МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Уральский федеральный университет имени
первого Президента России Б. Н. Ельцина»

МАКРОСТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ И ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ДАННЫХ

Лекция № 6
Типовые модели авторегрессии

Екатеринбург
2024

Содержание

Часть 1. Модель авторегрессии

Тот факт, что временной ряд является *упорядоченной* последовательностью наблюдений некоторой выборки случайного процесса, может быть сам по себе показателем свойств модели, которая лежит в его основе. Подобные ряды чаще всего удобно описывать в виде механизмов влияния предыдущих наблюдений на результаты последующих. Такие модели как раз называют **авторегрессионными**, то есть моделями, в которых текущее значение процесса выражается в виде конечной совокупности предыдущих значений процесса и некоторого остаточного ряда. Особенно такие модели, очевидно, будут очень удобны для *прогнозирования*, где самой целью является необходимость по известным наблюдениям рассчитать будущие отсчеты.

Чтобы не запутаться в этой сложной области задач, начнем сначала с ключевых понятий теории подобных моделей. Так как большинство выражений в полной форме будут получаться достаточно длинными (нам придется учитывать все возможные зависимости от предыдущих наблюдений), введем несколько полезных операторов:

оператор сдвига назад B

$$Bz_t = z_{t-1}, \tag{6.1}$$

оператор сдвига вперед $F = B^{-1}$

$$Fz_t = z_{t+1}, \tag{6.2}$$

разностный оператор со сдвигом назад ∇

$$\nabla z_t = z_t - z_{t-1} = (1-B)z_t, \tag{6.3}$$

и **разностный оператор со сдвигом вперед** ∇^{-1}

$$\nabla^{-1} z_t = \sum_{j=0}^{\infty} z_{t-j} = (1-B)^{-1} z_t \ . \tag{6.4}$$

С учетом этих обозначений, а также, если принять $z_t = z_t - \mu$, где μ – уровень или тенденция процесса, **модель авторегрессии порядка *p*** (АР(p) = AR(p)) описывается как:

$$z_t = \phi_1 \tilde{z}_{t-1} + \phi_2 \tilde{z}_{t-2} + \ldots + \phi_p \tilde{z}_{t-p} + a_t \qquad (6.5)$$

Получается, что значения ряда z «регрессируют» на своих предыдущих значениях. Запись (6.5) выглядит достаточно длинной, поэтому, вводя **оператор авторегрессии**

$$\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \ldots - \phi_p B^p \ , \qquad (6.6)$$

модель авторегрессии ужимается до выражения

$$\phi(B)\tilde{z}_t = a_t \qquad (6.7)$$

Формулы (6.5) и (6.7) полностью эквивалентны. Нетрудно заметить, что АР модель порядка p будет содержать p+2 неизвестных параметра, и нахождение их будет как раз являться задачей построения модели авторегрессии. Во всех этих выражениях a_t является некоторым случайным импульсом или рядом, то есть важный принцип разделения ВР на детерминированную и случайную составляющие сохраняется и для авторегрессионных моделей. Это универсальное представление позволяет нам использовать те же самые статистические критерии, что мы уже применяли для анализа ВР ранее, а также применять, если установлена стационарность ВР, автокорреляционные и спектральные методы, которые нам пригодятся.

Часть 2. Модель скользящего среднего и смешанные модели

Модель авторегрессии (6.5) выражает отклонение ряда в виде конечной взвешенной суммы предыдущих отклонений плюс случайный импульс. Но если вспомнить форму общей аддитивной модели, то зачастую во ВР будущие значения ряда могут зависеть от предыдущих отсчетов *случайной составляющей*. Тогда подобные модели, в которых $\tilde{z}_t$ линейно зависит от конечного числа предыдущих a

$$z_t = a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - \ldots - \theta_q a_{t-q} \tag{6.8}$$

называются моделями **скользящего среднего** (moving average) порядка q (**СС**(q) = **MA**(q)). Определив аналогично (6.6) **оператор скользящего среднего**

$$\theta(B) = 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \ldots - \theta_q B^q \tag{6.9}$$

модель СС(q) в краткой форме будет представлена в виде

$$\tilde{z}_t = \theta(B) a_t \tag{6.10}$$

Для достижения большей гибкости в подгонке моделей, лучше объединить эти два вида моделей в нечто общее, назвав их **смешанной моделью авторегрессии – скользящего среднего** порядка (p,q) (АРСС (p,q) = **ARMA** (p,q)):

$$\begin{gathered} z_t = \phi_1 \tilde{z}_{t-1} + \phi_2 \tilde{z}_{t-2} + \ldots + \phi_p \tilde{z}_{t-p} + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - \ldots - \theta_q a_{t-q}, \\ \phi(B) \tilde{z}_t = \theta(B) a_t \end{gathered} \tag{6.11}$$

На практике, несмотря на страшный вид выражения (6.11), достаточным оказывается приведение модели АРСС до порядка (p,q) 2 и 3, а иногда и меньше.

Стоит отметить, что общая модель (6.11) является **стационарной**, то есть, прежде чем использовать ее, нам придется проверить ВР на стационарность, и только потом заняться подгонкой модели. А что делать, если тесты показали, что ВР является нестационарным? В этом случае либо отказываются от использования моделей авторегрессии, либо рассматривают более узкий класс нестационарных ВР, для которых мат. ожидание и дисперсия изменяются, но сам ряд в некотором смысле однороден. В этом случае, оказывается, хотя ВР будет нестационарным, но некоторая его *разность* будет стационарной, что уже обсуждалось в предыдущих лекциях при рассмотрении понятия *единичных корней* (*unit root*). Такой однородный нестационарный процесс АР записывают в форме:

$$\phi(B)(1-B)^d\,\tilde{z}_t = \theta(B)a_t \tag{6.12}$$

или в виде

$$\phi(B)w_t = \theta(B)a_t \tag{6.13}$$

где $w_t = \nabla^d \tilde{z}_t$ – нестационарный процесс.

Модели, описываемые выражениями (6.12) и (6.13), называют **моделями авторегрессии – проинтегрированного скользящего среднего АРПСС** порядка (p,d,q) (= **ARIMA** (p,d,q)). При d=0 модель вырождается в стационарный случай. Откуда в названии взялось слово «проинтегрированный»? Оно появилось из определения w_t: если выразить отсчеты через него, то получим $\tilde{z}_t = \nabla^{-d} w_t$, где

$$\nabla^{-d} w_t = w_t + w_{t-1} + w_{t-2} + \ldots\ , \tag{6.14}$$

поэтому мы суммируем составляющие, то есть, «интегрируем» их.

Часть 3. Стационарность моделей АРСС

Понятие стационарности ВР уже много раз обсуждалось, для него есть строгие теоретические определения и некоторые статистические тесты. Применительно к моделям АРСС это понятие оказывается гораздо более удобно использовать в виде поиска корней характеристического полинома, нежели использовать громоздкие статистические тесты. Понятие единичных корней уже упоминалось ранее в лекциях, но теперь, когда нам известно, как выглядит модель АРСС в общем, теперь уже возможно понять, откуда они вообще взялись и как через них можно определить стационарность или нестационарность ВР.

Следствием из определения стационарности в широком смысле является тот факт, что дисперсия процесса будет конечна и постоянна. Для моделей АРСС это означает, что **производящая функция весов** $\psi(B)$:

$$\psi(B)=1+\psi_1 B+\psi_2 B^2+\ldots=\phi^{-1}(B) \tag{6.15}$$

есть некоторый полином, который **должен сходиться** при $|B|\leq 1$, то есть для корней этого полинома, лежащих внутри или на единичной окружности.

Эквивалентность между стационарностью ряда и сходимостью ряда $\psi(B)$ не является очевидной, но доказывается в строгой теоретической форме, где устанавливается однозначное соответствие между дисперсией процесса и функцией $\psi(B)$. Здесь это доказательство не рассматривается, в силу его большого размера описания.

Функция весов $\psi(B)$ для нас неудобна, так как в моделях АРСС мы все-таки оперируем понятием $\phi(B)$. Поэтому, чтобы окончательно перейти к понятию **единичных корней**, дадим определение стационарности для АР моделей на основе функции $\phi(B)$.

Уравнение $\phi(B)=0$ называется **характеристическим полиномом** процесса, а его корни служат средством оценки стационарности процесса, так как в зависимости от их соотношения с единицей определяется тип процесса. Процесс АР, описываемый выражением $\phi(B)\tilde{z}_t = a_t$ является **стационарным**, если корни уравнения $\phi(B) = 0$ **лежат вне единичного круга**.

Аналогичным образом определение стационарности АР процессов расширяется через дополнительные функции сначала на процессы СС, а затем и на смешанные модели АРСС.

Таким образом, проверку на стационарность ВР, описываемых моделями АРСС, можно свести к поиску единичных корней характеристического полинома $\phi(B) = 0$, либо сразу же использовать статистический KPSS-тест или ADF-тест, которые опираются как раз на это определение, но при этом оперируют более точными понятиями статистических гипотез и уровней значимости.

Часть 4. Построение моделей авторегрессии

Пусть для заданного ВР z_t мы определили, что он является стационарным и корни характеристического полинома $\phi(B)=0$ лежат вне единичного круга. Для АР модели порядка *p* нам необходимо найти *p*+2 параметров, чтобы однозначно сопоставить отсчеты ряда с его АР(*p*) моделью.

Для этого умножим выражение (6.5) на $\tilde{z}_{t-k}$ и получим:

$$\tilde{z}_{t-k} z_t = \phi_1 \tilde{z}_{t-k} \tilde{z}_{t-1} + \phi_2 \tilde{z}_{t-k} \tilde{z}_{t-2} + \ldots + \phi_p \tilde{z}_{t-k} \tilde{z}_{t-p} + \tilde{z}_{t-k} a_t \; . \qquad (6.16)$$

Так как ВР стационарен, можно посчитать мат. ожидание $M[..]$ от (6.16), с учетом того, что детерминированная и случайная составляющая *разделимы* $M\left[\tilde{z}_{t-k} a_t\right]=0$ для $k>0$:

$$\gamma_k = \phi_1 \gamma_{k-1} + \phi_2 \gamma_{k-2} + \ldots + \phi_p \gamma_{k-p} \qquad (6.17)$$

Поделив это разностное уравнение на γ_0, мы получим, по определению, разностное уравнение, состоящее из автокорреляционных функций:

$$\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} + \phi_2 \rho_{k-2} + \ldots + \phi_p \rho_{k-p} \qquad (6.18)$$

В сокращенной форме (6.18) выглядит как $\phi(B)\rho_k = 0$. Теперь у нас на руках есть *k* линейных уравнений с *k* неизвестными – ведь автокорреляции мы можем оценить, как было показано в предыдущих лекциях. Систему этих уравнений в канонической форме называют **уравнениями Юла-Уокера**:

$$\begin{gathered}
\rho_1 = \phi_1 + \phi_2 \rho_1 + \ldots + \phi_p \rho_{p-1} \\
\rho_2 = \phi_1 \rho_1 + \phi_2 + \ldots + \phi_p \rho_{p-2} \\
\vdots \\
\rho_p = \phi_1 \rho_{p-1} + \phi_2 \rho_{p-2} + \ldots + \phi_p
\end{gathered} \qquad (6.19)$$

Если записать (6.19) в матричной форме:

$$\Phi = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_p \end{bmatrix}, \ \rho = \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \vdots \\ \rho_p \end{bmatrix}, \ \mathrm{P} = \begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \cdots & \rho_{p-1} \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{p-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{p-1} & \rho_{p-2} & \rho_{p-3} & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

то получим:

$$\Phi = \mathrm{P}^{-1}\rho \qquad (6.20)$$

При желании можно показать, что этот метод эквивалентен обычному методу наименьших квадратов определения коэффициентов линейной регрессии по известным точкам ряда.

Дисперсия подобных АР процессов, если использовать выражение (6.17), будет вычисляться тогда по формуле:

$$\sigma_z^2 = \frac{\sigma_a^2}{1 - \rho_1\phi_1 - \rho_2\phi_2 - \ldots - \rho_p\phi_p}\ , \qquad (6.21)$$

и автокорреляционная функция АР(p) поэтому будет выглядеть, как совокупность затухающих экспонент и синусоид.

Выражения (6.19), (6.21) выглядят достаточно громоздкими. Но на практике зачастую достаточно рассмотреть модели АР 1 и 2 порядков, а модели более высоких порядков можно будет получить рекуррентно на их основе.

4.1. Процесс авторегрессии первого порядка

Для такого процесса все оказывается достаточно легким и простым, с учетом p=1. Пусть ВР z_t длины N имеет модель АР(1):

$$z_t = \phi \tilde{z}_{t-1} + a_t, \tag{6.22}$$

где a_t – белый шум с характеристиками $M\left[a_t\right] = 0$ и $D\left[a_t\right] = \sigma_a^2$.

Тогда из формул выше получаем:

$$M\left[\tilde{z}_t\right] = 0, D\left[\tilde{z}_t\right] = \frac{\sigma_a^2}{1-\phi^2}, \rho(l) = \phi^l, \ \phi = \rho_1 \tag{6.23}$$

Используя оценки автокорреляционной функции (2.17), приведенные во второй лекции, можно будет найти параметр ϕ, затем выделить случайную составляющую ряда: $a_t = \phi \tilde{z}_{t-1} - \tilde{z}_t$.

На рисунке 6.1 приведены два вида ВР, имеющих модели АР(1) вида $z_t = \pm 0.8 \tilde{z}_{t-1} + \xi$, их автокорреляционные функции приведены на рисунке 6.2.

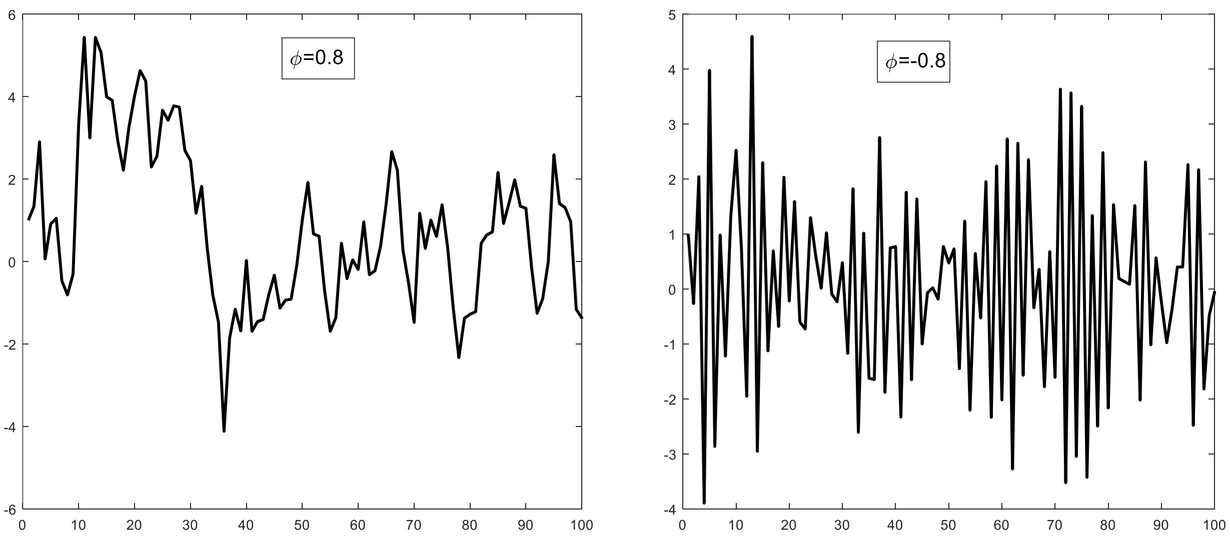

Рисунок 6.1 – Ряды АР первого порядка с положительной (слева) и отрицательной (справа) автокорреляцией

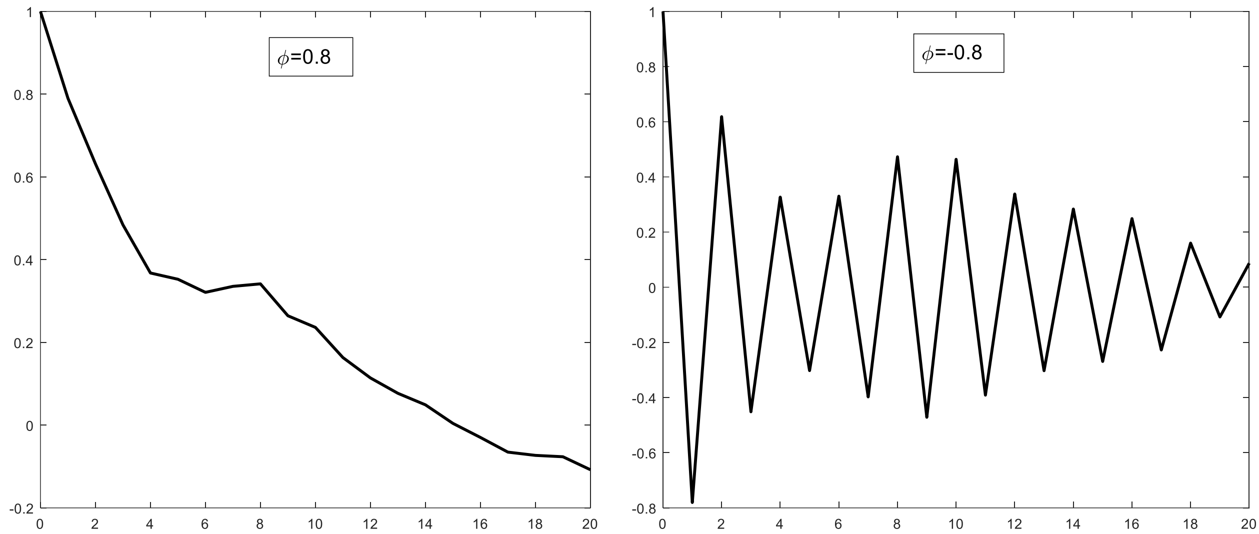

Рисунок 6.2 – Автокорреляционные функции ВР из рис. 6.1.

Заметьте, как из рисунков видно, что $\rho_1 = \pm 0.8$, то есть автокорреляционную функцию можно вполне использовать для оценки АР моделей.

4.2. Процесс авторегрессии второго порядка

Пусть ВР z_t длины *N* имеет модель АР(2):

$$z_t = \phi_1 \tilde{z}_{t-1} + \phi_2 \tilde{z}_{t-2} + a_t, \tag{6.24}$$

где a_t – белый шум с характеристиками $M\left[a_t\right]=0$ и $D\left[a_t\right]=\sigma_a^2$.

Тогда из формул выше получаем:

$$M\left[\tilde{z}_t\right]=0, D\left[\tilde{z}_t\right]=\frac{\sigma_a^2}{\frac{1+\phi_2}{1-\phi_2}\left(\left(1-\phi_2\right)^2-\phi_1^2\right)}, \tag{6.25}$$

$$\rho_1=\frac{\phi_1}{1-\phi_2}, \rho_2=\phi_2+\frac{\phi_1^2}{1-\phi_2}, \rho_k=\phi_1\rho_{k-1}+\phi_2\rho_{k-2} \tag{6.26}$$

откуда получаем искомые оценки параметров АР(2):

$$\phi_1=\frac{\rho_1\left(1-\rho_2\right)}{1-\rho_1^2}, \quad \phi_2=\frac{\rho_2-\rho_1^2}{1-\rho_1^2} \tag{6.27}$$

4.3. Процесс авторегрессии порядка выше двух

Уже для модели АР второго порядка можно заметить из (6.26), что вместо решения уравнений (6.19) Юла-Уокера оценку параметров АР(*p*+1) модели можно получить, если известны оценки АР(*p*), подогнанного для того же временного ряда.

Приведем сначала пример таких рекуррентных соотношений для АР(3), а затем продемонстрируем сложную общую формулу. Выборочные частные автокорреляции можно получить по формуле:

$$r_j=\phi_{k1}r_{j-1}+\phi_{k2}r_{j-2}+\ldots+\phi_{k(k-1)}r_{j-k+1}+\phi_{kk}r_{j-k} \tag{6.28}$$

где ϕ_{kj} – *j*-й коэффициент частных АР порядка *k*.

Для *k*=2 на основе (6.28) получаем:

$$\begin{aligned} r_2 &= \phi_{21}r_1+\phi_{22} \\ r_1 &= \phi_{21}+\phi_{22}r_1 \end{aligned} \tag{6.29}$$

Для k=3 на основе (6.28) получаем:

$$\begin{aligned} r_3 &= \phi_{31}r_2 + \phi_{32}r_1 + \phi_{33} \\ r_2 &= \phi_{31}r_1 + \phi_{32} + \phi_{33}r_1 \\ r_1 &= \phi_{31} + \phi_{32}r_1 + \phi_{33}r_2 \end{aligned} \tag{6.30}$$

Отсюда получаем:

$$\begin{aligned} \phi_{31} &= \phi_{21} - \phi_{33}\phi_{22} \\ \phi_{32} &= \phi_{22} - \phi_{33}\phi_{21} \\ \phi_{33} &= \frac{r_3 - \phi_{21}r_2 - \phi_{22}r_1}{1 - \phi_{21}r_1 - \phi_{22}r_2} \end{aligned} \tag{6.31}$$

То есть по частным моделям АР меньшего порядка можно посчитать коэффициента АР более высокого порядка. В общем виде формулы считаются через выражения (6.32) и (6.33), называемые **формулами Дарбина**.

$$\phi_{p+1,j} = \phi_{p,j} - \phi_{p+1,p+1} \cdot \phi_{p,p-j+1},\ j = 1, 2, ..., p \tag{6.32}$$

$$\phi_{p+1,p+1} = \frac{r_{p+1} - \sum_{j=1}^{p} \phi_{pj} r_{p+1-j}}{1 - \sum_{j=1}^{p} \phi_{pj} r_j} \tag{6.33}$$

Часть 5. Построение моделей скользящего среднего

Пусть для заданного ВР z_t мы определили, что он является стационарным и корни характеристического полинома $\phi(B)=0$ лежат вне единичного круга. В общем виде модель СС выглядит как $\tilde{z}_t=\theta(B)a_t$.

Домножив на $\tilde{z}_{t-k}$ и усреднив, аналогично методике построения формул для АР моделей, найдем значение дисперсии СС процесса:

$$\begin{aligned} D_0 &= \left(1+\theta_1^2+\theta_2^2+\ldots+\theta_q^2\right)\sigma_a^2 \\ D_k &= \left(-\theta_k+\theta_1\theta_{k+1}+\theta_2\theta_{k+2}+\ldots+\theta_{q-k}\theta_q\right)\sigma_a^2,\ k\le q \end{aligned} \tag{6.34}$$

Отсюда автокорреляционная функция имеет вид:

$$\rho_k=\begin{cases} \dfrac{-\theta_k+\theta_1\theta_{k+1}+\theta_2\theta_{k+2}+\ldots+\theta_{q-k}\theta_q}{1+\theta_1^2+\theta_2^2+\ldots+\theta_q^2}, & k\le q \\ 0, & k>q \end{cases} \tag{6.35}$$

Как видно из (6.35) автокорреляционная функция СС процесса *обрывается* на задержке q. Если оценки автокорреляционных функций известны, то q уравнений можно разрешить относительно параметров СС модели. Проблема только в том, что в отличие от уравнений Юла-Уокера, в этой системе уравнения нелинейны. Поэтому для процессов СС общие выражения для поиска коэффициентов $\tilde{z}_t=\theta(B)a_t$ не выводятся.

5.1. Процесс скользящего среднего первого порядка

Пусть стационарный ВР z_t длины N имеет модель СС(1):

$$z_t = a_t - \theta_1 a_{t-1}, \qquad (6.36)$$

где a_t – последовательность некоррелированных случайных величин с параметрами $M[a_t]=0$ и $D[a_t]=\sigma_a^2$.

Тогда коэффициент автокорреляции процесса:

$$\rho_k = \begin{cases} \dfrac{-\theta_1}{1+\theta_1^2}, & k=1 \\ 0, & k \ge 2 \end{cases} \qquad (6.37)$$

Получаем квадратное уравнение вида $\theta_1^2 + \theta_1 / \rho_1 + 1 = 0$. У этого уравнения есть два корня, причем их произведение равно 1. По условию обратимости $|\theta_1| < 1$, поэтому выбирается только один корень $|\theta_1| < 1$.

5.2. Процесс скользящего среднего второго порядка

Пусть стационарный ВР z_t длины N имеет модель СС(2):

$$z_t = a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2}, \qquad (6.38)$$

где a_t – последовательность некоррелированных случайных величин с параметрами $M[a_t]=0$ и $D[a_t]=\sigma_a^2$.

Тогда автокорреляционная функция равна:

$$\begin{gathered} \rho_1 = \frac{-\theta_1(1-\theta_2)}{1+\theta_1^2+\theta_2^2}, \\ \rho_2 = \frac{-\theta_2}{1+\theta_1^2+\theta_2^2}, \\ \rho_k = 0, k \ge 3. \end{gathered} \qquad (6.39)$$

Решением отсюда системы нелинейных уравнений, находятся θ_1, θ_2. Для этого используют различные специализированные схемы расчетов. Аналогичным образом строятся модели СС и более высокого порядка.

Часть 6. Смешанные модели АРСС и АРПСС

6.1. Модель авторегрессии – скользящего среднего

Напомним, что общая модель АРСС(p,q) описывается выражением (6.11) или в краткой форме $\phi(B)\tilde{z}_t = \theta(B)a_t$. Такая модель может интерпретироваться, как линейный фильтр множественной регрессии (где характер системы объясняется ее прошлыми значениями), а в качестве остатка выступает скользящие средние из элементов шума.

Существует теорема Волда, которая утверждает, что любой стационарный ВР можно представить в виде процесса скользящего среднего бесконечной степени. При этом модели АР и модели СС оказываются взаимными по своим свойствам. Более того, спектра процесса СС обратен спектру соответствующего процесса АР того же порядка.

В связи с этим, оказывается стационарные модели АРСС (p,q) можно изучать с двух точек зрения:

1) как процесс АР(p) $\phi(B)\tilde{z}_t = e_t$, у которого шум $e_t = \theta(B)a_t$ подчиняется процессу СС(q);
2) либо как процесс СС(q) $\tilde{z}_t = \theta(B)b_t$, где шум $\phi(B)b_t = a_t$ подчиняется процессу АР(p).

Отсюда получается, что, опираясь на методики построения АР и СС процессов, описанные ранее, можно строить и изучать, в том числе, и модели АРСС порядка p и q. Вопрос только в том, какой из этих способов удобнее. Тут нам на помощь и приходит теорема Волда: любой АРСС процесс можно будет представить в виде СС процесса **бесконечного** порядка, только с ограничениями на структуру коэффициентов (чтобы не нарушать условия стационарности авторегрессионной части ряда).

Если рассчитывать методику построения АРСС модели на основе заданного стационарного ВР подобно примерам, приведенным выше, она оказывается слишком сложной для расчета, даже для моделей (1,1) порядка. В связи с этим на практике используется три способа расчета АРСС-моделей:

1) построение на основе теоремы Волда ряда СС бесконечного порядка, где эта бесконечность заменяется некоторым граничным большим числом;
2) использование метода наименьших квадратов для линейной регрессии – в виде решения системы уравнений;
3) использование условного метода максимального правдоподобия;

В связи с тем, что собственные расчеты, необходимые для установления соответствия между ВР и его АРСС моделью, очень сложны, большинство математических и программных пакетов уже содержат средства и функции для построения и оценки параметров выстраиваемых АРСС моделей. Но ни одно из этих средств не может эффективно оценить значения порядка (*p, q*) для этих моделей, поэтому эту задачу на себя должен брать сам исследователь.

6.2. Модель авторегрессии – проинтегрированного скользящего среднего

Как уже упоминалось ранее, модели АРПСС (**ARIMA**) (модели Бокса-Дженкинса) порядка (*p, d, q*) являются расширением АРСС моделей для нестационарных ВР, за счет предположения, что ряд можно сделать квазистационарным взятием разностей некоторого порядка от исходного ВР. В общем виде АРПСС модель записывается как

$$\phi(B)\nabla^d \tilde{z}_t = \theta(B)a_t. \qquad (6.40)$$

При d=0 модель вырождается в АРСС модель порядка (*p, q*). С другой стороны модель АРПСС (*p, d, q*) можно трактовать, как модель АРСС(*p*+*d, q*), у которой d корней являются **единичными**.

В целом подход анализа АРПСС, часто называемой **методикой Бокса-Дженкинса**, заключается в том, что сначала производится оценка стационарности ряда с помощью статистических критериев. С помощью этих же критериев можно установить число единичных корней d, тем самым определив порядок разности, требующейся для приведения ряда к стационарному виду, за счет разности соответствующего порядка.

Для такой преобразованной модели выполняется условие стационарности и ее можно обрабатывать уже просто как модель АРСС порядка (p, q). То есть методика анализа моделей АРПСС отличается от методики анализа АРСС наличием дополнительного начального шага поиска удовлетворяющей степени разности. На практике бывает достаточно 1 или 2 проинтегрированной разности, при значениях $d > 3$ можно с высокой вероятностью считать, что данный нестационарный временной ряд с помощью разностной схемы не может быть приведен к стационарному виду. В этом случае ВР лучше будет анализировать с помощью адаптивных методов.

Часть 7. Общий метод получения начальных оценок параметров смешанного процесса АРСС

Так как процессы АРПСС, АР и СС любого порядка можно свести к общей моделей АРСС процесса порядка (p, q), то хотелось бы иметь под рукой некоторую методику хотя бы начальной оценки параметров смешанной модели АРСС.

Общая методика выглядит следующим образом:

1) В общем случае вычисление начальных оценок процесса АРСС (p, q) основано на первых $p+q+1$ **автоковариациях** $c_j,\ j=0,1,\ldots,(p+q)$.
2) **Параметры авторегрессии** $\phi_1,\phi_2,\ldots,\phi_p$ оцениваются по найденным $c_j,\ j=q-p+1,\ldots,(q+p)$.
3) На базе оценок $\phi_1,\phi_2,\ldots,\phi_p$ вычисляются первые $q+1$ автоковариаций $c'_j,\ j=0,\ldots,q$ полученного ряда $w'_t=w_t-\phi_1 w_{t-1}-\ldots-\phi_p w_{t-p}$.
4) Наконец, автоковариации $c'_j,\ j=0,\ldots,q$ используются при итеративном расчете начальных оценок параметров СС $\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_q$ и остаточной дисперсии.

Начальные оценки параметров АР (пункт 2) производятся на основе решения системы линейных уравнений:

$$
\begin{aligned}
c_{q+1} &= \phi_1 c_q + \phi_2 c_{q-1} + \ldots + \phi_p c_{q-p+1} \\
c_{q+2} &= \phi_1 c_{q+1} + \phi_2 c_q + \ldots + \phi_p c_{q-p+2} \\
c_{q+p} &= \phi_1 c_{q+p-1} + \phi_2 c_{q+p-2} + \ldots + \phi_p c_q
\end{aligned}
\tag{6.41}
$$

После нахождения параметров АР можно преобразовать ряд к виду $w'_t = \phi(B) w_t$ и уже изучать его как процесс СС. Его новые автоковариации $c'_j,\ j = 0,...,q$ оцениваются, как (пункт 3):

$$c'_j = \sum_{i=0}^{p} \phi_i^2 c_j + \sum_{i=1}^{p} \left(\phi_0\phi_i + \phi_1\phi_{i+1} + \ldots + \phi_{p-i}\phi_p\right)\left(c_{j+i} - c_{j-i}\right)\ . \tag{6.42}$$

В конце (пункт 4) находят дисперсию:

$$\sigma_a^2 = \frac{c'_0}{1 + \theta_1^2 + \ldots + \theta_q^2} \tag{6.43}$$

и оценки параметров $\theta_1, \theta_2, ..., \theta_q$

$$\theta_j = -\left(\frac{c'_j}{\sigma_a^2} - \theta_1\theta_{j+1} - \theta_2\theta_{j+2} - \ldots - \theta_{q-j}\theta_q\right) \tag{6.44}$$

На этом методику построения оценки параметров АРСС модели можно считать завершенной.