МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Уральский федеральный университет имени
первого Президента России Б. Н. Ельцина»

МАКРОСТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ И ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ДАННЫХ

Лекция № 3

Выявление свойств и типов моделей на основе статистического и спектрального анализа

Екатеринбург
2024

Содержание

Часть 1. Спектральный анализ

Автокорреляционная функция, как было показано ранее, дает только начальную оценку характера исходного ВР. Когда дело заходит о таком понятии как «периодичность» процесса, первым делом на ум приходит, несомненно, преобразование Фурье. Методы и характеристики ВР, получаемые на основе базиса преобразования Фурье, носят название спектральных методов оценки характеристик ВР.

Основной идеей спектрального анализа является предположение, что исходный временной ряд является *стационарным в широком смысле* (иначе нарушается связь между выборочным спектром и оценкой автокорреляции) и при этом ряд состоит из *гармоник* разных частот. Основной реализацией этой идеи является **периодограмма**, позволяющая оценить *спектральную плотность мощности* выборочного сигнала, в качестве которого выступает исходный ВР. По определению, периодограмма есть преобразование Фурье выборочной оценки автокорреляционной функции. То есть периодограмма есть та же самая оценка автокорреляционной функции, но представленная не в виде зависимости от задержки/лага, а в виде ее частотного представления, что для поиска периодичностей и гармоник будет более удобным подходом.

В строгой форме, периодограмма рассчитывается через выражение:

$$P(f) = \frac{\Delta t}{N}\left|\sum_{k=1}^{N-1} x_k e^{-i\cdot 2\pi\cdot f\cdot k}\right|^2, -1/2\Delta t < f \le 1/2\Delta t, \qquad (3.1)$$

где Δt - интервал временной сетки ВР (отрезок между временными отсчетами, интервал дискретизации), N – число отсчетов, x_k - отсчет временного ряда в k-ый момент времени, частота f ограничена теоремой Котельникова.

Кроме периодограммы существует еще огромное количество подобных средств оценки спектральной мощности выборки ВР: модификации периодограммы с применением усреднения и оконной свертки, метод усреднения периодограмм Бартлетта, метод Уэлша (Welch), Multitaper-метод Томпсона и другие непараметрические методы. Каждый из этих методов имеет собственные преимущества и недостатки, но все они имеют две общие проблемы: наличие, так называемых, *спектральных утечек* и наличие фиксированного частотного разрешения.

Спектральные утечки выражаются в том, что реальный анализируемый ВР всегда имеет конечную длину временного интервала, что обязательно отразится на спектральной оценке в виде свертки с некоторым ограниченным окном. В простейшем случае (например, для гармонической синусоиды), все ожидаемые дельта функции будут заменены на их sinc-приближения, то есть, оценочный спектр словно «утекает» от центральной частоты.

Фиксированное частотное разрешение же связано с тем, что для ВР с конечным временным интервалом $T = N\Delta t$, для разделения двух близких частот f_1 и f_2 должно выполняться условие

$$f_2 - f_1 > \frac{1}{N\Delta t}, \tag{3.2}$$

то есть минимально возможный масштаб определения частот оказывается фиксированным и зависящим от длины ВР. На практике зачастую ВР содержит периодические и сезонные компоненты, которые оказываются ни в коей мере не кратными данному частотному разрешению, что приводит к размыванию полученной оценки спектральной мощности. В простейшем случае, например, снова для гармонической синусоиды, у которой собственная частота оказывается не кратной нормированной частоте дискретизации, вместо одного пика на периодограмме мы будем наблюдать целых два, близких к теоретическому значению.

Таким образом, на практике из-за подобных проблем при анализе ВР периодограмму и другие непараметрические методы используют только для первичной оценки модели ВР и его частотных характеристик.

Часть 2. О важности теоремы Котельникова

Что касается теоремы Котельникова, то применительно к анализу ВР, ее смысл и применение обращается в обратную сторону. Напомним, что по теореме Котельникова, непрерывная реализация сигнала может быть восстановлена по ее временному ряду однозначно, если спектральный состав реализации ограничен и максимальная частота в спектре реализации меньше или равна частоте Найквиста, то есть $f_{\max} \le F_n = \frac{1}{2\Delta t}$. Для анализа ВР нас интересуют скорее значения периодов и функций от времени. Перевернем выражение с частотой Найквиста и выразим его через временные дискреты:

$$T_{\min} \ge 2\Delta t, \tag{3.3}$$

где Δt – интервал дискретизации, $T_{\min}$ – минимальный восстанавливаем период. Получается, что для фиксированного интервала дискретизации (а для ВР оно так и есть, интервал дискретизации заранее известен и фиксирован), минимальный период, который можно заметить, должен быть, как минимум, в два раза больше интервала дискретизации. Для среднемесячных чисел <u>невозможно</u> обнаружить циклы длиной в месяц, для часовых – циклы длиной в полтора часа и т.д. Не стоит забывать также и про фиксированное частотное разрешение (3.2), которое (переведенное в периоды) говорит о том, что <u>невозможно</u> будет разделить сезонные и циклические компоненты с периодами, разница между которыми меньше минимально восстанавливаемого периода $T_{\min}$. На практике такие близкие периоды относят к одному и тому же циклу, но считают, что у него есть плавающий период. Для более точного результата используют уже адаптивные средства анализа ВР, которые позволяют строить зависимости периода циклов от текущего момента времени на заданном отрезке времени.

Часть 3. Выводы по спектральному анализу

Методы построения оценки выборочной автокорреляционной функции и периодограммы/оценки спектра достаточно похожи по своему характеру (а некоторые из этих оценок даже эквивалентны). Поэтому и преимущества и недостатки у них очень похожи. Отличия в них, по сути, находятся в их наглядности, поэтому эти методы и используют вместе: то, что плохо заметно одним способом, может быть более явно выражено в другом.

Получение выборочных оценок автокорреляционной функции и спектра есть неструктурные (то есть непараметрические) подходы, аналогичные представлению эмпирической функции гистограммой. Оба эти подхода лишь акцентируют внимание на том, что и так заметно в исходном ВР, поэтому они служат только первым шагом при анализе ВР. В связи с этим, зачастую эти два подхода используют не столько для анализа рядов, сколько для оценки его исходных характеристик, которые затем используются для идентификации моделей и поиска тех параметрических методов, которые для данного ВР будут наиболее эффективными.

Также, в результате представленных выше рассуждений, важно понять, что все исходные оценки статистических свойств, начиная даже с мат. ожидания, опираются на тот факт, что исследуемый ВР предполагается *стационарным*. Если ряд является нестационарным, то абсолютно все оценки, как автокорреляционные, так и спектральные, теряют свой смысл. Поэтому, если ВР был определен как нестационарный, ни один из перечисленных выше подходов будет, формально, не применим. Дискретные выражения могут быть использованы, но для НВР они будут служить чем-то вроде «средней температуры по больнице». По этой причине для анализа НВР используют *адаптивные методы анализа*, а все основные характеристики НВР рассчитываются не в виде одиночных оценок, а в виде полноценных функций и от времени, и от других параметров (сдвига и т.п.) одновременно.

Часть 4. Понятие статистических гипотез, критериев и тестов

Любой предварительный анализ ВР опирается на две фундаментальных необходимых оценки: это проверка ВР на стационарность и поиск вида модели, наиболее подходящей для данного ряда. И тот и другой фактор опираются на **проверки статистических гипотез**. Для проверки этих выдвигаемых гипотез используют так называемый механизм **статистических критериев** или **тестов**, как принято говорить в англоязычном сообществе. Прежде чем переходить к самим реализациям этих методов, сначала кратко вспомним, в чем конкретно состоит алгоритм проверки и применения статистических гипотез в целом.

Как известно, любой ВР является лишь частной выборкой некоторого случайного процесса. А это значит, что любые утверждения, сказанные о характере и свойствах заданного ряда, не являются абсолютно достоверными, а могут быть только оценены с некоторой *достоверностью*. В статистике подобное понятие называют более строгим понятием *статистической значимости* тестируемого явления. Некоторую величину называют **статистически значимой**, если вероятность случайного возникновения этой величины или порождаемых ею явлений стремится к нулю или крайне мала. Это то, что нам как раз и нужно при анализе ВР – получаемые характеристики и суждения о виде ряда считать статистически значимыми. Для принятия решения о статистической значимости того или иного явления используют понятие статистических гипотез.

Статистическая гипотеза – вероятностное предположение о виде распределения и свойствах случайной величины, которое можно подтвердить или опровергнуть применением статистических методов к данной выборке случайного процесса. Надо понимать, что при этом гипотеза предполагает некоторое утверждение, на которое можно однозначно ответить либо только положительно, либо только отрицательно, то есть, грубо говоря, только «да» или «нет», третьего варианта не должно существовать. Исходная гипотеза тогда считается **прямой** или **нулевой** гипотезой H_0, а противоположный ей ответ – **обратной, альтернативной** или **конкурирующей** гипотезой H_1. Как только это однозначное утверждение формулируется относительно некоторой случайной величины, гипотеза становится **статистической**.

Статистические гипотезы могут быть нескольких видов. Статистическая гипотеза называется **простой**, если она позволяет однозначно определить распределение и его свойства, к которому принадлежит данная случайная величина. Если же гипотеза устанавливает только принадлежность случайной величины к некоторому семейству распределений (то есть состоит из некоторого множества простых гипотез), то такая гипотеза считается **сложной**.

Выдвигаемую гипотезу проверяют с помощью **статистического критерия** или **теста** – то есть на основе некоторого математического правила или выстраиваемой функции, которая служит мерой выявления расхождения между ожидаемой статистикой/показателем и эмпирической. В более строгом смысле, статистический критерий устанавливает однозначное соответствие между случайной выборкой из неизвестного распределения и возможными гипотезами (нулевой и альтернативной). Статистические критерии могут также быть **параметрическими**, в которых рассчитываются статистические параметры исходной выборки (мат. ожидание и дисперсия, например), и **непараметрическими**, которые расчет параметров не производят и опираются только на сами отсчеты ряда.

При проверке статистических гипотез, так как они являются вероятностными явлениями, могут также возникать ошибки. Эти ошибки делятся на два довольно похожих класса: ошибки **первого рода**, в которых *отвергается* правильная нулевая гипотеза, и ошибка **второго рода**, в которых *принимается* неверная гипотеза. Вероятность ошибки первого рода называется **уровнем значимости** α и является важным параметром статистических тестов.

Статистических критериев в настоящее время существует огромное количество, так как механизм их работы является достаточно универсальным и позволяет весьма эффективно оценивать те или иные классы временных рядов, их моделей, свойств ВР и т.д. Общий алгоритм проверки статистических гипотез сводится к следующему упрощенному алгоритму:

1) Формулируется статистическая нулевая гипотеза H_0 и на ее основе альтернативная гипотеза H_1.
2) Задается уровень значимости α, от которого и зависит, будет ли принята нулевая гипотеза H_0 или отвергнута в пользу альтернативной.
3) Рассчитывается некоторый статистический критерий k. Это значение k вычисляется на основе данной выборки случайного процесса (то есть на основе отсчетов ВР) и, по своей сути, является некоторой случайной величиной, которая должна подчиняться ожидаемому закону распределения (в зависимости от гипотезы).
4) Этот расчетный критерий затем сравнивается с некоторым априори известным критическим значением критерия, то есть происходит проверка, выходит ли найденный критерий из критической области C, либо остается в пределах нормы $P(k \in C) = \alpha$.
5) При попадании статистического критерия в критическую область, нулевая гипотеза H_0 отвергается (и принимается альтернативная гипотеза H_1), при непопадании – выдвинутая гипотеза принимается.

В сокращенной форме блок-схема алгоритма проверки статистических гипотез представлена на рисунке 3.1.

В дальнейшем мы рассмотрим несколько статистических тестов, которые пригодятся нам при анализе ВР. Также особую роль будут играть статистические критерии, позволяющие оценить стационарность ВР.

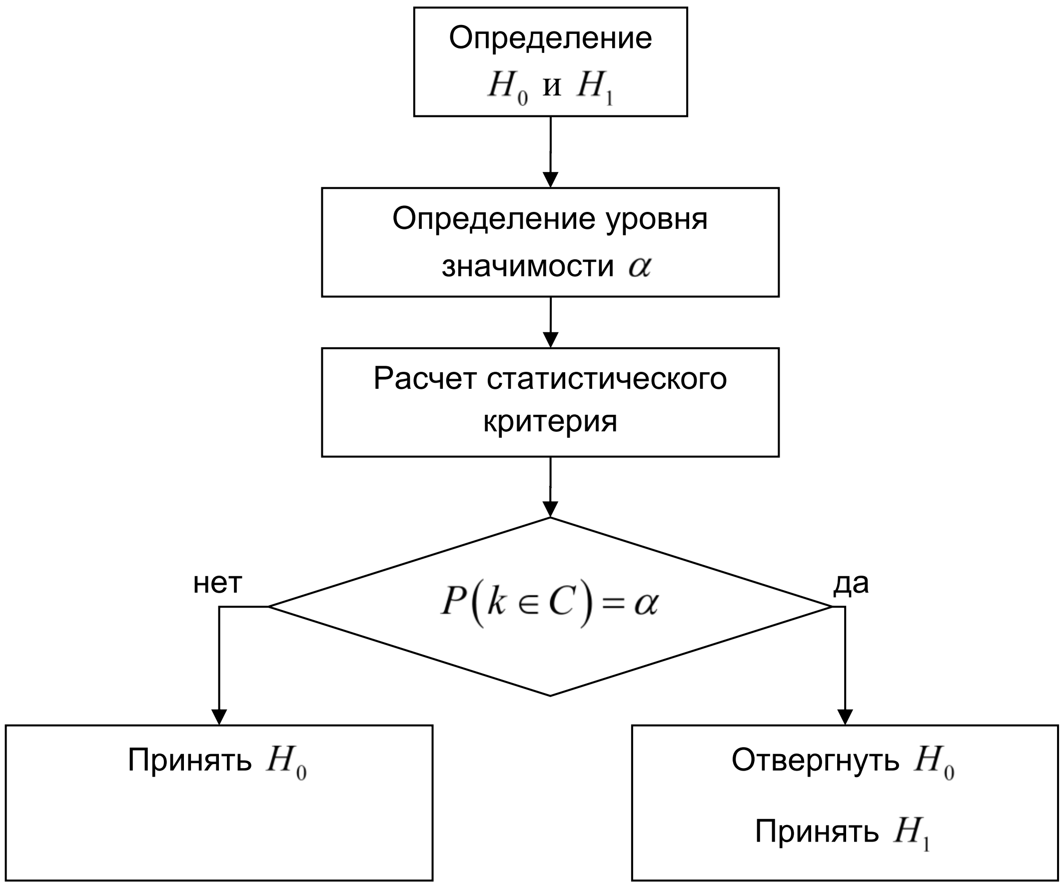

Рисунок 3.1 – Блок-схема алгоритма проверки статистических гипотез

Часть 5. Проверка статистических гипотез

Начнем рассмотрение статистических гипотез с наиболее простых. Также надо обязательно помнить, что все они отталкиваются от предположения о *стационарности* ВР, так как зачастую опираются на оценки мат. ожидания и дисперсии в виде величин, не зависящих от сдвига/лага (то есть от стационарности в широком смысле). Статистические критерии, непосредственно занимающиеся проверкой ВР на стационарность, будут приведены уже ближе к концу. Такой порядок определения критериев выбран в связи с тем, что все статистические тесты, занимающиеся проверкой ВР на стационарность, имеют более сложную структуру для изучения, а начинать, как известно, всегда проще с более простых и понятных примеров.

5.1. Проверка на наличие аномальных наблюдений

Здесь мы используем **метод Ирвина**. Для всех отсчетов ВР формулируются следующие гипотезы – H_0 : *i*-е наблюдение не является аномальным, H_1 : *i*-е наблюдение является аномальным. Для проверки гипотезы вычислим значение критерия

$$k_i = \frac{|y_i - y_{i-1}|}{\sigma} \tag{3.4}$$

где σ – выборочное среднеквадратичное отклонение: $\sigma = \sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{N}\left(y_i - \overline{y}\right)^2}{N-1}}$,

N – число отсчетов ВР, $\overline{y}$ – расчетное мат. ожидание.

Если величина $k_i > k_{kp}$, то с вероятностью α гипотеза H_0 будет отвергнута и принимается альтернативная гипотеза H_1, то есть отсчет y_i является аномальным. Значение k_{kp} зависит от числа отсчетов ВР и уровня значимости α . Некоторые из этих значений для примера приведены в таблице 3.1.

Таблица 3.1. Значения k_{kp} проверки на аномальные наблюдения

N	$\alpha = 0.05$	$\alpha = 0.01$
10	**1.5**	**2.0**
20	**1.3**	**1.8**
50	**1.1**	**1.6**
100	**1.0**	**1.5**
400	**0.9**	**1.3**

Например, у нас есть ВР из 10 отсчетов:

[100, 143, 124, 115, 113, 110, 105, 100, 104, 105].

Чтобы считать какой-либо из этих отсчетов аномальным, надо $k_i > 1.5$ при $\alpha = 0.05$. После использования формулы (3.4) получаем, что 2 и 3 элементы можно считать аномальными. Следовательно, с вероятностью ошибки первого рода 0.05, можно принять альтернативную гипотезу о том, что 2 и 3 отсчет заданного ВР являются аномальными наблюдениями. Как видим, весь алгоритм проверки данной статистической гипотезы работает в полном соответствии с приведенным на рис. 3.1 общим алгоритмом выполнения статистических тестов.

5.2. Критерий Стьюдента

При построении аддитивной модели ВР (см. лекцию 1), немаловажно точно знать, сможем ли мы вообще выделить отдельно детерминированную часть и отдельно случайную. По умолчанию мы как-то считали, что обе эти части существуют всегда – одна описывает систематические свойства исходного процесса, другая описывает случайные факторы. На практике анализируемый ВР может в принципе оказаться выборкой чисто случайного процесса с неизвестным распределением. Самые простые гипотезы на наличие неслучайных составляющих в ВР по сути проверяют постоянство среднего значения. Поэтому статистические гипотезы будут выглядеть следующим образом – $H_0 : M[x] = const$, $H_1 : M[x] \neq const$. Как мы увидим в дальнейшем, добавив в гипотезы еще и требование о постоянстве дисперсии, можно будет попытаться проверить ВР и на стационарность в широком смысле. Вообще, эту гипотезу можно проверить различными статистическими тестами (уж больно широко они определены). Используем здесь две наиболее простые и распространенные.

Разобьем исходный ВР на две примерно равные по числу отсчетов выборки. Если средние этих частных выборок будут отличаться, значит во ВР может присутствовать некоторый тренд (тенденция), не являющийся по определению случайным.

Пусть первая часть ВР $x(t_i), i = 1..N, N = N_1 + N_2$ есть $x_1(t_i), i = 1..N_1$, а вторая – $x_2(t_i), i = N_1...N_1 + N_2$. Рассчитаем для этих двух ВР мат. ожидания и выборочные дисперсии D_1 и D_2 (см. формулы 2.7 и 2.8). Найдем значение **критерия Стьюдента**:

$$K_S = \frac{\overline{x_1} - \overline{x_2}}{\sqrt{(N_1 - 1)D_1 + (N_2 - 1)D_2}} \cdot \sqrt{\frac{N_1 N_2 (N_1 + N_2 - 2)}{N_1 + N_2}} \qquad (3.5)$$

Если **выполняется** неравенство $K_S > t(1-\alpha, N_1 + N_2 - 2)$, то гипотеза о постоянстве мат. ожидания **отклоняется** с уровнем значимости α. Значение функции распределения Стьюдента $t(1-\alpha, N_1 + N_2 - 2)$ либо вычисляется математически (с помощью ЭВМ), либо находится опять же по таблице.

У критерия Стьюдента есть существенный недостаток – для его применения изначально предполагается, что $D_1[x] = D_2[x]$, то есть дисперсии обеих частей одинаковы, т.е. на протяжении всей выборки ВР его дисперсия не меняется существенно. На практике это выполняется не всегда. По крайней мере, желательно сначала тогда убедиться, что условие $D_1[x] = D_2[x]$ будет выполняться. А как это можно сделать? Ну, конечно же, выдвинуть это равенство в качестве гипотезы и использовать какой-нибудь статистический критерий для ее принятия или принятия альтернативной гипотезы. Таким статистическим критерием является тест Фишера (F-test).

5.3. Критерий Фишера

Итак, мы хотим убедиться, что обе части ряда имеют одинаковые дисперсии $H_0 : D_1\left[x\right] = D_2\left[x\right]$. Иными словами, эти два ВР есть частные выборки одной и той же случайной величины. Тогда можно использовать хорошо известный критерий Фишера:

$$F_S = \frac{\max\left(D_1, D_2\right)}{\min\left(D_1, D_2\right)} \tag{3.6}$$

где D_1, D_2 – оценки дисперсии этих двух ВР из одной частной выборки (в нашем случае, это были две примерно равные части одного и того же ВР). Если неравенство вида

$$F_{\left(\frac{\alpha}{2}\right);N_1-1;N_2-1} \le F_S \le F_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right);N_1-1;N_2-1} \tag{3.7}$$

не выполняется, тогда гипотеза о постоянстве дисперсии **отвергается** с уровнем значимости α . Аналогично предыдущим случаям, критические значения теста F_{kp} определяются чаще всего по таблицам критерия Фишера, или через расчеты специализированных математических функций. В этой таблице параметрами являются уровень значимости α , и число степеней свободы $N_1 - 1$ и $N_2 - 1$.

Таким образом, применим сначала критерий Фишера и, установив равенство дисперсий двух частей, затем применим критерий Стьюдента, мы может принять или отвергнуть гипотезу о наличии тренда (или другой неслучайной составляющей) в анализируемом ВР.

5.4. Критерий серий, основанный на медиане выборки

Из исходного ВР $x_i = x\left(t_i\right)$ создадим новый *вариационный ряд*, упорядоченный по возрастанию:

$$x_{(1)} \le x_{(2)} \le x_{(3)} \le \ldots \le x_{(N)} \ . \tag{3.8}$$

Определим выборочную медиану этого ряда по формуле:

$$x_{med} = \begin{cases} x_{\left(\frac{N+1}{2}\right)}, & \text{если } N \text{ нечетно} \\ 0.5\left(x_{\left(\frac{N}{2}\right)} + x_{\left(\frac{N}{2}+1\right)}\right), & \text{если } N \text{ четно} \end{cases} \tag{3.9}$$

Теперь возвращаемся к исходному ВР и формируем на его основе серию «+» и «–». Отсчету x_i ставится «+», если $x_i > x_{med}$, и «–», если $x_i < x_{med}$. Если $x_i = x_{med}$, то такие точки не учитываются. У нас получатся серии подряд идущих плюсов и минусов. Нас интересует общее число таких серий ν и протяженность самой длинной из них τ.

Если исследуемый ряд состоит из независимых наблюдений (гипотеза о неизменности среднего верна $H_0 : M[x] = const$), то чередование «+» и «–» будет случайным, то есть их будет примерно одинаково по количеству, и они будут близки по размеру.

Тогда статистический критерий будет следующим: если хотя бы одно из неравенств (3.10) нарушается, то **гипотеза** $H_0 : M[x] = const$ о неизменности среднего значения ВР **отвергается** с вероятностью ошибки α.

$$\begin{cases} \nu > 0.5\left(N + 2 - 1.96\sqrt{N-1}\right) \\ \tau < 1.43\ln\left(N+1\right) \end{cases} \tag{3.10)-(3.11}$$

Это, в свою очередь, означает принятие альтернативной гипотезы $H_1 : M[x] \neq const$, то есть в анализируемом ВР есть зависящая от времени **неслучайная** составляющая.

Часть 6. Проверка на стационарность

Итак, мы ознакомились с базовыми статистическими критериями, которые позволяют оценить характеристики и свойства ВР. Все они, как можно было заметить, опираются на предположение о том, что исследуемый ряд является **стационарным**. Поэтому, прежде чем использовать их, описывать математические модели ВР и производить поиск цикло и сезонов, неплохо было бы провести проверку ВР на стационарность.

Как было показано в первой лекции, теоретическое определение стационарных ВР даже в широком смысле оказывается достаточно сложным для применения на практике. В связи с этим на практике используют хорошо отработанный механизм проверки статистических гипотез. Таких статистических тестов проверки ВР на стационарность будет несколько.

6.1. Проверка на стационарность на основе критерия Фишера и критерия Стьюдента

Этот статистический тест состоит из двух частей: сначала используется критерий Фишера (3.6) для проверки гипотезы о постоянстве дисперсий $H_0 : D[x] = const$, а затем, если гипотеза принята, проверяем критерием Стьюдента (3.5) гипотезу о постоянстве средних $H_0 : M[x] = const$. Если обе гипотезы принимаются, то тогда принимается и сложная гипотеза о стационарности ВР. Аналогично описанным выше методикам, исходный ВР придется разбивать на две примерно равные по числу отсчетов части, каждую часть считать за отдельную выборку одного случайного процесса.

Этот статистический тест основан на определении стационарности в широком смысле, где как раз требуется независимость от времени мат. ожидания и дисперсии. Но у этого теста есть существенные недостатки. Во-первых, по определению стационарности в широком смысле, нам нужно будет перебрать все возможные сдвиги внутри ВР, и для каждого из них мат. ожидание и дисперсия должны быть постоянными. Таким образом, строго по определению, мы должны разбивать исходный ВР не на две части, а на много частей малой длины, а затем попарно проверять для них статистические критерии Фишера и Стьюдента. Понятно, что с ростом числа отсчетов, эта работа будет слишком громоздкой. Поэтому и ограничиваются сравнением только двух частей, но надежность определения свойства стационарности такого ВР тогда остается слабой. Во-вторых, оба эти критерия теоретически описаны и четко сформулированы для **нормального распределения**. Это условие чаще всего, естественно, не выполняется на практике, а значит, полученные оценки правдивости гипотез оказываются крайне приблизительными и недостоверными.

В целом получается, что нужны альтернативные тесты, позволяющие оценить ВР на стационарность или нестационарность.

6.2. Проверка на стационарность ВР KPSS-тестом

Совершенно другой подход к анализу стационарности наблюдаемого ВР использует так называемый статистический тест 1992 года происхождения Квятковских-Филлипса-Шмидта-Шина, далее просто KPSS-тест.

Этот статистический критерий изначально отталкивается от структурной аддитивной модели ВР в форме

$$x = \left(c_{t-1} + u_t\right) + a \cdot \tau + \xi_t \tag{3.12}$$

где x – исходный ВР, c_{t-1} – постоянное среднее, u_t – независимая случайная величина из того же распределения, что и ξ_t, но с мат. ожиданием равным 0 и дисперсией σ_ξ^2, τ – тренд, ξ_t – некоторый стационарный процесс.

Выдвигается две гипотезы – H_0 : временной ряд является **стационарным** (и значит $\sigma_\xi^2 = 0$), H_1 : ВР является **нестационарным** ($\sigma_\xi^2 \neq 0$). При такой конкретной постановке задачи вместо теоретического описания понятия стационарности в широком смысле, как видим, тест становится более понятным и конкретизированным. Критерий статистики вычисляется согласно:

$$k = \frac{\sum_{t=1}^{N} \left(\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_t \right)^2}{s^2 N^2} \tag{3.13}$$

где N – число отсчетов ВР, s – стандартная ошибка по форме Ньюи-Уеста (Newey-West long-run variance) […], ξ_t – отсчеты стационарного процесса.

Как видно из (3.13), критерий рассчитывается очень сложно, поэтому в большинстве современных математических и статистических пакетов функция расчета этого критерия (или сам KPSS-тест сразу) присутствует в виде вызываемой библиотечной функции.

Критерий k затем сравнивается с критическим известным значением, и нулевая гипотеза о стационарности ВР либо принимается с уровнем значимости α, либо отвергается, то есть ряд считается НВР.

Откуда возникла идея этого статистического теста вообще и на чем основано выражение (3.12)? Идея проверки на стационарность лежит в известных крупных подмножествах стационарных ВР – это тренд-стационарные ряды (3.12) и разностно-стационарные ряды (3.12 при a=0). Оба этих процесса оперируют тем предположением, что, хотя исходный ВР может быть нестационарным, его первая разность (то есть $x_t - x_{t-1}$) может быть стационарной. В теории разностных схем этот факт можно установить проверкой на единичные корни (*unit root*). Понятие единичных корней связано с характеристическим полиномом авторегрессионных моделей. Оказывается, что если *все* корни этого полинома оказывается вне единичного круга (по модулю больше единицы), то такой процесс всегда будет стационарным. Если несколько корней полинома равны по модулю единице, то стационарность все еще достижима через разностные схемы. Наличие корней внутри единичного круга соответствует нестационарности исходного процесса.

Получается, что теоретически широкая задача установления свойства стационарности или нестационарности ВР может быть сведена к более строгой математической задаче поиска корней характеристического полинома. Впервые подобную методику проверки на стационарность на основе единичных корней придумали Дэвид Дики и Уэйн Фуллер в 1979 году. Их статистический тест назывался тестом Дики-Фуллера (DF-тест). Из него затем появилось целое семейство подобных статистических проверок единичного корня: ADF-тест, тест Филлипса-Перрона, тест Лейбурна и т.д. Среди них KPSS-тест выделяется в первую очередь тем фактом, что направлен именно на понятие стационарности, а не на понятие единичных корней полинома, то есть избавляет исследователей ВР от перехода от понятий авторегрессии к самому определению стационарности ВР.

Методика ADF-тестов настолько оказалась эффективной на практике, что в 2003 году за ее использование при анализе экономических рядов Клайв Гренджер удостоился Нобелевской премии по экономике. Тем не менее, надо понимать, что KPSS-тест все равно является статистическим критерием, а значит, и у него есть ограничения и недостатки. Во-первых, этот тест проверяет не все множество корней (которых может быть весьма много), а только их небольшое число. Поэтому гораздо лучше KPSS-тест подходит для определения факта **нестационарности** ВР. В самом деле, если хотя бы один из этих характеристических корней лежит внутри единичного круга, то гипотеза сразу отвергается и ряд будет НВР. Во-вторых, может возникать случай, когда все расчетные корни по модулю равны единице (будут единичными), и тогда возникает неопределенность в виде модели, а KPSS-тест тогда только укажет на то, что стационарность ряда *может быть*, но нужны дополнительные проверки. В целом, KPSS-тест на настоящее время является одним из лучших и эффективных средств проверки ВР на стационарность.

Часть 7. Проверка качества и адекватности модели

Предположим, что одним из методов нам удалось построить модель для стационарного ВР. Оказывается, оценить ее адекватность и качество можно тоже используя аппарат применения статистических критериев. Исходными данными для такой проверки всегда является **ряд остатков** (невязок), то есть разница между исходным ВР и его детерминированной моделью :

$$e_i = y_i - q(t_i). \qquad (3.14)$$

В детерминированной составляющей $q(t_i)$ могут быть, как и тренд, так и любые другие тригонометрические или подобные компоненты.

7.1. Проверка мат. ожидания остатков

Для правильно построенной модели, ряд остатков должен иметь **мат. ожидание близкое нулю**. В самом деле, если это не так, то какую-то детерминированную часть (того же тренда, например) мы не учли в модели. Формулируем следующие статистические гипотезы:

$$\begin{aligned} H_0 &: M[e] = 0; \\ H_1 &: M[e] \neq 0; \end{aligned} . \qquad (3.15)$$

Если гипотеза H_0 верна, то критерий $T_e = \dfrac{\overline{e}}{\sigma_e}\sqrt{n}$ подчиняется распределению Стьюдента с N-1 степенями свободы. Таким образом, если вычисленное значение критерия оказывается больше табличного значения критерия Стьюдента $t(1-\alpha, N-1)$, то гипотеза отвергается с уровнем значимости α и принимается альтернативная гипотеза о том, что мат. ожидания остатков отличны от нуля. Это означает, что выделенная детерминированная часть содержит нечто ненулевое систематическое.

7.2. Проверка случайности ряда остатков

При построении исходной аддитивной модели стационарного ВР, предполагалось, что ее случайная составляющая является некоторой случайной величиной. Если разделение детерминированной и случайной частей при анализе ВР было достаточно качественным, то ряд остатков (3.14) должен быть как раз набором случайных величин. Для проверки этой гипотезы в простейшем случае используется критерий «**поворотных точек**». Точка e_i называется поворотной, если выполняются условия:

$$\begin{aligned} &e_i < e_{i-1}; e_i > e_{i+1}, \\ &e_i > e_{i-1}; e_i < e_{i+1}. \end{aligned} \qquad (3.16)$$

Если ряд остатков случаен, то одна поворотная точка в среднем приходится на 1.5 отсчета. Пусть этих точек будет N_e. Тогда статистическая проверка этого предположения будет выглядеть так: если выполняется неравенство:

$$N_e > \left(\frac{2}{3}\left(N-2\right) - 1.96\sqrt{\frac{16N-29}{90}} \right), \qquad (3.17)$$

то ряд остатков можно считать случайным.

Еще более строгая проверка связана с тем, что ряд остатков предполагается случайной величиной с **нормальным распределением**. У этого предположения есть огромное количество преимуществ, самое главное из которых – это высокое качество полученной модели, так как тогда оказываются верными все статистические и корреляционные приближения и оценки. Проверку ряда остатков на его нормальность обычно производят с помощью **критерия Колмогорова-Смирнова**.

Классический критерий Колмогорова-Смирнова (*KS-test*) предназначен для проверки простых гипотез о принадлежности выборки некоторому полностью известному распределению случайной величины. Нас интересует его модификация, которая позволяет проверить уже **сложную гипотезу** о принадлежности выборки к некоторому распределению, параметры которого определяются по самой этой выборке. Гипотеза отвергается, если статистика $\sqrt{n}D_n$ превышает квантиль распределения K_α при заданном уровне значимости α, и принимается в обратном случае.

Распределение Колмогорова описывается в виде:

$$\forall t > 0\colon \lim_{n\to\infty} P(\sqrt{n}D_n \leqslant t) = K(t) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} (-1)^j e^{-2j^2t^2}.$$

На практике, для применения критерия Колмогорова-Смирнова используются специализированные функции математических и прикладных пакетов, которые затем сравниваются с табличными значениями, либо выводят результат о принятии или отвержении гипотезы сразу. Подробная методика применения критерия Колмогорова-Смирнова приведена в «Рекомендациях по стандартизации» Р 50.1.033-2001 и Р 50.1.037-2002.