МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Уральский федеральный университет имени
первого Президента России Б. Н. Ельцина»

МЕТОД SSA – «ГУСЕНИЦА»

Методические указания к выполнению
практического задания № 6

Екатеринбург
2024

Содержание

Введение

Метод сингулярного спектрального анализа SSA относится к адаптивным методам, и, потому, весьма эффективен для анализа и прогноза множества различных временных рядов, в том числе и нестационарных. Одним из важных замечаний, которое нужно сделать на начальном этапе данной лабораторной работы, состоит в том, что алгоритм SSA требует очень большой объем ОЗУ для больших значений окна L.

1. Задание на лабораторную работу

Результатом выполнения лабораторной работы является оформленный отчет в виде *Jupyter*-тетради, в котором должны быть представлены и отражены все нижеперечисленные пункты:

1) Сначала импортируйте в свой код нужные библиотеки, функции и т.д.

```
import numpy as np
import numpy.random as rand
import matplotlib.pyplot as plt
import h5py
```

2) Метод сингулярного спектрального анализа SSA реализуется в 2 этапа – **разложение** и **группировка**. Соответственно, нам потребуется написать несколько функций – для сингулярного разложения ряда и затем для его обратной группировки.
3) Начнем с этапа разложения. Это будет функция

```
def SSA_modes(F, L):
```

которая принимает два параметра: сам временной ряд F и длину окна разложения L.

4) Внутри функции нам понадобится определить размерность траекторной $\boldsymbol{X}$ матрицы L x K.

N = len(F)

K = N - L + 1

X = np.empty((L, K))

5) Самостоятельно заполните элементы данной матрицы $\boldsymbol{X}$ точками массива ряда $F = f(t) = \{f(t_0),...,f(t_{N-1})\}$ через их «вложение» по столбцам $X_i = (f_{i-1},...,f_{i+L-2})^T, 1 \le i \le K$:

$$X = (x_{ij})_{i,j=1}^{L,K} = \begin{pmatrix} f_0 & f_1 & f_2 & \cdots & f_{K-1} \\ f_1 & f_2 & f_3 & \cdots & f_K \\ f_2 & f_3 & f_4 & \cdots & f_{K+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{L-1} & f_L & f_{L+1} & \cdots & f_{N-1} \end{pmatrix}$$

6) Прежде чем переходить дальше, проверьте полученную матрицу на правильность построения для малых значений длины окна L.

7) Теперь в этой функции можно реализовать второй шаг метода SSA – это шаг сингулярного разложения. Сначала нужно создать полную матрицу $S = XX^T$.

S = np.dot(X, X.T)

8) Для разложения мы используем функцию ниже, через которую сразу же получим нужное **сингулярное разложение** SVD = *Singular Value Decomposition*.

U, A, _ = np.linalg.svd(S)

Здесь $\boldsymbol{U}$ – матрица собственных векторов, $\boldsymbol{A}$ – массив собственных чисел $(\lambda_1 \ge \lambda_2 \ge ... \ge \lambda_L \ge 0)$. Третий выходной результат функции нам не понадобится.

9) Еще нужна матрица траекторных векторов $V = X^T U$. Рассчитайте данную матрицу самостоятельно.

10) В результате выполнения своей работы функция **SSA_modes(F, L)** должна вернуть **три** значения: массив собственных чисел A, матрицу собственных векторов U и матрицу траекторных векторов V.

11) Проверьте правильность и работоспособность данной функции на следующем простом примере:

```
ts = np.array([3, 2, 1, 2, 3, 2, 1, 2, 3, 2, 1, 2, 3]) # мини временной ряд
A, U, V = SSA_modes(ts, 3) # его разложение с длиной окна = 3
print(A) # собственные числа
print(U) # собственные вектора
print(V) # траекторные вектора
```

12) При правильной реализации функции должны получиться следующие результаты:

Для A: `[129.66842566  12.           3.33157434]`

Для U:
```
[[-5.78869570e-01  7.07106781e-01  4.06091149e-01]
 [-5.74299610e-01  4.14039445e-16 -8.18645196e-01]
 [-5.78869570e-01 -7.07106781e-01  4.06091149e-01]]
```

Для V:
```
[[-3.46407750e+00  1.41421356e+00 -1.29257973e-02]
 [-2.88977789e+00  0.00000000e+00  8.05719399e-01]
 [-3.46407750e+00 -1.41421356e+00 -1.29257973e-02]
 [-4.03837711e+00  8.88178420e-16 -8.31570994e-01]
 [-3.46407750e+00  1.41421356e+00 -1.29257973e-02]
 [-2.88977789e+00  0.00000000e+00  8.05719399e-01]
 [-3.46407750e+00 -1.41421356e+00 -1.29257973e-02]
 [-4.03837711e+00  8.88178420e-16 -8.31570994e-01]
 [-3.46407750e+00  1.41421356e+00 -1.29257973e-02]
 [-2.88977789e+00  0.00000000e+00  8.05719399e-01]
 [-3.46407750e+00 -1.41421356e+00 -1.29257973e-02]]
```

13) Далее нам нужна функция, которая будет реализовывать этап восстановления ряда. Пусть это будет функция **SSA_group**, у которой входными параметрами являются массив собственных значений ***A***, массив собственных векторов ***U***, массив траекторных векторов ***V***, длина ряда ***N*** и массив группировки компонент ***I***. Выходной параметр всего один – это массив, который содержит отсчеты восстановленного ряда.

14) При вызове этой функции мы, очевидно, передаем ей уже найденные величины ***A, U, V, N=len(F)***. Новым параметром будет только ***I***. Длину окна ***L*** можно найти из длины массива собственных чисел: **L = len(A)**. Еще нам понадобится $K = N - L + 1$.

15) Пусть группировку ***I*** мы будем задавать в виде **массива номеров компонент**, которые мы хотим группировать вместе. Тогда шаг группировки выглядит всего двумя строками:

```
V = V.transpose()
Z = np.dot(U[:, I], V[I, :])
```

что соответствует выражению $Z = X_{I_1} + ... + X_{I_m}$

16) Далее идет этап **диагонального усреднения**. Нам потребуется восстановить временной ряд $G = g_0, ..., g_{N-1}$ той же длины, что и исходный ряд: **G = np.zeros(N)**. При этом еще понадобится $L^* = \min(L, K)$, $K^* = \max(L, K)$.

17) Далее Вы должны самостоятельно по формулам ниже построить процедуру **диагонального усреднения**.

$$g_k = \begin{cases} \dfrac{1}{k+1}\sum_{m=0}^{k} Z^*_{m,k-m} & 0 \le k < L^* - 1, \\ \dfrac{1}{L^*}\sum_{m=0}^{L^*-1} Z^*_{m,k-m} & L^* - 1 \le k < K^*, \\ \dfrac{1}{N-k}\sum_{m=k-K^*+1}^{N-K^*} Z^*_{m,k-m} & K^* \le k < N+1. \end{cases}$$

18) Проверка работоспособности функции **SSA_group** очень проста – нужно всего лишь сгруппировать полученное разложение из пункта 12 по всем 3 компонентам **[0, 1, 2]** и получить исходный массив:

```
ts1 = SSA_group(A, U, V, len(ts), [0, 1, 2])
print(ts1)
```

```
[3. 2. 1. 2. 3. 2. 1. 2. 3. 2. 1. 2. 3.]
```

19) Если все правильно реализовано, для тестового ряда постройте каждую компоненту отдельно (массив группировки [0], затем [1], затем [2]), и их попарные комбинации ([0, 1], [0, 2], [1, 2]). Изобразите их на рисунках относительно исходного временного ряда.

20) Отметьте для себя характерные особенности полученных компонент. Во-первых, 0-компонента содержит некоторое среднее “ненулевое” значение ряда (тренд), а уже 1-компонента и 2-компонента имеют среднее значение близкое к нулю. Во-вторых, 1-компонента и 2-компонента имеют одинаковый период, так как любая периодическая составляющая методом SSA всегда разлагается на парные компоненты. В-третьих, амплитуда 1-компоненты выше амплитуды 2-компоненты, так как массив собственных чисел упорядочен по убыванию, то есть с ростом номера компоненты ее «вклад» в исходный ряд уменьшается.

21) Важно отметить, что с ростом длины окна L разложения, все составляющие ряда будут «расплываться» по нескольким компонентам. То есть тренд не всегда есть 0-компонента, а скорее комбинация компонент с номерами близкими к нулю, а периодика не равна одной паре компонент, а есть комбинация нескольких пар с близкими номерами. Тем не менее, общий характер особенностей из пункта 20 сохраняется.

22) Теперь применим готовый метод SSA к некоторым модельным временным рядам.

23) Постройте следующий модельный ряд из 2 периодик с шумом:

```
t = np.linspace(0, 1, 1024)
f1 = 10
f2 = 50
F=1.7*np.sin(2*np.pi*f1*t)+np.sin(2*np.pi*f2*t)+0.2*rand.randn(len(t))
plt.figure(figsize = (10, 5))
plt.plot(t, F, 'k')
plt.plot(t, 1.7*np.sin(2*np.pi*f1*t), 'b')
plt.plot(t, np.sin(2*np.pi*f2*t), 'r')
plt.show()
```

24) Самостоятельно подберите такую длину окна и метод группировки компонент, чтобы с помощью метода SSA выделить компоненты, наиболее близкие к исходным периодикам в модельном ряде. **Учтите, что для разных компонент длина окна должна быть одинаковой и только номера группировки должны отличаться**. Постройте их на рисунке совмещенно с исходным зашумленным рядом F, а также постройте полученные компоненты на фоне соответствующих периодических составляющих.

25) Теперь аналогичной методикой попытаемся построить тренд для сильно зашумленного ВР. Пусть задан ВР:

```
t = np.linspace(0,4,4096)
F = np.exp(-0.4*np.pi*t) + 0.5*rand.randn(len(t))
```

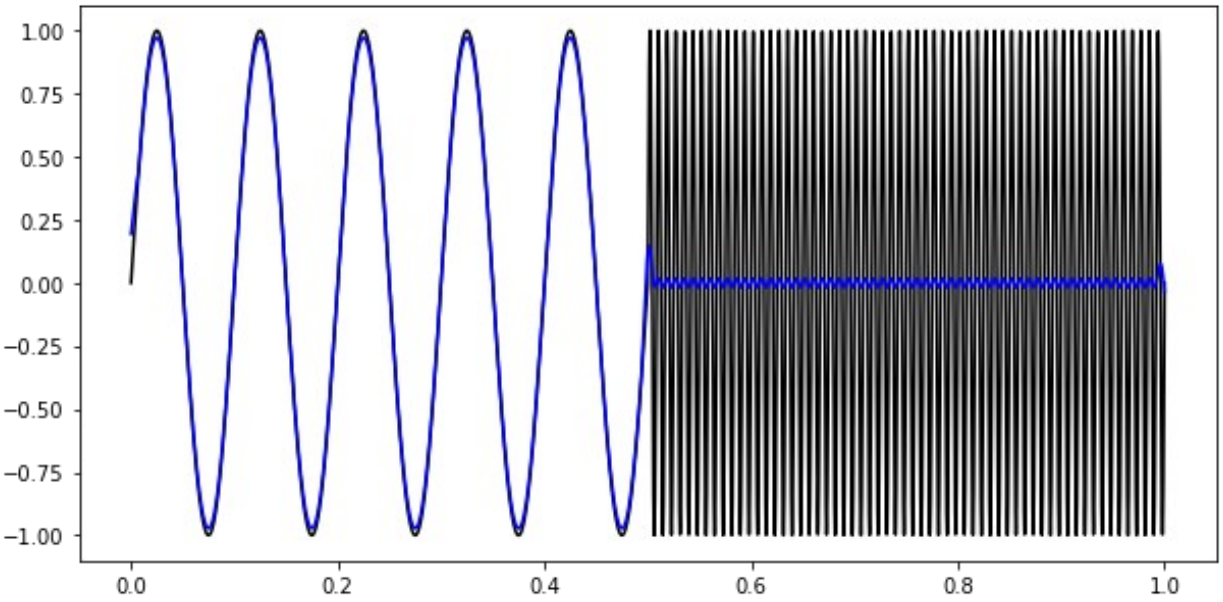
26) Используя метод SSA выделите этот экспоненциальный тренд **np.exp(-0.4*np.pi*t)**. Длину окна и метод группировки определите сами. Постройте на графиках исходный тренд и тот, что был получен Вами с помощью метода SSA.

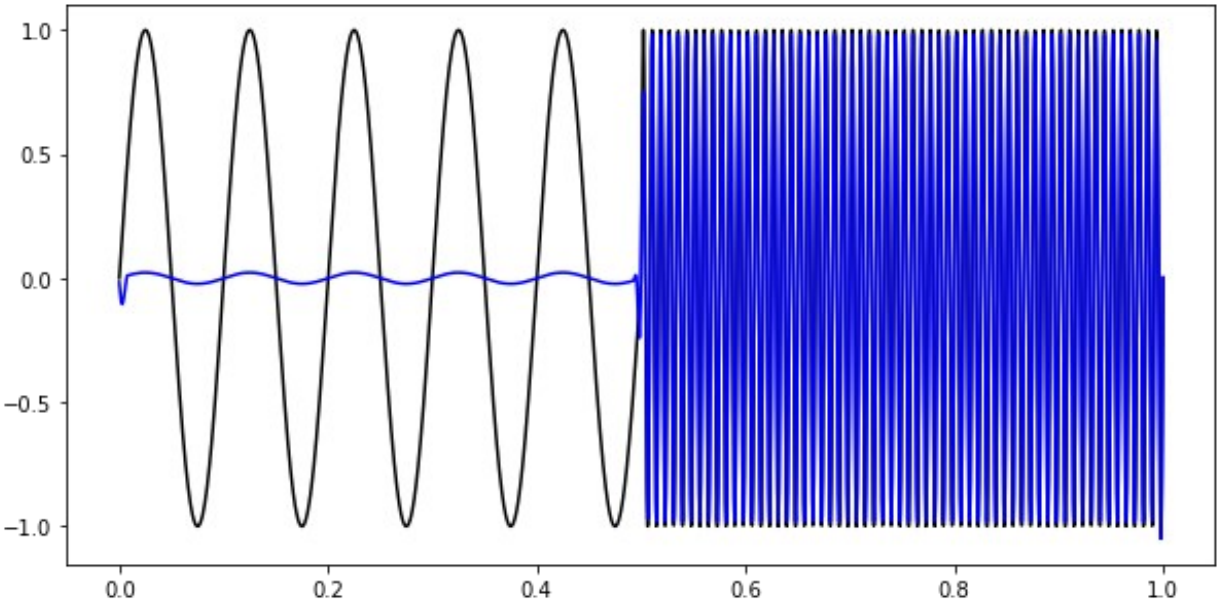
27) Создайте периодический сигнал с **изломом частоты**:

```
t = np.linspace(0, 1, 4096)
x2 = np.zeros(4096)
for i in range(0, len(t)//2):
   x2[i] = np.sin(2*np.pi*10*t[i])
for i in range(len(t)//2, len(t)):
   x2[i] = np.sin(2*np.pi*120*t[i])
plt.figure(figsize = (10, 5))
plt.plot(t, x2)
plt.show()
```

28) Самостоятельно подберите такую длину окна и метод группировки компонент, чтобы с помощью метода SSA выделить компоненты, наиболее близкие к исходным периодикам на двух половинках временного интервала в модельном ряде. Постройте их вместе с исходным рядом на одном рисунке.

Например, достаточно хорошим результатом следует считать:





Не забывайте, что **для разных компонент длина окна должна быть одинаковой, но только номера группировки должны отличаться.**

29) Смоделируйте временной ряд из **4 гармоник с шумом**, и разделите его на компоненты с помощью метода SSA:

$$u(t) = \sin\left[2\pi t\left(f_1\right)\right] + \sin\left[2\pi t\left(f_2\right)\right] + \sin\left[2\pi t\left(f_3\right)\right] + \sin\left[2\pi t\left(f_4\right)\right] + \xi(t)$$

```
t = np.linspace(0,1,1024)
f1 = 10
f2 = 40
f3 = 100
f4 = 150
F=2.0*np.sin(2*np.pi*f1*t)+1.5*np.sin(2*np.pi*f2*t)+0.8*np.sin(2*np.pi*f3*t)+0.5*np.sin(2*np.pi*f4*t)+0.2*rand.randn(len(t))
plt.figure(figsize = (10, 15))
plt.subplot(5,1,1)
plt.plot(t, F, 'k')
plt.subplot(5,1,2)
plt.plot(t, 2.0*np.sin(2*np.pi*f1*t), 'b')
plt.subplot(5,1,3)
plt.plot(t, 1.5*np.sin(2*np.pi*f2*t), 'r')
plt.subplot(5,1,4)
plt.plot(t, 0.8*np.sin(2*np.pi*f3*t), 'g')
plt.subplot(5,1,5)
plt.plot(t, 0.5*np.sin(2*np.pi*f4*t), 'm')
plt.show()
```

Внимание! У всех 4 компонент длина окна должна быть одна и та же, но только способ группировки I должен отличаться!

30) Загрузите временной ряд из файла doppler.mat:

```
file = h5py.File('doppler.mat','r')
data = file.get('data')
data = np.array(data)
data = data.ravel()
plt.figure(figsize = (10, 5))
plt.plot(data, 'b')
plt.show()
```

Декомпозируйте этот временной ряд с помощью SSA таким образом, чтобы максимально **очистить его от шума**.

31) Теперь на основе метода SSA реализуем **прогноз** временных рядов. Пусть в результате декомпозиции методом SSA получены все необходимые собственные тройки $\left(\sqrt{\lambda_i}, U_i, V_i\right)$.

Прогноз строится на ***M*** точек вперед.

32) Тогда прогноз методом **SSA-R** строится следующей последовательностью действий (лучше в виде отдельной функции через вызов **def**). Сначала вычислим норму последнего вектора из матрицы ***U*** для заданной группировки компонент:

```
vu = np.linalg.norm(U[-1, I])
```

33) Нам надо вычислить ряд весовых коэффициентов:

$$R = \left(a_{L-2}, \ldots, a_0\right)^T = \frac{1}{1-v^2}\sum \pi_i P_i^{\nabla}$$

для чего потребуется следующая последовательность команд:

```
R = np.sum(U[L - 1, I] * U[0:L - 1, I], 1)
R = R / (1 - vu * vu)
```

34) Пусть ВР, восстановленный методом SSA по группировке ***I*** компонент, называется ***G***, а ряд новой длины ***N***+***M***, есть восстановленный ряд и его прогноз, называется ***Q***. Тогда

$$Q_i = \begin{cases} g_i & ,i < N \\ \sum_{j=0}^{L-2} a_j g_{i-j-1}, & i = N,...,N+M-1 \end{cases}$$

где a_j, по сути, есть значения из вектора **R**.

35) Постройте прогноз методом SSA-R для ряда из пункта **23** (две периодики) на **256** точек вперед, подберите для него наилучшие параметры. Внимание! Нужно строить не прогноз отдельных компонент, а нужно построить прогноз всего временного ряда без шума. Это значит, что в отличие от предыдущих пунктов, где решалась *задача декомпозиции*, задача изменилась на *прогноз ВР*.
Подсказка: так как задачи декомпозиции и прогноза преследуют разные цели (высокая точность на известном отрезке времени против высокой точности на будущем отрезке времени), то параметры длины окна ***L*** и группировки ***I*** для случаев задачи декомпозиции и задачи прогноза будут, скорее всего, отличаться.

36) Постройте прогноз методом SSA-R для ряда из пункта **29** (это который 4 периодики во ВР) на **256** точек вперед, подберите для него наилучшие параметры. Не забывайте, что нужно строить не прогноз отдельных компонент, а нужно построить прогноз всего временного ряда в целом без шума.

37) Загрузите из mat-файла **Fort.mat** ряд, содержащий отсчеты некоторого реального ВР, всего 174 отсчета в вектор-строке:

```
file = h5py.File('Fort.mat','r')
Z = file.get('Fort')
Z = np.array(Z)
Z = Z.ravel()
plt.figure(figsize = (10, 5))
plt.plot(Z, 'k')
plt.show()
```

38) Постройте его **ретроспективный прогноз** методом SSA-R **на последние 50 точек**. Графики исходного ряда *Fort* и прогноза строятся вместе, так как они имеют малую длину и вполне могут поместиться рядом.

39) Загрузите из mat-файла с номером своего варианта (файлы которых впервые появились в лаб. работе 4) ряд, содержащий отсчеты некоторого ВР. Постройте его **ретроспективный прогноз** методом SSA-R **на последние 30 точек**. Графики исходного ряда и прогноза строятся вместе, так как они имеют малую длину и вполне могут поместиться рядом.

40) Теперь самостоятельно реализуйте метод прогноза на основе SSA с итерационной аппроксимацией (название в лекциях – стохастический SSA-прогноз).

41) Проведем *частичный* SSA-анализ заданного ВР: **без диагонального усреднения** (последний этап).

42) К ВР добавляется всего **один новый случайный отсчет** из диапазона уже имевшихся уровней ряда:

$$F'_{N+1} = \left(f_0, ..., f_{N-1}, f_{new}\right), f_{new} \in \left[\min(F); \max(F)\right]$$

43) Этот ряд длины ***N***+1 подвергается SSA-декомпозиции (**только** шаги разложения и формирования траекторной матрицы), но **без изменения оценки параметров**, то есть только на основе их предыдущих оценок.

44) Полученные собственные тройки нового ряда **группируются и усредняются** на основе метода группировки ***I***.

45) В результате **усреднения** будет получен новый временной ряд, для которого первые ***N*** отсчетов совпадают с ВР, а последний отсчет является **пред-прогнозом.**

46) Для получения точного прогноза, новый отсчет ряда приравнивается этому приближению, после чего **предыдущие шаги повторяются** до тех пор, пока **значение не перестанет изменяться** с увеличением числа шагов.

47) Полученный в результате отсчет принимается за **первую точку прогноза**. Для продолжения прогноза, новый ряд длины *N*+1 становится ВР для прогнозирования, и алгоритм **повторяется вновь.** На протяжении всего алгоритма прогноза нет необходимости заново искать необходимую группировку компонент.

48) Постройте ретроспективный прогноз данным методом для ряда **Fort** (см. п. 38).

2. Требования к оформлению отчета

Отчет в Jupyter-тетради должен обязательно содержать: номер лабораторной работы, ФИО студента, номер варианта (либо студенческий номер), номер группы, результаты выполнения работы с комментариями студента (комментарии пишутся после #) и изображениями.