

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

**Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Уральский федеральный университет имени  
первого Президента России Б. Н. Ельцина»**

**МАКРОСТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ  
И ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ДАННЫХ**

**Лекция № 7**

**Прогнозирование данных на основе моделей авторегрессии**

Екатеринбург

2024

## Содержание

Часть 1. Прогнозирование на основе моделей АРПСС .....	3
Часть 2. Пример прогнозирования на основе АРПСС.....	7
Часть 3. Коррекция прогноза .....	9
Часть 4. Вычисление доверительных интервалов прогноза.....	12

## Часть 1. Прогнозирование на основе моделей АРПСС

Ранее нами были рассмотрены модели ВР, представляемые в виде процессов авторегрессии – скользящего среднего (АРСС). Само понятие авторегрессии (АР) говорит о том, что текущие отсчеты ряда являются некоторой комбинацией предыдущих. В случае же процессов скользящего среднего (СС), текущий отсчет формируется в результате комбинации случайных возмущений. И в том и в другом случае между предыдущими и последующими характеристиками ВР есть некоторая функциональная зависимость, поэтому модели АРСС идеально подходят для прогнозирования временных рядов.

Самое главное при прогнозировании – это добиться как можно большей его точности, то есть **минимизировать ошибку прогноза**. Как было указано ранее, ошибка прогноза может описываться разными величинами. В случае моделей АРСС и АРПСС нас будет интересовать **прогноз с минимальной среднеквадратичной ошибкой**.

Итак, напомним, что в общем виде модель АРПСС выражается как:

$$\phi(B)\nabla^d \tilde{z}_t = \theta(B)a_t \quad (7.1)$$

Модель АРПСС может быть сведена к модели АРСС через разностную схему, для прогноза мы считаем, что этот процесс уже был произведен и рассматривать базовую модель для прогноза на основе:

$$\phi(B)z_t = \theta(B)a_t, \quad \phi(B) = \phi(B)\nabla^d \quad (7.2)$$

Пусть мы прогнозируем отсчеты  $z_{t+l}$  в текущий момент времени  $t$ . Это значит, что происходит прогноз в **момент  $t$  с упреждением  $l$** .

Общая модель АРСС (7.2) может быть расшифрована в виде трех форм:

1) Через разностные уравнения:

$$z_{t+l} = \varphi_1 z_{t+l-1} + \varphi_2 z_{t+l-2} + \dots + \varphi_{p+d} z_{t+l-p-d} + a_{t+l} - \theta_1 a_{t+l-1} - \theta_2 a_{t+l-2} - \dots - \theta_q a_{t+l-q} \quad (7.3)$$

2) Согласно теореме Волда, АРСС = СС( $\infty$ ), то есть можно записать модель прогноза через бесконечную взвешенную сумму текущего и предшествующих импульсов  $a_t$ :

$$z_{t+l} = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j a_{t+l-j} \quad (7.4)$$

Здесь весовые коэффициенты  $\psi_j$  можно найти из известного соотношения  $\varphi(B)(1 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \dots) = \theta(B)$ .

3) По принципу взаимной обратности свойств моделей АР и СС, модель прогноза можно записать через бесконечную взвешенную сумму предыдущих наблюдений:

$$z_{t+l} = \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j z_{t+l-j} + a_{t+l} \quad (7.5)$$

Из трех этих форм наиболее часто на практике применяется первый способ построения прогноза, так как он наиболее просто реализуем вычислительно и намного проще для понимания. Во второй и третьей форме представления все портит наличие «бесконечности» в расчетах, усложняя и так громоздкие вычисления. Поэтому схему прогнозирования мы будем наиболее подробно рассматривать только для первой формы записи (7.3).

Теперь попытаемся найти такой прогноз  $z_t(l) \cong z_{t+l}$  на основе модели АРПСС (7.2), который был бы наилучшим среди всего множества прогнозов:

$$z_t(l) = \psi_l^* a_t + \psi_{l+1}^* a_{t+1} + \psi_{l+2}^* a_{t+2} + \dots \quad (7.6)$$

где  $\psi_l^*$  – найденные лучшие веса прогноза.

Сравним выражение (7.6) с (7.4), найдем значение как раз среднеквадратичной ошибки прогноза:

$$M[z_{t+l} - z_t(l)]^2 = (1 + \psi_1^2 + \dots + \psi_{l-1}^2) \sigma_a^2 + \sum_{j=0}^{\infty} (\psi_{l+j} - \psi_{l+j}^*)^2 \sigma_a^2. \quad (7.7)$$

Когда же эта ошибка будет минимальной? Функция (7.7) достаточно проста, поэтому, очевидно, что необходимо приравнять веса  $\psi_{l+j} = \psi_{l+j}^*$ . Этот вывод является частным случаем более общих выводов из теории прогнозирования с опорой на минимизацию среднеквадратичной ошибки.

В результате получаем:

$$z_{t+l} = (a_{t+l} + \psi_1 a_{t+l-1} + \dots + \psi_{l-1} a_{t+1}) + (\psi_l a_t + \psi_{l+1} a_{t-1} + \dots), \quad (7.8)$$

где вторую сумму мы уже знаем по (7.6), а первую сумму обозначим  $e_t(l)$ .

Тогда мы получим выражение для прогноза  $z_t(l)$  с упреждением  $l$  при ошибке прогноза  $e_t(l)$ :  $z_{t+l} = e_t(l) + z_t(l)$ .

Посмотрим, какие выводы мы можем из такого типа прогноза. Во-первых, прогноз с наименьшей среднеквадратичной ошибкой в момент  $t$  с упреждением  $l$  есть условное математическое ожидание  $z_{t+l}$  в момент  $t$ :

$$z_t(l) = (\psi_l a_t + \psi_{l+1} a_{t-1} + \dots) = M_t[z_{t+l}] \quad (7.9)$$

Функцию  $z_t(l)$  мы тогда можем называть **прогнозирующей функцией** для момента  $t$ . Во-вторых, ошибка прогноза  $e_t(l)$  для упреждения  $l$  равна

$$e_t(l) = (a_{t+l} + \psi_1 a_{t+l-1} + \dots + \psi_{l-1} a_{t+1}). \quad (7.10)$$

Ее мат. ожидание  $M[e_t(l)] = 0$ , а дисперсия будет равна:

$$D[e_t(l)] = (1 + \psi_1^2 + \dots + \psi_{l-1}^2) \sigma_a^2. \quad (7.11)$$

В-третьих, что если построить такой прогноз на один шаг вперед? Попробуем и получим величину ошибки такого прогноза:

$$e_t(1) = z_{t+1} - z_t(1) = a_{t+1}. \quad (7.12)$$

Оказывается, что остаточные ошибки, генерирующие процесс, оказываются ошибками прогноза на шаг вперед. При этом значения  $a_t$  мы требовали иметь свойство *некоррелированности*. Поэтому при прогнозе с

минимальной среднеквадратичной ошибкой ошибки прогноза на шаг вперед должны быть тоже **не коррелированы**.

В самом деле, если бы ошибки прогноза были коррелированы, то, устранив эту зависимость между ними, мы бы получили еще более точный прогноз, что противоречит исходной постановке задачи о наилучшем прогнозе с минимальной среднеквадратичной ошибкой. Между тем, хотя ошибки прогноза с упреждением 1 (на шаг вперед) не коррелированы, для большего упреждения это условие может не выполняться.

Итак, теперь мы знаем, что нам требуется для прогноза с минимальной среднеквадратичной ошибкой: нам нужно найти мат. ожидание случайной величины  $z_{t+l}$  в момент  $t$ .

Аналогично (7.5), (7.4), (7.3) запишем три формы представления прогноза. В виде взвешенного среднего:

$$M[z_{t+l}] = z_t(l) = \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j [z_{t+l-j}] + [a_{t+l}] \quad (7.13)$$

В проинтегрированном виде:

$$M[z_{t+l}] = z_t(l) = \psi_1[a_{t+l-1}] + \dots + \psi_{l-1}[a_{t+1}] + \psi_l[a_t] + \psi_{l+1}[a_{t-1}] + \dots + [a_{t+l}] \quad (7.14)$$

**В виде разностного уравнения:**

$$M[z_{t+l}] = z_t(l) = \varphi_1[z_{t+l-1}] + \varphi_2[z_{t+l-2}] + \dots + \varphi_{p+d}[z_{t+l-p-d}] - \theta_1[a_{t+l-1}] - \theta_2[a_{t+l-2}] - \dots - \theta_q[a_{t+l-q}] + [a_{t+l}]. \quad (7.15)$$

Среди всех этих выражений на практике лучше всего применять форму (7.15), так она наиболее проста для реализации и расчета.

## Часть 2. Пример прогнозирования на основе АРСС

Пусть есть некоторый временной ряд, отсчеты которого нам даны, сам ВР приведен на рисунке 7.1. После анализа свойств этого ВР удалось установить, что этот ряд лучше всего описывается моделью АР(2) второго порядка:

$$z_t = 1.8z_{t-1} - 0.8z_{t-2} + a_t \quad (7.16)$$

Значения расчетной модели (7.16) также приведены на рисунке 7.1.

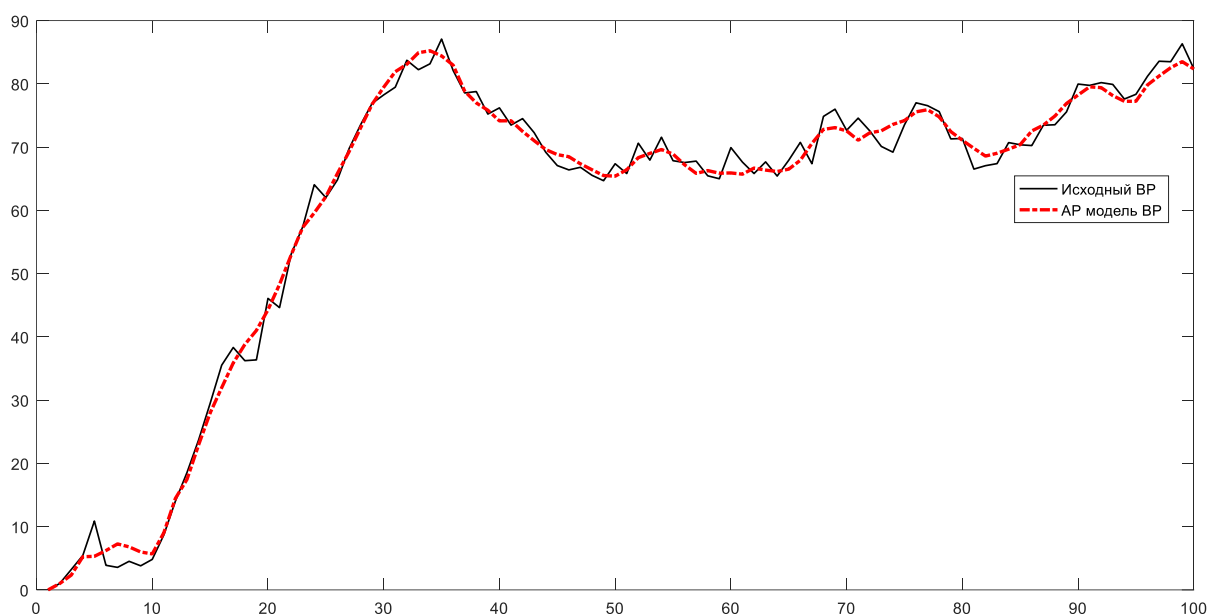


Рисунок 7.1 – Исходный ВР (черным) и его АР модель (7.16)

Мы хотим спрогнозировать этот ряд на несколько точек вперед, начиная с некоторого момента  $t$ . Для этого мы используем разностное уравнение в форме (7.15). Прогноз в таком случае строится рекуррентно, по одной точке.

Начиная с момента  $t$ , прогноз на одну точку рассчитывается как:

$$z_t(1) = 1.8[z_t] - 0.8[z_{t-1}] + [a_{t+1}] = 1.8z_t - 0.8z_{t-1} \quad (7.17)$$

так как на первом шаге достоверные предыдущие значения нам известны, а ошибки не должны быть коррелированы (т.е.  $[a_{t+1}] = 0$ ).

На втором шаге прогноза считаем снова:

$$z_t(2) = 1.8[z_{t+1}] - 0.8[z_t] + 0[z_{t-1}] + [a_{t+2}] = 1.8z_t(1) - 0.8z_t, \quad (7.18)$$

где мы использовали выражение  $[z_{t+l}] = M[z_{t+l}] = z_t(l)$  и обнуляли ошибку.

Аналогично на третьем шаге прогноза получаем уже нормальную рекуррентную формулу прогнозирования этого ВР:

$$z_t(3) = 1.8[z_{t+2}] - 0.8[z_{t+1}] + [a_{t+3}] = 1.8z_t(2) - 0.8z_t(1) \quad (7.19)$$

В итоге получаем следующую схему прогноза данного ВР:

$$\begin{aligned} z_t(1) &= 1.8z_t - 0.8z_{t-1}, \\ z_t(2) &= 1.8z_t(1) - 0.8z_t, \\ z_t(l) &= 1.8z_t(l-1) - 0.8z_t(l-2). \end{aligned} \quad (7.20)$$

Построим ретроспективный прогноз данного ВР, начиная с 90 отсчета на 10 отсчетов вперед. Полученный результат представлен на рисунке 7.2.

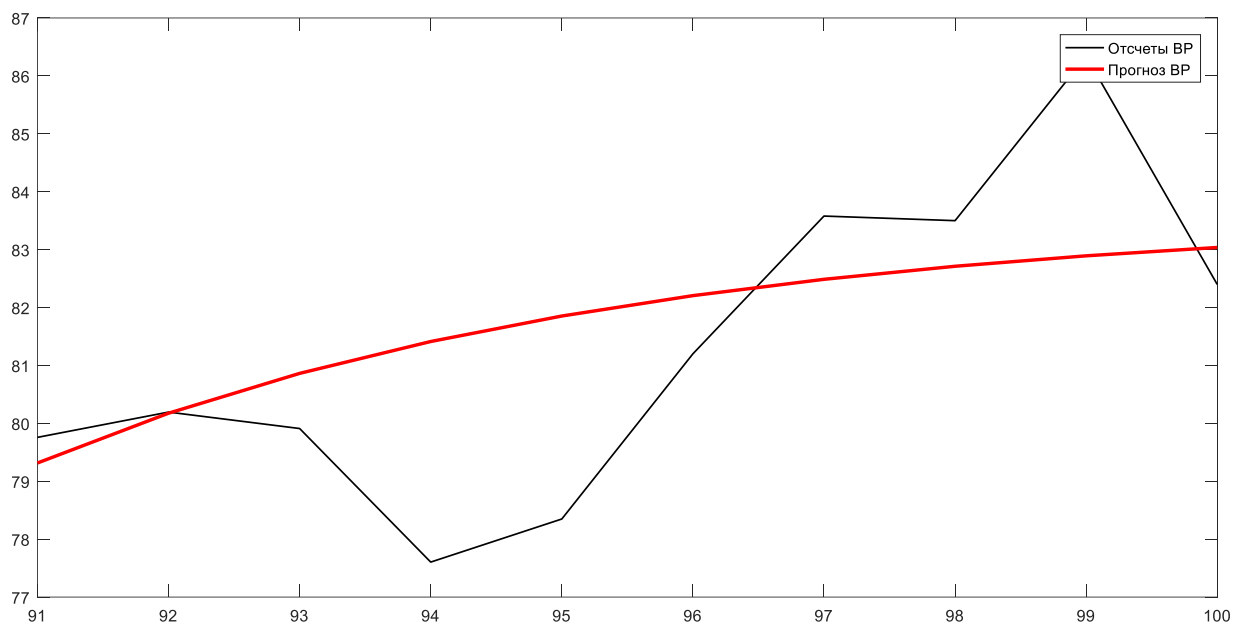


Рисунок 7.2 – Исходный ВР (черным) и его ретроспективный прогноз (7.20)

Как видно из рисунка 7.2, в принципе прогноз получился хорошим (средняя ошибка аппроксимации меньше 20%). Неточность такого прогноза состоит в том, что на каждом шаге прогноза мы отбрасывали случайную ошибку  $[a_{t+j}]$ , которая в исходном ряде как раз отнюдь не нулевая. Однако и его можно улучшить, так как для схем прогнозирования на основе АРПСС можно построить схему коррекции прогноза.



### Часть 3. Коррекция прогноза

Во многих случаях число шагов прогноза  $l$  не так уж и велико, при этом схема прогноза строится рекуррентно (7.15). Чтобы найти доверительные пределы для этих прогнозов и уметь вычислять новые прогнозы коррекцией старых, нам нужно найти веса  $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{L-1}$ . Для этого нам пригодится уравнение:

$$\varphi(B)\psi(B) = \theta(B). \quad (7.21)$$

Приравнивая коэффициенты при равных степенях  $B$ , получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \varphi_1 - \theta_1, \\ \psi_2 &= \varphi_1\psi_1 + \varphi_2 - \theta_2, \\ &\vdots \\ \psi_j &= \varphi_1\psi_{j-1} + \dots + \varphi_{p+d}\psi_{j-p-d} - \theta_j. \end{aligned} \quad (7.22)$$

где  $\psi_0 = 1; \psi_j = 0$ , при  $j < 0; \theta_j = 0$ , при  $j > q$ .

Эта формула (7.22), по сути, тоже является рекуррентной, и потому весовые коэффициенты  $\psi$  легко будет вычислить. Как же теперь использовать эти веса коррекции прогноза?

Пусть прогноз на один шаг уже выполнен, новые истинные отсчеты для коррекции вот-вот будут наблюдаемы, а пока что строится прогноз на один дополнительный шаг вперед  $z_t(l+1)$ . Но вот если бы мы знали новую наблюдаемую точку, то более точный прогноз бы выглядел, как  $z_{t+1}(l)$ . Очевидно, эти две величины **отличаются**, но вот насколько сейчас и найдем, при этом будем опираться на проинтегрированную форму прогноза (7.14):

$$\begin{aligned} z_{t+1}(l) &= \psi_l a_{t+1} + \psi_{l+1} a_t + \psi_{l+2} a_{t-1} + \dots \\ z_t(l+1) &= \psi_{l+1} a_t + \psi_{l+2} a_{t-1} + \dots \end{aligned} \quad (7.23)$$

Получается, что разница между этими двумя прогнозами состоит всего лишь в одном весовом множителе:  $z_{t+1}(l) - z_t(l+1) = \psi_l a_{t+1}$ .

Отсюда и появляется **схема коррекции прогноза** на основе весовых коэффициентов и новых наблюдений. Она выглядит следующим образом: для **коррекции прогноза** с появлением одного нового отсчета ВР необходимо найти весовые коэффициенты  $\psi$  по рекуррентному соотношению (7.22), а затем рассчитать новые значения прогнозируемых отсчетов с помощью выражения:

$$\begin{aligned} z_{t+1}(1) &= z_t(2) + \psi_1 a, \\ z_{t+1}(2) &= z_t(3) + \psi_2 a, \\ &\vdots \\ z_{t+1}(l) &= z_t(l+1) + \psi_l a. \end{aligned} \quad (7.24)$$

где  $a$  – величина ошибка, найденная с помощью  $a = z_{t+1}^{набл} - z_t(1)$ . Тем самым будет выполнена коррекция прогноза по новым наблюдениям.

Вернемся к нашему прогнозу (7.20) на рис. 7.2. Вычислим нужные нам веса коррекции прогноза:

$$\begin{aligned} \psi_0 &= 1, \\ \psi_1 &= 1.8, \\ \psi_2 &= 1.8\psi_1 - 0.8 = 2.44, \\ \psi_3 &= 1.8\psi_2 - 0.8\psi_1 = 2.95... \end{aligned} \quad (7.25)$$

В качестве нового наблюдения, естественно, используем известный в этой точке отсчет ряда, так как прогноз у нас происходит ретроспективный. Производим коррекцию прогноза согласно (7.24):

$$\begin{aligned} z_{t+1}(1) &= z_t(2) + 1.8a, \\ z_{t+1}(2) &= z_t(3) + 2.44a, \\ z_{t+1}(3) &= z_t(4) + 2.95a. \\ &\dots \end{aligned} \quad (7.26)$$

Результаты этой коррекции, при наличии одного и двух новых наблюдений, приведены на рисунке 7.3.

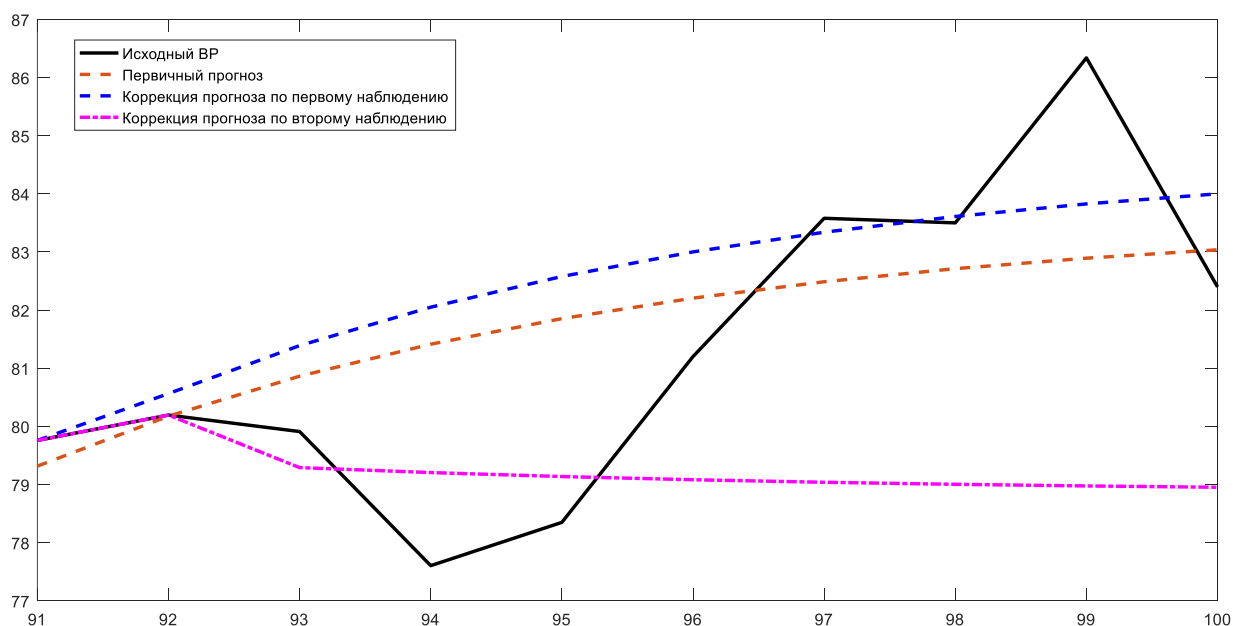


Рисунок 7.3 – Ретроспективный прогноз и его коррекция по первому и второму наблюдениям

Как видно из рисунка 7.3, результаты получились довольно интересными. Коррекция по одному наблюдению примерно на 3% повысила точность прогноза, что несущественно, но все же хорошо. А вот коррекция еще и по второму наблюдению дала уже совершенно другой прогноз – вместо возрастающего тренда, получился убывающий. Получается, прогноз ухудшился после коррекции? И да, и нет. Дело в том, что коррекция прогноза гарантирует улучшение точности прогноза **только на еще один шаг вперед**. С увеличением числа отсчетов коррекция не обязательно приведет к более точному прогнозу в целом, потому что схема строилась изначально для повышения точности на еще один ближайший шаг. Так что сравнить скорректированные прогнозы – не совсем верно. Вот если сравнивать 3 шаг исходного прогноза, со 2 шагом скорректированного по одному наблюдению и с 1 шагом по двум наблюдениям, то, несомненно, коррекция прогноза по двум наблюдениям оказалась наиболее точной. Таким образом, схему такого прогноза на основе АРПСС и ее коррекции при минимизации среднеквадратичной ошибки надо считать **краткосрочным прогнозом**.

#### Часть 4. Вычисление доверительных интервалов прогноза

Как уже обсуждалось при прогнозировании трендов, любой прогноз не является абсолютно достоверным, и, потому, с некоторой вероятностью может отклоняться от наилучшего своего значения. Чтобы понять, в каких пределах это отклонение происходит при заданной вероятности этой вариации прогноза, и строятся доверительные интервалы.

Попробуем на основе определения доверительных интервалов и имеющихся схем и моделей АРПСС прогнозирования построить оценку доверительных интервалов при заданной доверительной вероятности.

Рассчитаем дисперсию ошибки прогноза (7.10):

$$V(l) = \text{Var}[e_t(l)] = (1 + \psi_1^2 + \dots + \psi_{l-1}^2) \sigma_a^2,$$

$$V(l) = \left(1 + \sum_{j=1}^{l-1} \psi_j^2\right) \sigma_a^2. \quad (7.26)$$

Из предположения, что  $a$  подчиняется нормальному распределению, следует, что и условное распределение вероятности будущего значения процесса  $z_{t+l}$  будет также нормальным со средним значением  $z_t(l)$  и

$$\text{стандартным отклонением} \left(1 + \sum_{j=1}^{l-1} \psi_j^2\right)^{1/2} \sigma_a.$$

Чтобы найти дисперсию этой ошибки (7.26) нам не хватает параметра дисперсии  $\sigma_a^2$ , которая, вообще говоря, скрыта от наблюдателя. Но этот параметр, тем не менее, можно оценить.

Для этого используется так называемый **ряд остатков** (невязок):

$$e_t = z(t) - z_t \quad (7.27)$$

где  $z(t)$  – истинные отсчеты ВР в момент времени  $t$ ,  $z_t$  – отсчеты модельного ВР в момент времени  $t$ . По сути, ряд остатков – ошибка подгонки реальных данных выбранной моделью. Вообще говоря, если выбор модели выполнялся оптимально, то ряд остатков должен иметь нормальное распределение, так как

это означает, что при построении модели нам удалось полностью разделить исследуемый ВР на детерминированную и случайную составляющие.

Но вернемся к ряду остатков, оценке дисперсии  $\sigma_a^2$  и доверительным интервалам. Вычислим оценку мат. ожидания ряда остатков и его оценку дисперсии:

$$M[e_t] = \bar{e} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N e_i$$

$$s_e = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (e_i - \bar{e})^2}{N-1}} \quad (7.28)$$

Оказывается дисперсию  $\sigma_a^2$  можно приближенно оценить с помощью дисперсии ряда остатков, при достаточном числе отсчетов, с учетом поправочных коэффициентов. Вместе с этим условием, приближенные доверительные интервалы прогноза будут иметь вид:

$$z_{t+l}(\pm) = z_t(l) \pm u_{\varepsilon/2} \left( 1 + \sum_{j=1}^{l-1} \psi_j^2 \right)^{1/2} s_e \quad (7.29)$$

где  $u_{\varepsilon/2}$  – квантиль уровня  $1 - \varepsilon / 2$  стандартного нормального распределения.

Верхняя и нижняя границы  $z_{t+l}(\pm)$  по (7.29) доверительного интервала будут соответствовать  $(1 - \varepsilon)$ -% вероятностным пределам.

Используем выражения (7.29) и (7.28) для оценки доверительных интервалов прогноза нашего примера ВР из рисунка 7.1.

Для 50% предела квантиль  $u_{\varepsilon/2}$  равен -0,674, для 95% предела квантиль  $u_{\varepsilon/2}$  равен -1,96. После расчета оценочной дисперсии и с учетом найденных весовых коэффициентов, получаем сначала доверительные интервалы для 50% предела:

$$\begin{aligned}
& z_t(2) \pm (0.674)(1 + 1.8^2)^{1/2} s_e, \\
& z_t(3) \pm (0.674)(1 + 1.8^2 + 2.44^2)^{1/2} s_e, \\
& z_t(4) \pm (0.674)(1 + 1.8^2 + 2.44^2 + 2.95^2)^{1/2} s_e.
\end{aligned}
\tag{7.30}$$

а затем и для 95% предела:

$$\begin{aligned}
& z_t(2) \pm (1.959)(1 + 1.8^2)^{1/2} s_e, \\
& z_t(3) \pm (1.959)(1 + 1.8^2 + 2.44^2)^{1/2} s_e, \\
& z_t(4) \pm (1.959)(1 + 1.8^2 + 2.44^2 + 2.95^2)^{1/2} s_e.
\end{aligned}
\tag{7.31}$$

Полученные результаты представлены на рисунке 7.4.

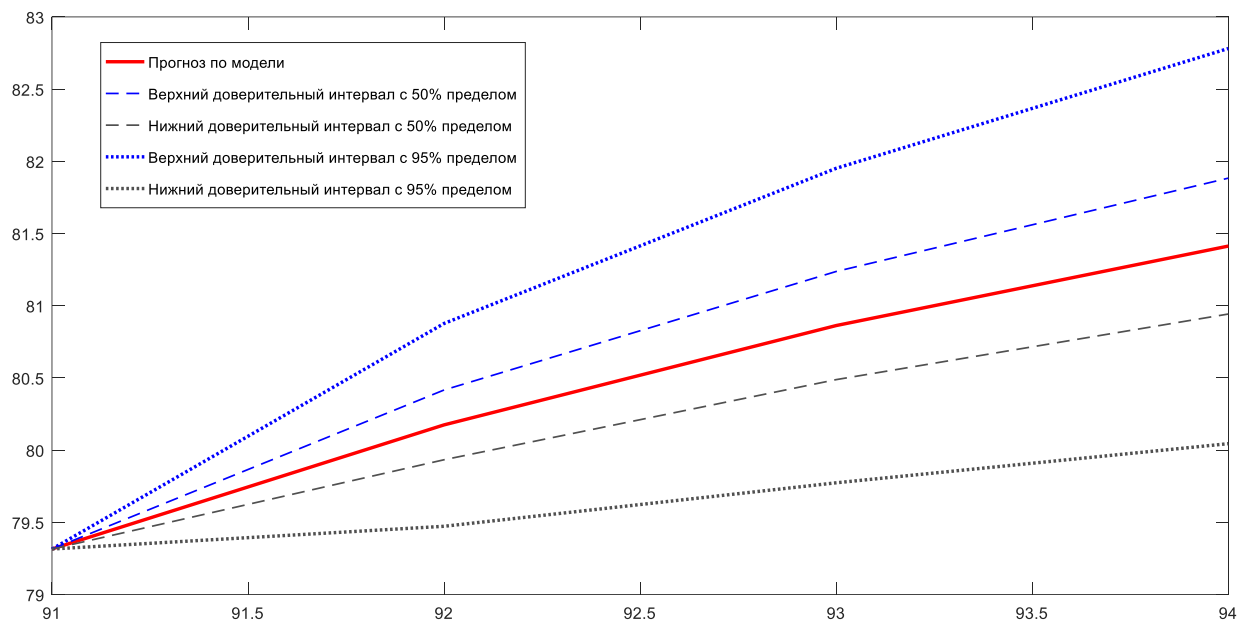


Рисунок 7.4 – Доверительные интервалы прогноза