \frac{E_1}{n^2}$  avec  $E_1 = -13,6 \text{ eV}$ .



# Masse et énergie: réactions nucléaires

## I. Quelques définitions relatives aux noyaux d'atomes.

### 1. CARACTÉRISTIQUES D'UN NOYAU D'ATOME.

La représentation symbolique du noyau d'un atome est:  ${}^A_Z X$

- X est le symbole de l'élément chimique de numéro atomique Z.
- Z est le nombre de protons. Z est aussi appelé nombre de charge.
- A est le nombre de nucléons. A est aussi appelé nombre de masse.
- N = A - Z est le nombre de neutrons présents dans le noyau.

### 2. NUCLEIDE.

Un nucléide est l'ensemble des noyaux ayant le même nombre de nucléons A et le même nombre de protons Z.

### 3. ÉLÉMENT.

Un élément est constitué par l'ensemble des particules, atomes et ions monoatomiques, ayant le même nombre de charge Z.

### 4. ISOTOPES.

Des noyaux sont appelés isotopes si ils ont le même nombre de charge mais des nombres de nucléons A différents. Par exemple:

${}^{35}_{17} \text{Cl}$  et  ${}^{37}_{17} \text{Cl}$  sont des isotopes du chlore.

### 5. GRANDEUR DU NOYAU

Le noyau peut être assimilé à une sphère de rayon R qui est de l'ordre de fermi (1 fermi=  $10^{-15}$  m. son volume  $v = \frac{4}{3}\pi R^3$  est proportionnel au nombre A de nucléons.  $R = R_0 A^{\frac{1}{3}}$  avec  $R_0=1,3$  fm.

1 fermi ou femtomètre (symbole fm) est égal à  $10^{-15}$  m.

## II. Équivalence masse énergie

### 1. ÉNERGIE DE LIAISON

La masse du noyau est inférieure à la somme des masses de chacun de ses nucléons. Cette masse  $\Delta m$  (défaut de masse) ne disparaît pas mais se transforme en énergie  $\Delta E$ :

$$\boxed{\Delta E = mc^2}$$

Cette énergie assure la cohésion des constituants du noyau : on l'appelle donc l'énergie de liaison du noyau.

### 2. RELATION D'EQUIVALENCE

La formule d'Einstein ( $E = mc^2$ ) montre que la masse au repos et l'énergie sont des grandeurs équivalentes. En effet, en mécanique classique, une particule libre au repos possède une énergie nulle. La masse peut se transformer en énergie et réciproquement.

### 3. UNITE DE MASSE ET D'ENERGIE

L'électronvolt « eV » est une unité d'énergie bien adaptée à l'atome. C'est l'énergie reçue par un électron accéléré par une différence de potentiel de un volt :

$$We = (V_A - V_B).I.\Delta t = U.e = 1,1,6 \cdot 10^{-19} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J} \quad (\text{cf. cours de 1ère S})$$

On utilise également le MeV (=  $10^6$  eV) mieux adapté à l'échelle du noyau.

La masse d'un noyau ou d'un atome est souvent exprimée en unité de masse atomique (symboles u). L'unité de masse atomique est le douzième de la masse d'un atome de carbone 12 :

$$1 \text{ u} = \frac{12 \cdot 10^{-3}}{12 \cdot N_A} = 1,66054 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

D'après la relation ci-dessus, une masse égale à 1 u correspond à une énergie d'environ 931,5 MeV.

$$1 \text{ u} = 1,66 \cdot 10^{-27} \frac{(3 \cdot 10^8)^2}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^6} = 931,5 \text{ MeV/c}^2$$

Exemple : masse du proton= $1,672 \cdot 10^{-27}$  kg= $1,00728$  u= $938,28$  MeV.

## III. Énergie de liaison du noyau

### 1. DEFAUT DE MASSE DU NOYAU

Expérimentalement, on a constaté que la masse du noyau atomique est inférieure à la somme des masses des nucléons qui le constituent. Dans le cas d'un noyau  ${}^A_Z X$ , en notant  $m_p$  la masse du proton et  $m_n$  la masse du neutron, on peut écrire:  $m_{\text{noyau}} < Z.m_p + (A - Z).m_n$ . On pose:

$\Delta m = Z.m_p + (A - Z).m_n - m_{\text{noyau}}$

avec  $\Delta m$ : défaut de masse du noyau

On remarquera que  $\Delta m > 0$ .

Exemple: Dans le cas du noyau d'hélium  ${}^4_2 He$ ,  $\Delta m = 2.m_p + 2.m_n - m({}^4_2 He)$ .



## 2. ÉNERGIE DE LIAISON DU NOYAU

Définition: On appelle énergie de liaison d'un noyau (notée  $E_l$ ) l'énergie que doit fournir le milieu extérieur pour séparer ce noyau au repos en ses nucléons libres au repos.

Lorsqu'on brise le noyau, sa masse augmente de  $\Delta m$  et son énergie de  $\Delta m \cdot c^2$ . On en déduit que l'énergie de liaison d'un noyau à pour expression:

$$E_l = \Delta m \cdot c^2 \quad \text{avec} \quad \begin{cases} E_l: \text{énergie de liaison du noyau (en Mev)} \\ \Delta m: \text{défaut de masse du noyau (en kg)} \\ c: \text{célérité de la lumière dans le vide (en m.s}^{-1}\text{)} \end{cases}$$

Remarque: Inversement, lorsque le noyau se forme à partir de ses nucléons libres, le milieu extérieur reçoit l'énergie  $E = |\Delta m| \cdot c^2$  (la masse du système diminue et  $\Delta m < 0$ ).

## 3. ÉNERGIE DE LIAISON PAR NUCLEON

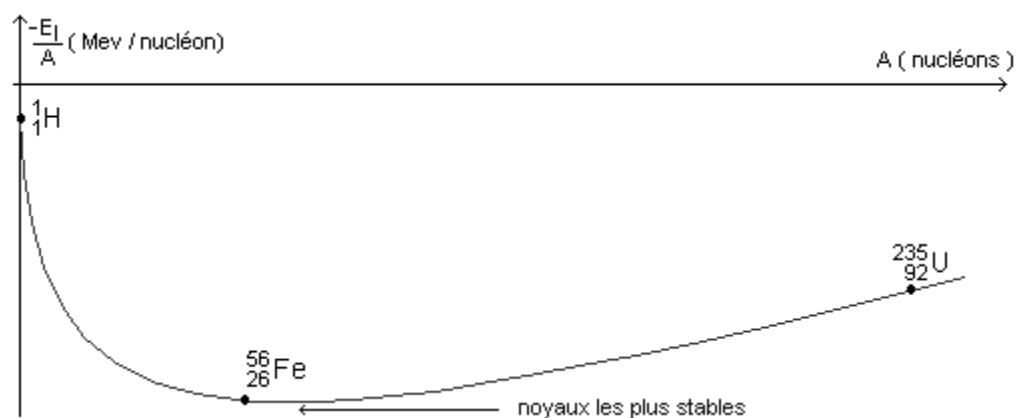
Définition: L'énergie de liaison par nucléon d'un noyau est le quotient de son énergie de liaison par le nombre de ses nucléons. On la note  $E_A$ .

$$E_A = \frac{E_l}{A} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} E_A: \text{énergie de liaison par nucléon (en Mev/nucléon)} \\ E_l: \text{énergie de liaison du noyau (en Mev)} \\ A: \text{nombre de nucléons du noyau} \end{cases}$$

Remarque:  $E_A$  permet de comparer la stabilité des noyaux entre eux. Les noyaux dont l'énergie de liaison par nucléon est la plus grande sont les plus stables.

## 4. COURBE D'ASTON

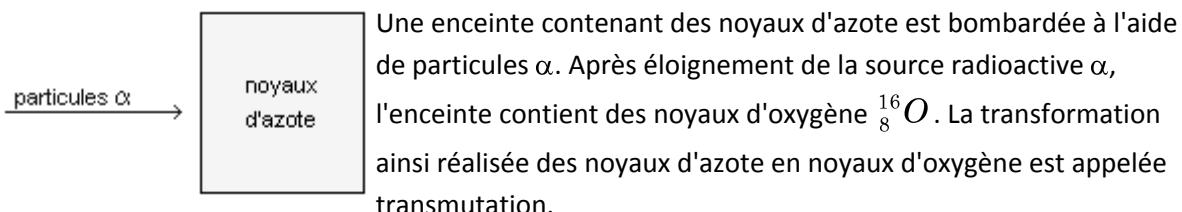
La courbe d'Aston est la courbe  $-E_A = f(A)$ . Cette courbe permet de visualiser facilement les noyaux les plus stables puisque ceux-ci se trouvent au bas du graphe.



## IV. Fission et fusion nucléaire

### 1. REACTIONS NUCLEAIRES PROVOQUEES

Expérience de Rutherford: En 1919, Rutherford réalisa l'expérience suivante (la description donnée ci-dessous est simplifiée).



L'équation de cette transmutation s'écrit:  $^{4}_2 He + ^{14}_7 N \longrightarrow ^{16}_8 O + ^1_1 p$

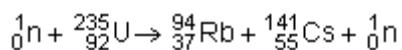
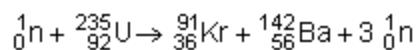
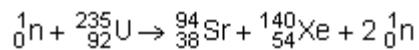
Remarque: Au cours d'une transformation provoquée, les lois de Soddy sont évidemment vérifiées.

Définition: Une réaction nucléaire est dite provoquée lorsqu'un noyau cible est frappé par un noyau projectile et donne naissance à de nouveaux noyaux.

### 2. LA FISSION NUCLEAIRE: REACTION EN CHAINE

Définition: La fission est une réaction nucléaire provoquée au cours de laquelle un noyau lourd "fissile" donne naissance à deux noyaux plus légers sous l'impact d'un neutron lent.

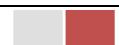
Exemple: Plusieurs réactions de fission de l'uranium 235 sont possibles:



Remarque: Les neutrons émis lors de la fission peuvent à leur tour provoquer la fission d'autres noyaux. Si le nombre de neutrons émis lors de chaque fission est supérieur à 1, il peut se produire une réaction en chaîne qui devient rapidement incontrôlable (principe de la bombe à fission). Dans les centrales nucléaires, la réaction en chaîne est contrôlée par des barres qui absorbent une partie du flux de neutrons.

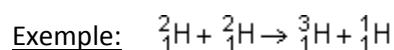
### 3. LA FUSION NUCLEAIRE

Définition: La fusion nucléaire est une réaction au cours de laquelle deux noyaux légers s'unissent pour former un noyau plus lourd.



Pour que la fusion soit possible, les deux noyaux doivent posséder une grande énergie cinétique de façon à vaincre les forces de répulsion électriques. Pour cela le milieu doit être porté à très haute température et se trouve alors sous forme de plasma.

L'énergie libérée au cours d'une fusion est considérable. Ce sont des réactions de fusion qui produisent l'énergie des étoiles. Dans la bombe thermonucléaire (appelée bombe H), la fusion nucléaire est incontrôlée et explosive. La très haute température nécessaire au déclenchement de la réaction est obtenue grâce à une bombe à fission (bombe A) portant le nom d'"allumette". Ce type de réaction présenterait un grand intérêt pour la production d'énergie sur Terre, mais malheureusement, on ne sait pour l'instant pas la contrôler pour produire de l'électricité.



## V. Bilan d'énergie

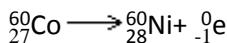
### 1. CAS DES REACTIONS NUCLEAIRES SPONTANÉES

Si la réaction se produit avec perte de masse, le milieu extérieur reçoit de l'énergie (généralement sous forme d'énergie cinétique des particules émises).

Dans le cas d'une émission  $\alpha$  par exemple:  ${}_{Z}^{A}\text{X} \xrightarrow{\text{ }} {}_{Z-2}^{A-4}\text{X} + {}_{2}^{4}\text{He}$ , l'énergie fournie au milieu extérieur est:

$$\Delta E = \Delta m \cdot c^2 \Rightarrow \Delta E = [m({}_{Z-2}^{A-4}\text{X}) + m({}_{2}^{4}\text{He}) - m({}_{Z}^{A}\text{X})] \cdot c^2$$

Autre exemple: désintégration  $\beta^-$  du cobalt 60



$$\text{Masses : } m({}_{27}^{60}\text{Co}) = 59,9190\text{u}; \quad m({}_{28}^{60}\text{Ni}) = 59,9154\text{u}; \quad m({}_{-1}^0\text{e}) = 5,49 \cdot 10^{-4}\text{u}.$$

$$\begin{aligned} \Delta m &= m({}_{28}^{60}\text{Ni}) + m({}_{-1}^0\text{e}) - m({}_{27}^{60}\text{Co}) \Rightarrow \Delta m = 59,9154 + 5,49 \cdot 10^{-4} - 59,9190 \\ &\Rightarrow \Delta m = -3,05 \cdot 10^{-3}\text{u} \end{aligned}$$

On remarquera que  $\Delta m < 0$ . La masse du système diminue et le système fournit de l'énergie au milieu extérieur. Cette énergie s'écrit:

$$E = |\Delta m| \cdot c^2 \Rightarrow E = 3,05 \cdot 10^{-3} \times 1,6749 \cdot 10^{-27} \times (3 \cdot 10^8)^2$$

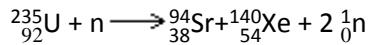
$$\Rightarrow E = 4,60 \cdot 10^{-13}\text{J}$$

$$\Rightarrow E = 2,87 \cdot 10^6\text{eV}$$

$$\Rightarrow E = 2,87\text{MeV}$$

## 2. CAS DES REACTIONS DE FISSION

Nous traiterons ce paragraphe sur un exemple, la fission de l'uranium 235.



Masses des particules  $m(^{235}_{92}\text{U}) = 234,9935\text{u}$ ;  $m(^{94}_{38}\text{Sr}) = 93,8945\text{u}$ ;  $m_n = 1,0087\text{u}$

$$m(^{140}_{54}\text{Xe}) = 139,8920\text{u}$$

$$\Delta m = m(^{94}_{38}\text{Sr}) + m(^{140}_{54}\text{Xe}) + 2.m_n - m(^{235}_{92}\text{U}) + m_n$$

$$\Delta m = m(^{94}_{38}\text{Sr}) + m(^{140}_{54}\text{Xe}) + m_n - m(^{235}_{92}\text{U})$$

$$\Delta m = 93,8945 + 139,8920 + 1,0087 - 234,9935$$

$$\Delta m = -0,1983\text{u}$$

On remarquera que  $\Delta m < 0$ . La masse du système diminue et le système fournit de l'énergie au milieu extérieur. Cette énergie s'écrit:

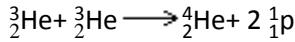
$$E = |\Delta m| \cdot c^2 \Rightarrow E = 0,1983 \times 1,6749 \cdot 10^{-27} \times (3 \cdot 10^8)^2$$

$$\Rightarrow E = 2,99 \cdot 10^{-11}\text{J}$$

$$\Rightarrow E = 186,8\text{MeV}$$

## 3. CAS DES REACTIONS DE FUSION

Ce paragraphe sera lui aussi traité à l'aide d'un exemple.



Masses des particules  $m(^3_2\text{He}) = 3,0149\text{u}$ ;  $m(^4_2\text{He}) = 4,0015\text{u}$ ;  $m_p = 1,0073\text{u}$ .

$$\begin{aligned} \Delta m = m(^4_2\text{He}) + 2.m_p - 2.m(^3_2\text{He}) &\Rightarrow \Delta m = 4,0015 + 2 \times 1,0073 - 2 \times 3,0149 \\ &\Rightarrow \Delta m = -0,0137\text{u} \end{aligned}$$

On remarquera que  $\Delta m < 0$ . La masse du système diminue et le système fournit de l'énergie au milieu extérieur. Cette énergie s'écrit:

$$E = |\Delta m| \cdot c^2 \Rightarrow E = 0,0137 \times 1,6749 \cdot 10^{-27} \times (3 \cdot 10^8)^2 \Rightarrow E = 2,07 \cdot 10^{-12} \Rightarrow E = 12,9\text{MeV}$$



# Radioactivité : réactions nucléaires

## I. Stabilité et instabilité des noyaux.

### 1. LES PRINCIPALES FORCES AGISSANT DANS LE NOYAU.

Au sein du noyau s'affrontent principalement deux types d'interactions:

- Des répulsions électriques qui ont tendance à détruire le noyau,
- Des interactions nucléaires fortes qui ont tendance à assurer la cohésion du noyau.

### 2. INSTABILITE DU NOYAU.

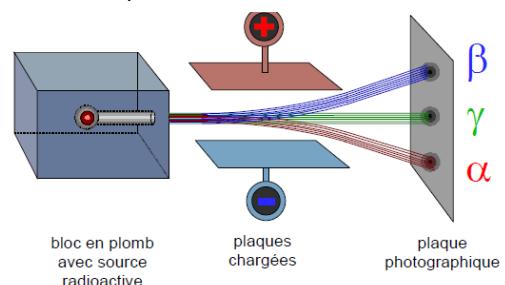
Sous l'action des différentes forces en présence, certains noyaux sont stables (ils ont une durée de vie considérée comme infinie à l'échelle géologique) et d'autres sont instables (ils se détruisent spontanément au bout d'une durée plus ou moins grande à la même échelle)

## II. Radioactivité.

### 1. DEFINITION.

Un noyau radioactif est un noyau instable dont la désintégration (destruction) est aléatoire et s'accompagne de:

- L'apparition d'un nouveau noyau,
- L'émission d'une particule notée  $\alpha$ ,  $\beta^-$  ou  $\beta^+$ ,
- L'émission d'un rayonnement électromagnétique noté  $\gamma$ . Cette émission de rayonnement  $\gamma$  n'est pas systématique mais extrêmement fréquente.



La radioactivité est une réaction dite nucléaire car elle concerne le noyau de l'atome par opposition aux réactions chimiques qui ne concernent que le cortège électronique sans modifier le noyau.

### 2. PROPRIETES DE LA DESINTEGRATION.

La désintégration radioactive est:

- Aléatoire: Il est impossible de prévoir l'instant où va se produire la désintégration d'un noyau radioactif,
- Spontanée: La désintégration se produit sans aucune intervention extérieure,
- Inéluctable: Un noyau radioactif se désintégrera tôt ou tard,
- Indépendante de la combinaison chimique dont le noyau radioactif fait partie,
- Indépendante des paramètres extérieurs tels que la pression ou la température.

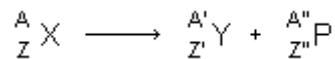
### III. Les divers types de radioactivités.

#### 1. LOIS DE CONSERVATION.

Les réactions de désintégration nucléaires obéissent à un certain nombre de lois. Cette année, par souci de simplification, nous n'en utiliserons que deux, dites lois de **Soddy**.

Lors d'une désintégration radioactive  $\alpha$  ou  $\beta$  il y a conservation du nombre de charge Z et du nombre de nucléons A.

Considérons la désintégration d'un noyau X (appelé noyau père). Cette désintégration conduit à un noyau Y (appelé noyau fils) et à l'expulsion d'une particule P (particule  $\alpha$  ou  $\beta$ ). L'équation de la désintégration s'écrit:



Les lois de conservation de **Soddy** imposent alors:

- Loi de conservation du nombre de nucléons A:  $A = A' + A''$ .
- Loi de conservation du nombre de charges Z:  $Z = Z' + Z''$ .

#### 2. RADIOACTIVITE ALPHA

##### a) Définition.

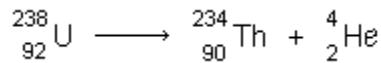
Des noyaux sont dits radioactifs  $\alpha$  s'ils expulsent des noyaux d'hélium  ${}_{2}^{4}\text{He}$ .

On notera qu'en toute rigueur le noyau de l'atome d'hélium porte deux charges positives. Mais dans ce domaine de la physique on convient de ne pas les représenter.

##### b) Équation de la réaction de désintégration $\alpha$ .

D'après les lois de conservation de **Soddy** l'équation s'écrit:  $\begin{array}{c} A \\ Z \end{array} X \longrightarrow \begin{array}{c} A-4 \\ Z-2 \end{array} Y + \begin{array}{c} 4 \\ 2 \end{array} \text{He}$

Par exemple, l'uranium 238 est un radionucléide  $\alpha$ . Son équation de désintégration s'écrit:



Le noyau fils obtenu est un noyau de thorium.

##### c) Caractéristiques de la particule $\alpha$ .



Ces particules sont expulsées avec des vitesses relativement modestes (20000 km/s) et sont arrêtées par quelques centimètres d'air ou par une feuille de papier, mais elles sont très ionisantes et donc dangereuses.

**d) Position du noyau fils dans le tableau périodique des éléments.**

Si  $Z$  est le numéro atomique du noyau père, le numéro atomique du noyau fils est  $Z-2$ . Le noyau fils se trouve donc deux cases avant le noyau père dans le tableau périodique des éléments.

**3. RADIOACTIVITE B -.**

**a) Définition.**

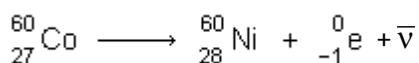
Des noyaux sont dits radioactifs  $\beta^-$  s'ils émettent des électrons notés  ${}_{-1}^0 e$  et d'une particule appelée antineutrino  $\bar{\nu}$  (particule neutre et sans masse).

On notera cette situation étrange où un électron qui, à priori, n'existe pas dans le noyau, est tout de même expulsé du noyau. Cet électron ne peut provenir que de la transformation d'un nucléon. Nous justifierons cette transformation un peu plus loin.

**b) Équation de la réaction de désintégration.**

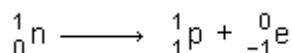
D'après les lois de conservation de **Soddy** l'équation s'écrit: 
$${}_{Z}^{A} X \longrightarrow {}_{Z+1}^{A} Y + {}_{-1}^0 e + \bar{\nu}$$

Par exemple, le cobalt 60 est un radionucléide  $\beta^-$ . Son équation de désintégration s'écrit:



**c) Origine de l'électron expulsé.**

Les radionucléides  $\beta^-$  sont des radionucléides qui possèdent trop de neutrons par rapport aux nucléides stables de même nombre de masse  $A$ . La transformation de ce neutron excédentaire produit un électron suivant le bilan:



Il apparaît aussi un proton.  $Z=27$  dans le cobalt devient  $Z'=28$  dans le nickel. Globalement  $Z$  augmente d'une unité et  $N$  diminue d'une unité. Alors  $A$  reste constant.

**d) Caractéristiques de la particule  $\beta^-$ .**

Les particules  $\beta^-$  sont assez peu pénétrantes avec des vitesses atteignant les 290000 km/s. Elles sont arrêtées par quelques millimètres d'aluminium.

**e) Position du noyau fils dans le tableau périodique des éléments.**

Si  $Z$  est le numéro atomique du noyau père, le numéro atomique du noyau fils est  $Z+1$ . Le noyau fils se trouve donc dans la case qui suit celle du père dans le tableau périodique des éléments.

#### 4. RADIOACTIVITE BETA+

Cette radioactivité ne concerne que des noyaux artificiels, c'est-à-dire des noyaux engendrés par des réactions nucléaires réalisées par l'homme (ou la femme il n'y a pas de sexismes ici).

##### a) Définition.

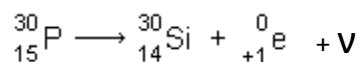
Des noyaux sont dits radioactifs  $\beta^+$  s'ils émettent des positons  ${}_{+1}^0 e$  (ce sont des particules portant une charge  $+e$ ) et des neutrinos  $\nu$ .

On notera cette situation étrange où un positon qui, à priori, n'existe pas dans le noyau, est tout de même expulsé du noyau. Ce positon ne peut provenir que de la transformation d'un nucléon. Nous justifierons cette transformation un peu plus loin.

##### b) Équation de la désintégration.

D'après les lois de conservation de **Soddy** l'équation s'écrit:  ${}_{Z}^A X \longrightarrow {}_{Z-1}^A Y + {}_{+1}^0 e + \nu$

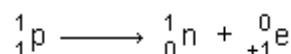
Par exemple, le phosphore 30 est un radio émetteur  $\beta^+$ . Son équation de désintégration est:



##### c) Origine du positon expulsé.

Les radionucléides  $\beta^-$  sont des radionucléides qui possèdent trop de protons par rapport aux nucléides stables de même nombre de masse  $A$  (voir vallée de stabilité).

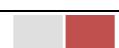
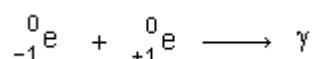
La transformation de ce proton excédentaire produit un positon suivant le bilan:



Il apparaît aussi un neutron.  $Z=15$  dans le phosphore devient  $Z'=14$  dans le silicium. Globalement  $N$  augmente d'une unité et  $Z$  diminue d'une unité. Alors  $A$  reste constant.

##### d) Caractéristique de la particule $\beta^+$ .

Ces particules ont une durée de vie très courte. Lorsqu'elles rencontrent un électron, les deux particules s'annihilent pour donner de l'énergie sous forme d'un rayonnement électromagnétique  $\gamma$  suivant le bilan:

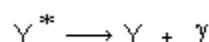


e) Position du noyau fils dans le tableau périodique des éléments.

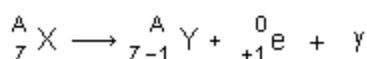
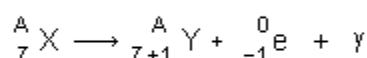
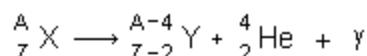
Si  $Z$  est le numéro atomique du noyau père, le numéro atomique du noyau fils est  $Z-1$ . Le noyau fils se trouve donc dans la case qui précède celle du père dans le tableau périodique des éléments.

5. DESEXCITATION GAMMA.

Le noyau fils est en général obtenu dans un état excité (niveau d'énergie élevé). Ce noyau dans cet état excité est en général noté  $Y^*$ . Le noyau fils ne reste pas dans cet état instable. Il évacue cette énergie excédentaire en émettant un rayonnement électromagnétique  $\gamma$ . On dit qu'il se désexcite. Cette émission  $\gamma$  apparaît donc comme un phénomène secondaire de la radioactivité. On écrira:



Dans certains livres on pourra trouver les équations de désintégrations radioactives sous la forme suivante qui tient compte de cette désexcitation:



Les familles radioactives :

– Certaines réactions nucléaires ne donnent pas un noyau fils stable et il s'opère une suite de réactions faisant intervenir des noyaux intermédiaires instables : ils constituent une famille radioactive ;

– Exemple de l'uranium :



– Remarque : il y a parfois plusieurs chemins possibles. . .

#### **IV. Loi de décroissance radioactive.**

1. NOTATIONS UTILISEES.

Soit un échantillon contenant  $N_0$  noyaux radioactifs à la date  $t_0=0$  choisie comme date initiale. Soit  $N$  le nombre de noyaux radioactifs (non désintégrés) encore présents dans l'échantillon à la date  $t$ .

Pendant l'intervalle de temps  $dt$  très bref, un certain nombre de noyaux radioactifs se sont désintégrés. Soit alors  $N+dN$  le nombre de noyaux radioactifs (non désintégrés) encore présents dans l'échantillon à la date  $t+dt$ .

Compte tenu de ces notations, le nombre moyen (le phénomène est aléatoire) de noyaux qui se désintègrent pendant la durée  $dt$  est:

$$N_t - N_{t+dt} = N - (N + dN) \Rightarrow N_t - N_{t+dt} = -dN$$

Ce nombre moyen de désintégrations qui ont lieu pendant la durée  $dt$  est proportionnel:

- Au nombre  $N$  de noyaux radioactifs présents dans l'échantillon à la date  $t$ . Ce qui signifie que si ce nombre  $N$  double, le nombre de désintégrations qui vont se produire dans l'intervalle de temps  $dt$  suivant double aussi.
- A la durée  $dt$ . Si  $dt$  est petit par rapport à  $t$  et si  $dt$  double alors le nombre de désintégrations qui se produiront doublera aussi.

Pour traduire ces propriétés on écrira:  $-dN = \lambda N dt$

$\lambda$  est la constante radioactive. Elle est caractéristique d'un radioélément. D'après ce qui précède:

$$-dN = \lambda N dt \Rightarrow -\frac{dN}{N} = \lambda dt$$

Le premier membre de cette dernière égalité est un rapport de grandeurs de mêmes dimensions. Ce premier membre est donc sans dimension (s'exprime sans unité). Il en est alors de même du second membre. Ce qui impose que  $\lambda$  ait la dimension de l'inverse d'une durée  $[\lambda] = [T]^{-1}$  ( $\lambda$  s'exprime en  $s^{-1}$ ,  $min^{-1}$ ,  $h^{-1}$ ,  $jour^{-1}$  ou  $an^{-1}$ ).

L'inverse de la constante radioactive est homogène à une durée (a la même dimension qu'une durée ou s'exprime avec la même unité qu'une durée). On écrira:

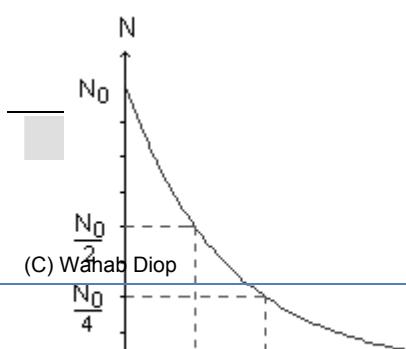
$\tau = \frac{1}{\lambda}$   $\tau$  est appelée constante de temps. C'est aussi une grandeur caractéristique d'un radionucléide.

## 2. DECROISSANCE EXPONENTIELLE.

D'après ce qui précède, l'évolution du nombre de noyaux radioactifs présents dans un échantillon au cours du temps est donnée par:

$$-dN = \lambda N dt \Rightarrow \frac{dN}{N} = -\lambda dt$$

La fonction  $N = f(t)$  qui vérifie cette propriété est:  $N = N_0 e^{-\lambda t}$



Lycee Liman

Ce document a été téléchargé sur le site: <http://physiquechimie.sharepoint.com>

$$\frac{dN}{N} = -\lambda dt$$

en exprimant l'intégrale de chaque membre on a

$$\int_{N_0}^N \frac{dN}{N} = -\lambda \int_0^t dt \Rightarrow \ln \frac{N}{N_0} = -\lambda t$$

$$\Rightarrow \frac{N}{N_0} = e^{-\lambda t}$$

$$\Rightarrow N = N_0 e^{-\lambda t}$$

la fonction exponentielle  $y = e^{ax}$  est telle que:

$$y' = ae^{ax} \Rightarrow y' = ay$$

en dérivant  $N$  par rapport au temps on pourra

$$\frac{dN}{N} = -\lambda dt$$

Il faut bien comprendre que:

- N représente le nombre de noyaux radioactifs encore présents (non désintégrés) à l'instant t dans l'échantillon.
- $N_0$  représente le nombre de noyaux radioactifs présents dans l'échantillon à l'instant initial t=0.
- $\lambda$  est la constante radioactive du radioélément considéré.
- t est le temps écoulé depuis l'instant initial.

### 3. DEMI-VIE RADIOACTIVE.

#### a) Remarque.

Dans l'expression  $N=N_0e^{-\lambda t}$ , le coefficient de t est négatif. N est une fonction décroissante du temps (il reste de moins en moins de noyaux radioactifs dans l'échantillon). Mais les propriétés de la fonction exponentielle font que N tend vers 0 lorsque t tend vers l'infini. En principe il reste donc toujours des noyaux radioactifs dans l'échantillon.

Plus la constante radioactive  $\lambda$  est grande, plus la décroissance est rapide. Ou, ce qui revient au même, plus la constante de temps  $\tau$  est petite, plus la décroissance est rapide.

On peut comparer les décroissances des populations de radionucléides en comparant leurs demi-vies radioactives.

#### b) Définition.

La demi-vie radioactive, notée  $t_{1/2}$ , d'un échantillon de noyaux radioactifs est égale à la durée nécessaire pour que, statistiquement, la moitié des noyaux radioactifs présents dans l'échantillon se désintègrent (voir la courbe de décroissance plus haut). On a donc:

$$N(t + t_{1/2}) = \frac{N(t)}{2}$$

c) Expression de la demi-vie  $t_{1/2}$  en fonction de  $\lambda$  ou de  $\tau$ .

On a:  $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$  et  $N(t+t_{1/2}) = N_0 e^{-\lambda(t+t_{1/2})}$

$$\text{D'après la définition de la demi-vie } N(t + t_{1/2}) = \frac{N(t)}{2} \Rightarrow N_0 \cdot e^{-\lambda(t+t_{1/2})} = \frac{N_0 \cdot e^{-\lambda t}}{2}$$

$$\Rightarrow e^{-\lambda t_{1/2}} = \frac{1}{2} \text{ alors: } -\lambda t_{1/2} = \ln(1/2) \Rightarrow -\lambda t_{1/2} = -\ln 2 \Rightarrow t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} \Rightarrow t_{1/2} = \tau \ln 2$$

## V. Activité d'une source radioactive.

### 1. DEFINITION.

L'activité A d'une source radioactive est égale au nombre moyen de désintégrations par seconde dans l'échantillon. Elle s'exprime en becquerels dont le symbole est Bq (1Bq=1 désintégration par seconde).

Le curie (Ci) est une autre unité de mesure d'activité utilisée. Il correspond à l'activité de 1,0g de radium et vaut  $3,7 \cdot 10^{10}$  Bq.

### 2. EXPRESSION DE L'ACTIVITE.

A pourra être notée:  $A = -\frac{\Delta N}{\Delta t}$  ou  $A = -\frac{dN}{dt}$ , on a donc:

$$A = -\frac{dN}{dt} \quad \text{et} \quad -dN = \lambda N dt \Rightarrow A = \lambda N$$

Cette dernière relation permet d'exprimer l'activité d'un échantillon en fonction du temps.

$$A = \lambda N \Rightarrow A = \lambda N_0 e^{-\lambda t} \Rightarrow A = A_0 e^{-\lambda t}$$

L'activité suit la même loi de décroissance exponentielle que N.

### 3. PRINCIPE DE LA DATATION D'UN OBJET TRES ANCIEN A L'AIDE D'UN RADIODEMENT.

D'après ce qui précède:

$$A = A_0 e^{-\lambda t} \Rightarrow \frac{A}{A_0} = e^{-\lambda t} \Rightarrow \ln(A/A_0) = -\lambda t \Rightarrow t = \frac{\ln(A/A_0)}{-\lambda}$$

Si l'on connaît le radioélément contenu dans l'objet (on connaît alors  $\lambda$ ), si l'on connaît l'activité  $A_0$  de l'échantillon et si l'on sait mesurer A, alors il est possible de connaître la date d'origine t de l'objet.



#### 4. DANGEROUSITE ET EFFETS BIOLOGIQUES.

##### a) Dangerosité et demi-vie.

On admettra que plus l'activité d'une source est grande, plus elle est dangereuse. Or d'après ce qui précède:

$$A = \lambda N \text{ et } \lambda = \frac{\ln 2}{t_{1/2}} \quad \Rightarrow \quad A = \frac{N \ln 2}{t_{1/2}}$$

Il apparaît donc qu'une source radioactive est d'autant plus active, donc dangereuse, qu'elle comporte un grand nombre de noyaux radioactifs et que sa demi-vie est courte.

##### b) Effets biologiques.

L'action sur les tissus vivants dépend de plusieurs paramètres:

- Du nombre de particules reçues par seconde. Ce nombre dépend de l'activité de la source et de son éloignement.
- De l'énergie et de la nature des particules émises et donc reçues.
- Du fractionnement de la dose reçue.
- De la nature des tissus touchés.

Les particules ionisantes et le rayonnement  $\gamma$  sont capables de provoquer des réactions chimiques et des modifications dans la structure des molécules constituant la matière vivante. En particulier, ils peuvent induire des mutations génétiques lorsque l'ADN se trouve modifié.

SERIGNE ABDOU

WAHAB DIOP

Professeur au lycée Seydina Limamou Laye



*Ce document comporte des notes de mes cours en classe de Terminales S<sub>1</sub> & S<sub>2</sub> au lycée de Bambey à l'attention de mes élèves et collègues.*

## Notes de cours TERMINALES S



Serigne Abdou Wahab Diop – Lycee Limamou Laye / <http://physiquechimie.sharepoint.com>

