

Министерство образования и науки Российской Федерации
Балтийский государственный технический университет «Военмех»
Кафедра Процессов управления

А.С. ШАЛЫГИН, В.А. САННИКОВ, И.Л.ПЕТРОВА

БАЛЛИСТИКА КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ

Учебное пособие

Санкт-Петербург
2006 г.

УДК

Шалыгин, А.С.

Баллистика космических аппаратов: учебное пособие. /А.С. Шалыгин, В.А. Санников, И.Л. Петрова; Балт. гос. техн. ун-т. – СПб., 2006. - __ с.

Пособие содержит систематизированное изложение теоретических основ баллистики космических аппаратов, приводятся методы решения задач космической баллистики.

Пособие предназначено для студентов технических вузов, курсантов военных университетов и академий, обучающихся по специальностям, связанным с баллистикой, динамикой и навигацией космических аппаратов.

Утверждено
редакционно-издательским
советом университета

© Авторы, 2006
© БГТУ, 2006

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	
ГЛАВА 1.	
Условия космического полета.....	
1.1 Солнечная система.....	
1.2 Земля и околоземное пространство.....	
ГЛАВА 2	
Невозмущенное движение.....	
2.1 Математическая модель невозмущенного движения КА.....	
2.2 Первые интегралы.....	
2.3 Уравнение орбиты невозмущенного движения КА в полярных координатах.....	
2.4 Орбиты конического сечения.....	
2.5 Эллиптические орбиты.....	
2.6 Гиперболические орбиты.....	
ГЛАВА 3	
Системы координат, используемые при описании движения КА.....	
3.1 Инерциальные системы координат.....	
3.2 Неинерциальные системы координат.....	
3.3 Связь между системами координат, используемыми при описании движения КА. Основные формулы сферической тригонометрии. Таблицы направляющих косинусов.....	
3.4 Координаты КА и составляющие скорости в инерциальной системе координат.....	
ГЛАВА 4	
Определение орбит космических аппаратов.....	
4.1 Определение орбиты по положению и скорости в начальный момент времени.....	

- 4.2 Определение орбиты по двум фиксированным положениям и времени перелета методом Ламберта-Эйлера.....
- 4.3 Круговые орбиты. Сфера действия

ГЛАВА 5

- Возмущенное движение.....
- 5.1 Общая характеристика возмущений и возмущенного движения.....
- 5.1.1 Нецентральность гравитационного поля Земли.....
- 5.1.2 Возмущения, вызванные сопротивлением атмосферы Земли.....
- 5.1.3 Возмущающее действие на КА со стороны Луны и Солнца. Ограниченная задача трех тел и ее прикладные аспекты.....
- 5.1.4 Возмущения, вызванные давлением солнечных лучей.....
- 5.1.5 Сравнение величин возмущающих ускорений от различных факторов.....
- 5.2 Метод оскулирующих элементов.....
- 5.2.1 Вывод дифференциальных уравнений для оскулирующих элементов.....
- 5.3 Общий подход к оценке изменений оскулирующих элементов.....
- 5.4 Возмущения орбит, вызываемые нецентральностью поля тяготения Земли.....
- 5.5 Возмущения, вызываемые сопротивлением атмосферы.....
- 5.6 Возмущения орбиты ИСЗ, вызываемые влиянием Луны и Солнца...
- 5.7 Определение времени существования спутника.....

ГЛАВА 6

- Трасса спутника.....
- 6.1 Понятие трассы ИСЗ. Характер трассы.....
- 6.2 Построение трассы.....

ПРИЛОЖЕНИЕ

- Ресурсы Интернет.....
- Библиографический список

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время происходит интенсивное освоение космического пространства, которое ведётся по широкой программе, включающей полёты, как по околоземным орбитам, так и по траекториям к другим планетам Солнечной системы.

4 октября 1957 года в нашей стране был запущен первый искусственный спутник Земли, а к настоящему времени в космическом пространстве находится более 20000 искусственных небесных тел. Основополагающие достижения в освоении космического пространства принадлежат Советскому Союзу: запуск первого искусственного спутника Земли (ИСЗ), первый космический полёт человека, первый выход космонавта из корабля в открытое космическое пространство, первая экспериментальная орбитальная станция, первое достижение лунной поверхности, первый облёт Луны с фотографированием её обратной стороны, первая посадка на Луну автоматической станции и запуск первого искусственного спутника Луны, первый полёт к планете Солнечной системы и первые спуски в атмосфере Венеры контейнеров с научной аппаратурой. Сильно отстававшие в начале эры освоения космоса США к концу 60-х годов также добились значительных успехов, из которых наиболее выдающимися являются получение фотографий поверхности Марса, первая высадка людей на поверхность Луны, первый полёт корабля многоразового использования.

Решением задач, связанных с реализацией космического полёта занимается научная дисциплина, которая имеет несколько названий: космическая баллистика, механика космического полёта, прикладная небесная механика, космодинамика, теория движения искусственных небесных тел, космонавтика и т.д. В нашей стране наибольшее распространение получил термин «космическая баллистика» или даже просто «баллистика» – это новый прикладной раз-

дел небесной механики, который является одновременно разделом как теоретической механики, так и астрономии.

Все эти названия связаны со словом «космос». Представляет интерес происхождение этого слова. Оказывается, «космос» по-гречески это украшение, порядок. Философы Древней Греции, начиная с Пифагора, понимали под словом «космос» Вселенную, рассматриваемую как упорядоченную гармоничную систему, в которой все движения строго подчиняются извечным законам природы. В древнегреческой философии космос противопоставлялся хаосу – беспорядку, слепому случаю. В настоящее время под космосом понимают Вселенную, рассматриваемую как нечто единое, подчиняющееся общим законам. Слово «космос» имеет ещё одно значение, связанное с осуществлением давнишней мечты человечества о космических полётах. В таких терминах как «космический полёт» или «космонавтика» космос противопоставляется Земле. В современном понимании космос есть всё, что находится за пределами Земли и её атмосферы. Ближайшая и наиболее доступная исследованию область космического пространства – околоземное пространство. Говоря о космических исследованиях, чаще всего имеют в виду именно изучение околоземного пространства, которое иногда называется ближним космосом. Из многих задач космической баллистики можно выделить следующие задачи:

- 1) нахождение параметров траектории космического аппарата (КА) по заданным его характеристикам и программе движения (основная задача);
- 2) проектирование траектории КА;
- 3) анализ влияния характеристик КА на его траекторию;
- 4) анализ влияния возмущающих факторов на траекторию КА;
- 5) анализ качества управления движением КА.

Остановимся на краткой характеристике этих задач.

- 1) При решении основной задачи по известным параметрам КА и заданной программе движения требуется определить программную траекторию КА и кинематические характеристики, определяющие положение КА относительно планет, Солнца, измерительных пунктов и т.д.

2) Задача проектирования траектории КА состоит в выборе программы движения КА, которая обеспечивает, для заданного КА выполнение заданной транспортной задачи: попадание в окрестность планеты-цели, переход на заданную конечную орбиту и т.д. При решении этой задачи возникает проблема выбора среди возможных траекторий такой, которая удовлетворяет некоторым дополнительным требованиям – критериям оптимальности. Критерии оптимальности определяют наилучшую в смысле данного критерия траекторию. В качестве критериев оптимальности могут фигурировать затраты топлива, характеристики точности выполнения заданного космического манёвра и т.д. В настоящее время решение проблем выбора оптимальной траектории даже для традиционных КА наталкивается во многих случаях на серьёзные трудности.

3) Задача оценки влияния параметров КА на его траекторию состоит в выработке рекомендаций по выбору программы движения КА в зависимости от его характеристик. В частности, начальная тяговооружённость КА будет влиять на интенсивность набора им скорости, аэродинамические параметры КА будут во многом определять траекторию спуска в атмосфере и т.д.

4) Задача анализа возмущающих факторов состоит в определении их влияния на траекторию КА и на отклонения конечных параметров движения. К возмущающим факторам относят те физические явления, которые не учитываются в принятой математической модели КА. Это могут быть неучтённые силы в уравнениях движения, ошибки определения начальных условий, погрешности измерения параметров движения, используемые при работе системы управления, отклонения параметров КА от номинальных значений и т.д.

5) Задача анализа качества управления движением КА связана с теорией космической навигации, теорией стохастических систем управления и анализом систем управления движением КА.

Космическая навигация, входя самостоятельной частью в состав космической баллистики, расширяет и дополняет её. Подавляющее число специали-

стов в последнее время приходит к выводу о необходимости их совместного рассмотрения.

В дальнейшем основное внимание будет уделено четырём первым задачам теории движения КА.

ГЛАВА 1 УСЛОВИЯ КОСМИЧЕСКОГО ПОЛЁТА

Полное и достоверное знание условий полёта летательного аппарата (ЛА) в космическом пространстве необходимо, прежде всего, на этапе проектирования и создания КА. Неучёт каких-либо условий, в которых окажется КА в процессе полёта, может привести к потере КА или прекращению его функционирования. В настоящее время накоплен достаточно обширный материал о структуре и строении Солнечной системы, структуре и динамике атмосфер планет, особенностях гравитационного поля Земли и остальных планет, уровнях воздействия электрического и магнитного полей, радиационных поясов Земли, уровне корпускулярного и волнового излучения, метеорной обстановки и других факторов.

1.1 Солнечная система

Солнечной системой называется система, состоящая из центральной звезды – Солнца и обращающихся вокруг неё 9-ти больших планет со своими спутниками, астероидов (малых планет), метеорных тел, межпланетной твёрдой космической пыли и разреженных газов.

Солнце – лишь одна из многих звёзд, образующих гигантскую звёздную систему – Галактику. Наша Галактика содержит 100 – 200 млрд. звёзд. Они располагаются так, что Галактика имеет вид плоского диска с как бы вставленным в него в середине шаром меньшего диаметра.

Пространство, занимаемое Солнечной системой, пронизывается корпускулярным и электромагнитным излучением Солнца. Характерными для Сол-

нечной системы являются также электромагнитные и гравитационные поля. Движение всех достаточно крупных тел Солнечной системы подчиняется закону всемирного тяготения:

$$F = k^2 \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}, \quad (1.1)$$

где r – расстояние тела с массой m_2 до притягивающего центра;

$k^2 = 6,673 \cdot 10^{-8} \frac{\text{см}^3}{\text{г} \cdot \text{сек}}$ – универсальная гравитационная постоянная;

$k^2 m_1 = \mu$ – гравитационный параметр тела с массой m_1 .

Значения « μ » для различных тел Солнечной системы приведены в таблице 1.1.

Таблица 1.1

Тело	$m_{\text{тела}}/m_{\text{Земли}}$	Гравитационный параметр, км ³ /сек ²
Солнце	$3,3253 \cdot 10^5$	$1,324948 \cdot 10^{11}$
Меркурий	0,0543	$2,16494 \cdot 10^4$
Венера	0,8136	$6,2423 \cdot 10^5$
Земля	1,0	$3,9858 \cdot 10^5$
Луна	-	$4,890 \cdot 10^3$
Марс	0,1077	$4,2906 \cdot 10^4$
Юпитер	318,35	$1,26498 \cdot 10^8$
Сатурн	95,3	$3,78811 \cdot 10^7$
Уран	14,58	$5,79364 \cdot 10^6$
Нептун	17,26	$6,86004 \cdot 10^6$
Плутон	0,8312	$3,31237 \cdot 10^5$

Все девять больших планет – Меркурий, Венера, Земля, Марс, Юпитер, Сатурн, Уран, Нептун и Плутон – обращаются вокруг Солнца в одном направлении (в направлении осевого вращения Солнца – против часовой стрелки) по почти круговым орбитам, мало наклонённым к плоскости эклиптики. Плоскостью эклиптики называется плоскость, в которой движется центр масс системы Земля-Луна (барицентр).

Большинство планет вращается вокруг своей оси в прямом направлении (против хода часовой стрелки, если наблюдать с северного полюса Мира). Исключение составляют лишь две планеты: Венера, вращающаяся в обратном направлении; Уран, ось вращения которого лежит почти в плоскости орбиты

движения. В табл. 1.2 приведены некоторые дополнительные данные планет, рассмотренных в табл. 1.1.

Таблица 1.2

Планеты	Расстояние до Солнца, а.е.д.	Радиус экваториальный, км	Ускорение силы тяжести на широте 45°, см/сек ²	Параболическая скорость, км/сек
Солнце	-	696000	-	606,0
Меркурий	0,387	2500	346,3904	4,16652
Венера	0,723	6200	843,4703	10,72620
Земля	1,000	6378,39	983,008	11,1859
Луна	-	1738	-	2,372
Марс	1,524	3310	401,9938	5,091667
Юпитер	5,202	69880	2767,252	60,1902
Сатурн	9,539	57550	1274,368	36,2831
Уран	19,182	25500	958,2298	21,3168
Нептун	30,058	25000	1122,431	23,4268
Плутон	39,51	2750	394,151	10,51067

В таблице используются следующие обозначения:

Астрономическая единица длины (а.е.д.) – это расстояние от Земли до Солнца. 1 а.е.д.=149597900 км.

Параболическая скорость $V_{\text{п}} = \sqrt{\frac{2\mu}{r_{\text{пл}}}}$,

где $r_{\text{пл}}$ – экваториальный радиус планеты, μ – гравитационный параметр планеты.

Космический аппарат, движущийся в пределах Солнечной системы, испытывает со стороны Солнца световое, тепловое, гравитационное и радиационное воздействия. Внешняя оболочка Солнца – корона – испускает непрерывный поток заряженных частиц (плазму) – солнечный ветер. Средняя скорость солнечного ветра при невозмущённой короне составляет около 400 км/сек. Проявления солнечной активности – хромосферные вспышки – приводят к выбросу солнечного вещества в виде отдельных плазменных сгустков. Средняя продолжительность хромосферных вспышек 1000 сек. Через 2 – 3 минуты от момента фиксирования вспышки в окрестности Земли регистрируется повышение рентгеновского излучения, а через 10 – 100 минут – увеличение интенсивности кос-

мического излучения. Солнечные вспышки оказывают заметное влияние как на верхнюю атмосферу, так и на биосферу Земли. Полярные сияния, нарушение радиосвязи и даже телеграфной связи – всё это результат проявления солнечной активности. Во время мощных хромосферных вспышек доза облучения может привести к гибели экипажа КА при отсутствии специальных защитных средств. Из планет Солнечной системы ограничимся рассмотрением Земли и околоземного пространства.

1.2 Земля и околоземное пространство

а) Гравитационное поле и фигура Земли.

Земля представляет собой неоднородное тело вращения, имеющее сложную конфигурацию поверхности. За более близкую к реальной форме Земли по отношению к другим возможным видам аппроксимаций принимают фигуру, называемую геоидом. Геоид – это фигура, ограниченная уровневой поверхностью силы тяжести, во всех точках которой значения потенциала силы тяжести одинаково и которая совпадает с поверхностью океанов, находящихся в невозмущённом состоянии, т.е. при отсутствии приливов, отливов, атмосферных и каких-либо других возмущений. В настоящее время данных для точного математического описания геоида ещё недостаточно. При проведении различного ряда вычислительных работ (геодезических, астрономических, баллистических и др.) в качестве последовательных приближений к геоиду принимают: сферу, сфероид (эллипсоид вращения), трёхосный эллипсоид.

Для сферической модели Земли основной геопостоянной величиной является радиус земной сферы. Радиус сферы, имеющей ту же поверхность и тот же объём, что и поверхность и объём земного эллипсоида, может быть принят равным 6371 км. Следующим приближением к действительной фигуре Земли является эллипсоид вращения (двухосный эллипсоид). Эллипсоид, наилучшим образом аппроксимирующий какой-либо район земной поверхности, называется референц-эллипсоидом. В Советском Союзе в качестве референц-эллипсоида был принят эллипсоид вращения Ф.Н. Красовского (1878 – 1948), размеры ко-

торого были получены советскими геодезистами на основании градусных измерений длин дуг меридианов на территории СССР, Западной Европы и США. Для двухосного эллипсоида Красовского приняты следующие размеры: большая полуось (средний радиус экватора) $a_3=6378245$ м, малая полуось $b_3=6356863$ м, сжатие $a_3=(a_3-b_3)/a_3=1/298,3$.

Большая полуось эллипсоида Красовского встречает поверхность Земли западнее гринвичского меридиана и составляет с ним угол 15^0 .

Рассмотрим линии и точки земного сфероида.

Ось вращения Земли пересекается с земным сфероидом в северном и южном полюсах, причём за северный полюс принят тот, из которого вращение Земли представляется происходящим против хода часовой стрелки. Плоскость, проходящая через центр масс Земли и перпендикулярная оси её вращения, называется экваториальной плоскостью, а линию её пересечения с поверхностью земного эллипсоида называют земным экватором. Линии пересечения земного эллипсоида с плоскостями, параллельными экваториальной плоскости, называются географическими параллелями. Плоскость, проходящая через ось вращения Земли, пересекается с земным эллипсоидом по линии, именуемой географическим меридианом. Положение точки на земной поверхности задаётся двумя географическими координатами: долготой и широтой. Различают два типа долгот: геодезическую и астрономическую. Геодезическая долгота L измеряется двухгранным углом между плоскостью меридиана данной точки и плоскостью гринвичского (нулевого) меридиана. Отсчёт долгот производится от гринвичского меридиана к востоку в пределах от 0^0 до 360^0 (или в "часовой" мере от 0 до 24 часов). Часовая мера измерения дуг принята в астрономии наряду с радианным и градусным измерением. За единицу измерения принимается дуга в 15^0 . Эта единица дуги называется часом и сокращённо обозначается верхним индексом " h ". Один час содержит 60 минут (сокращённо обозначается верхним индексом " m "), а минута делится на 60 секунд (сокращённо " s "). Очевидно, что $1^h=15^0$, $1^m=15'$, $1^s=15''$, а также $1^0=4^m$, $1'=4^s$, $1''=(1/15)^s$.

Принят также отсчёт долгот в обе стороны от гринвичского меридиана в пределах от 0° до 180° , причём восточные долготы считаются положительными, а западные – отрицательными.

Астрономическая долгота λ есть двугранный угол между плоскостями астрономических меридианов данного места и Гринвича, причём под плоскостью астрономического меридиана понимают плоскость, проходящую через отвесную линию данной точки земной поверхности. Используется также несколько типов географических широт (рис. 1.1).

Геодезическая широта " B " в данном месте представляет собой угол между нормалью к поверхности принятого земного эллипсоида и его экваториальной плоскостью. Широта считается положительной в северном полушарии и отрицательной – в южном. Она изменяется в пределах от -90° до $+90^\circ$.

Астрономическая широта « φ » есть угол между отвесной линией для данной точки земной поверхности и экваториальной плоскостью Земли.

Геоцентрическая широта φ' – угол между геоцентрическим радиусом-вектором, проведённым в данную точку земной поверхности, и плоскостью земного экватора.

Геодезическая и геоцентрическая широты связаны соотношением:

$$b - \varphi' = 103132,4 e_c^2 \sin 2\varphi,$$

в котором разность широт выражена в секундах, а $e_3^2 = 2\alpha_3 - \alpha_3^2$.

Стандартной формой записи потенциала сил притяжения Земли, рекомендованной Международным астрономическим союзом для практического использования является:

$$U = \frac{\mu}{r} \left\{ 1 - \sum_{n=2}^{\infty} J_n \left(\frac{R_{3Э}}{r} \right)^n P_n(\sin \varphi') + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{R_{3Э}}{r} \right)^n P_n^{(k)}(\sin \varphi') [c_{nk} \cos kL + s_{nk} \sin kL] \right\}, \quad (1.2)$$

где r, φ', L – соответственно радиус, геоцентрическая широта и геодезическая долгота точки; $R_{3Э}$ – средний экваториальный радиус Земли; J_n, c_{nk}, s_{nk} – безразмерные коэффициенты, зависящие от формы Земли и распределения масс внутри неё. Их значения для Земли определяются по данным гравиметрических из-

мерений на её поверхности и внешнетраекторных измерений эволюций орбит ИСЗ; P_n и $P_n^{(k)}$ – полином Лежандра и присоединённая функция Лежандра, вычисляемые по известным аналитическим зависимостям.

Для модели Земли как сжатого сфероида получили следующее приближённое равенство:

$$U = \frac{\mu}{r} - \frac{\mu}{3k^3} \delta (3 \sin^2 \varphi' - 1), \quad (1.3)$$

где $\delta = 66,07 \cdot 10^3 \text{ км}^2$.

Первое слагаемое в последнем выражении есть ньютоновский потенциал. Второе слагаемое учитывает сжатие Земли по полюсам.

б) Магнитное поле Земли.

Землю принято считать слабым постоянным магнитом, поле которого напоминает магнитное поле диполя, ось которого наклонена примерно на $11,5^\circ$ к оси вращения Земли. Центр диполя смещён от геометрического центра Земли на 500 км в сторону восточного полушария. Заметим, что в практических расчётах отклонение оси и смещение центра диполя, как правило, не учитывают. Напряжённость поля на геомагнитных полюсах в два раза превышает напряжённость поля на экваторе. Источники магнитного поля Земли находятся в ядре, земной коре и верхней атмосфере планеты. Предполагают, что главным источником магнитного поля Земли являются системы электрических токов в жидком ядре Земли. В зависимости от движения жидкости изменяются направления и значения электрических токов, что приводит к медленному перемещению магнитных полюсов по поверхности Земли. Второй источник земного магнетизма – магнитные аномалии, вызванные скоплением ферромагнитных руд в определённых областях земной коры. Местные аномалии вызывают некоторое отклонение земного магнитного поля от правильного центрального диполя. Третья причина магнетизма связана с токами заряженных частиц в верхних слоях атмосферы и околоземном пространстве. Газы, образующие верхние слои атмосферы под действием ультрафиолетового излучения Солнца ионизированы, т.е. представляют собой газовую смесь заряженных частиц (плазму). Маг-

нитное поле Земли взаимодействует с плазмой, оно оказывает на плазму давление. С удалением от Земли давление самой плазмы падает быстрее, чем давление, оказываемое на неё магнитным полем. Вследствие этого плазменную оболочку Земли можно условно разделить на две части: нижнюю и верхнюю. Нижняя часть, где давление газа превышает давление магнитного поля, носит название – ионосферы. Здесь плазма ведёт себя в основном как обычный газ, отличаясь только повышенной электропроводностью. Выше лежит магнитосфера, область, где давление магнитного поля больше, чем газовое давление. Поведение плазмы в магнитосфере определяется и регулируется, прежде всего, магнитным полем и коренным образом отличается от поведения обычного газа. Отнесение магнитосферы к космическому пространству оправдывается тем, что она тесно взаимодействует с более далёкими космическими объектами, и, прежде всего, с Солнцем. Солнечный ветер у Земли взаимодействует с земным магнитным полем и обтекает его, как сверхзвуковой поток обтекает препятствие. При этом возникает стационарная, отходящая в сторону Солнца ударная волна, фронт которой расположен от Земли на расстоянии ~ 100000 км на дневной (освещённой) стороне. Поток плазмы, прошедший через фронт волны, становится турбулентным.

Эта переходная турбулентная область кончается там, где давление регулярного магнитного поля Земли превосходит давление турбулентной плазмы солнечного ветра. Это внешняя граница магнитосферы или магнитопауза. Она располагается на расстоянии около 60000 км от центра Земли с дневной стороны. С ночной стороны солнечный ветер образует плазменный хвост Земли. Плазменные сгустки, возникающие во время хромосферных вспышек Солнца, летящие в направлении Земли «ударяясь» о магнитосферу, вызывают её кратковременное сжатие с последующим расширением. Так возникают магнитные бури, а некоторые частицы сгустка, проникающие через магнитосферу, вызывают полярные сияния.

Кроме Земли магнитосфера обнаружена у Марса, Юпитера, Сатурна, Меркурия. На Венере и Луне магнитное поле практически отсутствует, и магнитосферы нет.

На борту КА всегда существуют электрические цепи, магнитные элементы приборов, в металлической оболочке которых находятся токи Фуко, которые создают собственное магнитное поле. Взаимодействуя с магнитным полем Земли, оно создаёт момент, стремящийся ориентировать магнитный диполь КА по силовым магнитным линиям. Если ось Земли лежит в плоскости орбиты, то КА, отслеживая направление силовых линий, совершает за один виток два полных оборота вокруг своей оси.

Внутренняя область земной магнитосферы, в которой магнитное поле Земли удерживает заряженные частицы (протоны, электроны), обладающие большой кинетической энергией, образует радиационные пояса Земли.

Они были обнаружены в середине 50-х годов прошлого столетия. В радиационных поясах частицы под действием магнитного поля движутся по сложным траекториям из Северного полушария в Южное и обратно.

У Земли обычно выделяют внутренний и внешний радиационные пояса. Внутренний радиационный пояс состоит в основном из протонов. Он расположен симметрично относительно магнитного экватора и ограничен с внешней стороны силовыми линиями, выходящими на геомагнитной широте $35^{\circ} - 40^{\circ}$. Нижняя граница пояса, ближайшая к земной поверхности, находится на расстоянии 500 км (в Западном полушарии) и на расстоянии 1500 – 1600 км (в Восточном) от земной поверхности. Верхняя граница пояса расположена на высотах 9000 – 10000 км. Максимальную плотность протонов внутренний радиационный пояс имеет над экватором на высоте 3000 – 4000 км.

Внешний радиационный пояс состоит в основном из электронов. Он расположен между двумя поверхностями, образованными силовыми линиями магнитного поля, выходящими на геомагнитных широтах 50° и 70° . Внешний радиационный пояс имеет максимальную плотность заряженных частиц над экватором на высоте около 22000 км.

Радиационные пояса Земли являются источником радиационной опасности при космических полётах.

в) Атмосфера Земли.

Атмосфера Земли – это газообразная оболочка вокруг земного шара с радиальной протяжённостью порядка 20000 км. Атмосферу Земли по химическому составу принято называть азотно-кислородной, она содержит 76% азота, 21% кислорода, 3% водяного пара, водорода, углекислого газа и ряда других газов. По составу воздуха атмосферу подразделяют на гомосферу и гетеросферу. В гомосфере, простирающейся до высот ~95 км, состав воздуха с высотой почти не изменяется. В гетеросфере азот, кислород и другие газы под действием ультрафиолетового излучения Солнца диссоциируют и находятся в атомарном состоянии. Плотность и давление воздуха с увеличением высоты уменьшаются, причём степень изменения параметров атмосферы различна. До высот ~180 км наблюдаются значительные колебания плотности и давления в течение суток. Поскольку точной и строгой аналитической модели земной атмосферы не разработано, то при проведении расчётов широкое применение имеет приближенная модель, в которой используются допущения об изотермичности атмосферы. В этом случае плотность изменяется по экспоненциальному закону $\rho = \rho_0 e^{-\beta h}$, где ρ_0 – плотность атмосферы на уровне моря (на высоте $h=0$ м), $\rho_0 = 1,23 \text{ кг/м}^3 = 0,125 \text{ (кг} \cdot \text{сек}^2 \text{)/м}^4$; β – логарифмический градиент плотности, который изменяется с высотой; в диапазоне высот до 100 км коэффициент β принимается постоянным. При проведении точных расчётов движения КА применяют единую, так называемую стандартную атмосферу. В СССР была принята и используется в настоящее время стандартная атмосфера (ГОСТ 4401-81), которая устанавливает численные значения основных термодинамических и физических параметров атмосферы на высотах до 200 км. Для верхних слоёв атмосферы разработаны и используются специальные модели (ГОСТ 22721-77, ГОСТ 25645.101-83), а также ГОСТы 25645.102-83 (Методика расчёта характеристик вариаций плотности) и 25645.302-83 (Методика расчёта индексов солнечной активности).

ГЛАВА 2 НЕВОЗМУЩЕННОЕ ДВИЖЕНИЕ

При движении КА в космическом пространстве на него действуют силы тяготения небесных тел, тяга реактивного двигателя, аэродинамические силы, сила воздействия магнитного поля, сила давления солнечных лучей. Полное и достоверное знание условий полета КА является необходимым фактором при его проектировании и создании. Неучет каких – либо условий, в которых может оказаться КА в процессе полета, может привести к потере КА или к прекращению его функционирования. Однако при решении многих задач космической баллистики достаточно учитывать воздействие на КА только одного, наиболее сильного притягивающего тела и пренебрегать влиянием других небесных тел и другими факторами. Учитывая, что масса КА мала по сравнению с массой основного притягивающего тела, КА правомерно рассматривать как материальную точку, притягиваемую к центральному телу, но не притягивающую это тело. Принятие подобного предположения приводит к понятию «пассивно гравитирующего КА». Движение материальной точки, которое происходит под действием только одной центральной силы гравитационного притяжения, величина которой подчиняется закону всемирного тяготения, называется невозмущенным или кеплеровским движением. В этом случае оказывается возможным аналитически получить все необходимые первые интегралы векторного уравнения движения, полностью его описывающие. Для решения этой задачи обычно используют хорошо разработанные в небесной механике методы решения задачи двух тел, учитывая при этом, что одно из тел (КА) принимается за тело бесконечно малой массы (ограниченная задача двух тел).

2.1 Математическая модель невозмущенного движения

Будем рассматривать абсолютное движение точки (КА) (в инерциальной системе координат (СК)) относительно притягивающего центра, например, центра Земли в рамках ограниченной задачи двух тел. Векторное уравнение такого движения имеет вид:

$$\frac{d^2 \bar{r}}{dt^2} = -\frac{\mu}{r^3} \bar{r}, \quad (2.1)$$

где \bar{r} – радиус-вектор точки относительно притягивающего центра, μ – гравитационный параметр притягивающего тела.

В инерциальной СК $Oxyz$, где O – центр притяжения, уравнение (2.1) запишется в виде:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{\mu x}{r^3} &= 0; \\ \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{\mu y}{r^3} &= 0; \\ \frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{\mu z}{r^3} &= 0; \end{aligned} \quad (2.2)$$

где $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$.

Система (2.2) является системой 6-го порядка. Для её решения необходимо определить 6 первых интегралов. Получим эти интегралы.

2.2 Первые интегралы

Интеграл моментов количества движения.

Умножим первое уравнение системы (2.2) на y , а второе на x и вычтем одно из другого:

$$x\ddot{y} - y\ddot{x} = 0,$$

или

$$x\ddot{y} - y\ddot{x} = \frac{d}{dt} \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) = 0.$$

Интегрируя это уравнение, получим:

$$x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} = c_3, \quad (2.3)$$

аналогично можно получить:

$$y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} = c_1, \quad (2.4)$$

$$z \frac{dx}{dt} - x \frac{dz}{dt} = c_2. \quad (2.5)$$

Найденные три интеграла (2.3) – (2.5) носят название интегралов площадей. В векторной форме эти равенства соответствуют одному выражению:

$$\bar{r} \times \bar{V} = \bar{h}, \quad (2.6)$$

где $\bar{r}(x, y, z); \bar{V}(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}); \bar{h}(c_1, c_2, c_3)$.

Если умножить интегралы (2.3) – (2.5) соответственно на z, x, y и результаты сложить, то получим:

$$c_1 x + c_2 y + c_3 z = 0 \quad (2.7)$$

– уравнение плоскости. В векторной форме можно записать: $\bar{h} \cdot \bar{r} = 0$.

Таким образом, движение материальной точки под действием центральной силы происходит в плоскости, проходящей через точку «О». Положение этой плоскости в пространстве полностью определяется начальными условиями движения. Двигаясь в плоскости (2.7) материальная точка сохраняет свою скорость постоянной. В этом легко убедиться из векторного представления интеграла площадей $\bar{r} \times \bar{V} = \bar{h}$. Модуль этого векторного произведения есть удвоенная секторная скорость (площадь параллелограмма, построенного на векторах \bar{r} и \bar{V}). Обозначим секторную скорость, то есть, приращение площади « A », отнесенной радиусом движущейся точки за единицу времени через $\frac{dA}{dt}$. Имеем:

$$h = 2 \frac{dA}{dt} = \sqrt{(y_0 \dot{z}_0 - z_0 \dot{y}_0)^2 + (z_0 \dot{x}_0 - x_0 \dot{z}_0)^2 + (x_0 \dot{y}_0 - y_0 \dot{x}_0)^2} = \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}, \quad (2.8)$$

где индексом «0» обозначены начальные координаты и скорости.

Интегрируя (2.8), получаем:

$$A = \frac{1}{2} h(t - t_0),$$

т.е. площадь сектора A растет пропорционально времени t .

В полярных координатах r и φ (рис. 2.1) интеграл площадей запишется в виде:

$$h = r^2 \frac{d\varphi}{dt}, \quad (2.9)$$

где $\frac{d\varphi}{dt}$ – угловая скорость радиус-вектора точки. Равенство (2.9) легко получить из векторного представления интеграла площадей $\bar{r} \times \bar{V} = \bar{h}$, представив скорость точки \bar{V} в виде разложения по осям полярной СК (рис. 2.1):

$$\bar{V} = \bar{V}_r + \bar{V}_\varphi = \dot{r}\bar{r}^o + r\dot{\varphi}\bar{\varphi}^o,$$

где $\bar{r}^o = \frac{\bar{r}}{r}$, $|\bar{r}^o| = 1$, $|\bar{\varphi}^o| = 1$.

Далее,

$$\bar{h} = \bar{r} \times (\dot{r}\bar{r}^o + r\dot{\varphi}\bar{\varphi}^o) = \bar{r} \times r\dot{\varphi}\bar{\varphi}^o = r^2\dot{\varphi}(\bar{r}^o \times \bar{\varphi}^o) = r^2\dot{\varphi}\bar{h}^o,$$

где $\bar{h}^o = \bar{r}^o \times \bar{\varphi}^o$ – единичный вектор (орт) перпендикулярный плоскости движения точки. Так как вектор \bar{h} перпендикулярен движению точки (\bar{r}, \bar{V}) , то можно записать:

$$\bar{h} = h\bar{h}^o,$$

и тогда приходим к соотношению (2.9). Записывая соотношение (2.9) в виде $\frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{r^2}h$ и учитывая, что $h = \text{const}$, можем заключить, что при увеличении длины радиус-вектора точки, его угловая скорость уменьшается. Если учесть, что компонента скорости $\bar{V}_\varphi = r\frac{d\varphi}{dt}\bar{\varphi}^o$ является трансверсальной компонентой (2.1), то можно записать следующую простую форму скалярного интеграла площадей:

$$rV_\varphi = h. \quad (2.10)$$

Последнее равенство можно рассматривать как взаимнооднозначное соотношение между длиной радиус-вектора точки и её трансверсальной скоростью.

Интеграл энергии.

Умножим векторное уравнение (2.1) скалярно на $\bar{V} = \frac{d\bar{r}}{dt}$:

$$\bar{V} \cdot \frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = -\frac{\mu}{r^3}\bar{r} \cdot \frac{d\bar{r}}{dt}$$

или

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{V^2}{2} \right) = -\frac{\mu}{r^3} \frac{d}{dt} \left(\frac{r^2}{2} \right) = \mu \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{r} \right),$$

т.е.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{V^2}{2} - \frac{\mu}{r} \right) = 0,$$

и тогда получаем:

$$\frac{V^2}{2} - \frac{\mu}{r} = c = \text{const}.$$

Иначе можно записать:

$$V^2 - \frac{2\mu}{r} = 2c = H = \text{const} \quad (2.11)$$

– интеграл энергии.

Из соотношения (2.11) следует, что в течение всего времени движения величины скорости и радиус-вектора находятся во взаимно однозначном соответствии. Чем больше удаляется точка от центра притяжения, тем меньше её скорость.

Интегралы Лапласа.

Вводим следующие обозначения:

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

$$r' = \bar{r} \frac{d\bar{r}}{dt} = x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} + z \frac{dz}{dt} = x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z} = \bar{r} \cdot \bar{V}.$$

Тогда:

$$\frac{dr'}{dt} = \dot{r}' = x\ddot{x} + y\ddot{y} + z\ddot{z} + \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2.$$

Подставив в последнее выражение вместо $\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}$ их значения из формул (2.2), а вместо квадрата скорости $V^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2$ его значение из интеграла энергии (2.11), получим:

$$\dot{r}' = -\frac{\mu}{r} + V^2 = \frac{\mu}{r} + H.$$

Дифференцируя это выражение, получим:

$$\ddot{r}' = -\frac{\mu}{r} \frac{dr}{dt} = -\frac{\mu}{r^2} \dot{r} = -\frac{\mu \bar{r}'}{r^3},$$

так как:

$$r' = \bar{r} \cdot \bar{r} = rV \cos(\bar{r} \wedge \bar{V}) = rV_r = r\dot{r}$$

или:

$$\frac{d^2 r'}{dt^2} + \frac{\mu \bar{r}'}{r^3} = 0. \quad (2.12)$$

Уравнение (2.12) структурно похоже на уравнения (2.2).

Умножим первое из уравнений (2.2) на $-r'$, а уравнение (2.12) на x и сложим результаты:

$$x\ddot{r}' - r'\ddot{x} = \frac{d}{dt}(x\dot{r}' - r'\dot{x}) = 0.$$

Аналогично получаются и другие уравнения:

$$y\ddot{z}' - r'\ddot{y} = \frac{d}{dt}(y\dot{z}' - r'\dot{y}) = 0;$$

$$z\ddot{r}' - r'\ddot{z} = \frac{d}{dt}(z\dot{r}' - r'\dot{z}) = 0.$$

Интегрирование этих уравнений дает интегралы Лапласа:

$$x\dot{r}' - r'\dot{x} = f_1; \quad (2.13)$$

$$y\dot{r}' - r'\dot{y} = f_2; \quad (2.14)$$

$$z\dot{r}' - r'\dot{z} = f_3. \quad (2.15)$$

Интегралы Лапласа можно представить в другой форме, если перейти к координатам и составляющим скорости, используя формулы для \dot{r}' и r' :

$$-\mu \frac{x}{r} - \dot{z}(z\dot{x} - x\dot{z}) + \dot{y}(x\dot{y} - y\dot{x}) = f_1; \quad (2.16)$$

$$-\mu \frac{y}{r} - \dot{x}(x\dot{y} - y\dot{x}) + \dot{z}(y\dot{z} - z\dot{y}) = f_2; \quad (2.17)$$

$$-\mu \frac{z}{r} - \dot{y}(y\dot{z} - z\dot{y}) + \dot{x}(z\dot{x} - x\dot{z}) = f_3. \quad (2.18)$$

Интегралы (2.16) – (2.18) эквивалентны одному векторному соотношению:

$$\bar{V} \times \bar{h} = \mu \bar{r}^0 + \bar{f}, \quad (2.19)$$

где

$$\bar{r}^o = \frac{\bar{r}}{r}, \quad \bar{r} \times \bar{V} = \bar{h}, \quad \bar{V} = \dot{x}\bar{i} + \dot{y}\bar{j} + \dot{z}\bar{k}, \quad \bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}, \quad \bar{f} = f_1\bar{i} + f_2\bar{j} + f_3\bar{k}.$$

Вектор \bar{f} называется вектором Лапласа. Вектор \bar{f} ортогонален векторной постоянной интеграла площадей \bar{h} и поэтому лежит в плоскости траектории точки. В этом легко убедиться, вычислив скалярное произведение:

$$\bar{f} \cdot \bar{h} = (\bar{V} \times \bar{h} - \mu \bar{r}^o) \cdot \bar{h} = (\bar{V} \times \bar{h}) \cdot \bar{h} - \mu \bar{r}^o \cdot \bar{h} = 0.$$

Равенство нулю скалярного произведения векторов свидетельствует об их перпендикулярности.

Таким образом, для системы дифференциальных уравнений (2.2), которая имеет шестой порядок, получено семь первых интегралов и соответственно семь постоянных $c_1, c_2, c_3, H, f_1, f_2, f_3$. У системы 6-го порядка независимых первых интегралов шесть. Поэтому между полученными интегралами существует, по крайней мере, одна зависимость. Можно установить, что на самом деле таких зависимостей две:

$$\bar{h} \cdot \bar{f} = c_1 f_1 + c_2 f_2 + c_3 f_3 = 0, \quad (2.20 \text{ а})$$

$$f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 = \mu^2 + H(c_1^2 + c_2^2 + c_3^2) \quad (2.20 \text{ б})$$

или

$$f^2 = \mu^2 + Hh^2.$$

Условие (2.20 а) следует из ортогональности векторов \bar{f} и \bar{h} , а условие (2.20 б) показывает, что вектора \bar{f} и \bar{h} не могут быть одновременно равны нулю. Используя соотношения (2.20) можно выразить любые две из семи постоянных в функции пяти остальных, которые остаются произвольными. Недостающий шестой интеграл может быть найден простой квадратурой. Действительно, из уравнений (2.3) – (2.5), (2.11), (2.16) – (2.18) можно выразить любые пять из шести величин: $x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ через шестую (например, через x):

$$\begin{aligned} y &= \varphi_1(x, c_1, c_2, c_3, H, f_1, f_2, f_3), \\ z &= \varphi_2(x, c_1, c_2, c_3, H, f_1, f_2, f_3), \\ \dot{x} &= \varphi_3(x, c_1, c_2, c_3, H, f_1, f_2, f_3), \end{aligned} \quad (2.21)$$

$$\dot{y} = \varphi_4(x, c_1, c_2, c_3, H, f_1, f_2, f_3),$$

$$\dot{z} = \varphi_5(x, c_1, c_2, c_3, H, f_1, f_2, f_3).$$

Берём любое из трех последних уравнений, например, уравнение для \dot{x} :

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \varphi_3(x, c_1, c_2, c_3, H, f_1, f_2, f_3).$$

Интегрируя это соотношение, найдем зависимость x от независимой переменной t :

$$\int \frac{dx}{\varphi_3(x, c_1, c_2, c_3, H, f_1, f_2, f_3)} = t + c,$$

где $c = \text{const}$ — постоянная интегрирования. Вычисляя интеграл, найдем:

$$x = \psi_1(t, c_1, c_2, c_3, H, f_1, f_2, f_3, c).$$

Подставляя это выражение в (2.21), получим:

$$\begin{aligned} x &= \psi_1(t, c_1, c_2, c_3, H, f_1, f_2, f_3, c), \\ y &= \psi_2(t, c_1, c_2, c_3, H, f_1, f_2, f_3, c), \\ z &= \psi_3(t, c_1, c_2, c_3, H, f_1, f_2, f_3, c), \\ \dot{x} &= \psi_4(t, c_1, c_2, c_3, H, f_1, f_2, f_3, c), \\ \dot{y} &= \psi_5(t, c_1, c_2, c_3, H, f_1, f_2, f_3, c), \\ \dot{z} &= \psi_6(t, c_1, c_2, c_3, H, f_1, f_2, f_3, c). \end{aligned} \tag{2.22}$$

Соотношения (2.22) дают общий интеграл системы уравнений (2.2). Первые три уравнения являются параметрическими уравнениями траектории КА, а последние определяют составляющие скорости для любого момента времени. Зная составляющие скорости, можно найти её величину

$$V = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2},$$

и направляющие косинусы: $\frac{\dot{x}}{V}, \frac{\dot{y}}{V}, \frac{\dot{z}}{V}$ вектора \bar{V} .

Произвольные постоянные $c, c_1, c_2, c_3, H, f_1, f_2, f_3$ определяются из начальных условий. Пусть в некоторый начальный момент времени t_0 (который в астрономии называют эпохой), известны координаты и составляющие скорости КА: $t_0, x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0$.

Постоянные интеграла площадей, найдем, подставляя соответствующие начальные значения в (2.3) – (2.5):

$$c_1 = y_0 \dot{z}_0 - z_0 \dot{y}_0,$$

$$c_2 = z_0 \dot{x}_0 - x_0 \dot{z}_0,$$

$$c_3 = x_0 \dot{y}_0 - y_0 \dot{x}_0,$$

$$h = \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}.$$

Направляющие косинусы плоскости орбиты:

$$\frac{c_1}{h}, \frac{c_2}{h}, \frac{c_3}{h}.$$

Постоянная энергии находится из выражения (2.11):

$$H = V_0^2 - \frac{2\mu}{r_0},$$

где

$$V_0^2 = \dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2 + \dot{z}_0^2, \quad r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}.$$

Постоянные Лапласа определяются из уравнений (2.13) – (2.15):

$$f_1 = x_0 \dot{r}'_0 - r'_0 \dot{x}_0,$$

$$f_2 = y_0 \dot{r}'_0 - r'_0 \dot{y}_0,$$

$$f_3 = z_0 \dot{r}'_0 - r'_0 \dot{z}_0,$$

где

$$r'_0 = x_0 \dot{x}_0 + y_0 \dot{y}_0 + z_0 \dot{z}_0,$$

$$\dot{r}'_0 = -x_0 \mu \frac{x_0}{r_0^3} - y_0 \mu \frac{y_0}{r_0^3} - z_0 \mu \frac{z_0}{r_0^3} + \dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2 + \dot{z}_0^2,$$

$$f = \sqrt{f_1^2 + f_2^2 + f_3^2},$$

направляющие косинусы вектора \bar{f} :

$$\frac{f_1}{f}, \frac{f_2}{f}, \frac{f_3}{f}.$$

Произвольную постоянную «с» найдем из выражения:

$$c = -t_0 + \Phi_3(x_0, c_1, c_2, c_3, H, f_1, f_2, f_3),$$

где

$$\Phi_3(\cdot) = \int \frac{dx}{\varphi_3(x_0, c_1, c_2, c_3, H, f_1, f_2, f_3)}.$$

2.3 Уравнение орбиты невозмущенного движения КА в полярных координатах

Чтобы получить формулы (2.21) нужно разрешить уравнения (2.3) – (2.5), (2.11), (2.16) – (2.18) относительно пяти из шести неизвестных функций. Но эти уравнения являются уравнениями 2-ой степени относительно всех шести неизвестных и содержат иррациональность, представляемую радиус-вектором. Поэтому непосредственное использование найденных соотношений затруднительно. Однако можно использовать выявленные ранее некоторые свойства. Ранее было показано (см. рис. 2.1), что траектория КА в инерциальной СК является плоской кривой. Поэтому, удобно перейти к полярной СК. В этой системе уравнением орбиты будет зависимость длины радиус-вектора точки от полярного угла, измеренного в плоскости траектории. Такой угол удобно отсчитывать от вектора Лапласа \vec{f} , который принадлежит плоскости траектории. Этот угол называется в астрономии истинной аномалией и обозначается буквой ϑ (греческая буква «ипсилон»). Итак, уравнение орбиты это зависимость $r = r(\vartheta)$. Такую зависимость легко получить, используя векторную форму интеграла Лапласа (2.19).

Умножим уравнение (2.19) скалярно на \vec{r} . Учитывая, что:

$$(\vec{V} \times \vec{r}) \cdot \vec{r} = (\vec{r} \times \vec{V}) \cdot \vec{h} = \vec{h} \cdot \vec{h} = h^2,$$

получим:

$$h^2 = \mu \vec{r}^o \cdot \vec{r} + \vec{f} \cdot \vec{r}$$

или:

$$h^2 = \mu r + fr \cos \vartheta,$$

где ϑ – угол между векторами \vec{f} и \vec{r} .

Далее получаем:

$$r = \frac{h^2 / \mu}{1 + \frac{f}{\mu} \cos \vartheta}. \quad (2.23)$$

Соотношение (2.23) есть полярное уравнение кривой второго порядка, один из фокусов которой находится в начале координат (в притягивающем центре), а главная ось совпадает с направлением вектора Лапласа. Ось орбиты в астрономии называется линией апсид. Введя обозначения:

$$p = \frac{h^2}{\mu} - \text{фокальный параметр,}$$

$$e = \frac{f}{\mu} - \text{эксцентриситет, перепишем уравнение (2.23):}$$

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \vartheta}. \quad (2.24)$$

Это уравнение кривой конического сечения. Оно содержит две константы: p и e , которые определяют размер и форму траектории.

Размер орбиты определяется значением фокального параметра, а форма орбиты – значением эксцентриситета:

При $e = 0$ получаем окружность,

$e = 1$ – параболу,

$e < 1$ – эллипс,

$e > 1$ – гиперболу.

Главная ось, совпадающая с вектором Лапласа, является осью симметрии траектории и направлена в ближайшую точку от притягивающего центра (перигелий). Фокальный параметр определяет удаление КА от притягивающего центра. При $\vartheta = \frac{\pi}{2}$:

$$r|_{\vartheta=\frac{\pi}{2}} = p.$$

Фокальный параметр и эксцентриситет выражаются через начальные условия следующими формулами (рис. 2.2):

$$p = \frac{h^2}{\mu},$$

$$h = |\vec{r} \times \vec{V}| = rV \sin(\vec{r} \wedge \vec{V}) = rV \cos \theta = r_0 V_0 \cos \theta_0,$$

где θ – угол между линией местного горизонта – перпендикуляром к радиус-вектору \vec{r} и вектором скорости \vec{V} .

$$p = \frac{r_0^2 V_0^2 \cos^2 \theta_0}{\mu}, \quad (2.25)$$

$$e = \frac{f}{\mu},$$

$$f = \sqrt{\mu^2 + Hh^2}, \text{ (см. 2.21)}$$

$$H = V_0^2 - \frac{2\mu}{r_0},$$

$$e = \sqrt{1 + \frac{Hh^2}{\mu^2}} = \sqrt{1 + \frac{\left(V_0^2 - \frac{2\mu}{r_0}\right) r_0^2 V_0^2 \cos^2 \theta_0}{\mu^2}}. \quad (2.26)$$

Таким образом, характер траектории зависит от начальных условий: r_0 , V_0 , θ_0 . Используя уравнения (2.24) и (2.9) получим выражение для скорости и найдем время движения.

2.4 Орбиты конического сечения

Скорость КА в произвольной точке орбиты выразим через компоненты по осям полярной СК: радиальную V_r и трансверсальную V_τ (рис. 2.2). Имеем:

$\vec{V} = \vec{V}_r + \vec{V}_\tau$, где $V_r = \frac{dr}{dt}$, $V_\tau = r \frac{d\vartheta}{dt}$. Используя полярное уравнение орбиты, полу-

чим:

$$V_r = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\vartheta} \cdot \frac{d\vartheta}{dt} = \frac{pe \sin \vartheta}{(1 + e \cos \vartheta)^2} \frac{d\vartheta}{dt}.$$

Из уравнения (2.9), принимая во внимание, что $\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\vartheta}{dt}$, найдем $\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{h}{r^2}$.

Учитывая (2.24), получим:

$$V_r = \frac{h}{p} e \sin \vartheta = \sqrt{\frac{\mu}{p}} e \sin \vartheta \quad (h = \sqrt{p\mu}) - \quad (2.27)$$

радиальная проекция скорости.

Далее находим V_T :

$$V_T = r \frac{d\vartheta}{dt} = r \frac{h}{r^2} = \frac{h}{r} = \frac{h}{p} (1 + e \cos \vartheta) = \sqrt{\frac{\mu}{p} (1 + e \cos \vartheta)} - \quad (2.28)$$

трансверсальная проекция скорости.

Модуль скорости получим геометрическим суммированием V_r и V_T :

$$V = \sqrt{V_r^2 + V_T^2} = \sqrt{\frac{\mu}{p} \sqrt{1 + e^2 + 2e \cos \vartheta}}. \quad (2.29)$$

Время полета можно найти, используя уравнение (2.9):

$$r^2 \frac{d\varphi}{dt} = r^2 \frac{d\vartheta}{dt} = h.$$

Используя уравнение траектории (2.24), можем записать:

$$\frac{p^2}{h} \frac{d\vartheta}{(1 + e \cos \vartheta)^2} = dt.$$

После интегрирования получаем:

$$t - \tau = \frac{p^2}{h} \int_0^{\vartheta} \frac{d\vartheta}{(1 + e \cos \vartheta)^2}, \quad (2.30)$$

где τ – время прохождения КА через перицентр ($\vartheta = 0$), t , ϑ – текущие значения времени и истинной аномалии.

Установим связь между положением точки и её скоростью. Для этого наряду с полярной введем в рассмотрение декартову СК $O\xi\eta\zeta$ (рис. 2.2), плоскость $\xi\eta$, которой совпадает с плоскостью траектории, а ось ξ направлена по вектору Лапласа, т.е. в перицентр. Используя формулы (2.27) и (2.28) легко можно получить:

$$\cos \vartheta = \frac{1}{e\mu} (hV_T - \mu) = \frac{1}{e\mu} \left(\frac{|\vec{r} \times \vec{V}|^2}{r} - \mu \right), \quad (2.31)$$

$$\sin \vartheta = \frac{hV_r}{\mu e} = \frac{|\vec{r} \times \vec{V}|}{\mu e r} (\vec{r} \cdot \vec{V}), \quad (2.32)$$

где $|\vec{r} \times \vec{V}| = h = rV \cos \theta$, $(\vec{r} \cdot \vec{V}) = rV \sin \theta$, $V_T = V \cos \theta$, $V_r = V \sin \theta$.

Формулы (2.31) и (2.32) служат для определения связи истинной аномалии с радиус-вектором и скоростью точки. Обозначим $\bar{\xi}^o$, $\bar{\eta}^o$, $\bar{\zeta}^o$ – орты соот-

ветствующих осей (плоскость $\xi\eta$ совпадает с плоскостью траектории). Найдем выражения для этих ортов.

Можно записать (рис. 2.2):

$$\bar{r} = r \cos \vartheta \bar{\xi}^o + r \sin \vartheta \bar{\eta}^o. \quad (2.33)$$

Откуда находим:

$$\bar{\xi}^o = \frac{\bar{r}}{r \cos \vartheta} - \frac{\sin \vartheta}{\cos \vartheta} \bar{\eta}^o. \quad (2.34)$$

Скорость в произвольной точке:

$$\bar{V} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{dr\bar{r}^o}{dt} = \frac{dr}{dt} \bar{r}^o + \bar{\omega}_r \times \bar{r},$$

где $\bar{\omega}_r = \dot{\vartheta} \bar{\xi}^o$ – угловая скорость вектора \bar{r} , причем $\dot{\vartheta} = \frac{h}{r^2}$, а $\bar{r} = \bar{r}^o r$. Вычисляя

векторное произведение $\bar{\omega}_r \times \bar{r} = \bar{V}_\tau$, находим:

$$\bar{V} = V_r \bar{r}^o + \bar{V}_\tau = V_r \bar{r}^o + \frac{h}{r} (\bar{\eta}^o \cos \vartheta - \bar{\xi}^o \sin \vartheta),$$

где $V_r = \frac{dr}{dt} = \frac{\mu e \sin \vartheta}{h}$ и $\bar{\eta}^o = \frac{\bar{V}_\tau - V_r \bar{r}^o + h \sin \vartheta \bar{\xi}^o}{h \cos \vartheta}$.

Подставляя полученное выражение $\bar{\eta}^o$ в формулу (2.34) и учитывая, что $h = \sqrt{p\mu}$, получим:

$$\bar{\xi}^o = \frac{e + \cos \vartheta}{p} \bar{r} - \frac{r}{\sqrt{p\mu}} \sin \vartheta \bar{V}. \quad (2.35)$$

Аналогично найдем:

$$\bar{\eta}^o = \frac{\sin \vartheta}{p} \bar{r} + \frac{r \cos \vartheta}{\sqrt{p\mu}} \bar{V}, \quad (2.36)$$

и, наконец:

$$\bar{\xi}^o = \bar{\xi}^o \times \bar{\eta}^o.$$

Используя формулу (2.35) можно легко найти радиус-вектор перицентра траектории:

$$r_\Pi = r_\Pi \bar{\xi}^o, \text{ где } r_\Pi = r|_{\vartheta=0} = \frac{p}{1+e}.$$

Теперь установим связь между значениями радиус-вектора \bar{r}_2 и вектора скорости \bar{V}_2 в точке с истинной аномалией ϑ_2 с соответствующими значениями $\bar{r}_1, \bar{V}_1, \vartheta_1$.

Для этого запишем:

$\bar{r}_2 = r_2 \cos \vartheta_2 \bar{\xi}^o + r_2 \sin \vartheta_2 \bar{\eta}^o$. Орты $\bar{\xi}^o$ и $\bar{\eta}^o$ выразим по формулам (2.35) и (2.36), заменив в них $\bar{r}, \bar{V}, \vartheta$ соответственно на $\bar{r}_1, \bar{V}_1, \vartheta_1$.

В результате получим:

$$\bar{r}_2 = \left\{ 1 - \frac{r_2}{p} [1 - \cos(\vartheta_2 - \vartheta_1)] \right\} \bar{r}_1 + \frac{r_2 r_1}{\sqrt{\mu p}} \sin(\vartheta_2 - \vartheta_1) \bar{V}_1. \quad (2.37)$$

Аналогично можно получить следующую формулу:

$$\bar{V}_2 = \left\{ \frac{(\bar{r}_1 \cdot \bar{V}_1)}{p r_1} [1 - \cos(\vartheta_2 - \vartheta_1)] - \frac{1}{r_1} \sqrt{\frac{\mu}{p}} \sin(\vartheta_2 - \vartheta_1) \right\} \bar{r}_1 + \left\{ 1 - \frac{r_1}{p} [1 - \cos(\vartheta_2 - \vartheta_1)] \right\} \bar{V}_1. \quad (2.38)$$

Формула (2.37) используется для определения скорости \bar{V}_1 в начальной точке в зависимости от \bar{r}_1, \bar{r}_2 и угла между ними: $\Phi = \vartheta_2 - \vartheta_1$. Находим:

$$\bar{V}_1 = \frac{\sqrt{\mu p}}{r_1 r_2 \sin \Phi} \left\{ \bar{r}_2 - \left[1 - \frac{r_2}{p} (1 - \cos \Phi) \right] \bar{r}_1 \right\}. \quad (2.39)$$

Аналогичным образом можно найти скорость \bar{V}_2 в конечной точке:

$$\bar{V}_1 = \frac{\sqrt{\mu p}}{r_1 r_2 \sin \Phi} \left\{ -\bar{r}_1 + \left[1 - \frac{r_1}{p} (1 - \cos \Phi) \right] \bar{r}_2 \right\}. \quad (2.40)$$

Рассмотрим характерные орбиты космических ЛА.

2.5 Эллиптические орбиты

Как известно, при $0 < e < 1$ уравнение (2.24) соответствует эллипсу, один из фокусов которого находится в центре притяжения (рис. 2.3). Точки F_1 и F_2 — фокусы эллипса, причем с гравитирующим центром совмещается фокус F_1 . От вектора Лапласа \bar{f} отсчитывается истинная аномалия ϑ , определяющая положение радиус-вектора. Точка орбиты с минимальным радиус-вектором называется перигентом и обозначается «п». Перигент соответствует нулевой ис-

тинной аномалии, а радиус-вектор перицентра \bar{r}_Π направлен по вектору Лапласа. Из равенства (2.24) следует:

$$r_\Pi = r|_{\vartheta=\pi} = \frac{p}{1-e}.$$

Максимальное значение длины радиус-вектора достигается при $\vartheta = \pi$. Эта точка орбиты называется апоцентром и обозначается «а». Радиус-вектор апоцентра \bar{r}_a определяется формулой:

$$r_a = r|_{\vartheta=\pi} = \frac{p}{1-e}.$$

Линия АП, проходящая через апоцентр и перицентр называется линией апсид, а перицентр и апоцентр орбиты называются апсидными точками. При рассмотрении орбит спутников (естественных и искусственных) часто вводятся специальные термины для обозначения перицентров и апоцентров орбиты. Так, для орбит спутников Земли используются термины перигей и апогей. Для орбит спутников Солнца – перигелий и афелий. Для орбит спутников Луны – периселений и апоселений. Для орбит спутников звезды – периастр и апоастр. Фокальный параметр « p » определяет удаление КА от притягивающего центра при $\vartheta = \frac{\pi}{2}$: $p = r|_{\vartheta=\frac{\pi}{2}}$. Форма и размер эллиптической орбиты могут быть определены не только фокальным параметром и эксцентриситетом, но и любыми другими константами, по которым можно найти p и e . Среди них уже встречавшиеся: r_Π, r_a, h, f, H , а также большая « a » и малая « b » полуоси эллипса, фокальное расстояние « c » (рис. 2.3). Из всех этих параметров независимыми являются два, а остальные можно найти по соотношениям. Приведём некоторые из этих соотношений:

$$a = \frac{p}{1-e^2}, \quad b = \frac{p}{\sqrt{1-e^2}}, \quad c^2 = a^2 - b^2, \quad e = \frac{c}{a}, \quad p = \frac{b^2}{a}, \quad b = a\sqrt{1-e^2},$$

$$e = \frac{f}{\mu} = \sqrt{1 + \frac{Hh^2}{\mu^2}}, \quad a = \frac{1}{2}(r_a + r_\Pi), \quad H = -\frac{\mu}{a}. \quad (2.41)$$

Последнее из соотношений выражает связь между константой энергии и величиной большой полуоси орбиты спутника. Для вывода этого соотношения используется константа энергии, вычисленная для перигейной точки:

$$H = V_{\pi}^2 - \frac{2\mu}{r_{\pi}},$$

а также соотношения:

$$a = \frac{p}{1-e^2}, \quad r_{\pi} = \frac{p}{1+e} \quad \text{и} \quad V_{\pi} = \sqrt{\frac{\mu}{p}(1+e)},$$

где $V_i = V|_{\theta=0}$ – значение скорости в перигеуме. Формула для скорости в произвольной точке любой кривой конического сечения (2.29) была получена ранее. В приложениях часто используется другая формула для скорости КА, записанная как функция большой полуоси эллипса и текущего радиуса орбиты. Используя соотношения:

$$H = -\frac{\mu}{a} \quad \text{и} \quad H = V^2 - \frac{2\mu}{r},$$

получим:

$$V = \sqrt{\mu \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)}. \quad (2.42)$$

Частным случаем эллиптической орбиты является круговая орбита. В круговом движении $e = 0$, $r = p = a$. Тогда из формулы (2.42) находим начальную скорость, необходимую для полета по круговой орбите:

$$V_0 = V_{\text{кр}} = \sqrt{\frac{\mu}{r_0}}. \quad (2.43)$$

Условие $e = 0$ на основании (2.26), с учетом (2.43) приводится к виду $\cos^2 \theta = 1$ или $\theta_0 = 0, \pi \dots$. Скорость, определяемая формулой (2.43) называется круговой или первой космической скоростью. В точке с радиусом r круговая скорость: $V_{\text{кр}} = V_I = \sqrt{\frac{\mu}{r}}$.

При $r = r_3$ получим круговую скорость на поверхности Земли. При $r_3 = 6371$ км, и $\mu_3 = 398600$ км/с² получаем $V_{ГЗ} = 7,91$ км/с. Аналогично для Венеры: $V_{ГВ} = 7,25$ км/с, для Марса $V_{ГМ} = 3,56$ км/с, для Луны $V_{ГЛ} = 7,91$ км/с.

При $e = 1$ уравнение (2.24) дает параболу. На основании формулы (2.26) находим, что при этом должно быть: $H = V_0^2 - \frac{2\mu}{r_0} = 0$. Т.е. начальная скорость должна равняться параболической или 2-ой космической скорости:

$$V_0 = V_{\text{пар}} = \sqrt{\frac{2\mu}{r_0}}. \quad (2.44)$$

В точке с радиусом r параболическая скорость:

$$V_{\text{пар}} = V_{II} = \sqrt{\frac{2\mu}{r}}.$$

Эта скорость называется также скоростью освобождения т.к. при достижении такой скорости КА преодолевает поле тяготения. Значения параболической скорости при $r = r_{\text{пл}}$ (радиус планеты) для различных планет приводились ранее в табл. 1.2.

Таким образом, если начальная скорость находится в пределах $V_{\text{кр}} < V_0 < V_{\text{пар}}$, то КА будет совершать полёт по эллиптической орбите. Условие $V_0 < V_{\text{пар}} < V_{II}$ является необходимым и достаточным, а условие $V_{\text{кр}} < V_I < V_0$ только достаточным, так как полёт по эллиптической орбите возможен и при меньшей начальной скорости. Чтобы убедиться в этом представим выражение (2.42) с учетом формулы для $V_I = \sqrt{\frac{\mu}{r}}$ в виде:

$$V = V_I \sqrt{2 - \frac{r}{a}}.$$

Отсюда следует, что скорость в перигентре орбиты, т.е. при $r = r_{\text{пар}}$ больше первой космической, а в апоцентре меньше. Значит, при выводе КА в апоцентр орбиты ему необходимо сообщить скорость, меньшую первой космической. Минимальная начальная скорость $V_{0\text{min}}$, обеспечивающая полёт по эллиптической орбите вокруг небесного тела потребуется в том случае, если КА вы-

водится в апоцентр такой орбиты, которая касается своим перицентром поверхности небесного тела. В этом случае (см. 2.42):

$$e = \frac{r_a - r_{\Pi}}{r_a + r_{\Pi}} = \frac{r_0 - r_{\text{пл}}}{r_0 + r_{\text{пл}}}$$

и

$$V_{0\min} = V_I \sqrt{\frac{2r_{\text{пл}}}{r_0 + r_{\text{пл}}}}.$$

Следовательно, для полёта по эллиптической орбите вокруг небесного тела необходимо и достаточно выполнить условие:

$$V_I \sqrt{\frac{2r_{\text{пл}}}{r_0 + r_{\text{пл}}}} < V_0 < V_{II}. \quad (2.45)$$

Необходимо отметить, что для небесного тела, имеющего атмосферу, при определении $V_{0\min}$ нужно в качестве $r_{\text{пл}}$ в условии (2.45) принимать не радиус этого небесного тела, а радиус r_s сферы, соответствующей границе эффективного торможения КА атмосферой. Выполненный выше анализ уравнения (2.24) и выражения (2.42) показывает, что в процессе полета КА по эллиптической орбите его высота над поверхностью небесного тела (расстояние от центра притяжения) изменяется от минимального значения в перицентре до максимального в апоцентре, а скорость – от максимальной в перицентре до минимальной в апоцентре.

Заметим, что значения скоростей КА в перицентре и апоцентре эллиптической орбиты связаны «правилом рычага»:

$$z_a V_a = z_{\Pi} V_{\Pi}. \quad (2.46)$$

Это правило непосредственно вытекает из интеграла площадей.

Движение по эллиптической орбите сопровождается периодическим перераспределением энергии, переходом кинетической энергии в перицентре в потенциальную в апоцентре, и наоборот. Полная энергия при этом остается неизменной.

Время полета по эллиптической орбите можно найти из выражения (2.30):

$$t - \tau = \frac{p^2}{h} \int_h^g \frac{d\vartheta}{(1 + e \cos \vartheta)^2}.$$

С помощью замены переменной $z = \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2}$ можно вычислить интеграл и получить зависимость $t - \tau$ от ϑ . Однако этот путь приводит к громоздким формулам. К некоторому упрощению ведет использование вместо ϑ другой переменной, через которую ϑ выражается достаточно просто. В эллиптическом движении такой переменной является эксцентрическая аномалия « E »:

$$\operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} = \operatorname{tg} \frac{E}{2} \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}. \quad (2.47)$$

На рис. 2.4 показана взаимосвязь истинной ϑ и эксцентрической « E » аномалий.

После перехода к новой переменной и интегрирования (2.30), находим:

$$E - e \sin E = M, \quad (2.48)$$

где $M = n(t - \tau)$ – средняя аномалия, а $n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}$ – среднее движение.

Уравнение (2.48) называется вспомогательным уравнением Кеплера. Это уравнение связывает положение спутника на орбите со временем, прошедшим после прохождения перицентра.

Важной характеристикой эллиптической орбиты является период обращения – время полного оборота КА вокруг небесного тела.

Пусть движение начинается из перицентра, т.е. $\tau = 0$. В этот момент (рис. 2.4) $E = 0$. Через период T , совершив полный оборот, спутник опять приходит в перицентр и его эксцентрическая аномалия E будет равна 2π . Из уравнения (2.48) следует $2\pi - e \sin 2\pi = nT$, откуда

$$T = \frac{2\pi}{n} = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{\mu}}. \quad (2.49)$$

Таким образом, период обращения спутника зависит от большой полуоси его орбиты и не зависит от эксцентриситета. На основании формулы (2.49) легко получить математическое выражение 3-го закона Кеплера:

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3} = \frac{4\pi^2}{\mu} = \text{const}. \quad (2.50)$$

Для круговой орбиты с радиусом $r = p = a$:

$$T = \frac{2\pi r}{V_{кр}} = \frac{2\pi r}{\sqrt{\frac{\mu}{r}}} = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{\mu}} = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{\mu}}.$$

Заметим, что идеальная круговая орбита практически не реализуется, однако на практике достаточно часто встречаются эллиптические орбиты с очень малым эксцентриситетом, т.е. близкие к круговым. Для таких орбит уравнение (2.24) $r = \frac{p}{1 + e \cos \vartheta}$ разложением в ряд по степеням эксцентриситета « e » представляется в виде:

$$r = p(1 - e \cos \vartheta), \quad (2.51)$$

а время полета:

$$t - \tau = \frac{p^2}{h} (\vartheta - 2e \sin \vartheta). \quad (2.52)$$

Кроме того, в небесной механике широко используются следующие разложения, дающие явную зависимость параметров орбиты от времени:

$$\begin{aligned} \vartheta &= M + 2e \sin M + \frac{5}{4} e^2 \sin 2M + \dots \\ r &= a(1 - e \cos M + e^2 \sin 2M + \dots) \\ V &= V_{la} (1 + 2e \cos M + 2e^2 \cos 2M + \dots), \\ \nu &= n \left(1 + 2e \cos M + \frac{5}{2} e^2 \cos 2M + \dots \right) \end{aligned} \quad (2.53)$$

где $V_{la} = \sqrt{\frac{\mu}{a}}$ круговая скорость при $r = a$, $M = n(t - \tau)$ – средняя аномалия;

$n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} = \frac{V_{la}}{a}$ – среднее движение (средняя угловая скорость обращения);

$\nu = \frac{d\vartheta}{dt} = \sqrt{\frac{\mu}{a^3} \frac{(1 + e \cos \vartheta)^2}{(1 - e^2)^{3/2}}}$ – угловая скорость поворота радиус-вектора вокруг центра тяготения.

Для орбит с эксцентриситетом порядка 0,1 в разложениях (2.53) можно ограничиться двумя первыми членами ряда (с погрешностью в несколько процентов).

2.6 Гиперболические орбиты

Гиперболические орбиты являются орбитами небесных тел, способных преодолевать поле тяготения основного притягивающего центра.

Гиперболическая орбита имеет место при $e > 1$, т.е. (см. 2.26) при

$$V_0 > V_{\text{пар}} = \sqrt{\frac{2\mu}{r_0}} = V_{II}.$$

Гипербола имеет две ветви (рис. 2.5). Чаще всего принято считать, что орбита является левой ветвью гиперболы. Перицентр достигается при $\vartheta = 0$ и лежит на линии апсид PG . Расстояние от фокуса F_1 до перицентра $r_{\text{п}} = a(e-1)$. Скорость движения определяется формулами (2.27 – 2.29) при $e > 1$ или по формуле, аналогичной формуле (2.42):

$$V = \sqrt{\mu \left(\frac{2}{r} + \frac{1}{a} \right)}. \quad (2.54)$$

Фокальный параметр: $p = a(e^2 - 1)$.

Предельное значение истинной аномалии $\vartheta_{\text{пр}}$, отвечающее положению КА на бесконечности получается из полярного уравнения орбиты (2.24) при $r = \infty$:

Имеем:

$$\cos \vartheta = \frac{\frac{p}{r} - r}{e}.$$

Откуда получаем

$$\cos \vartheta_{\text{пр}} = \cos \vartheta \Big|_{r=\infty} = -\frac{1}{e}. \quad (2.55).$$

Так как по мере удаления КА от небесного тела касательная к гиперболической орбите, определяющая направление скорости, приближается к асимптоте, последняя может использоваться на этом участке для определения направления скорости. Угол наклона асимптоты к линии апсид (рис. 2.5) определяется равенством: $\text{tg} \theta_a = -\frac{b}{a}$.

С учетом формул:

$$b = \sqrt{ap} ; H = \frac{\mu}{a} = V_0^2 - \frac{2\mu}{r_0} ; p = \frac{h^2}{\mu} ,$$

находим

$$\operatorname{tg} \theta_a = -\frac{h}{\mu} \sqrt{V_0^2 - \frac{2\mu}{r_0}} = -\frac{h}{\mu} \sqrt{V_0^2 - V_{II}} . \quad (2.56)$$

Из (2.56) следует, что при начальной скорости $V_0 \approx V_{II} = V_{\text{пар}}$ угол θ_a близок к π . С увеличением V_0 угол θ_a уменьшается, приближаясь к $\frac{\pi}{2}$. Другими словами КА удаляется от небесного тела по более отвесной траектории.

Время движения по гиперболической орбите определяется по формуле (2.30) при $e > 1$ или по уравнению, аналогичному (2.48)

$$n(t - \tau) = e \cdot \operatorname{sh} \mathfrak{x} - \mathfrak{x}, \quad (2.57)$$

где τ – время прохождения перицентра, $n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}$, $th\mathfrak{x}/2 = \sqrt{\frac{e-1}{e+1}} \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2}$, $sh\mathfrak{x}$ и $th\mathfrak{x}$ – гиперболические синус и тангенс. Можно использовать также следующую формулу:

$$t - \tau = \frac{\sqrt{\frac{p}{\mu}}}{e^2 - 1} \left(\frac{ep \sin \vartheta}{1 + e \cos \vartheta} - \frac{p}{\sqrt{e^2 - 1}} \ln A \right), \quad (2.58)$$

где

$$A = \frac{e \sin \vartheta + \sqrt{e^2 - 1}}{1 + e \cos \vartheta} + \frac{1}{\sqrt{e^2 - 1}} .$$

Если требуется найти время $t_{\vartheta_2} - t_{\vartheta_1}$ перелета между двумя любыми точками орбиты, то записывая уравнение (2.57) для моментов t_{ϑ_1} и t_{ϑ_2} , получим

$$n(t_{\vartheta_2} - t_{\vartheta_1}) = \mathfrak{x}_2 - \mathfrak{x}_1 - (sh \mathfrak{x}_2 - sh \mathfrak{x}_1), \quad (2.59)$$

при использовании формулы (2.58), аналогично найдем:

$$\Delta t = (t_{\vartheta_2} - t_{\vartheta_1}) = \frac{\sqrt{\frac{p}{\mu}}}{e^2 - 1} \left(\frac{ep \sin \vartheta_2}{1 + e \cos \vartheta_2} - \frac{ep \sin \vartheta_1}{1 + e \cos \vartheta_1} - \frac{p}{\sqrt{e^2 - 1}} \ln \frac{A_2}{A_1} \right), \quad (2.60)$$

где

$$A_i = \frac{e \sin \vartheta_i + \sqrt{e^2 - 1}}{1 + e \cos \vartheta_i} + \frac{1}{\sqrt{e^2 - 1}} \quad (i = 1, 2).$$

Таким образом, в параграфах 2.4 и 2.5 рассмотрены основные типы орбит КА в задаче двух тел.

ГЛАВА 3 СИСТЕМЫ КООРДИНАТ, ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ ПРИ ОПИСАНИИ ДВИЖЕНИЯ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ. СИСТЕМА КЕПЛЕРОВСКИХ (АСТРОНОМИЧЕСКИХ) ЭЛЕМЕНТОВ ОРБИТЫ

3.1 Инерциальные системы координат

При описании невозмущенного движения КА вводятся различные инерциальные системы координат (СК).

Как известно, инерциальной называется такая прямоугольная декартова СК, начало которой помещается в некоторой неподвижной точке пространства, либо перемещается с постоянной скоростью, а направление осей относительно звезд неизменно. Выбранные для изучения движения КА в инерциальных СК могут обладать известной неравномерностью, важно только, чтобы их ускорения были бы пренебрежимо малы по сравнению с ускорением КА. Поэтому в ряде случаев для анализа движения КА в качестве инерциальных СК рассматриваются СК с центром в центре масс Солнца или какой-либо планеты, например Земли. Название такой инерциальной СК связывается с названием того небесного тела, относительно которого ведется отсчет. В связи с этим рассматривают гелиоцентрические СК с началом в центре Солнца и планетоцентрические (геоцентрические) СК с началом в центре планеты (Земли). В соответствии с основной (опорной) плоскостью инерциальные СК делятся на экваториальные и эклиптические. Основной плоскостью в экваториальной СК является плоскость экватора планеты (Земли), а в эклиптической СК – плоскость эклиптики (плоскость орбиты Земли). Важной характеристикой системы координат является основная (опорная) ось СК, которая обозначается буквой « x » и направля-

ется в сторону точки весеннего равноденствия планеты (Земли) на небесной сфере. Эта точка обозначается символом « Υ » и находится в созвездии «Овен». В астрономии небесная сфера определяется как сфера произвольного радиуса с центром в некоторой точке пространства. Различают геоцентрическую, планетоцентрическую, гелиоцентрическую и другие небесные сферы в зависимости от того, будет ли центр небесной сферы помещен в центре Земли, Солнца, Луны и т.д. Если центр небесной сферы расположен на поверхности планеты, то небесная сфера называется топоцентрической. Точкой весеннего равноденствия называется точка на экваторе небесной сферы, в которой Солнце в процессе его видимого с планеты (Земля) годичного движения переходит из южной полушария в северную. Плоскость эклиптики пересекается с небесной сферой по большому кругу – эклиптике. Угол ϵ между плоскостями эклиптики и экватора Земли приблизительно равен $23^{\circ}27'08''$. Эклиптика пересекается с экватором в точках весеннего и осеннего равноденствия. Первая из этих точек, в которой Солнце бывает в день весеннего равноденствия (22.03) обозначается, как это было указано выше, символом « Υ », а другая – « \cap ». Перейдем к рассмотрению конкретных инерциальных СК.

а) Геоцентрические системы координат.

К этой группе СК относятся системы координат, начала и оси которых, фиксированы по отношению к Земле. Среди этой группы СК рассмотрим геоцентрическую экваториальную СК, геоцентрическую эклиптическую, геоцентрическую перицентральною (перигейную) СК.

Геоцентрическая экваториальная система координат (рис. 3.1).

Начало этой СК совпадает с центром Земли. Основная плоскость Oxy совпадает с плоскостью земного экватора, ось Oz направлена по оси Земли к северному полюсу мира. Ось Ox направлена в точку Υ и параллельна линии Земля – Солнце в день весеннего равноденствия. Отметим, что эта ось принадлежит плоскости эклиптики, т.к. в момент равноденствия Солнце находится над земным экватором и радиус-вектор Земля – Солнце принадлежит как плоскости экватора, так и плоскости эклиптики. Положение КА в геоцентрической эква-

ториальной СК кроме прямоугольных декартовых координат x, y, z может определяться сферическими координатами r, α, δ , где \bar{r} – радиус-вектор КА, δ – угол между осью Ox и проекцией радиус-вектора КА на плоскости экватора Земли (рис. 3.1). Угол « δ » называется склонением. Он изменяется в пределах $-\frac{\pi}{2} \leq \delta \leq \frac{\pi}{2}$, причем считается положительным в северном полушарии небесной сферы. Угол α называется прямым восхождением. Этот угол измеряется в часовой мере в пределах от 0^h до 24^h . (или в пределах $-\pi \leq 0 \leq \pi$). Положительные направления углов показаны на рис. 3.1.

Заметим, что $\delta \equiv \varphi'$ – геоцентрической широте.

Геоцентрическую экваториальную СК $Oxyz$ используют для анализа движения искусственных спутников земли (ИСЗ), КА, осуществляющих перелеты между орбитами ИСЗ и межпланетных КА в окрестности Земли.

С плоскостью идеальной орбиты связана перицентральная СК (перигейная) $O\xi\eta\zeta$. Ось $O\xi$ этой СК направлена в перицентр орбиты. Ориентация перигейности СК $O\xi\eta\zeta$ относительно геоцентрической инерциальной СК показана на рис. 3.2. Линия ON пересечения плоскости орбиты $\xi\eta$ с плоскостью экватора Земли xu называется линией узлов. Узлы орбиты это точки пересечения линии узлов с орбитой. Различают восходящий узел Ω и нисходящий ω . Восходящий узел КА приходит, двигаясь из области отрицательных аппликат в область положительных. Противоположный узел называется нисходящим.

Положение орбиты в пространстве определяется тремя углами Ω, i, ω (рис. 3.2) с помощью которых можно совместить перигейную СК с геоцентрической экваториальной. На этом же рисунке указаны угловые скорости соответствующих поворотов $\bar{\Omega}, \bar{i}, \bar{\omega}$. Повороты производятся в порядке следования соответствующих угловых скоростей. Угол Ω ($0 \leq \Omega \leq 2\pi$) называется долготой восходящего узла. Это угол, отсчитываемый в плоскости экватора против часовой стрелки, если смотреть с северного полюса, от направления в точку весеннего равноденствия до направления в восходящий узел орбиты.

Угол i ($0 \leq i \leq \pi$) определяет наклонение орбиты. Он отсчитывается против часовой стрелки, если смотреть со стороны восходящего узла, от плоскости экватора до плоскости орбиты. При $i = 0$ орбита называется экваториальной (плоскость орбиты совпадает с плоскостью экватора), а при $i = \frac{\pi}{2}$ – полярной (плоскость орбиты проходит через полюсы).

Угол ω ($0 \leq \omega \leq 2\pi$) называется аргументом перигея. Это угол, отсчитываемый в плоскости орбиты по направлению движения от направления в восходящий узел до направления в перигей. С учетом этого элемента в ряде задач для определения положения КА на орбите вместо истинной аномалии используется аргумент широты $u = \omega + \vartheta$.

Параметры Ω, i, ω , и введенные ранее элементы орбиты p (или «а»), e , τ (или ϑ_0) называются кеплеровскими элементами орбиты. Таким образом, имеется шесть кеплеровских элементов. Их можно разделить на три группы: 1-я группа Ω, i, ω характеризует положение орбиты КА в пространстве; 2-я группа p (или «а»), e характеризует форму орбиты; 3-я группа τ (или ϑ_0) характеризует положение КА на орбите в начальный момент времени.

Геоцентрическая эклиптическая СК (рис. 3.3).

$Ox_3y_3z_3$ отличается от геоцентрической экваториальной СК расположением осей Oy_3 и Oz_3 . Ее начало также находится в центре Земли, оси Ox_3 и Oy_3 принадлежат плоскости эклиптики. Ось Ox_3 совпадает с осью Ox геоцентрической экваториальной СК и, следовательно, направлена в точку весеннего равноденствия Υ .

Оси Oy_3 и Oz_3 повернуты относительно осей Oy и Oz на угол ε , равный углу между плоскостью эклиптики и плоскостью земного экватора. Сферическими координатами КА в геоцентрической эклиптической СК являются r, β, λ , где \bar{r} – радиус-вектор КА относительно центра Земли, $\beta \left(-\frac{\pi}{2} \leq \beta \leq \frac{\pi}{2} \right)$ – астрономическая широта, $\lambda (0 \leq \lambda \leq 2\pi)$ – астрономическая долгота. Положительные

направления углов λ и β показаны на рис. 3.3. Рассматриваемая СК используется для описания движения небесных тел например, Луны и др. в околоземном пространстве.

б) Гелиоцентрические системы координат.

Среди этой группы систем координат наибольшее распространение имеет гелиоцентрическая эклиптическая система координат $SX_3Y_3Z_3$. Ее начало, т.С, располагается в центре Солнца. Оси SX_3 и SY_3 находятся в плоскости эклиптики, причем ось SX_3 направлена в точку весеннего равноденствия Υ . Ось SY_3 получается поворотом оси SX_3 (в сторону орбитального движения Земли) против часовой стрелки (рис. 3.4).

На этом рисунке показана часть орбиты Земли (т. О – центр Земли) относительно Солнца, а также связанные с Землей геоцентрические экваториальная $Oxyz$ и эклиптическая $Ox_3y_3z_3$ системы координат. Точка, в которой находится Земля в день весеннего равноденствия обозначена буквой B , а в день осеннего равноденствия – D . Линия BC направлена в созвездие «Овен» (Υ). Оси SX_3 и $Ox_3 = Ox$ параллельны между собой.

В некоторых случаях оказывается целесообразным использование гелиоцентрической экваториальной СК $SXYZ$. Такая система отличается от гелиоцентрической эклиптической СК расположением осей SX и SZ . Гелиоцентрические системы координат используются для анализа траекторий межпланетных перелетов КА и орбит небесных тел.

3.2 Неинерциальные системы координат

При решении многих задач космического полета требуется определить положение КА относительно Земли. Для этой цели используется гринвичская или географическая система координат $Ox_{\Gamma}y_{\Gamma}z_{\Gamma}$. Центр этой СК совпадает с центром Земли, ось Oz_{Γ} направлена по оси вращения Земли к северному полюсу, а ось Ox_{Γ} – в точку пересечения нулевого (гринвичского) меридиана с экватором (рис. 3.5). Система координат $Ox_{\Gamma}y_{\Gamma}z_{\Gamma}$ вращается относительно инерциальной

СК $Oxyz$ с угловой скоростью вращения Земли ω_3 , совершая один оборот за звездные сутки. Звездными сутками в астрономии называется промежуток времени между двумя последовательными верхними кульминациями точки весеннего равноденствия γ в данном месте наблюдения. Звездные сутки короче солнечных, которые определяются как промежуток времени между двумя последовательными нижними кульминациями Солнца. За время звездных суток Земля поворачивается вокруг своей оси на 360° , в то время как за солнечные сутки – на $\sim 361^\circ$. Поэтому солнечные сутки содержат 86400^h , а звездные 86163^h .

Сферические координаты КА или земных объектов характеризуются геоцентрической (географической) долготой λ' , геоцентрической широтой $\varphi' \equiv \delta$ (δ – склонение) и длиной радиус-вектора r (рис. 3.5). Ориентация гринвичской СК по отношению к геоцентрической экваториальной определяется углом λ'_* – географической долготой проекции точки весеннего равноденствия на поверхность Земли, которая может быть найдена из равенства

$$\lambda'_* = 360^\circ - S_{\text{гр}},$$

где $S_{\text{гр}}$ – гринвичское звездное время (находится по астрономическим справочникам).

С плоскостью траектории КА связана орбитальная система координат O_2STW . Начало этой системы координат т. O_2 совмещается с центром масс КА, поэтому СК O_2STW является неинерциальной. Ось O_2S этой системы координат (рис. 3.6) направлена по радиус-вектору КА, ось O_2T направлена по трансверсали к радиус-вектору в сторону движения КА и принадлежит к плоскости орбиты. Третья ось O_2W дополняет СК O_2STW до декартовой правой СК. Плоскость O_2TW называется плоскостью местного горизонта. Относительно орбитальной СК обычно ориентируется связанная с КА система координат, которая используется при решении задач ориентации и стабилизации КА.

Связанная система координат $O_2x_1y_1z_1$ (рис. 3.7) выбирается в форме, принятой в динамике полета ЛА. Начало СК $O_2x_1y_1z_1$ – точка O_2 совмещается с центром масс КА, ось O_2x_1 совпадает с осью КА и направлена от центра масс к но-

сику. Плоскость $O_2x_1y_1$ совпадает с плоскостью симметрии КА, а для осесимметричных КА – с некоторой фиксированной относительно КА плоскостью. Во вращательном движении КА относительно центра масс СК $O_2x_1y_1z_1$ имеет три степени свободы, определяемые эйлеровыми углами ϑ (тета) – угол тангажа, ψ – угол рыскания, γ – угол крена (рис. 3.7). Угловая скорость КА относительно инерциальной СК определяется выражением:

$$\bar{\omega} = \bar{\omega}_0 + \bar{\dot{\psi}} + \bar{\dot{\vartheta}} + \bar{\dot{\gamma}}, \quad (3.1)$$

где $\bar{\omega}_0$ – угловая скорость вращения радиус-вектора \bar{r} при движении КА по орбите.

3.3 Связь между системами координат, используемыми при описании движения КА. Основные формулы сферической тригонометрии. Таблицы направляющих косинусов

В параграфах 3.1 и 3.2 введены наиболее употребительные в космической баллистике системы координат и показано их взаимное расположение. При решении задач механики космического полета необходимо иметь аналитические зависимости между углами их ориентирующими. Для этой цели служат таблицы направляющих косинусов, при построении которых, а также при решении других задач находит применение математический аппарат сферической тригонометрии. Приведем основные формулы сферической тригонометрии. Пусть имеется некоторая сфера произвольного радиуса. Задачи сферической тригонометрии связаны с решением треугольников, построенных на сфере. Под сферическим треугольником понимают часть сферы, ограниченную тремя дугами больших кругов, попарно соединяющими какие-либо три точки сферы (рис. 3.8). Под большим кругом понимается окружность, центр которой совпадает с центром сферы. Дуги, соединяющие точки на сфере, называются сторонами сферического треугольника, а точки их пересечения – вершинами. Под углом сферического треугольника понимают угол между касательными, проведенными в вершине к сторонам треугольника. Стороны и углы сферического тре-

угольника измеряются в градусной или часовой мере. Стороны и углы сферического треугольника принято обозначать соответственно строчными и прописными буквами (рис. 3.8). Будем рассматривать только эйлеровские треугольники, у которых каждая из сторон не превосходит 180° . Сумма углов такого треугольника заключается в пределах $180^\circ - 540^\circ$, а сумма его сторон не превосходит 360° .

Основные формулы [4]:

Первая группа формул:

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C - \text{теорема косинусов}, \quad (3.2)$$

$$\sin c \sin B = \sin b \sin C - \text{теорема синусов}, \quad (3.3)$$

$$\sin c \cos A = \cos a \sin b - \sin a \cos b \cos C - \text{формула пяти элементов}. \quad (3.4)$$

Остальные формулы этой группы получаются циклической перестановкой букв.

Вторая группа формул:

$$\begin{aligned} \cos C &= -\cos A \cos B + \sin A \sin B \cos c, \\ \cos a \sin C &= \cos A \sin B + \sin A \cos B \cos c. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Остальные формулы этой группы получаются циклической перестановкой букв. Если один из углов прямой, то сферический треугольник называется прямоугольным.

Для соотношений, связывающих стороны и углы прямоугольного треугольника, справедливо правило Непера. Пусть A – прямой угол. Расположим на окружности последовательно против часовой стрелки величины (рис. 3.8) b , c , $90^\circ - B$, $90^\circ - a$, $90^\circ - C$. Тогда синус любой из этих величин равен произведению тангенсов двух смежных с ней величин и в то же время он равен произведению косинусов несмежных с ней величин. При решении прямоугольных сферических треугольников удобно также пользоваться формулами вида:

$$\begin{aligned} \cos a &= \cos b \cos c, \\ \sin a \cos C &= \cos c \sin b, \\ \sin a \sin C &= \sin c. \end{aligned}$$

Обратимся к таблицам направляющих косинусов. Матрица перехода между геоцентрической экваториальной $Oxyz$ и перигейной $O\xi\eta\zeta$ СК на основании рис. 3.2 определяется следующей таблицей:

Таблица 3.1

	ξ	η	ζ
x	$\cos\omega\cos\Omega - \sin\omega\sin\Omega\cos i$	$-\sin\omega\cos\Omega - \cos\omega\sin\Omega\cos i$	$\sin i\sin\Omega$
y	$\cos\omega\sin\Omega + \sin\omega\cos\Omega\cos i$	$-\sin\omega\sin\Omega + \cos\omega\cos\Omega\cos i$	$-\sin i\cos\Omega$
z	$\sin i\sin\omega$	$\cos\omega\sin i$	$\cos i$

Заметим, что если обозначить элементы 1-го столбца соответственно буквами α, β, γ , то соответствующие направляющие косинусы 2-го столбца будут

$$\alpha' = \frac{d\alpha}{d\omega}, \quad \beta' = \frac{d\beta}{d\omega}, \quad \gamma' = \frac{d\gamma}{d\omega}.$$

Так как ось O_2S орбитальной СК лежит в той же плоскости, что и ось $O\xi$ на угловом расстоянии ϑ , то используя соотношение $u = \omega + \vartheta$, где u – аргумент широты, запишем таблицу направляющих косинусов между системами координат $Oxyz$ и O_2STW , аналогично табл. 3.1, с заменой « ω » на u . Получим табл. 3.2.

Таблица 3.2

	S	T	W
x	$\cos u\cos\Omega - \sin u\sin\Omega\cos i$	$-\sin u\cos\Omega - \cos u\sin\Omega\cos i$	$\sin i\sin\Omega$
y	$\cos u\sin\Omega + \sin u\cos\Omega\cos i$	$-\sin u\sin\Omega + \cos u\cos\Omega\cos i$	$-\sin i\cos\Omega$
z	$\sin i\sin u$	$\cos u\sin i$	$\cos i$

Используя рис. 3.4, запишем таблицу направляющих косинусов между осями геоцентрических экваториальной $Oxyz$ и эклиптической $Ox_3y_3z_3$ систем координат.

Таблица 3.3

	x_3	y_3	z_3
x	1	0	0
y	0	$\cos \varepsilon$	$-\sin \varepsilon$
z	0	$\sin \varepsilon$	$\cos \varepsilon$

Переход от геоцентрической экваториальной $Oxyz$ к гринвичской (географической) системе координат $Ox_{\Gamma}y_{\Gamma}z_{\Gamma}$ в соответствии с рис. 3.5 описывается следующей таблицей:

Таблица 3.4

	x_{Γ}	y_{Γ}	z_{Γ}
x	$\cos \lambda'_{*}$	$-\sin \lambda'_{*}$	0
y	$\sin \lambda'_{*}$	$\cos \lambda'_{*}$	0
z	0	0	1

Связанные оси $O_2x_1y_1z_1$ ориентированы по отношению к орбитальным O_2STW , с помощью следующей таблицы, которая получается с помощью рис. 3.7.

Таблица 3.5

	x_1	y_1	z_1
S	$\cos \vartheta \cos \psi$	$\sin \gamma \cos \psi - \cos \gamma \sin \vartheta \cos \psi$	$\cos \gamma \sin \psi + \sin \vartheta \cos \psi \sin \gamma$
T	$\sin \vartheta$	$\cos \gamma \cos \vartheta$	$-\sin \gamma \cos \vartheta$
W	$-\cos \vartheta \sin \psi$	$\sin \gamma \cos \psi + \cos \gamma \sin \vartheta \sin \psi$	$\cos \gamma \cos \psi - \sin \vartheta \sin \psi \sin \gamma$

Каждая из таблиц 3.1 – 3.5 представляет собой ортогональную матрицу. Используя операции перемножения и обращения матриц можно установить связь любой пары из рассмотренных выше координатных систем.

3.4 Координаты и составляющие скорости КА в инерциальной системе координат

Запишем формулы для определения координат центра масс КА в геоцентрической экваториальной СК $Oxyz$.

Используя табл. 3.1, получаем:

$$\begin{aligned}
 x &= \xi \cos(x, \xi) + \eta \cos(x, \eta) + \zeta \cos(x, \zeta), \\
 y &= \xi \cos(y, \xi) + \eta \cos(y, \eta) + \zeta \cos(y, \zeta), \\
 z &= \xi \cos(z, \xi) + \eta \cos(z, \eta) + \zeta \cos(z, \zeta),
 \end{aligned}
 \tag{3.5}$$

где $\xi = r \cos \vartheta$, $\eta = r \sin \vartheta$, $\zeta = 0$ – координаты КА в СК $O\xi\eta\zeta$.

Подставляя значения направляющих косинусов и учитывая соотношение $u = \vartheta + \omega$, найдем:

$$\begin{aligned}x &= r(\cos u \cos \Omega - \sin u \sin \Omega \cos i), \\y &= r(\cos u \sin \Omega + \sin u \cos \Omega \cos i), \\z &= r \sin u \sin i.\end{aligned}\tag{3.6}$$

Дифференцируя (3.6) и подставляя вместо r , $\dot{\vartheta}$ и \dot{r} их выражения $r = \frac{p}{1 + e \cos \vartheta}$, $\dot{\vartheta} = \frac{h}{r^2}$ и $\dot{r} = \frac{eh}{p} \sin \vartheta$ (см. Гл. 2), получим:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{h}{p} [e \sin \vartheta (\cos u \cos \Omega - \sin u \sin \Omega \cos i) - (1 + e \cos \vartheta) (\sin u \cos \Omega + \cos u \sin \Omega \cos i)], \\ \dot{y} &= \frac{h}{p} [e \sin \vartheta (\cos u \sin \Omega + \sin u \cos \Omega \cos i) - (1 + e \cos \vartheta) (-\sin u \sin \Omega + \cos u \cos \Omega \cos i)], \\ \dot{z} &= \frac{h}{p} [e \sin \vartheta \sin u \sin i + (1 + e \cos \vartheta) \cos u \sin i].\end{aligned}\tag{3.7}$$

Используя табл. 3.3 можно найти координаты КА в геоцентрической эклиптической СК $Ox_3y_3z_3$:

$$\begin{aligned}x_3 &= x; \\y_3 &= y \cos \varepsilon + z \sin \varepsilon; \\z_3 &= -y \sin \varepsilon + z \cos \varepsilon,\end{aligned}\tag{3.8}$$

где x , y , z — определяются формулами (3.6).

Кеплеровские элементы Ω, i, ω могут быть выражены через постоянные интегралов площадей Лапласа следующими формулами [17]:

$$\begin{aligned}\sin \Omega &= \frac{C_1}{d}; \quad \cos \Omega = \frac{C_2}{d}; \quad \sin i = d; \quad \cos i = \frac{C_3}{d}; \\ \sin \omega &= \frac{f_3}{fd}; \quad \cos \omega = \frac{C_1 f_2 - f_1 C_2}{fd}; \quad d = \left[1 - \left(\frac{C_3}{h} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \dots,\end{aligned}\tag{3.9}$$

где C_i , f_i ($i=1,2,3$) — проекции векторов $\bar{h}(C_1, C_2, C_3)$ и $\bar{f}(f_1, f_2, f_3)$ на оси x , y , z СК $Oxyz$.

Соотношения (3.6), (3.7) отражают зависимость координат и составляющих скорости в инерциальной системе от времени (ввиду зависимости истинной аномалии ϑ от t) и шести кеплеровских элементов: $\Omega, i, \omega, p, l, \tau$.

ГЛАВА 4 ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ОРБИТ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ

На этапе проектных исследований поиск номинальной (желаемой) траектории КА можно свести к решению двух задач:

1. Заданы начальные условия движения. Требуется определить траекторию КА. Далее можно анализировать, удовлетворяет ли эта траектория заданным конечным условиям.

2. Заданы начальное и конечное положения КА.

Требуется найти траекторию, обеспечивающую перевод КА из начального положения в конечное при выполнении некоторых условий и ограничений. Эта задача соответствует, например, поиску межпланетных траекторий перелета, когда известны взаимное положение планет старта и цели на начальный и конечный моменты времени.

Рассмотрим некоторые из этих задач.

4.1 Определение параметров орбиты по положению и скорости в начальный момент времени

Рассматривается следующая задача.

Пусть для некоторого начального момента времени t_0 заданы координаты и составляющие скорости в инерциальной СК $Oxyz$: $x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0$. Требуется определить кеплеровские элементы орбиты: Ω, i, ω, p (или a), e, τ .

Решение поставленной задачи проводим, используя формулы невозмущенного движения, приведенные в гл. 2 и 3. Рассмотрим случай эллиптической траектории.

Прежде всего, используя формулу (2.42): $V = \sqrt{\mu \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)}$, найдем большую полуось эллипса:

$$\frac{1}{a} = \frac{2}{r_0} - \frac{V_0^2}{\mu}, \quad (4.1)$$

где $r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}$, $V_0^2 = \dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2 + \dot{z}_0^2$.

Далее обратимся к формулам 2.3 – 2.5 интеграла площадей и таблице направляющих косинусов (табл. 3.1). Учитывая, что $\bar{h} = h\bar{\zeta}^0$, где $\bar{\zeta}^0$ – орт оси ζ перигейной СК $O\xi\eta\zeta$ из табл. 3.1 найдем (см. 3-ий столбец табл. 3.1):

$$\begin{aligned} C_1 &= h_x = h \sin i \sin \Omega, \\ C_2 &= h_y = -h \sin i \cos \Omega, \\ C_3 &= h_z = h \cos i, \end{aligned} \quad (4.2)$$

где $h = \sqrt{C_1^2 + C_2^2 + C_3^2} = \sqrt{p\mu}$.

Теперь применим формулы 2.3 – 2.5 к начальной точке:

$$\begin{aligned} y_0 \dot{z}_0 - z_0 \dot{y}_0 &= \sqrt{\mu p} \sin i \sin \Omega, \\ z_0 \dot{x}_0 - x_0 \dot{z}_0 &= \sqrt{\mu p} \sin i \cos \Omega, \\ x_0 \dot{y}_0 - y_0 \dot{x}_0 &= \sqrt{\mu p} \cos i. \end{aligned} \quad (4.3)$$

В системе (4.3) левые части заданы по условию задачи.

Решая систему (4.3) находим p , i , Ω :

$$\begin{aligned} -\operatorname{tg} \Omega &= \frac{y_0 \dot{z}_0 - z_0 \dot{y}_0}{z_0 \dot{x}_0 - x_0 \dot{z}_0} \rightarrow \Omega, \\ \operatorname{tgi} &= \frac{1}{\sin \Omega} \frac{y_0 \dot{z}_0 - z_0 \dot{y}_0}{x_0 \dot{y}_0 - y_0 \dot{x}_0} \rightarrow i, \\ p &= \frac{1}{\mu \cos^2 i} (x_0 \dot{y}_0 - y_0 \dot{x}_0)^2. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Из формулы $p = a(1 - e^2)$ находим эксцентриситет e :

$$e = \sqrt{1 - \frac{p}{a}}. \quad (4.5)$$

Для нахождения истинной аномалии ϑ_0 используем формулы (2.27) для радиальной компоненты скорости: $V_r = \dot{r} = \sqrt{\frac{\mu}{p}} e \sin \vartheta$. Откуда получаем

$$\sin \vartheta_0 = \frac{1}{e} \sqrt{\frac{p}{\mu}} \dot{r}_0 \rightarrow \vartheta_0, \quad (4.6)$$

где $\dot{r}_0 = \frac{1}{r_0} (x_0 \dot{x}_0 + y_0 \dot{y}_0 + z_0 \dot{z}_0)$.

Для определения аргумента перицентра ω : $\omega = u_0 - \vartheta_0$ при известном из (4.6) ϑ_0 необходимо найти аргумент широты в начальный момент времени: u_0 .

Из 3-го уравнения системы (3.6): $z = r \sin u \sin i$ находим

$$\sin u_0 = \frac{z_0}{r_0 \sin i} \rightarrow u_0. \quad (4.7)$$

Для нахождения времени τ прохождения КА через перицентр определяем вначале эксцентрическую аномалию E_0 :

$$\operatorname{tg} \frac{E_0}{2} = \operatorname{tg} \frac{\vartheta_0}{2} \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \rightarrow E_0. \quad (4.8)$$

Затем находим среднюю аномалию эпохи: $M_0 = E_0 - e \sin E_0$, где

$M_0 = n(t_0 - \tau)$; $n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}$. Тогда

$$\tau = t_0 - \frac{M_0}{n}. \quad (4.9)$$

Таким образом, поставленная задача решена.

4.2 Определение параметров орбиты по двум фиксированным положениям и времени перелета методом Ламберта – Эйлера

Предложенный во второй половине XVIII в. французским ученым Ж. Ламбертом метод был направлен на определение орбиты небесного тела по двум его положениям. В настоящее время метод Ламберта широко используется для определения орбит КА, если в качестве исходных данных рассматриваются положения КА в начале и в конце полета, задаваемые радиус-векторами $\overline{r_1}$, $\overline{r_2}$ и временем перелета Δt . Такие данные часто задаются, например, при расчете межпланетных траекторий КА. Система элементов $\overline{r_1}$, $\overline{r_2}$ и Δt позволяет полностью определить форму и размеры орбиты, положение ее плоскости в пространстве и положение орбиты в этой плоскости. Однако получение кеплеровских элементов орбиты в этом случае связано с решением трансцендентных уравнений.

Формула Ламберта основывается на аналитической зависимости для площади сектора, образованного радиус-векторами $\overline{r_1}$ и $\overline{r_2}$. Из формулы (2.8):

$h = 2 \frac{dA}{dt}$ получаем $2A = S_{1,2} = h\Delta t$, где $\Delta t = t_2 - t_1$, $S_{1,2} = 2A$ – удвоенная площадь сектора, образованного векторами \vec{r}_1 и \vec{r}_2 . Отсюда, учитывая, что $h = \sqrt{p\mu}$, можем записать:

$$\Delta t = \frac{S_{1,2}}{\sqrt{p\mu}} = \frac{a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\mu}} \frac{S_{1,2}}{a\sqrt{ap}},$$

причем для эллипса:

$$S_{1,2} = a^2 \sqrt{1 - e^2} [(\varepsilon - \sin \varepsilon) \pm (\delta - \sin \delta)], \quad (4.10)$$

где a , e – большая полуось и эксцентриситет орбиты;

ε и δ – вспомогательные углы, определяемые соотношениями:

$$\sin^2 \frac{\varepsilon}{2} = \frac{r_1 + r_2 + S}{4a}, \quad \sin^2 \frac{\delta}{2} = \frac{r_1 + r_2 - S}{4a}, \quad (4.11)$$

где S – длина хорды, соединяющей концы радиус-векторов \vec{r}_1 и \vec{r}_2 .

Длина хорды S в зависимости от \vec{r}_1 и \vec{r}_2 , а также угла перелета $\Phi = \vartheta_2 - \vartheta_1$ определяется по формуле:

$$S = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos \Phi}. \quad (4.12)$$

Значения углов $\frac{\varepsilon}{2}$ и $\frac{\delta}{2}$ зависят от взаимного расположения векторов \vec{r}_1 , \vec{r}_2

и фокусов F_1 и F_2 эллиптической орбиты. В прикладных исследованиях обычно рассматриваются случаи, когда сегмент не содержит второго фокуса F_2 (рис. 4.1). В этом случае в формуле (4.10) при $\Phi > 180^\circ$ (случай “а”) берется знак “+”, а при $\Phi < 180^\circ$ (случай “б”) – знак “–”.

Величины ε и δ однозначно определяются формулами (4.11). При этом $0 < \varepsilon < \pi$, $0 < \delta < \pi$.

Используя (4.10), легко получить формулу Ламберта для эллипса.

$$\Delta t_{\text{элл}} = \frac{a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\mu}} [(\varepsilon - \sin \varepsilon) \pm (\delta - \sin \delta)]. \quad (4.13)$$

Для гиперболической орбиты формула Ламберта имеет вид:

$$\Delta t_{\text{гип}} = \sqrt{\frac{|a|^3}{\mu}} [(\text{sh} \alpha - \alpha) - (\text{sh} \beta - \beta) \text{sign}(\sin \Phi)], \quad (4.14)$$

$$\text{где } \operatorname{sh} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{r_1 + r_2 + S}{4|a|}}, \quad \operatorname{sh} \beta = \sqrt{\frac{r_1 + r_2 - S}{4|a|}}, \quad \text{а } \operatorname{sign}(\sin \hat{O}) = \begin{cases} +1 & \text{їдє } \sin \hat{O} > 0, \\ 0 & \text{їдє } \sin \hat{O} = 0, \\ -1 & \text{їдє } \sin \hat{O} < 0. \end{cases}$$

Для параболической орбиты время перелета выражается уравнением Эйлера [17]:

$$\Delta t_{\text{пар}} = \frac{1}{6\sqrt{\mu}} \left[(r_1 + r_2 + S)^{\frac{3}{2}} + (r_1 + r_2 - S)^{\frac{3}{2}} \operatorname{sign}(\sin \Phi) \right]. \quad (4.15)$$

Таким образом, для того чтобы найти траекторию перелета между начальным \bar{r}_1 и конечным \bar{r}_2 радиус-векторами за заданное время $\Delta t = t_2 - t_1$ формулу Ламберта следует рассматривать как уравнение относительно большой полуоси “ a ”. При этом сначала следует определить тип орбиты перелета. Очевидно, при одних и тех же граничных условиях \bar{r}_1 и \bar{r}_2 имеет место неравенство: $\Delta t_{\text{гип}} < \Delta t_{\text{пар}} < \Delta t_{\text{элл}}$. Поэтому для определения типа орбиты достаточно по формуле (4.15) вычислить $\Delta t_{\text{пар}}$. Если заданное Δt удовлетворяет неравенству $\Delta t < \Delta t_{\text{пар}}$, то перелет может быть реализован только по эллиптической орбите. Таким образом, если $\Delta t > \Delta t_{\text{пар}}$, уравнение (4.13) следует рассматривать как уравнение относительно большой полуоси “ a ”, причем эта переменная входит в (4.13) как непосредственно, так и через $\varepsilon = \varepsilon(a)$ и $\delta = \delta(a)$. В результате относительно “ a ” имеем трансцендентное уравнение, для решения которого используются современные вычислительные итерационные процедуры. Эти процедуры часто основываются на стандартном обеспечении ЭВМ. В первом приближении можно при итерационном процессе положить $a = a^{(1)} = \frac{1}{2}(r_1 + r_2)$.

Определение большой полуоси “ a ” является первым этапом расчета орбиты методом Ламберта. Далее определяем фокальный параметр “ p ”, эксцентриситет “ e ” и истинную аномалию в начальной точке \mathcal{G}_1 , используя полярное уравнение орбиты:

$$r_1 = \frac{p}{1 + e \cos \mathcal{G}_1};$$

$$r_2 = \frac{p}{1 + e \cos(\mathcal{G}_1 + \Phi)};$$

$$p = a(1 - e^2) \longrightarrow p, e, \vartheta_1. \quad (4.16)$$

Для решения задачи определения остальных элементов орбиты достаточно найти вектор скорости в начальной точке орбиты \bar{V}_1 , т.е. свести эту задачу к ранее решенной задаче определения орбиты по начальным значениям \bar{r}_1 и \bar{V}_1 . Для скорости \bar{V}_1 используем выражение (2.39)

$$\bar{V}_1 = \frac{\sqrt{\mu p}}{r_1 r_2 \sin \Phi} \left\{ \bar{r}_2 - \left[1 - \frac{r_2}{p} (1 - \cos \Phi) \right] \bar{r}_1 \right\},$$

откуда зная $\bar{r}_1(x_1, y_1, z_1)$, $\bar{r}_2(x_2, y_2, z_2)$ найдем $\bar{V}_1(\dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1)$.

4.3 Круговые орбиты

На космический аппарат действуют поля тяготения различных тел солнечной системы, и все они влияют на характер орбиты. Возникает вопрос: когда движение КА можно рассматривать в рамках ограниченной задачи двух тел. Для решения этой задачи наибольшее распространение получило понятие сферы действия. Рассмотрим случай, когда на движение КА оказывают влияние гравитационные поля Земли (малого тела) и Солнца (большого тела). Поля тяготения малого и большого небесных тел не только действуют на КА, но и друг на друга (рис. 4.2). На рис. 4.2: m – масса КА, m_3 – масса Земли, m_c – масса Солнца. Остальные обозначения ясны из рисунка. На основании закона всемирного тяготения можно записать следующие соотношения:

$$\bar{a}_c = \frac{k^2 m_c}{r_{kc}^3} \bar{r}_{kc} \text{ – гравитационное ускорение, действующее на КА со сторо-}$$

ны большого тела (Солнца);

$$\bar{a}_m = -\frac{k^2 m_3}{r^3} \bar{r} \text{ – гравитационное ускорение, действующее на КА со сторо-}$$

ны малого тела (Земли);

$$\bar{a}_{cm} = \frac{k^2 m_c}{r_{zc}^3} \bar{r}_{zc} \text{ – гравитационное ускорение, действующее со стороны}$$

большого тела на малое;

$$\bar{a}_{м6} = -\frac{k^2 m_3}{r_{3C}^3} \bar{r}_{3C} - \text{гравитационное ускорение, действующее со стороны ма-}$$

лого тела на большое.

Если рассматривать движение КА в системе координат, связанной с малым телом, то траектория его невозмущенного движения определяется ускорением \bar{a}_M .

Большое тело будет оказывать возмущающее действие $\bar{\Phi}_{б6} = \bar{a}_M - \bar{a}_{м6}$. Степень возмущающего воздействия большого тела на движение КА относительно малого тела будет зависеть от отношения: $\frac{|\bar{\Phi}_{б6}|}{|\bar{a}_M|} = \frac{|\bar{a}_6 - \bar{a}_{м6}|}{|\bar{a}_M|}$.

Если рассматривать движение КА в СК, связанной с большим небесным телом, то возмущающее воздействие будет оказывать малое тело. При этом возмущающее ускорение будет равно $\bar{\Phi}_{вм} = \bar{a}_M - \bar{a}_{м6}$. Соответствующая степень воздействия определяется аналогично предыдущему случаю как $\frac{|\bar{\Phi}_{вм}|}{|\bar{a}_6|} = \frac{|\bar{a}_M - \bar{a}_{м6}|}{|\bar{a}_6|}$.

Сферой действия малого небесного тела по отношению к большому небесному телу называют границу области, в пределах которой степень возмущающего воздействия большого тела на движение КА в СК, связанной с малым телом меньше, чем степень возмущающего воздействия малого тела на движение КА в СК, связанной с большим телом. Уравнение сферы действия определяется равенством:

$$\frac{|\bar{a}_6 - \bar{a}_{м6}|}{|\bar{a}_M|} = \frac{|\bar{a}_M - \bar{a}_{м6}|}{|\bar{a}_6|}. \quad (4.17)$$

Решение этого уравнения позволяет найти радиус сферы действия R_* :

$$R_* = L \left(\frac{m_M}{m_6} \right)^{2/5}, \quad (4.18)$$

где $L = |\bar{r}_{3C}|$.

Для Земли радиус сферы действия $R_*=0,93$ млн. км, для Венеры $R_*=0,62$ млн. км, для Марса $R_*=0,58$ млн. км, для Луны $R_*=0,066$ млн. км.

ГЛАВА 5 ВОЗМУЩЕННОЕ ДВИЖЕНИЕ

Описание и изучение орбит КА на основе решения ограниченной задачи двух тел является лишь первым этапом при определении реальных движений тел любой природы. В реальном полете на КА, помимо силы тяготения Земли (при движении в сфере действия Земли) действует ряд других сил, которые нужно учитывать как возмущающие факторы. К этим возмущающим факторам относятся: гравитационные силы, связанные с нецентральностью гравитационного поля Земли; силы притяжения Луны, Солнца, других планет Солнечной системы; аэродинамические силы; давление солнечного света; силы от действия электромагнитного поля Земли и другие факторы.

Все отмеченные факторы приводят к отклонению траектории КА от кеплеровской (идеальной) орбиты. Правда, эти отклонения невелики ввиду относительной малости возмущающих сил. Движение КА с учетом возмущающих факторов будем называть возмущенным. Если рассматривать небольшие участки траектории КА, то возмущения орбиты, как правило, малы и их можно не учитывать. Однако ряд возмущений имеют тенденцию накапливаться во время полета, что постепенно приводит к значительному отклонению элементов орбиты от их первоначальных значений. Такие возмущения орбиты принято называть вековыми возмущениями орбиты. Вековые возмущения свойственны эллиптическим орбитам, так как полет по ним может продолжаться в течение длительного времени. Гиперболические орбиты возмущаются незначительно, если не считать участков полета, находящихся на больших удалениях от Земли, когда начинает сказываться притяжение со стороны Солнца.

5.1 Общая характеристика возмущений и возмущенного движения

Для описания движения КА в задаче двух тел использовалась система дифференциальных уравнений (2.1) или (2.2). Гравитационное ускорение, входящее в правую часть (2.1) будем называть основным ускорением при исследовании возмущенного движения КА и обозначим $\bar{a} = -\frac{\mu}{r^3} \bar{r}$. Таким образом, не-

возмущенное движение описывается векторным дифференциальным уравнением:

$$\frac{d^2 \bar{r}}{dt^2} = \bar{a} . \quad (5.1)$$

В возмущенном движении учитываются эффекты от возмущающих факторов. Если обозначить \bar{q} – вектор суммарного возмущающего ускорения, то возмущенное движение описывается системой:

$$\frac{d^2 \bar{r}}{dt^2} = \bar{a} + \bar{q} , \quad (5.2)$$

$$\bar{r} = \bar{r}(x, y, z); \bar{a} = a(a_x, a_y, a_z); q = q(q_x, q_y, q_z) .$$

В настоящем разделе исследуются такие траектории КА, на которых возмущающее ускорение существенно меньше основного: $|\bar{q}| \ll |\bar{a}|$. При этом решение задачи двух тел (невозмущенное движение) может рассматриваться в качестве первого приближения для возмущенного движения. Для создания полной модели возмущенного движения обратимся к описанию возмущающих ускорений, входящих в \bar{q} .

5.1.1 Нецентральность гравитационного поля Земли

При решении ограниченной задачи двух тел Земля представляется шаром со сферическим распределением плотности. В действительности (см. гл. 1) Земля представляет собой неоднородное тело вращения, имеющее сложную конфигурацию поверхности. Потенциальная функция поля тяготения такого тела приближенно описывается формулой (1.2). Если рассматривать фигуру Земли как сжатый сфероид, что оказывается достаточным для решения большинства практических задач, то можно использовать формулу (1.3):

$$U = \frac{\mu_3}{r} - \frac{\mu_3 \delta}{3r^3} (3 \sin^2 \varphi' - 1) .$$

Используя формулы сферической тригонометрии (3.2 – 3.5) для геоцентрической широты φ' получаем выражение:

$$\sin \varphi' = \sin u \sin i ,$$

где u – аргумент широты, а i – наклонение орбиты. Обозначая $\mu_3 \delta = \varepsilon$, получаем для потенциала от эффекта сжатия земного сфероида следующее выражение:

$$U_{\text{сж}} = -\frac{\varepsilon}{r^3} \left(\sin^2 u \sin^2 i - \frac{1}{3} \right). \quad (5.3)$$

Для того чтобы найти проекцию гравитационного ускорения от сжатия земного эллипсоида на какое-либо направление достаточно найти производную от потенциала (5.3) по этому направлению. Нас в дальнейшем будут интересовать направления, задаваемые орбитальной системой координат S, T, W . Поэтому находим:

$$\begin{aligned} q_S \equiv S_1 &= \frac{\partial U_{\text{нэ}}}{\partial r} = \frac{\varepsilon}{r^4} (3 \sin^2 i \sin^2 u - 1), \\ q_T \equiv T_1 &= \frac{1}{r} \frac{\partial U_{\text{нэ}}}{\partial u} = -\frac{\varepsilon}{r^4} \sin^2 i \sin 2u, \\ q_W \equiv W_1 &= \frac{1}{r \sin u} \frac{\partial U_{\text{нэ}}}{\partial i} = -\frac{\varepsilon}{r^4} \sin 2i \sin u. \end{aligned} \quad (5.4)$$

При необходимости можно найти проекции возмущающего ускорения на другие направления, воспользовавшись связью между соответствующими системами координат (таблицами направляющих косинусов).

5.1.2 Возмущения, вызванные сопротивлением атмосферы Земли

На высотах более 150 – 200 км атмосфера Земли сильно разрежена и поэтому оказывает малое сопротивление движущемуся КА. Но поскольку сила сопротивления является постоянно действующей силой, то она может значительно изменить элементы орбиты.

Аэродинамические силы определяются величиной и ориентацией вектора воздушной скорости КА: $\bar{V}_в = \bar{V} - \bar{V}_{\text{ат}}$, где \bar{V} – скорость движения КА (путевая скорость), $\bar{V}_{\text{ат}}$ – скорость движения атмосферы за счет вращения ее вместе с Землей. Скорость $\bar{V}_{\text{ат}}$ направлена вдоль параллели на восток и определяется формулой:

$$V_{\text{ат}} = \omega_3 r \cos \varphi', \quad (5.5)$$

где ω_3 – угловая скорость вращения Земли около своей оси, r – радиус-вектор КА относительно центра Земли, φ' – геоцентрическая широта точки орбиты, в которой находится КА.

Выражение для вектора возмущающего аэродинамического ускорения имеет вид:

$$\bar{q}_a = \frac{\bar{X}}{m} = -\frac{C_x \rho S_M V_B^2}{2m} \frac{\bar{V}_B}{V_B}, \quad (5.6)$$

где C_x – коэффициент лобового сопротивления, S_M – площадь миделевого сечения, m – масса КА, ρ – плотность атмосферы.

Для нахождения проекций вектора \bar{q}_a нужно знать проекции вектора воздушной скорости \bar{V}_B на соответствующие оси СК. В первом приближении, учитывая, что влияние вращения атмосферы не превышает 5% влияния полного сопротивления на движение КА, полагают $V_{at} \approx 0$. Тогда $\bar{V}_B \approx \bar{V}$. Запишем выражения для проекций вектора \bar{q}_a на оси орбитальной СК STW . Обозначим

$q_a = \frac{1}{2m} C_x \rho S_M V^2$. Тогда (рис. 5.1):

$$q_{aT} \equiv T_a = -q_a \cos \theta_V = -q_a \frac{V_T}{V}, \quad (5.7)$$

$$q_{aS} \equiv S_a = -q_a \sin \theta_V = -q_a \frac{V_r}{V}. \quad (5.8)$$

Принимая во внимание формулы (2.27) – (2.29) для V_r, V_T, V получаем:

$$\begin{aligned} q_{aT} \equiv T_a &= -q_a \frac{1 + e \cos \vartheta}{\sqrt{1 + 2e \cos \vartheta + e^2}}, \\ q_{aS} \equiv S_a &= \frac{-q_a e \sin \vartheta}{\sqrt{1 + 2e \cos \vartheta + e^2}}. \end{aligned} \quad (5.8')$$

В рассматриваемом приближении $q_{aW} \equiv W_a \approx 0$. Если обозначить $b = \frac{C_x S_M}{m}$ –

баллистический коэффициент, то получим:

$$T_a \approx -\frac{1}{2} b \rho V V_T, \quad S_a \approx -\frac{1}{2} b \rho V V_r, \quad W_a \approx -\frac{1}{2} b \rho V \omega_\zeta r \sin i \cos u, \quad (5.9)$$

где

$$b' = b \left(1 - \frac{\omega_3 r_{\Pi}}{V_{T\Pi}} \cos i \right); \bar{b} = b \left(1 - \frac{\omega_3 r_{\Pi}}{V_{T\Pi}} \cos i \right)^2,$$

причем r_{Π} – радиус перигея, $V_{T\Pi}$ – значение скорости в перигее ($V_{\dot{\alpha}} = V_{\dot{\alpha}}; V_{r_i} = 0$).

Как видно из формул, баллистические коэффициенты b' и \bar{b} отличаются множителем $\left(1 - \frac{\omega_3 r_{\Pi}}{V_{T\Pi}} \right)$. Это различие не является существенным, так как $S_a \ll T_a$. Что касается компоненты W_a , то в отличие от T_a боковая составляющая W_a имеет периодический характер (зависит от $\cos u$). Ее влияние на движение КА незначительно. Поэтому обычно принимают $W_a \approx 0$. Для проведения расчетов в формулы (5.9) нужно подставить V_r, V_T, V из формул (2.27) – (2.29).

5.1.3 Возмущающее действие на КА со стороны Луны и Солнца. Ограниченная задача трех тел и ее прикладные аспекты

Рассмотрим возможный подход к анализу гравитационного возмущения на движение КА со стороны Луны, Солнца или любого другого небесного тела. Частично эта задача рассматривалась при выводе формулы для радиуса сферы действия (см. параграф 4.3). Пусть рассматривается движение КА с малой (негравитирующей) массой m в системе гравитирующих масс $M_1 \gg m$ и $M_2 \gg m$. О соотношении масс M_1 и M_2 никаких предположений не делается. Такая задача получила название ограниченной задачи трех тел. Решение этой задачи потребовалось в связи с реализацией в 60-е годы лунной программы и полетов Земля – Луна – Земля. В качестве рассматриваемых трех тел принимались КА, Земля, Луна. Эта задача получила специальное название – ограниченная задача трех тел, впервые ее сформулировал Л. Эйлер в 1772 г. Дальнейшие упрощения данной задачи позволили получить интересные качественные результаты. Делаются два допущения:

1) притягивающее тело с меньшей массой движется относительно тела с большой массой по круговой орбите;

2) движение всех трех тел происходит в одной плоскости. Такая упрощенная задача называется ограниченной круговой задачей трех тел. Массу каждого из тел считаем сосредоточенной в его центре масс, что позволяет рассматривать движение материальных точек. При этом материальные точки, соответствующие Луне и Земле, будут двигаться по известным кеплеровским орбитам вокруг общего центра тяжести (барицентра) с равными периодами, определяемыми формулой $T = 2\pi \sqrt{\frac{\hat{a}^3}{\hat{\mu}}}$, но величина $\hat{\mu}$ в этой формуле имеет вид $\hat{\mu} = k^2(M_1 + M_2)$, а под \hat{a} — понимается сумма полуосей обеих орбит. Барицентр располагается на линии, соединяющей центры обоих тел, на расстоянии 4670 км от центра Земли.

Для оценки возмущающего влияния массы M_2 (Луны) обратимся к следующей схеме (рис. 5.2). На этом рисунке O_uXYZ — некоторая инерциальная СК. Остальные обозначения ясны из приведенного выше текста. Описание движения массы m (КА) относительно гравитирующей массы M_1 (Земли) сводится к составлению дифференциального уравнения относительно радиус-вектора:

$$\bar{\rho}_1 = \bar{R} - \bar{R}_1. \quad (5.10)$$

Дифференцируя дважды левую и правую часть (5.10), получаем:

$$\frac{d^2 \rho_1}{dt^2} = \frac{d^2 \bar{R}}{dt^2} - \frac{d^2 R_1}{dt^2}. \quad (5.11)$$

Ускорение КА в инерционном пространстве: $\frac{d^2 \bar{R}}{dt^2}$ с учетом действия на КА сил притяжения масс M_1 и M_2 определяется выражением (5.12):

$$\frac{d^2 \bar{R}}{dt^2} = -\frac{\mu_1}{\rho_1^3} \bar{\rho}_1 - \frac{\mu_2}{\rho_2^3} \bar{\rho}_2, \quad (5.12)$$

где $\mu_1 = k^2 M_1$, $\mu_2 = k^2 M_2$ — гравитационные параметры тел соответственно с массами M_1 и M_2 . Ускорение гравитирующей массы M_1 в инерционном пространстве под действием гравитирующей массы M_2 :

$$\frac{d^2 \bar{R}_1}{dt^2} = -\frac{\mu_2}{R_{12}^3} R_{12}. \quad (5.13)$$

Используя (5.11) – (5.13), получим:

$$\frac{d^2 \bar{\rho}_1}{dt^2} = -\frac{\mu_1}{\rho_1^3} \bar{\rho}_1 - \frac{\mu_2}{\rho_2^3} \bar{\rho}_2 - \frac{\mu_2}{R_{12}^3} R_{12}. \quad (5.14)$$

Первое слагаемое в правой части формулы (5.14) определяет ускорение КА в задаче двух тел (M_1, m) . Это ускорение было названо выше основным и имело обозначение \bar{a} . В данном случае обозначим его буквой \bar{a}_1 . Индекс “1” подчеркивает, что основное ускорение рассматривается в задаче двух тел (M_1, m) , а не тел (M_2, m) . Два последних слагаемых в (5.14) определяют возмущающее ускорение \bar{q}_1 в задаче двух тел (M_1, m) . Это возмущающее ускорение можно рассматривать как разность двух ускорений:

$$\bar{q}_1 = \bar{b}_1 - \bar{c}_1, \quad (5.15)$$

где $\bar{b}_1 = -\frac{\mu_2}{\rho^3} \bar{\rho}_2$ – ускорение, которое имеет КА в ограниченной задаче двух тел (M_2, m) ; $\bar{c}_1 = -\frac{\mu_2}{R_{12}^3} \bar{R}_{12}$ – ускорение, которое имеет масса M_1 в ограниченной задаче двух тел (M_2, M_1) , если массу M_1 считать негравитирующей. Таким образом, возмущающее ускорение, действующее на КА, совершающего полет в окрестности Земли от Луны, Солнца или любого другого небесного тела равно разности влияний на КА и Землю со стороны возмущающего тела. С учетом сделанных обозначений уравнение (5.14) перепишем в виде:

$$\frac{d^2 \bar{\rho}_1}{dt^2} = \bar{a}_1 + \bar{q}_1. \quad (5.16)$$

Воспользуемся выведенным выражением для определения возмущающего ускорения, действующего на КА со стороны Луны. Примем допущения в рамках ограниченной круговой задачи трех тел. Дополнительно предположим, что орбита КА с точностью до возмущений круговая. Оценим возмущающее ускорение Луны в нескольких точках орбиты КА (спутник Земли). Рассматриваем точки A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 (рис. 5.3). Ускорение \bar{c} во всех точках одинаково по величине и направлению. Вектор \bar{b} зависит от положения КА на орбите. Вычитание векторов проиллюстрировано в нижней части рис. 5.3. Наибольшая вели-

чина возмущающего ускорения \bar{q}_1 достигается в точке A_1 , так как для этой точки модуль вектора $\bar{\rho}_2$ наименьший, а вектора \bar{b} и \bar{c} в этой точке коллинеарны. Таким образом, получаем:

$$q_{1A_1} = \mu_{\text{Л}} \left[\frac{1}{(R_{12} - \rho_1)^2} - \frac{1}{R_{12}^2} \right],$$

где R_{12} – расстояние Земля – Луна ($R_{12\text{ср}} \approx 384400 \text{ км}$), $\rho_1 = r_{\text{ИСЗ}}$ – радиус круговой орбиты ИСЗ, $\mu_{\text{Л}} = k^2 M_{\text{Л}} = 4890 \frac{\text{км}^3}{\text{сек}^2}$, ($M_{\text{Л}} \equiv M_2$), $\mu_{\text{Л}}$ – гравитационный параметр Луны.

Некоторые числовые оценки величины возмущающего ускорения Луны на движение КА представлены в табл. 5.1.

Таблица 5.1

$\rho_1 = r_{\text{ИСЗ}} [\text{км}]$	6600	7000	8000	100000
$q_{1A_1} [\text{см/сек}^2]$	$1,17 \cdot 10^{-4}$	$1,24 \cdot 10^{-4}$	$1,42 \cdot 10^{-4}$	$2,75 \cdot 10^{-3}$

Анализ данных табл. 5.1 показывает, что величина возмущающего ускорения от Луны для низких спутников мала. Она существенно меньше ускорения от нецентральности гравитационного поля Земли и сопротивления атмосферы Земли.

Оценим влияние притяжения Солнца на движение КА в рамках ограниченной задачи трех тел. Эту оценку будем производить так же как и ранее по формуле (5.15). Но при этом нужно учитывать, что, так как Солнце находится далеко от Земли (см. табл. 1.1), радиус-вектор Земля – Солнце (\bar{R}_{12}) и радиус-вектор Солнце – КА ($\bar{\rho}_2$) направлены по одной прямой в разные стороны. При этом слагаемые ускорения \bar{b} и \bar{c} в (5.15) будут коллинеарны во всех точках орбиты КА (ИСЗ). На рис. 5.4 показана эпюра возмущающего солнечного ускорения на орбите ИСЗ в случае, когда Солнце находится в плоскости орбиты ИСЗ. Максимальное возмущающее ускорение действует на ИСЗ, находящийся в точ-

ке A_1 . Вектор этого ускорения направлен от Земли радиально вверх. В точках A_2 и A_4 возмущающее ускорение равно нулю. В точке A_3 возмущающее ускорение несколько меньше ускорения в точке A_1 и направлено так же радиально. Если плоскость орбиты ИСЗ перпендикулярна направлению Земля – Солнце, то из (5.15) следует, что возмущающее солнечное ускорение будет равно нулю во всех точках орбиты ИСЗ. Численные оценки величин возмущающих солнечных ускорений показывают, что они меньше лунных примерно в 2,2 раза. Так для орбиты ИСЗ радиусом 100000 км, для случая, когда Солнце находится в плоскости орбиты КА, возмущающее ускорение в точке A_1 (рис. 5.4) равно $0,83 \cdot 10^{-3} \text{ см/сек}^2$.

Рассмотрим один прикладной аспект ограниченной круговой задачи трех тел.

Для этого запишем уравнения плоского движения КА во вращающейся (неинерциальной) СК $Sxyz$ с началом в барицентре т. “С” системы тел M_1 и M_2 (рис. 5.5). Оси системы координат выберем следующим образом: ось Sx направлена по прямой, соединяющей M_1 и M_2 в сторону M_2 . Ось Sz перпендикулярна плоскости движения M_1 и M_2 и образует правую СК $Sxyz$. Введенная СК имеет угловую скорость $\bar{\omega}$ относительно оси Oz . Эта угловая скорость постоянна и равна угловой скорости вращения точки M_2 (Луны) по отношению к точке M_1 (Земле). (Луна вращается около Земли по круговой орбите.) Во введенной СК уравнения движения КА имеют вид:

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= 2\omega\dot{y} + \omega^2 x + \frac{\mu_1}{\rho_1^3}(x_1 - x) + \frac{\mu_2}{\rho_2^3}(x_2 - x), \\ \ddot{y} &= -2\omega\dot{x} + \omega^2 y - \frac{\mu_1}{\rho_1^3}y - \frac{\mu_2}{\rho_2^3}y, \\ \ddot{z} &= 0,\end{aligned}\tag{5.17}$$

где слагаемые с \dot{x} и \dot{y} являются компонентами ускорения Кориолиса, слагаемые с ω^2 – компонентами переносного ускорения, а $x_1 = -R_1$, $x_2 = R_2$.

Введем в рассмотрение функцию следующего вида:

$$U = \frac{1}{2}\omega^2(x^2 + y^2) + \frac{\mu_1}{\rho_1} + \frac{\mu_2}{\rho_2}.\tag{5.18}$$

Тогда система (5.17) с помощью (5.18) запишется в виде:

$$\ddot{x} = 2\omega\dot{y} + \frac{\partial U}{\partial x}; \ddot{y} = -2\omega\dot{x} + \frac{\partial U}{\partial y}. \quad (5.19)$$

Уравнения (5.19) имеют первый интеграл, называемый интегралом Якоби. Этот интеграл легко получить: умножим первое уравнение системы (5.19) на $2\dot{x}$, второе – на $2\dot{y}$ и произведем почленное сложение произведений. Получаем:

$$2(\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y}) = 2\left(\frac{\partial U}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial U}{\partial y}\dot{y}\right) \text{ или } \frac{d}{dt}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = 2\frac{dU}{dt}.$$

Учитывая соотношение: $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = V^2$ – квадрат скорости КА во введенной СК (относительной скорости), окончательно получаем

$$V^2 - 2U = -C, \quad (5.20)$$

где C – константа интегрирования. Константу “ C ” можно определить по начальным условиям движения: начальной относительной скорости V КА и его начальному положению. Линия $2U(x, y) - C = 0$, определяющая область возможных положений КА, где он может находиться при $V=0$, называется линией Хилла. Она отделяет часть пространства, куда КА, находящийся в поле тяготения двух гравитирующих центров, заведомо попасть не может. Действительно при движении КА имеет место неравенство $V^2 \geq 0$, а значит и $V^2 = 2U - C \geq 0$. В области, где $2U - C < 0$ движение КА принципиально невозможно без увеличения энергии аппарата, например, с помощью включения двигателя. Точки вращающейся плоскости S_{xy} , в которых КА будет находиться неограниченно долго, если его начальная относительная скорость равна нулю, называются точками либрации или точками относительного равновесия. Для ограниченной задачи трех тел существует пять точек либрации. Три из них L_1, L_2, L_3 расположены на одной прямой, соединяющей гравитирующие тела M_1 и M_2 (они называются коллинеарными). Две другие L_4, L_5 , так называемые треугольные точки либрации, расположены в вершинах двух правильных треугольников, построенных на отрезке, соединяющем гравитирующие тела. На рис. 5.6 нанесены точки либрации. Для системы Земля – Луна в предположении о движении Луны (точ-

ка A_2) по окружности с радиусом 384400 км точки либрации характеризуются следующими расстояниями:

$$\begin{aligned} |A_2 L_1| &= 58000 \text{ км} ; & |A_2 L_2| &= 65000 \text{ км} ; & |A_1 L_3| &= 380000 \text{ км} ; \\ |A_1 L_{41}| &= |A_2 L_4| = |A_1 L_5| = |A_2 L_5| &= 384400 \text{ км}. \end{aligned}$$

Точки либрации являются частными решениями уравнений ограниченной круговой задачи трех тел (5.19). Можно показать, что треугольные точки либрации при достаточно малых отношениях масс $K = \frac{M_2}{M_1 + M_2}$, ($K < 0,038$), являются устойчивыми решениями системы (5.19) (или (5.17)) (для системы Земля – Луна $K = 1/82,35 < 0,038$). Это означает, что если КА в начальный момент расположен достаточно близко к точке либрации, имеет достаточно малую относительную скорость, то с течением времени он останется внутри малой окрестности точки либрации. Коллинеарные точки либрации являются неустойчивыми, т.е. при любом сколь угодно малом отклонении КА от точки либрации, КА удалится от этих точек на значительное расстояние. Результаты анализа устойчивости треугольных точек либрации подтверждаются астрономическими наблюдениями. Вблизи этих точек обнаружены космические облака (облака Корделевского). Возможно, что в дальнейшем в этих точках будут размещены какие-либо искусственные космические тела.

5.1.4 Возмущения, вызванные давлением солнечных лучей

Величина возмущающего ускорения $q_{сд}$ от светового давления на КА определяется по формуле [6]:

$$q_{сд} = K q_{св} \frac{S_m}{m}, \quad (5.21)$$

где m – масса КА, S_m – площадь миделевого сечения, $q_{св}$ – сила солнечного давления, K – коэффициент, зависящий от характера отражения света и распределения теплового излучения по поверхности КА ($K = 1 \div 1.44$). Сила солнечного давления определяется соотношением:

$$q_{св} = q_0 \left(\frac{r_l}{r} \right)^2, \quad (5.22)$$

где q_0 – световое давление на удалении земной орбиты от Солнца, $q_0 = 4.64 \cdot 10^{-6} \text{ н/м}^2$; r_l – средний радиус орбиты Земли; r – расстояние КА от Солнца.

Вектор $\bar{q}_{св}$ направлен по световому потоку. Точный расчет сил солнечного давления провести весьма трудно, так как давление существенно зависит от состояния поверхности тела. Солнечное давление имеет смысл учитывать для орбит с высотой перигея выше 400 – 450 км, т.к. уже на высоте 400 км доля сил солнечного давления составляет 7 – 10% от сил сопротивления атмосферы. Обе силы становятся одинаковыми по величине на высоте 550 км. Особенно ярко проявляется давление солнечного света для легких спутников, двигающихся на больших высотах. Так, например, для спутника “Эхо” (сфера диаметром 30 м, весом 70,4 кг, запуск 12.08.60 г, США), имеющего почти круговую орбиту с высотой перигея 1500 км и апогея 1700 км, время существования, подсчитанное без учета светового давления составляет 20 лет, а с учетом – 1–2 года. За 60 дней световое давление уменьшает высоту перигея на 350 км.

Орбита вытягивается и постепенно перигей опускается в более плотные слои атмосферы, где из-за сопротивления воздуха спутник быстро снижается.

5.1.5 Сравнение величин возмущающих ускорений от различных факторов

Оценки возмущающих ускорений, проводимые в различных случаях, зависят от большого числа факторов: размер и форма орбиты КА, положение плоскости орбиты в пространстве, положение Луны и Солнца по отношению к орбите и т.д. Сравнительную оценку возмущений в общем случае практически дать невозможно. Для частной оценки рассматривают только круговые орбиты ИСЗ. В этом случае на малых высотах (до $h=150$ км) определяющим возмущением является аэродинамическое торможение. На высотах 150–400 км необходимо учитывать аэродинамические возмущения и возмущения, связанные с не-

сферичностью формы Земли. На высотах 400 – 20000 км нужно, прежде всего, учитывать возмущения от нецентральности гравитационного поля Земли, а для высот $h > 700$ км для легких ИСЗ еще и световое давление. На высотах 20000–50000 км наряду с возмущениями от нецентральности гравитационного поля Земли нужно учитывать лунно-солнечные возмущения, действие которых становится преобладающим на высотах более 50000 км.

5.2 Метод оскулирующих элементов

Метод разработан Лагранжем и получил широкое распространение при исследовании возмущенного движения. Сущность метода заключается в том, что возмущенную (истинную) траекторию КА рассматривают как состоящую из последовательности невозмущенных траекторий с разными параметрами для каждого текущего момента времени. В итоге траектория возмущенного движения в каждый момент времени соприкасается с траекторией невозмущенного движения для этого же момента времени и представляет собой огибающую семейства невозмущенных траекторий движения. Уравнения возмущенного движения в инерциальной СК $Oxyz$ запишем на основании векторного уравнения (5.2) в следующем виде:

$$\ddot{x} = \ddot{x}_0 + q_x; \ddot{y} = \ddot{y}_0 + q_y; \ddot{z} = \ddot{z}_0 + q_z, \quad (5.23)$$

где

$$\ddot{x}_0 = a_x = -\frac{\mu x}{r^3}; \quad \ddot{y}_0 = a_y = -\frac{\mu y}{r^3}; \quad \ddot{z}_0 = a_z = -\frac{\mu z}{r^3} \quad - \text{составляющие ускорений}$$

невозмущенного движения,

q_x, q_y, q_z – составляющие ускорений от возмущающих сил.

Будем считать q_x, q_y, q_z известными функциями времени t , координат x, y, z и составляющих скоростей $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ (см. параграф 5.1):

$$\begin{aligned} q_x &= q_x(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}), \\ q_y &= q_y(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}), \\ q_z &= q_z(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}). \end{aligned}$$

Основная идея метода Лагранжа заключается в том, что решение уравнений возмущенного движения (5.23) определяется теми же формулами (3.6), (3.7) что и решение уравнений невозмущенного движения, но величины кеплеровских элементов орбиты $\Omega, \omega, i, e, p, \tau$ рассматриваются в этих формулах не как постоянные, а как некоторые функции времени, определяемые так, чтобы уравнения возмущенного движения удовлетворялись. С математической точки зрения система (5.23) решается методом вариации произвольных постоянных. В результате осуществление идеи Лагранжа сводится к преобразованию переменных в уравнениях (5.23), причем формулами преобразования служат известные формулы невозмущенного движения. Производя в уравнениях (5.23) подстановку, определяемую формулами (3.6), (3.7) мы получим для новых известных функций – бывших постоянных $\Omega, \omega, i, e, p, \tau$ систему дифференциальных уравнений вида:

$$\begin{aligned}\frac{d\Omega}{dt} &= F_1(\Omega, \omega, i, e, p, \tau), \\ \frac{di}{dt} &= F_2(\Omega, \omega, i, e, p, \tau), \\ \frac{d\omega}{dt} &= F_3(\Omega, \omega, i, e, p, \tau), \\ \frac{dp}{dt} &= F_4(\Omega, \omega, i, e, p, \tau), \\ \frac{de}{dt} &= F_5(\Omega, \omega, i, e, p, \tau), \\ \frac{d\tau}{dt} &= F_6(\Omega, \omega, i, e, p, \tau),\end{aligned}\tag{5.24}$$

где правые части являются известными функциями времени и всех элементов орбиты. Эти уравнения, как и уравнения (5.23) в конечном виде не интегрируются. Преимущество их состоит в том, что при малых возмущающих силах новые переменные $\Omega, \omega, i, e, p, \tau$ изменяются мало и для решения системы (5.24) можно использовать метод итераций, а при использовании численных методов интегрирования это дает надежды на достаточно большой шаг интегрирования при достижении большой точности. Решение системы (5.24) для каждого момента времени дает шесть параметров, определяющих некоторую фиктивную, например, эллиптическую орбиту ("оскулирующий эллипс"). Если в данный

момент времени t_1 возмущающие силы перестанут действовать, то дальнейшее движение будет продолжаться по эллипсу, имеющему элементы $p(t_1), e(t_1), \omega(t_1), \Omega(t_1), i(t_1), \tau(t_1)$ и касательному к реальной орбите в точке, где прекратили свое действие возмущающие силы. Реальная орбита является огибающей таких эллипсов. Переменные элементы орбиты $p(t), e(t), \omega(t), \Omega(t), i(t), \tau(t)$ называются оскулирующими элементами. Координаты и скорости КА в инерциальной СК $Ox_{\text{ИЗ}}$ рассчитываются по тем же формулам (3.6), (3.7), что и для невозмущенного движения, но значение элементов $p, e, \omega, \Omega, i, \tau$, входящих в эти формулы, должны соответствовать данному моменту времени. Приступим к выводу дифференциальных уравнений для оскулирующих элементов. Изложенный выше прямой путь использования метода Лагранжа приводит к громоздким вычислениям. Можно применить ряд способов, которые позволяют значительно проще получить искомые уравнения. Рассмотрим основную идею этих способов.

Пусть

$$F(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, p, e, \omega, \Omega, i, \tau) = 0 \quad (5.25)$$

есть какой-нибудь из первых интегралов уравнений невозмущенного движения, или соотношение, являющееся следствием из этих интегралов, где $p, e, \omega, \Omega, i, \tau$ — элементы орбиты, сохраняющие в невозмущенном движении постоянные значения. Тогда в силу уравнений невозмущенного движения мы можем записать следующее тождество:

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial F}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial F}{\partial z} \dot{z} + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \ddot{x}_0 + \frac{\partial F}{\partial \dot{y}} \ddot{y}_0 + \frac{\partial F}{\partial \dot{z}} \ddot{z}_0 \equiv 0, \quad (5.26)$$

где $\ddot{x}_0 = a_x; \ddot{y}_0 = a_y; \ddot{z}_0 = a_z$ — составляющие основного ускорения.

По основной идее метода Лагранжа соотношение вида (5.25) является также интегралом системы (5.23), но все элементы орбиты $p, e, \omega, \Omega, i, \tau$ должны рассматриваться как функции времени. Поэтому в силу уравнений возмущенного движения (5.23) можно получить следующее тождество:

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dt} = & \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial F}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial F}{\partial z} \dot{z} + \frac{\partial F}{\partial \Omega} \dot{\Omega} + \frac{\partial F}{\partial \omega} \dot{\omega} + \frac{\partial F}{\partial i} \dot{i} + \frac{\partial F}{\partial p} \dot{p} + \frac{\partial F}{\partial l} \dot{e} + \frac{\partial F}{\partial \tau} \dot{\tau} \\ & + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} (\ddot{x}_0 + q_x) + \frac{\partial F}{\partial \dot{y}} (\ddot{y}_0 + q_y) + \frac{\partial F}{\partial \dot{z}} (\ddot{z}_0 + q_z) \equiv 0. \end{aligned} \quad (5.27)$$

Но во всякий момент времени t координаты и скорость КА имеют одинаковые значения и для невозмущенного и для возмущенного движения, и, следовательно, в момент времени t величины $\frac{\partial F}{\partial t}, \frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}, \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}, \frac{\partial F}{\partial \dot{y}}, \frac{\partial F}{\partial \dot{z}}, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \ddot{x}_0, \ddot{y}_0, \ddot{z}_0$ имеют в соотношениях (5.26) и (5.27) одинаковые значения. Тогда из (5.26) и (5.27) можно записать следующее тождество:

$$\left(\frac{dF}{dt} \right) = \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} q_x + \frac{\partial F}{\partial \dot{y}} q_y + \frac{\partial F}{\partial \dot{z}} q_z + \frac{\partial F}{\partial \Omega} \dot{\Omega} + \frac{\partial F}{\partial \omega} \dot{\omega} + \frac{\partial F}{\partial i} \dot{i} + \frac{\partial F}{\partial p} \dot{p} + \frac{\partial F}{\partial l} \dot{e} + \frac{\partial F}{\partial \tau} \dot{\tau} \equiv 0. \quad (5.28)$$

Тождество (5.28) называется основной операцией. Оно представляет собой соотношение между производными от оскулирующих элементов, самими этими элементами, координатами, составляющими скорости и временем.

Координаты и составляющие скорости можно исключить из (5.28) при помощи формул (3.6), (3.7), так что в результате (5.28) будет представлять собой соотношение только между временем, оскулирующими элементами, и их первыми производными. Каждое такое соотношение линейно относительно производных от оскулирующих элементов. Поэтому, получив достаточное количество формул вида (5.28), можно выразить из них все шесть производных

$\frac{d\Omega}{dt}, \dots, \frac{d\tau}{dt}$ в зависимости от времени и самих оскулирующих элементов, что и приводит к системе (5.24). Естественно подбирать такие соотношения типа (5.25), которые содержат меньшее число из тринадцати величин – времени, координат, составляющих скорости и оскулирующих элементов. Для большей простоты и наглядности получающихся уравнений вместо составляющих возмущающего ускорения q_x, q_y, q_z введем составляющие того же ускорения на оси орбитальной системы координат O_2STW , связанные с движущейся точкой (КА). При анализе возмущенного движения плоскость O_2ST этой системы координат (гл. 3, табл. 3.2) будет совпадать с плоскостью, проходящей через текущий радиус-вектор \bar{r} и вектор скорости \bar{V} в возмущенном движении. Эта плоскость

называется оскулирующей плоскостью. Ось O_2W перпендикулярна оскулирующей плоскости и направлена в сторону вектора \bar{h} интеграла площадей.

Используя таблицу направляющих косинусов (табл. 3.2), можем записать следующие соотношения:

$$\begin{aligned} q_x &= \alpha S + \alpha' T + \alpha'' W, \\ q_y &= \beta S + \beta' T + \beta'' W, \\ q_z &= \gamma S + \gamma' T + \gamma'' W, \end{aligned} \quad (5.29)$$

где S, T, W – составляющие возмущающего ускорения по осям O_2S, O_2T, O_2W , а буквами α, β, γ обозначены направляющие косинусы соответственно 1-ой, 2-ой и 3-ей строк табл. 3.2.

5.2.1 Вывод дифференциальных уравнений для оскулирующих элементов

$$p, \Omega, i$$

Обратимся к интегралу площадей невозмущенного движения (2.3), (2.4), (2.5) и формулам (4.2). В результате можем записать следующие соотношения:

$$\begin{aligned} y\dot{z} - z\dot{y} &= \sqrt{p\mu} \sin i \sin \Omega, \\ z\dot{x} - x\dot{z} &= -\sqrt{p\mu} \cos \Omega \sin i, \\ x\dot{y} - y\dot{x} &= \sqrt{p\mu} \cos i. \end{aligned} \quad (5.30)$$

Применим к каждому из соотношений (5.30) основную операцию (5.28):

$$\begin{aligned} yq_z - zq_y &= \frac{\sqrt{\mu}}{2\sqrt{p}} \frac{dp}{dt} \sin i \sin \Omega + \sqrt{p\mu} \frac{d\Omega}{dt} \sin i \cos \Omega + \sqrt{p\mu} \frac{di}{dt} \sin \Omega \cos i, \\ zq_x - xq_z &= -\frac{\sqrt{\mu}}{2\sqrt{p}} \frac{dp}{dt} \sin i \cos \Omega + \sqrt{p\mu} \frac{d\Omega}{dt} \sin i \sin \Omega - \sqrt{p\mu} \frac{di}{dt} \cos \Omega \cos i, \\ xq_y - yq_x &= \frac{\sqrt{\mu}}{2\sqrt{p}} \frac{dp}{dt} \cos i - \sqrt{p\mu} \frac{di}{dt} \sin i. \end{aligned} \quad (5.31)$$

Разрешая уравнения (5.31) относительно производных от оскулирующих элементов Ω, i, p , получим:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{\mu}}{2\sqrt{p}} \frac{dp}{dt} &= (yq_z - zq_y) \sin i \sin \Omega + (yq_z - zq_y) \sin i \cos \Omega + (xq_y - yq_x) \cos i, \\ \sqrt{p\mu} \frac{d\Omega}{dt} \sin i &= (yq_z - zq_y) \cos \Omega - (xq_z - zq_x) \sin \Omega, \\ \sqrt{p\mu} \frac{di}{dt} \sin i &= (yq_z - zq_y) \sin i \cos \Omega + (xq_z - zq_x) \cos \Omega \cos i + (yq_x - xq_y) \sin i. \end{aligned} \quad (5.32)$$

Заменяя в формулах (5.32) координаты x, y, z их выражениями из формул (3.6), а q_x, q_y, q_z из формул (5.29) получим после всех возможных упрощений следующие уравнения:

$$\frac{dp}{dt} = 2r\tilde{T}; \frac{d\Omega}{dt} = \frac{r \sin u}{p \sin i} \tilde{W}; \frac{di}{dt} = \frac{r}{p} \cos u \tilde{W}, \quad (5.33)$$

$$\text{где } \tilde{T} = \sqrt{\frac{p}{\mu}} T; \quad \tilde{W} = \sqrt{\frac{p}{\mu}} W; \quad \tilde{S} = \sqrt{\frac{p}{\mu}} S.$$

Уравнения для оскулирующих элементов ω, e, τ можно получить, анализируя другие первые интегралы уравнений невозмущенного движения. В результате вместе с уравнениями (5.33) получим следующую систему:

$$\begin{aligned} 1) \frac{dp}{dt} &= 2r\tilde{T}, \\ 2) \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{r}{p} \sin u \cos e \cos i \cdot \tilde{W}, \\ 3) \frac{di}{dt} &= \frac{r}{p} \cos u \cdot \tilde{W}, \\ 4) \frac{d\omega}{dt} &= -\frac{\cos \vartheta}{e} \tilde{S} + \frac{\sin \vartheta}{e} \left(1 + \frac{r}{p}\right) \tilde{T} - \frac{r}{p} \sin u \operatorname{ctg} i \cdot \tilde{W}, \\ 5) \frac{de}{dt} &= \sin \vartheta \cdot \tilde{S} + \left[\cos \vartheta + (\cos \vartheta + e) \frac{r}{p} \right] \tilde{T}, \\ 6) \frac{d\tau}{dt} &= \frac{p}{e} \sqrt{\frac{p}{\mu}} \left[(eN \sin \vartheta - \cos \vartheta) \tilde{S} + \frac{p}{r} N \tilde{T} \right] \frac{r^2}{p^2}, \end{aligned} \quad (5.34)$$

где

$$N = \frac{2p^2}{r^2} \int_0^{\vartheta} \frac{\cos \vartheta d\vartheta}{(1 + e \cos \vartheta)^3}; \quad r = \frac{p}{1 + e \cos \vartheta}; \quad u = \vartheta + \omega;$$

$$\tilde{T} = \sqrt{\frac{p}{\mu}} T; \quad \tilde{W} = \sqrt{\frac{p}{\mu}} W; \quad \tilde{S} = \sqrt{\frac{p}{\mu}} S,$$

а истинная аномалия ϑ связана со временем “ t ” формулой (2.30)

$$t - \tau = \frac{p^2}{h} \int_0^{\vartheta} \frac{d\vartheta}{(1 + e \cos \vartheta)^2}; \quad h = \sqrt{p\mu}.$$

На величины возмущающих ускорений S, T, W , входящих в уравнения (5.34) не наложено никаких ограничений. Если возмущающие ускорения S, T, W не зависят явно от времени t , то правые части уравнений (5.34) будут функциями только от истинной аномалии и элементов орбиты. Поэтому в системе (5.34)

можно исключить время, приняв за независимую переменную ϑ . Можно показать, что связь между ϑ и “ t ” определяется соотношением:

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{\cos \vartheta}{e} \tilde{S} - \frac{\sin \vartheta}{e} \left(1 + \frac{r}{p}\right) \tilde{T} + \frac{\sqrt{\mu p}}{r^2}. \quad (5.35)$$

Правая часть соотношения (5.35) также не зависит от “ t ”.

Каждое из уравнений системы (5.34) разделим почленно на уравнение (5.35). Тогда получим:

$$\begin{aligned} 1) \quad \frac{dp}{d\vartheta} &= 2rTF, \\ 2) \quad \frac{d\Omega}{d\vartheta} &= WF \frac{r}{p} \sin u \operatorname{cosec} i, \\ 3) \quad \frac{di}{d\vartheta} &= WF \frac{r}{p} \cos u, \\ 4) \quad \frac{d\omega}{d\vartheta} &= F \left[-S \frac{\cos \vartheta}{e} + T \left(1 + \frac{r}{p}\right) \frac{\sin \vartheta}{e} - W \frac{r}{p} \operatorname{ctgi} \sin u \right], \\ 5) \quad \frac{de}{d\vartheta} &= F \left\{ S \sin \vartheta + T \left[\left(1 + \frac{r}{p}\right) \cos \vartheta + e \frac{r}{p} \right] \right\}, \\ 6) \quad \frac{d\tau}{d\vartheta} &= F \sqrt{\frac{\mu}{p}}, \end{aligned} \quad (5.36)$$

где

$$F = \left[\frac{\mu}{r^2} + S \frac{\cos \vartheta}{e} - T \left(1 + \frac{r}{p}\right) \frac{\sin \vartheta}{e} \right]^{-1}. \quad (5.37)$$

Наряду с системой (5.36) в приложениях часто используется система уравнений при аргументе « u ». Эту систему можно получить из системы (5.34), если воспользоваться связью между переменными t и u . Можно показать, что между этими переменными существует соотношение:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\sqrt{\mu p}}{r^2} - \dot{\Omega} \cos i = \frac{\sqrt{\mu p}}{jr^2}, \quad (5.38)$$

где $j = \left[1 - \frac{r^3}{\mu p} W \operatorname{ctgi} \sin u \right]^{-1}.$

Разделив каждое из первых пяти уравнений системы (5.34) на уравнение (5.38), получим следующую систему для оскулирующих элементов p, Ω, i, ω, e .

$$\begin{aligned}
1) \quad & \frac{dp}{du} = \frac{2jr^3}{\mu} T, \\
2) \quad & \frac{d\Omega}{du} = \frac{r^3 j}{\mu p} \sin u \cos \epsilon i \cdot W, \\
3) \quad & \frac{di}{du} = \frac{r^3 j}{\mu p} W \cos u, \\
4) \quad & \frac{d\omega}{du} = \frac{r^3 j}{\mu e} \left[\left(1 + \frac{r}{p} \right) T \sin \vartheta - S \cos \vartheta - e \frac{r}{p} W \operatorname{ctgi} \sin u \right], \\
5) \quad & \frac{de}{du} = \frac{r^3 j}{\mu} \left[\left(1 + \frac{r}{p} \right) T \cos \vartheta + S \sin \vartheta + \frac{er}{p} T \right].
\end{aligned} \tag{5.39}$$

Заметим, что уравнение (5.38) не есть уравнение для оскулирующего элемента, поэтому уравнение $\frac{dt}{du} = \frac{jr^2}{\sqrt{\mu p}}$ не включено в систему (5.39). Действительно, аргумент широты « u » монотонно изменяется и в невозмущенном движении ($S=T=W=0$) со скоростью $\frac{\sqrt{\mu p}}{r^2}$. Некоторые авторы [12] предлагают рассматривать вместо « u » мало меняющееся отклонение \bar{u} возмущенного « u » от его невозмущенного значения. Основное преимущество оскулирующих элементов – их малая изменяемость сохраняется. Запишем это уравнение. Имеем:

$\bar{u} = u - (u)$, где (u) – невозмущенное значение u . Тогда $\frac{d\bar{u}}{dt} = \frac{du}{dt} - \frac{d(u)}{dt}$, причем $\frac{d(u)}{dt} = \frac{\sqrt{\mu(p)}}{(r)^2}$, где (p) , (r) – невозмущенные значения параметра « p » и радиус-вектора « r ». Учитывая (5.38), окончательно запишем:

$$\frac{d\bar{u}}{dt} = \frac{\sqrt{\mu p}}{r^2} \left(1 - \frac{r^3}{\mu p} W \operatorname{ctgi} \sin u - \frac{r^2}{(r)^2} \sqrt{\frac{(p)}{p}} \right). \tag{5.40}$$

Учитывая (5.38) запишем уравнение (5.40) при аргументе « u »:

$$\frac{d\bar{u}}{du} = 1 - \frac{r^2 j}{\sqrt{p}} \frac{\sqrt{(p)}}{(r)^2}. \tag{5.41}$$

Полученные уравнения для оскулирующих элементов интегрируются при известных начальных значениях шести элементов орбиты: p_0 , Ω_0 , i_0 , e_0 , ω_0 , \bar{u}_0 . Обратим внимание на то, что правые части всех записанных систем являются

линейными функциями от возмущающих ускорений. Если допустить, что возмущения элементов орбиты от каждого возмущающего фактора малы, то можно не учитывать интерференционного воздействия возмущающих факторов между собой на больших отрезках времени. Таким образом, оказывается допустимым рассматривать в отдельности каждый из возмущающих факторов, а общее возмущающее воздействие определять как сумму отдельных возмущающих воздействий. При малых значениях эксцентриситета « e » (случай околокруговых орбит), 4-е и 5-е уравнения системы (5.34) (и соответственно других систем) целесообразно заменить следующими уравнениями, исключаящими особенность $e=0$:

$$\frac{d\lambda_1}{dt} = \sqrt{\frac{p}{\mu}} \left[-S \cos u + T \left(1 + \frac{r}{p} \right) \sin u + \frac{r}{p} (T\lambda_1 - W\lambda_2 \operatorname{ctgi} \sin u) \right], \quad (5.42)$$

$$\frac{d\lambda_2}{dt} = \sqrt{\frac{p}{\mu}} \left[S \sin u + T \left(1 + \frac{r}{p} \right) \cos u + \frac{r}{p} (T\lambda_2 + W\lambda_1 \operatorname{ctgi} \sin u) \right], \quad (5.43)$$

где $\lambda_1 = l \sin \omega$; $\lambda_2 = l \cos \omega$; $e = \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}$; $\operatorname{tg} \omega = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$.

Уравнения (5.42) и (5.43) легко выводятся путем дифференцирования выражений для λ_1 и λ_2 и подстановки производных $\frac{de}{dt}$, $\frac{d\omega}{dt}$ из соответствующих уравнений системы (5.34).

Уравнения (5.42) и (5.43) можно использовать для расчета орбит с любыми эксцентриситетами « e » (не обязательно близкими к нулю).

5.3 Общий подход к оценке изменений оскулирующих элементов

Ранее было отмечено, что основную роль в отклонениях реальной орбиты КА от идеальной играют нарастающие вековые возмущения, которые могут быть весьма значительными для эллиптических орбит КА, то есть орбит спутников. Однако в некоторых случаях представляет интерес также оценка периодических возмущений орбиты КА.

Удобные приближенные формулы, позволяющие быстро проводить качественный анализ, не прибегая к ЭВМ, были получены с помощью систем (5.34)

– (5.39), применяя классические методы небесной механики. Точность этих формул достаточна не только для качественного анализа, но и во многих случаях для определения орбит по результатам измерений. Общую идею одного из используемых методов можно назвать идеей конечных разностей. Поясним эту идею. Рассмотрим один из элементов оскулирующей орбиты E_j . Уравнение для этого элемента, полученное в параграфе 5.2, имеет вид:

$$\frac{dE_j}{dt} = f_j(E_1, \dots, E_6, t, S, T, W). \quad (5.44)$$

Приращение этого элемента орбиты за виток траектории

$$\delta E_j = \int_{t_1}^{t_1+T} \frac{dE_j}{dt} dt = \int_{t_1}^{t_1+T} f_j(E_1, \dots, E_6, t, S, T, W) dt, \quad (5.45)$$

где t_1 – начальный момент времени, T – период обращения спутника. Оскулирующие элементы $E_1 \dots E_6$, входящие в подынтегральное выражение, можно считать постоянными, соответствующими начальному моменту времени t_1 . Интеграл в (5.45) может быть вычислен, если возмущающие ускорения S, T, W выражены через время и элементы орбиты.

В ряде случаев это удастся сделать и в результате получить аналитическую запись приращения элемента орбиты за виток траектории:

$$\delta E_j = q_j(E_1, \dots, E_6) \quad j=1 \dots 6. \quad (5.47)$$

Далее можно организовать итерационный процесс: $E_j = E_{j0} + \delta E_j$ и уточнить полученные значения δE_j . Чтобы не возникало дополнительных трудностей с нахождением периода T , входящего в (5.45) обычно используют систему уравнений при аргументе «и» (5.39).

Используя изложенный общий подход, перейдем к анализу влияния отдельных возмущающих факторов.

5.4 Возмущения орбит, вызываемые нецентральностью поля тяготения Земли

Возмущающие ускорения от эффекта сжатия земного эллипсоида определяются формулами (5.4):

$$q_S \equiv S_1 = \frac{\varepsilon}{r^4} (3 \sin^2 i \sin^2 u - 1),$$

$$q_T \equiv T_1 = -\frac{\varepsilon}{r^4} (\sin^2 i \sin 2u),$$

$$q_W \equiv W_1 = -\frac{\varepsilon}{r^4} (\sin 2i \sin u).$$

Для исследования влияния возмущений, задаваемых в форме (5.4) используется система дифференциальных уравнений для оскулирующих элементов при аргументе « u » (5.39). Подстановка возмущающих ускорений S_1 , T_1 , W_1 в систему (5.39) приводит к системе (5.48):

$$\begin{aligned} 1) \quad \frac{dp}{du} &= -\frac{2\gamma\varepsilon}{\mu r} \sin 2u \sin^2 i, \\ 2) \quad \frac{d\Omega}{du} &= -\frac{2\gamma\varepsilon}{\mu p r} \sin^2 u \cos i, \\ 3) \quad \frac{di}{du} &= -\frac{\gamma\varepsilon}{2\mu p r} \sin 2u \sin 2i, \\ 4) \quad \frac{d\varpi}{du} &= \frac{\gamma\varepsilon}{\mu r^2} \left[-\frac{\cos \vartheta}{e} (3 \sin^2 u \sin^2 i - 1) - \left(1 + \frac{r}{p}\right) \frac{\sin \vartheta}{e} \sin 2u \sin^2 i + \frac{2r}{p} \sin^2 u \cos^2 i \right], \\ 5) \quad \frac{de}{du} &= \frac{\gamma\varepsilon}{\mu r^2} \left\{ (3 \sin^2 u \sin^2 i - 1) \sin \vartheta - \left[\left(1 + \frac{r}{p}\right) \cos \vartheta + e \frac{r}{p} \right] \sin 2u \sin^2 i \right\}, \end{aligned} \quad (5.48)$$

где

$$\gamma = j|_{W=W_1} = \left(1 + \frac{2\varepsilon}{\mu p r} \sin^2 u \cos^2 i\right)^{-1}. \quad (5.49)$$

Для любых орбит множитель γ никогда не отклоняется от единицы более чем на $\approx 0,003$. Такого же порядка ошибки могут произойти вследствие осреднения значений оскулирующих элементов $\Omega \dots \tau$. Поэтому не имеет смысла усложнять задачу учетом γ , несмотря на то, что в первом приближении этот множитель нетрудно учесть. Примем $\gamma=1$ за исключением случаев, оговоренных особо.

При интегрировании 1-го, 3-го, 5-го уравнений за один оборот ИСЗ (в пределах от « u_0 » до $u_0+2\pi$) получаем, что вековые уходы элементов p , i , e в первом приближении отсутствуют. Указанные элементы подвержены только

периодическим возмущениям. Например, для параметра орбиты « p » из 1-го уравнения системы (5.48) при $\gamma=1$ получаем:

$$\delta p = - \int_{U_0}^{U_0+2\pi} \frac{2\varepsilon}{\mu r} \sin 2u \sin^2 i du = - \frac{2\varepsilon \sin^2 i}{\mu p} \int_0^{2\pi} (1 + e \cos \vartheta) \sin 2u du .$$

Но $\vartheta = u - \omega$, причем $\omega = \text{const}$ на витке. Поэтому

$$\delta p = \frac{\varepsilon \sin^2 i}{\mu p} \left\{ \cos 2u + e \left[\cos(u + \omega) + \frac{1}{3} \cos(3u - \omega) \right] \right\} \Big|_{u=0}^{u=2\pi} = 0 . \quad (5.50)$$

Таким образом, фокальный параметр орбиты спутника не имеет вековых возмущений из-за нецентральности гравитационного поля Земли, принимаемой сжатым сфероидом. В течение одного оборота вокруг Земли он (с точностью до эксцентриситета « e ») испытывает два полных колебания с амплитудой

$A_p = \frac{\varepsilon \sin^2 i}{\mu p}$. Амплитуда равна нулю для экваториальных орбит ($p_{\text{эКВ}} = \text{const}$, $i=0$) и

имеет максимум для полярных ($i = \pi/2$): $A_{p \max} = \frac{\varepsilon}{\mu p}$. Поскольку $\frac{\varepsilon}{\mu} = 66432,78$, а

$p_{\min} \approx 6550$ км, то максимальное значение амплитуды для всех орбит $A_{p \max} < 10$ км.

Периодическое возмущение эксцентриситета « e » имеет более сложный характер и может быть найдено из 5-го уравнения системы (5.48).

$$\begin{aligned} \delta e = \frac{\varepsilon}{\mu} \int_0^{2\pi} \frac{(1 + e \cos \vartheta)^2}{p^2} \left\{ \left(3 \sin^2 u \sin^2 i - 1 \right) \sin \vartheta - \left[\left(1 + \frac{1}{1 + e \cos \vartheta} \right) \cos \vartheta + e \frac{1}{1 + e \cos \vartheta} \right] \sin 2u \sin^2 i \right\} du = \\ = \frac{\varepsilon}{\mu p^2} \left\{ \begin{aligned} & D_1 \cos(u - \omega) + D_2 \cos(u + \omega) + D_3 \cos(3u - \omega) + \\ & e [D_4 \cos 2u + D_5 \cos 2(u - \omega) + D_6 \cos(4u - 2\omega)] + \\ & e^2 [D_7 \cos 3(u - \omega) + D_8 \cos(u - 3\omega) + D_8 \cos(5u - 3\omega)] \end{aligned} \right\} \Big|_0^{2\pi} , \end{aligned} \quad (5.51)$$

где $D_1 = -\left(1 + \frac{e^2}{4}\right) \left(\frac{3}{2} \sin^2 i - 1\right)$, $D_2 = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{11}{4} e^2\right) \sin^2 i$, $D_3 = \frac{1}{12} \left(7 + \frac{17}{4} e^2\right) \sin^2 i$,

$$D_4 = \frac{5}{4} \sin^2 i, \quad D_5 = -\frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} \sin^2 i - 1\right), \quad D_6 = \frac{3}{8} \sin^2 i, \quad D_7 = -\frac{1}{12} \left(\frac{3}{2} \sin^2 i - 1\right),$$

$$D_8 = \frac{1}{16} \sin^2 i.$$

Формула (5.51) показывает, что вековые отклонения отсутствуют. Периодические колебания (с точностью до « e ») происходят с периодом, равным периоду обращения спутника вокруг Земли (две гармоники), и с периодом вдвое меньшим.

Амплитуда колебаний зависит от i и от ω .

Чем меньше значение эксцентриситета, тем относительно больше он колеблется. При $e \approx 0,001633$ изменения эксцентриситета в течение одного оборота могут достигать 100%.

Для расчета возмущения полуоси эллипса « a » можно воспользоваться формулой, которая получается из соотношения $p = a(1 - e^2)$:

$$a = \frac{p}{1 - e^2} = (a) + \delta a,$$

$$\delta a = \frac{(p) + \delta p}{1 - [(e) + \delta e]^2} - (a). \quad (5.52)$$

В скобках – невозмущенные значения элементов.

Из третьего уравнения системы (5.48) находим возмущение наклонения орбиты спутника:

$$\begin{aligned} \delta i &= -\frac{\varepsilon}{2p^2\mu} \sin 2i \int_0^{2\pi} (1 + e \cos \vartheta) \sin 2u du = \\ &= \frac{\varepsilon \sin 2i}{2\mu p^2} \left\{ \cos 2u + e \left[\cos(u + \omega) + \frac{1}{3} \cos(3u - \omega) \right] \right\}_0^{2\pi} = 0, \\ i &= (i) + \delta i. \end{aligned} \quad (5.53)$$

Наклонение орбиты в первом приближении, как и параметр орбиты « p » не имеет вековых возмущений. За один оборот параметр « i » так же, как и « p », совершает (с точностью до « e ») два полных колебания с амплитудой $A_p = \frac{\varepsilon \sin i}{4\mu p^2}$.

Максимальные значения амплитуды, достигаемые при $i=45^\circ$ или 135° – $|A_{i\max}| = \frac{\varepsilon}{4\mu p^2} \approx 0,0004$ соответствуют максимальному отклонению спутника в бо-

ковом направлении за счет i :

$$0,0004r = 0,0004 \cdot 6550 = 2,6 \text{ км.}$$

Возмущения долготы восходящего узла Ω и аргумента перигея ω кроме периодических имеют вековые уходы. Интегрирование 2-го уравнения системы (5.48) в пределах одного витка приводит к следующему выражению:

$$\begin{aligned}
 \delta\Omega &= -\frac{2\varepsilon}{\mu p^2} \cos i \int_0^{2\pi} \sin^2 u (1 + e \cos \vartheta) du = \\
 &= -\frac{\varepsilon \cos i}{\mu p^2} \left\{ u - \frac{1}{2} \sin 2u + e \left[\sin(u - \omega) - \frac{1}{2} \sin(u + \omega) - \frac{1}{6} \sin(3u - \omega) \right] \right\}_0^{2\pi} = \\
 &= -\frac{2\pi\varepsilon}{\mu p^2} \cos i, \\
 \Omega &= (\Omega) + \delta\Omega,
 \end{aligned} \tag{5.54}$$

т.е. узел в первом приближении испытывает вековое возмущение, пропорциональное косинусу угла наклона и обратно пропорциональное квадрату параметра орбиты. За один виток орбиты долгота восходящего узла уменьшается на величину $\frac{2\pi\varepsilon}{\mu p^2} \cos i$. Максимальные уходы Ω соответствуют орбитам, близким к экваториальным ($i \approx 0$; $i \approx \pi$). Для полярной орбиты долгота восходящего узла не имеет вековых возмущений. Периодические возмущения линии узлов имеют второй порядок малости по отношению к вековым возмущениям, поэтому график функции $\delta\Omega = f(u)$ (по крайней мере, за один виток) представляет собой почти прямую линию. Для прямых спутников, имеющих $i < \frac{\pi}{2}$, узел движется в сторону обратную возрастанию Ω (к западу), для обратных спутников ($i > \frac{\pi}{2}$) – сторону возрастания Ω (к востоку). Это движение определяет поворот плоскости орбиты вокруг оси Земли и называется прецессией узла орбиты. Прецессия узла орбиты (прецессия орбиты) иллюстрируется рис. 5.7. Прецессия достигает заметных величин. Так, например, для ИСЗ типа «Восток» суточная прецессия достигает 4° .

Возмущение аргумента перицентра ω определяется из 4-го уравнения системы (5.48). Интегрирование этого уравнения в пределах одного витка спутника приводит к соотношению:

$$\begin{aligned}
\delta\omega &= \int_0^{2\pi} \frac{\varepsilon}{r^2 \mu e} \left[-\cos g \left(3 \sin^2 i \sin^2 u - 1 \right) - \sin g \left(1 + \frac{r}{p} \right) \sin^2 i \sin 2u + e \frac{r}{p} \operatorname{ctgi} \sin^2 u \sin 2i \right] du = \\
&= \frac{\varepsilon}{\mu p^2} \left\{ S_0 u + \frac{1}{e} [S_1 \sin(u - \omega) + S_2 \sin(u + \omega) + S_3 \sin(3u - \omega)] - \left(D_4 - \frac{1}{2} \right) \sin 2u + D_5 \sin 2(u - \omega) + \right. \\
&\quad \left. + D_6 \sin(4u - 2\omega) + [D_7 \sin 3(u - \omega) + D_8 \sin(u - 3\omega) + D_8 \sin(5u - 3\omega)] \right\} \Bigg|_0^{2\pi} = \\
&= \frac{2\pi\varepsilon}{\mu p^2} \left(2 - \frac{5}{2} \sin^2 i \right), \tag{5.55}
\end{aligned}$$

$$\omega = (\omega) + \delta\omega,$$

где $S_0 = 2 - \frac{5}{2} \sin^2 i,$

$$S_1 = 1 + \frac{7}{4} e^2 - \left(\frac{3}{2} + \frac{17}{8} e^2 \right) \sin^2 i, \quad S_2 = -\frac{1}{4} \left(1 - \frac{15}{4} e^2 \right) \sin^2 i - \frac{1}{2} e^2,$$

$$S_3 = \frac{1}{12} \left(7 + \frac{19}{4} e^2 \right) \sin^2 i - \frac{1}{6} e^2.$$

Коэффициенты D_4, D_5, D_6, D_7, D_8 были определены в (5.51). Т.е. в первом приближении перигей под влиянием сжатия Земли имеет вековой уход, определяемый формулой (5.55).

Основные периодические члены аргумента перигея колеблются так же, как и периодические члены эксцентриситета, но со сдвигом фазы на $\frac{\pi}{2}$. Из формулы (5.55) следует, что при увеличении « p » вековой уход ω уменьшается. Это находится в соответствии с законом изменения величины возмущающего ускорения. Действительно, чем дальше от Земли, тем менее заметна неправильность ее формы.

Для полярной орбиты ($i = \frac{\pi}{2}$) вековое возмущение ω за один виток $\delta\omega_{2\pi}$ составляет примерно $4,5^\circ$. Для орбит с наклоном $i=63^\circ 26'$ имеет место $\delta\omega_{2\pi} \approx 0$, что весьма важно при реализации орбит ИСЗ, для которых по условиям эксплуатации требуется обеспечить постоянство положения апоцентра орбиты. Это необходимо, в частности, для нормального функционирования ИСЗ типа «Молния». Орбита таких спутников имеет наклонение порядка 63° , т.е. апоцентр располагается в северном полушарии.

Знак приращения $\delta\omega$ зависит от наклона орбиты i . Если $i < 63^{\circ}26'$ или $i > 116^{\circ}34'$, то $\delta\omega > 0$. Это значит, что линия апсид вращается в ту же сторону, в которую вращается спутник. Если $63^{\circ}26' < i < 116^{\circ}34'$, то $\delta\omega < 0$, т.е. линия апсид вращается в сторону, противоположную вращению спутника. За виток траектории максимальное смещение линии апсид равно:

$$\max \delta\omega = \frac{4\pi\varepsilon}{\mu p_{\min}^2} \approx 0,02 \text{ рад.}$$

Это соответствует почти 20^0 суточного возмущения линии апсид.

Запишем итоговые равенства для вековых уходов элементов орбиты ИСЗ от сжатия земного эллипсоида за один виток:

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dN} = \frac{de}{dN} = \frac{di}{dN} &= 0, \\ \frac{d\Omega}{dN} &= -\frac{2\pi\varepsilon}{\mu p^2} \cos i, \\ \frac{d\omega}{dN} &= \frac{2\pi\varepsilon}{\mu p^2} \left(2 - \frac{5}{2} \sin^2 i\right). \end{aligned} \quad (5.56)$$

Система уравнений (5.56) дает возможность исследовать вековые уходы оскулирующих элементов по виткам орбиты ИСЗ. Для получения полного возмущения элементов Ω и ω достаточно умножить правую часть (не изменяющуюся от витка к витку траектории) на количество витков N .

Таким образом, получены формулы учитывающие сжатие земного сфероида для элементов эллиптических орбит p , Ω , i , ω , e в зависимости от аргумента широты u .

$$\begin{aligned} p &= (p) + \delta p, \\ e &= (e) + \delta e, \\ \omega &= (\omega) + \delta\omega, \\ \Omega &= (\Omega) + \delta\Omega, \\ i &= (i) + \delta i. \end{aligned} \quad (5.57)$$

В этих формулах в скобках – невозмущенные элементы орбиты, а значения $\delta p, \delta l, \delta\omega, \delta\Omega, \delta i$ как функции « u » определены выше.

Для данного значения u и соответствующих ему элементов орбиты, рассчитанных по этим формулам, можно вычислить координаты x , y , z и скорости

$\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ (см. параграфы 3.6 и 3.7). При этом ошибка в координатах не должна превышать нескольких десятков метров.

Используя уравнения для λ_1 и λ_2 легко получить формулы, пригодные для орбит, близких к круговым ($k=\sin^2 i$) [12]:

$$\begin{aligned} \delta\lambda_1 = & \frac{\varepsilon}{\mu p^2} \left\{ \left[1 - \frac{7}{4}\kappa + \lambda_1^2 \left(\frac{1}{4} - \frac{9}{8}\kappa \right) + \lambda_2^2 \left(\frac{5}{4} - \frac{9}{8}\kappa \right) \right] \sin u + \left[\frac{7}{12}\kappa + \lambda_1^2 \left(-\frac{1}{12} + \frac{23}{48}\kappa \right) + \lambda_2^2 \left(-\frac{1}{12} + \frac{13}{48}\kappa \right) \right] \sin 3u \right. \\ & + \lambda_1 \left[\left(-\frac{1}{2} + 2\kappa \right) \cos 2u - \frac{3}{8}\kappa \cos 4u \right] + \lambda_2 \left[\left(2 - \frac{5}{2}\kappa \right) u + \frac{1}{2}\kappa \sin 2u + \frac{3}{8}\kappa \sin 4u \right] + \frac{1}{16}\kappa (\lambda_2^2 - \lambda_1^2) \sin 5u + \\ & \left. + \lambda_1 \lambda_2 \left[\left(-2 + \frac{13}{4}\kappa \right) \cos u + \frac{5}{24}\kappa \cos 3u - \frac{1}{8}\kappa \cos 5u \right] \right\}. \end{aligned} \quad (5.58)$$

$$\begin{aligned} \delta\lambda_2 = & \frac{\varepsilon}{\mu p^2} \left\{ \left[1 - \frac{5}{4}\kappa + \lambda_1^2 \left(\frac{9}{4} - \frac{25}{8}\kappa \right) + \lambda_2^2 \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{8}\kappa \right) \right] \cos u + \left[\frac{7}{12}\kappa + \lambda_1^2 \left(-\frac{1}{4} + \frac{25}{48}\kappa \right) + \lambda_2^2 \left(\frac{1}{12} + \frac{11}{48}\kappa \right) \right] \cos 3u \right. \\ & + \lambda_1 \left[-\left(2 - \frac{5}{2}\kappa \right) \sin u + (1 - 2\kappa) \sin 2u + \frac{3}{8}\kappa \sin 4u \right] + \lambda_2 \left[\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\kappa \right) \cos 2u + \frac{3}{8}\kappa \cos 4u \right] + \\ & \left. + \frac{1}{16}\kappa (\lambda_2^2 - \lambda_1^2) \sin 5u + \lambda_1 \lambda_2 \left[\left(\frac{1}{4}\kappa - 1 \right) \sin u + \left(\frac{1}{3} - \frac{7}{24}\kappa \right) \sin 3u + \frac{1}{8}\kappa \sin 5u \right] \right\}. \end{aligned} \quad (5.59)$$

Элементы λ_1, λ_2 вычисляются по формулам $\lambda_1 = (\lambda_1) + \delta\lambda_1$; $\lambda_2 = (\lambda_2) + \delta\lambda_2$, где $(\lambda_1), (\lambda_2)$ – их невозмущенные значения: $(\lambda_1) = (e)\sin(\omega)$; $(\lambda_2) = (e)\cos(\omega)$.

Если в формулах для $\delta\Omega$, δi , δp подставить $e = \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}$, $\sin \omega = \frac{\lambda_1}{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}}$,

$\cos \omega = \frac{\lambda_2}{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}}$, то можно выразить эти возмущения через λ_1 и λ_2 :

$$\delta\Omega = -\frac{\varepsilon \cos i}{\mu p^2} \left[u - \frac{1}{2} \sin 2u + \lambda_1 \left(-\frac{3}{2} \cos u + \frac{1}{6} \cos 3u \right) + \lambda_2 \left(\frac{1}{2} \sin u - \frac{1}{6} \sin 3u \right) \right]; \quad (5.60)$$

$$\delta i = \frac{\varepsilon \sin 2i}{4\mu p^2} \left[\cos 2u + \lambda_1 \left(-\sin u + \frac{1}{3} \sin 3u \right) + \lambda_2 \left(\cos u + \frac{1}{3} \cos 3u \right) \right]; \quad (5.61)$$

$$\delta p = \frac{\varepsilon \sin^2 i}{\mu p} \left[\cos 2u + \lambda_1 \left(-\sin u + \frac{1}{3} \sin 3u \right) + \lambda_2 \left(\cos u + \frac{1}{3} \cos 3u \right) \right]. \quad (5.62)$$

В случае круговых орбит ($\lambda_1 = \lambda_2 = 0$) из соотношений (5.58) – (5.62) получаем: ($\kappa = \sin^2 i$); ($p = r$)

$$\delta\lambda_1 = \frac{\varepsilon}{\mu p^2} \left[\left(1 - \frac{7}{4} \sin^2 i \right) \sin u + \frac{7}{12} \sin^2 i \sin 3u \right]; \quad (5.63)$$

$$\delta\lambda_2 = \frac{\varepsilon}{\mu r^2} \left[\left(1 - \frac{5}{4} \sin^2 i \right) \sin u + \frac{7}{12} \sin^2 i \cos 3u \right]; \quad (5.64)$$

$$\delta\Omega_{\text{кр}} = -\frac{\varepsilon \cos i}{\mu r^2} \left(u - \frac{1}{2} \sin 2u \right); \quad (5.65)$$

$$\delta i_{\text{кр}} = \frac{\varepsilon \cos 2i}{4\mu r^2} \cos 2u; \quad (5.66)$$

$$\delta p_{\text{кр}} = \frac{\varepsilon \sin^2 i}{\mu r} \cos 2u. \quad (5.67)$$

Здесь r – радиус невозмущенной круговой орбиты.

Следует отметить, что изменение оскулирующих элементов в возмущенном движении приводит к возмущению радиуса орбиты, а, следовательно, и высоты полета спутника. Эти возмущения таковы, что происходит как бы частичное «отслеживание» высотой полета поверхности Земли, при этом спутник «поднимается» над экваториальными областями и как бы «проседает» над полюсами. Возмущения радиус-вектора можно определить по формуле:

$$\delta r = \frac{(p) + \delta p}{1 + [(e) + \delta e] \cos[(u) + \delta u - (\omega) - 8\omega]} - (r), \quad (5.68)$$

где $(r) = \frac{(p)}{1 + (e) \cos[(u) - (\omega)]}$ (в скобках – невозмущенные значения).

Очевидно:

$$(u) = (\omega) + (g), \quad \operatorname{tg} \frac{(g)}{2} = \sqrt{\frac{1+(e)}{1-(e)}} \operatorname{tg} \frac{(E)}{2},$$

$$(E) - (e) \sin(E) - (E_0) + (e) \sin(E_0) + (e) \sin(E_0) = \sqrt{\mu}(a)^{-\frac{3}{2}}(t - t_0),$$

где t_0 – начальный момент времени; (E_0) – начальное значение эксцентрической аномалии (невозмущенной) $\delta u \equiv \bar{u}$, соответствующее величине t_0 (определяется уравнением 5.41).

Высота полета $h = r - R$, где $R = \bar{a}(1 - \alpha \sin^2 i \sin^2 u)$ – радиус Земли, \bar{a} – радиус экватора, $\alpha = \frac{1}{298,3}$ – сжатие Земли. Максимальное изменение радиуса орбиты, из-за эффекта сжатия Земли, рассчитанное по формуле (5.68), не превышает 200 м.

Отклонение времени полета

Расчет времени в зависимости от действия возмущающих факторов проводится на основании уравнения (5.38), которое перепишем в виде:

$$\frac{dt}{du} = \frac{jr^2}{\sqrt{\mu p}}, \quad (5.70)$$

где $j = \left[1 - \frac{r^3}{\mu p} \text{ctg} i \sin u W \right]^{-1}$. Заменяя W по формуле (5.4): $W = W_1 = -\frac{\varepsilon}{r^4} \sin 2i \sin u$ и интегрируя (5.70) получим:

$$t - t_0 = \int_{u_0}^u \frac{r^2 du}{\sqrt{\mu p} \left(1 + \frac{2\varepsilon}{\mu p r} \cos^2 i \sin^2 u \right)}. \quad (5.71)$$

В случае невозмущенного движения $\varepsilon=0$, $p = \text{const}$, $e = \text{const}$, поэтому для времени полета получаем известное уравнение Кеплера (см. выше):

$$E - e \sin E - E_0 + e \sin E_0 = \sqrt{\mu a} \frac{3}{2} (t - t_0). \quad (5.72)$$

Различия во времени t , подсчитанном по формулам (5.71) и (5.72) составляет несколько секунд на виток. Для орбит с небольшими эксцентриситетами, но при $e \neq 0$ на основании формул (5.70) и (5.71) можно получить конечную формулу для расчета времени. Разложив в ряд по ω , p , e , ε_1 $\left(\varepsilon_1 = -\frac{2\varepsilon}{\mu p r} \cos^2 i \sin^2 u \right)$ формулу (5.70) и оставив только линейные члены, получим (отбросив невозмущенную часть $\frac{dt}{du}$):

$$\frac{d\bar{t}}{du} = \frac{3r^2}{2p\sqrt{\mu p}} \Delta p - \frac{2r^3}{p\sqrt{\mu p}} \cos \vartheta \Delta e - \frac{2r^3 e}{p\sqrt{\mu p}} \sin \vartheta \Delta \omega - \frac{2r \varepsilon_1}{(\mu p)^{3/2}} \cos^2 i \sin^2 u. \quad (5.73)$$

Далее, заменим $\Delta p = \delta p$, $\Delta e = \delta e$, $\Delta \omega = \delta \omega$ их значениями из формул (5.50), (5.51), (5.55), учтем, что $r = \frac{p}{1 + e \cos \vartheta} \approx p(1 - e \cos \vartheta)$ и отбросим члены, содержащие e^2 .

Интегрируя получившееся после указанных подстановок уравнение (5.73) получим:

$$\bar{\delta t} = \frac{\varepsilon}{\mu \sqrt{\mu p}} \left[\left(1 - 4 \cos^2 i \right) u + \left(\frac{1}{2} - \frac{7}{12} \kappa \right) \sin 2u + e \left[\frac{1}{8} \kappa \sin(u + \omega) + \left(\frac{5}{12} \kappa - \frac{1}{2} \right) \sin(3u - \omega) + \right. \right.$$

$$+ \left(2 - \frac{7}{2} \kappa + \frac{3}{4} \cos 2\omega \right) \sin \vartheta - \left(1 - 5 \cos^2 i \right) \mu \cos \vartheta - \frac{3}{8} \kappa \sin(u - 3\omega) \Big|_{u_0}^u ; (\kappa = \sin^2 u). \quad (5.74)$$

Для больших значений « e » можно также получить расчетную формулу, если выражение (5.71) представить следующим образом:

$$t - t_0 = \int_{u_0}^u \frac{r^2 du}{\sqrt{\mu p} \left(1 + \frac{2\varepsilon}{\mu p r} \cos^2 i \sin^2 u \right)} = \int_{u_0}^u F(u) du =$$

$$= \int_{u_0}^u \left[F_0 + \left(\frac{dF}{dp} \right)_0 \Delta p + \left(\frac{dF}{dl} \right)_0 \Delta l + \left(\frac{dF}{d\varpi} \right)_0 \Delta \omega + \left(\frac{dF}{d\varepsilon_1} \right)_0 \varepsilon_1 \right] du, \quad (5.75)$$

где
$$F_0 = \frac{p^2}{\sqrt{\mu p} [1 + e \cos(u - \omega)]^2} = \left(\frac{dF}{d\varepsilon_1} \right)_0 ; \quad \left(\frac{dF}{dp} \right)_0 = \frac{3\sqrt{p}}{2\sqrt{\mu} [1 + e \cos(u - \omega)]^2} ;$$

$$\left(\frac{dF}{de} \right)_0 = 1 - \frac{2p\sqrt{p} \cos(u - \omega)}{\sqrt{\mu} [1 + e \cos(u - \omega)]^3} ; \quad \left(\frac{dF}{d\omega} \right)_0 = 1 - \frac{2p\sqrt{p} e \sin(u - \omega)}{\sqrt{\mu} [1 + e \cos(u - \omega)]^3} ; \quad \varepsilon_1 = -\frac{2\varepsilon}{\mu p r} \cos^2 i \sin^2 u .$$

Значения элементов орбиты p, e, ω берем невозмущенные, т.е. $(p), (e), (\omega)$.

Заменяя в формуле (5.75) величины $\Delta p = \delta p, \Delta e = \delta e, \Delta \omega = \delta \omega$ из (5.50), (5.51) и (5.55) соответственно, после интегрирования имеем:

$$\begin{aligned} \bar{\delta t} = & \frac{2\varepsilon}{\mu \sqrt{\mu p} (1 - e^2)^{\frac{5}{2}}} \left[- \left(D_5 + \frac{3}{2} D_5 e^2 + \frac{9}{16} \hat{e} e^2 \cos 2\omega \right) E + (S_4 + S_5 \cos 2\omega) \sin E + (S_6 + S_7 \cos 2\omega) \sin 2E \right] + \\ & + (1 - e^2)^{\frac{1}{2}} \left[- \frac{1}{2} S_0 u + \frac{1}{4} \sin 2\omega \left(\frac{13}{12} \hat{e} - 1 - \frac{\hat{e}}{e^2} + \frac{2}{3e^2} \right) \right] (1 - e \cos E)^2 + \\ & + \frac{\hat{e} \sin 2\omega}{6e^2} (1 - e \cos E) + \frac{1 - \hat{e}}{3e} \sin(u + \omega) \Big|_{u_0}^u, \end{aligned} \quad (5.76)$$

где
$$S_4 = -\kappa e + \frac{1}{2} e + \frac{7}{6} e^2 - \frac{3}{2} \kappa e^3 ; \quad S_5 = \frac{19}{24} \kappa e^3 - \frac{1}{2} e^3 - \frac{3}{8} \kappa e - \frac{1}{3e} + \frac{\kappa}{3e} ;$$

$$S_6 = \left(\frac{5}{24} - \frac{3}{16} \kappa - \frac{5}{12} e^2 + \frac{1}{2} \kappa e^2 \right) e^2 ; \quad S_7 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{4} \kappa - \frac{1}{3} e^2 + \frac{19}{48} \kappa e^2 + \frac{1}{6} e^4 - \frac{1}{3} \kappa e^4 \right), (\kappa = \sin^2 i).$$

Остальные коэффициенты S_i , а также D_i приведены выше.

В формулах (5.74) и (5.76) рассчитывается дополнительное время, которое затрачивает спутник на полет от точки u_0 , (если $u_0 = 0$, то от экватора), до точки с аргументом широты « u » по сравнению со временем полета по невозмущенной орбите. Полное время полета будет равно (5.77): $t = \bar{t} + \delta t$, где $\bar{t} \equiv (t)$ – время полета по невозмущенной орбите.

Если в формулу (5.76) подставить $u = 2\pi$, то дополнительное время полета на витке орбиты (вековой член) будет равно при $u_0=0$:

$$\bar{\delta t}_{2\pi} = \delta \bar{T} = \frac{2\pi}{\mu\sqrt{\mu p}(1-e^2)^{\frac{5}{2}}} \left[\left(1 + \frac{3}{2}e^2\right) \left(\frac{3}{2}\sin^2 i - 1\right) - \frac{9}{8}e^2 \sin^2 i \cos 2\omega + (1-e^2)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{5}{2}\sin^2 i - 2\right) (1-e\cos E_0)^2 \right], \quad (5.77)$$

где E_0 – значение эксцентрической аномалии, соответствующее $u_0=0$:

$$E_0 = -2 \arctg \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \operatorname{tg} \frac{\omega}{2}.$$

Подставляя в формулу (5.74) $u = 2\pi$ и $u_0=0$ и выделяя соответствующий вековой член, получим:

$$\delta \bar{T} = \frac{2\pi\epsilon}{\mu\sqrt{p\mu}} \left[- (4\cos^2 i - 1) + e(5\cos^2 i - 1)\cos \omega \right]. \quad (5.78)$$

Величина δT , полученная по формуле (5.77) или (5.78) представляет собой разность между драконическим периодом обращения спутника и периодом обращения по невозмущенной орбите. Драконическим периодом обращения T_d называется время между двумя последовательными прохождением спутником плоскости экватора

$$T_d = T + \delta \bar{T}, \quad (5.79)$$

где $\bar{T} = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}}(a)^{\frac{3}{2}}$ – период для невозмущенной орбиты, а δT , найденная по формулам (5.77) или (5.78), определяет приращение периода за счет сжатия земного сфероида. Если в формуле (5.78) пренебречь членами порядка « e », то приравняв скобку $(4\cos^2 i - 1)$ нулю, найдем наклонение орбиты « i » при котором $\delta \bar{T} = 0$, т.е. $T_d = T$: $4\cos^2 i - 1 = 0$; $\cos i = \pm 0,5$; $i = 60^\circ$ или 120° .

Подсчет возмущения периода $\delta \bar{T}$ на витке круговой орбиты малой высоты с $r=6600$ км и наклонением $i \approx 0$ приводит к результату:

$$\delta \bar{T} \approx \frac{2\pi\epsilon}{\mu\sqrt{\mu p}} (-4\cos^2 i + 1) = -24,36 \text{ сек.}$$

Период невозмущенной орбиты такого спутника T равен 5333,4 сек ≈ 90 мин. Таким образом, возмущение периода составляет 0,45% от периода невозмущенной орбиты. На больших временных интервалах такое малое возмущение приходится учитывать.

Заметим, что если производить расчет драконического периода с точностью до $j=\gamma=1$, как это делалось при анализе вековых уходов оскулирующих

элементов, то получим: $T_d = \int_0^{2\pi} \frac{jr^2}{\sqrt{p\mu}} du = \int_0^{2\pi} \frac{jp^2 du}{\sqrt{p\mu}[1 + e \cos(u - \omega)]^2} = T$, если $j=1$. Т.е. при $j=1$ драконический период будет равен периоду обращения спутника в невозмущенном движении: $T_d \approx T = 2\pi \frac{a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\mu}}$, где $a = \frac{p}{1 - e^2}$.

Так как фокальный параметр « p » и эксцентриситет « e » не имеют вековых уходов, то и большая полуось « a » также не имеет вековых уходов и с точностью до $j=1$ можно утверждать, что драконический период спутника для случая действия возмущения от сжатия Земли постоянен. Однако ранее мы показали, что такое рассмотрение является недостаточным, особенно для продолжительных интервалов времени движения спутника.

5.5. Возмущения, вызываемые сопротивлением атмосферы

В соответствии с рассмотренной в параграфе 5.1 моделью возмущающего ускорения, вызванного аэродинамическими силами, проекции возмущающего ускорения определяются формулами (5.8') или в более сложном варианте (5.9). Будем использовать формулы (5.8'):

$$T = T_a = -\frac{1}{2} b \rho V V_T; \quad S = S_a = -\frac{1}{2} b \rho V V_r; \quad W_a \approx 0.$$

Для использования влияния атмосферы эти ускорения нужно подставить в одну из приведенных выше систем уравнений для оскулирующих элементов орбиты. Воспользуемся системой (5.39) при аргументе « u ». В этом случае при принятой модели возмущения (5.8') будем иметь ($j=1$):

$$\begin{aligned}
1) \quad \frac{dp}{du} &= -\frac{b\rho V V_T}{\mu} r^3; \\
2) \quad \frac{de}{du} &= -\frac{b\rho V r^2}{2\mu} \left[V_r \sin \vartheta + V_T \left(1 + \frac{r}{p} \right) \cos \vartheta + \frac{er}{p} V_T \right]; \\
3) \quad \frac{d\omega}{du} &= -\frac{b\rho V r^2}{2\mu l} \left[-V_r \cos \vartheta + V_T \left(1 + \frac{r}{p} \right) \sin \vartheta \right]. \\
\frac{d\Omega}{du} &= 0, \quad \frac{di}{du} = 0, \quad r = \frac{p}{1 + e \cos \vartheta}.
\end{aligned} \tag{5.80}$$

Третье уравнение системы (5.80), определяющее изменение аргумента перигентра можно не рассматривать, т.к. внутри витка ω меняется слабо. Тогда можно принять $\omega = \text{const}$ и $du = d\vartheta + d\omega \approx d\vartheta$. Подставляя значения V_r , V_T , V из формул (2.27) – (2.29) и интегрируя в пределах одного витка, можем записать следующие уравнения:

$$\begin{aligned}
\delta p &= -bp^2 \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{1 + 2e \cos \vartheta + e^2}}{(1 + e \cos \vartheta)^2} \rho d\vartheta; \\
\delta e &= -bp \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{1 + 2e \cos \vartheta + e^2} (e + \cos \vartheta)}{(1 + e \cos \vartheta)^2} \rho d\vartheta.
\end{aligned} \tag{5.81}$$

Полученные приращения оскулирующих элементов p и e в пределах одного витка могут быть приняты, как указывалось выше, за производные от этих элементов по числу оборотов N :

$$\delta p = \frac{dp}{dN}; \quad \delta e = \frac{de}{dN}.$$

Приращения других элементов орбиты, зависящих только от « p », « e » можно определить по известным формулам эллиптической теории. Например, приращения (или производные по числу витков N) большой полуоси « a », периода i , а также высот перигея и апогея r_{Π} и r_A рассчитываются по формулам, приведенным ниже:

$$\text{Т.к. } a = \frac{p}{1 - e^2}, \quad T = 2\pi \frac{a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\mu}}, \quad r_n = \frac{p}{1 + e}, \quad r_a = \frac{p}{1 - e}, \text{ то}$$

$$\delta a = \frac{p}{1-e^2} \left(\frac{\delta p}{p} + \frac{2e}{1-e^2} \delta e \right); \delta T = \frac{3\pi}{\sqrt{\mu}} a^{\frac{1}{2}} \delta a = \frac{3\pi}{\sqrt{\mu}} \frac{p^{\frac{3}{2}}}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{\delta p}{p} + \frac{2e}{1-e^2} \delta e \right), \quad (5.82)$$

$$\delta r_n = \frac{p}{(1+e)} \left(\frac{\delta p}{p} - \frac{\delta e}{1+e} \right), \quad \delta r_a = \frac{p}{(1-e)} \left(\frac{\delta p}{p} + \frac{\delta e}{1-e} \right).$$

Для расчета по формулам (5.81), (5.82) нужно ввести зависимость для плотности атмосферы. Нас интересует верхняя атмосфера – 110 – 130 км (ниже спутник функционировать не может). Существует несколько моделей атмосферы. Различные модели атмосферы, найденные разными авторами в различное время, имеют общий характер. В диапазоне высот от 130 км до 400 – 500 км все кривые $\ln \rho(h)$ имеют в районе 150 км наибольшую кривизну; с высотой кривые постепенно выпрямляются и к 400 – 500 км наклон их почти не меняется. Это позволяет в качестве аппроксимирующей функции для $\ln \rho(h)$ выбрать квадратную параболу с вершиной в области низких высот:

$$\ln \rho = \overline{a_0} - \overline{\theta} \sqrt{h - \overline{h_0}}, \quad (5.83)$$

где h – высота над уровнем моря; $\overline{a_0}, \overline{\theta}, \overline{h_0}$ – постоянные коэффициенты для данной модели атмосферы.

В табл. 5.1 приведены значения коэффициентов $\overline{a_0}, \overline{\theta}, \overline{h_0}$ для различных моделей атмосферы.

Таблица 5.1

Модель М-1	Высота h , км	BCA-60 Модель М-2	Высота h , км	ARDC-59 Модель М-3	Высота h , км
$\overline{a_0} = -20,051$ $\overline{h_0} = 125700$ $\overline{\theta} = 0,01449$	130 – – 400	$\overline{a_0} = -17,961$ $\overline{h_0} = 103030$ $\overline{\theta} = 0,018844$	140 – – 200	$\overline{a_0} = -19,023$ $\overline{h_0} = 104000$ $\overline{\theta} = 0,01594$	140 – – 700

Наиболее распространенной аппроксимацией для ρ , которая встречается в литературе, является показательный закон (см. также гл. 1):

$$\rho = \rho_0 e^{-\frac{h-h_0}{H}}, \quad (5.84)$$

где ρ_0 – значение плотности на некоторой опорной высоте h_0 , H – высота однородной атмосферы $\left(H = \frac{kT}{\bar{m}g}\right)$, T – температура ($^{\circ}K$), \bar{m} – молекулярный вес, k – постоянная Больцмана.

Из формулы (5.84) следует, что H можно рассматривать как производную, т.е. $H = -\frac{dh}{d \ln \rho}$. С другой стороны на основании (5.83) получаем $\frac{dh}{d \ln \rho} = -\frac{2}{\theta} \sqrt{h - \bar{h}_0}$, откуда

$$H = \frac{2}{\theta} \sqrt{h - \bar{h}_0} \quad (5.85)$$

Для модели М–1 (табл. 5.1), в диапазоне высот от 140 км до 400 км величина H возрастает от 18 км до 72 км. Зависимость весьма резкая и нелинейная. Поэтому аппроксимация плотности функцией (5.84) при постоянной H не может обладать необходимой точностью. В то же время для получения качественных оценок экспоненциальный закон (5.84) вполне себя оправдал.

Для определения баллистического коэффициента $b = \frac{C_x S_M}{m}$ нужно знать коэффициент лобового сопротивления C_x и площадь миделя спутника. На больших высотах длина свободного пробега молекул воздуха соизмерима или даже превосходит размеры КА. Поэтому величина C_x практически не зависит от формы КА, но зависит от характера отражения частиц от его корпуса. Для большинства современных КА значение C_x лежит в пределах 2 – 2,5. Наиболее часто используется значение $C_x = 2,2$. Величина S_M в случае неориентируемого спутника в среднем в течение больших промежутков времени может быть принята постоянной и равной примерно 1/4 величины полной поверхности тела [13]. Для ориентированного КА величину миделевого сечения необходимо рассчитывать в соответствии с его ориентацией относительно набегающего потока.

Интегралы (5.81) могут быть вычислены, если использовать разложения в ряды подынтегральных функций. Соответствующие приближенные зависимости приводятся в [12]. Для круговых орбит оценки вековых уходов оскулирующих орбит принимают достаточно простой вид:

$$\begin{aligned}
\delta\dot{a} &= \frac{dp}{dN} = -2\pi b a^2 \rho_1 = \delta\dot{a}, \\
\delta\dot{e} &= \frac{de}{dN} = 0, \\
\delta T &= \frac{dT}{dN} = -\frac{6\pi^2}{\sqrt{\mu}} b \dot{a}^{\frac{5}{2}} \rho_1,
\end{aligned}
\tag{5.86}$$

где ρ_1 – плотность в перигее оскулирующей орбиты, $a = p$ – радиус круговой орбиты. Из формул (5.81) следует, что вековые приращения фокального параметра « p » и эксцентриситета « e » имеют отрицательный характер: p и e уменьшаются.

Аэродинамическое сопротивление, совершая работу, уменьшает энергию спутника. Спутник переходит на все более низкие орбиты (уменьшение p), причем сама орбита с течением времени приближается к круговой (уменьшение e). Период обращения монотонно уменьшается, а средняя скорость полета возрастает. Максимальная скорость уменьшения высоты приходится на район апогея, а минимальная на район перигея орбиты. Последнее объясняется тем, что основное торможение спутника происходит в перигее орбиты (большие скорости и маленькая высота). Уменьшение кинетической энергии в перигее преобразуется в соответствующее уменьшение высоты. В апогее поле тяготения более слабое, чем в перигее. Поэтому, даже если бы уменьшение кинетической энергии в перигее и апогее было бы одинаковым, то высота в апогее изменялась бы скорее. Это обстоятельство дополнительно способствует более быстрому уменьшению высоты в апогее.

5.6 Возмущения орбиты КА, вызываемые влиянием Луны и Солнца

Возмущающее ускорение вызванное влиянием Луны и Солнца достаточно полно описано в параграфе 5.1, в рамках общего подхода к анализу вековых возмущений. С помощью одной из систем уравнений для оскулирующих элементов (5.34), (5.36), (5.39) необходимо получить проекции для возмущенных ускорений на орбитальные оси. Эти проекции найдем отдельно для каждого возмущающего тела, а общий эффект возмущения найдем как сумму отдельных

возмущений. Для описания возмущенного движения в рассматриваемом случае, следуя [12] примем в качестве опорной плоскости инерциальной СК $Oxyz$ плоскость орбиты возмущающего тела M_j ($j=1, 2$).

Именно от этой плоскости (а не от плоскости экватора Земли) в этом параграфе будем измерять наклонение i и другие элементы орбиты спутника. Для получения возмущений элементов орбиты в экваториальной СК необходимо прибегнуть к тригонометрическим преобразованиям. Положение радиус-вектора возмущающегося тела M_j показано на рис. 5.8. На этом рисунке т. A – спутник, т. D – возмущающее тело, т. O центр Земли, $xу$ – плоскость движения возмущающегося тела, BAE – плоскость движения ИСЗ. Угол $xob = \Omega$ – долгота восходящего узла орбиты ИСЗ относительно плоскости орбиты возмущающегося тела. Угол $DBA = i$ – наклонение орбиты ИСЗ относительно плоскости орбиты возмущающегося тела. Угол $BOD = \eta$ определяет положение возмущающегося тела относительно восходящего узла орбиты ИСЗ. Угол $DOA = \varphi$ определяет положение ИСЗ относительно возмущающегося тела. Заметим, что сферический треугольник ABD в общем случае не прямоугольный. Положение плоскости AOD определяется положением ИСЗ и возмущающегося тела. Возмущающее ускорение \bar{q}_j принадлежит плоскости DOA , в которой в данный момент находится ИСЗ и возмущающее тело. Это следует (см. параграф 5.1) из выражения $\bar{q}_j = \bar{b} - \bar{c}$ (5.15), т.к. вектор \bar{b} направлен по радиус-вектору «возмущающее тело – ИСЗ», а вектор \bar{c} направлен по прямой OD (см. рис. 5.3) Разложим вектор \bar{q}_j на две составляющие, из которых первая S_j совпадает с направлением \bar{r} , а вторая P_j перпендикулярна \bar{r} и лежит в плоскости OAD . В работе [12] показано, что эти компоненты определяются следующими формулами:

$$S_j \approx k^2 M_j \frac{r}{r_j^3} (3 \cos^2 \varphi_j - 1), \quad (5.87)$$

$$P_j \approx 3k^2 M_j \frac{r}{r_j^3} \cos \varphi_j \sin \varphi_j, \quad (5.88)$$

где $k^2 M_j = \mu_j$ – гравитационный параметр j -того возмущающегося тела, r – радиус-вектор ИСЗ, r_j – радиус-вектор возмущающегося тела ($j=1, 2$). Составляющие T_j и W_j возмущающегося ускорения j -ого тела по осям орбитальной СК O_2STW определяются формулами (рис. 5.8):

$$T_j = P_j \cos \delta_j, \quad W_j = P_j \sin \delta_j. \quad (5.89)$$

Используя формулы сферической тригонометрии (см. параграф 3.3) из треугольника BAD получим:

$$\begin{aligned} \sin \delta_j \sin \varphi_j &= \sin \eta_j \sin i_j, \\ \cos \delta_j \sin \varphi_j &= \cos u_j \cos \eta_j - \cos u_j \sin \eta_j \cos i_j, \\ \cos \varphi_j &= \cos u_j \cos \eta_j + \sin u_j \sin \eta_j \cos i_j. \end{aligned} \quad (5.90)$$

Здесь везде индекс “ j ” характеризует возмущенное тело, u_j – аргумент широты спутника относительно плоскости орбиты возмущающегося тела (угол BOA на рис. 5.8) С учетом (5.87), (5.88), (5.89), (5.90) найдем:

$$\begin{aligned} S_j &= \mu_j \frac{r}{r_j^3} (3 \cos^2 \varphi_j - 1), \\ T_j &= -3\mu_j \frac{r}{r_j^3} \cos \varphi_j (\cos \eta_j \sin u_j - \cos u_j \sin \eta_j \cos i_j), \\ W_j &= 3\mu_j \frac{r}{r_j^3} \sin i_j \sin \eta_j \cos \varphi_j. \end{aligned} \quad (5.91)$$

Из этих уравнений следует исключить $\cos \varphi_j$ с помощью последнего соотношения (5.90).

Уравнения, определяющие в первом приближении изменения оскулирующих элементов, после применения формул (5.91) в векторном виде запишутся в следующем виде:

$$\frac{dE}{dt} = f(E^T, \vartheta, \eta),$$

$$\text{где } E = \begin{pmatrix} p \\ \Omega \\ e \\ i \\ \omega \\ \tau \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_6 \end{pmatrix}, \quad \text{“}^T\text{” – знак транспонирования.}$$

Это система вида (5.34). Вместо системы при аргументе “ t ” можно использовать (это удобно) системы при аргументах ϑ (5.36) или “ u ” (5.39).

При этом для определения изменений оскулирующих элементов получим квадратуры. Решение уравнений можно существенно упростить, если принять во внимание, что угол η , определяющий положение возмущающегося тела меняется мало в течение одного оборота ИСЗ. Так, например, для круговой орбиты с радиусом $r \leq 8000$ км за один оборот спутника, угол η изменится для Луны ($j=1$) на $\Delta\eta_1 \approx 1^\circ$, а для Солнца ($j=2$) на $\Delta\eta_2 \approx 0,1^\circ$. Для орбиты ИСЗ с радиусом $r = 40000$ км (высокая орбита) – $\Delta\eta_1 \approx 12^\circ$, а $\Delta\eta_2 \approx 1^\circ$. В силу этого, можно положить для оценки возмущений за виток траектории ИСЗ $\eta = \eta_{cp} = \text{const}$. Полученная таким образом величина изменения оскулирующего элемента за виток будет функцией угла η . Общий вид приращений за виток оскулирующих элементов орбиты из-за влияния Луны, Солнца и других небесных тел следующий:

$$\begin{pmatrix} \delta p \\ \delta \Omega \\ \delta i \\ \delta e \\ \delta \omega \end{pmatrix} = \xi \begin{pmatrix} q_1(e, \eta, w, i) \\ q_2(e, \eta, w, i) \\ q_3(e, \eta, w, i) \\ q_4(e, \eta, w, i) \\ q_5(e, \eta, w, i) \end{pmatrix}, \quad (5.92)$$

где $\xi = \frac{M_j}{M_0} \left(\frac{a}{r_j} \right)^3$. Причем a – большая полуось орбиты спутника, r_j – радиус-вектор возмущающего тела относительно центра Земли, M_j – масса возмущающего тела, M_0 – масса Земли. Чаще всего полагают, что r_j не изменяется со временем. Тогда, для Луны $\xi = \xi_1 = \xi_L \approx 0,56 \cdot 10^{-7} \left(\frac{a}{\bar{a}} \right)^3$, для Солнца $\xi = \xi_2 = \xi_C \approx 0,26 \cdot 10^{-7} \left(\frac{a}{\bar{a}} \right)^3$, где \bar{a} – экваториальный радиус Земли.

Входящий в правые части системы (5.92) угол η характеризует положение возмущающегося тела (рис. 5.8). На витке траектории спутника он считается неизменным. Однако, при исследовании орбиты спутника на больших временных интервалах появляется целесообразность оценки возмущений его орби-

ты за время полного оборота возмущающего тела относительно центрального тела (Земли) T_j . Для определения изменения некоторого элемента E_j за “ m ” целых оборотов можно воспользоваться формулой

$$E_j - E_{j0} = \sum_{k=1}^m \delta E_{jk}(\eta_{\text{ксп}}), \quad (5.93)$$

где δE_{jk} – изменение орбиты за k -тый оборот спутника, $\eta_{\text{ксп}}$ – некоторое среднее значение угла η за время k -ого оборота.

Формулу (5.93) при $\frac{r}{r_j} < 1$ можно заменить следующей:

$$E_j - E_{j0} = \int_{t_0}^t \delta E_j \frac{dt}{T_{\text{сп}}}, \quad (5.94)$$

где δE_j – изменение j -того элемента орбиты за один оборот спутника, $T_{\text{сп}}$ – период обращения спутника.

Принимая во внимание, что возмущающее тело движется по орбите, близкой к круговой, с почти постоянной скоростью, можно записать:

$$E_j - E_{j0} = \frac{T_j}{T_{\text{сп}}} \frac{1}{2\pi} \int_{\eta_0}^{\eta_0 + \omega_b(t-t_0)} \delta E_o \Delta \eta, \quad (5.95)$$

где ω_a – угловая скорость возмущающего тела.

В формуле (5.95) знак T_j должен совпадать со знаком ω_a . За время T_j одного оборота возмущающего тела угол η изменяется от η_0 до $\eta_0 + 2\pi$. Имея это ввиду, приращения оскулирующих элементов орбиты спутника за $T_{\text{сп}}$, определяемые формулами (5.92), можно считать длиннопериодическими, а вековыми считать возмущения за один виток траектории возмущающего тела (за время T_j). Т.о., это вековое отклонение произвольного оскулирующего элемента орбиты спутника определяется формулой:

$$\Delta E_j = \frac{1}{2\pi} \left| \frac{T_j}{T_{\text{сп}}} \right| \int_{\eta_0}^{\eta_0 + 2\pi} \delta E_j d\eta, \quad (5.96)$$

где $\frac{T_j}{T_{\text{сп}}}$ является целым числом. Формулой (5.96) можно также пользоваться при $\frac{T_j}{T_{\text{сп}}}$ дробном, если пренебречь изменением оскулирующего элемента за один оборот спутника.

Осуществляя интегрирование в соответствии с (5.96) для приращений элементов орбиты, определяемых равенством (5.92) можно получить следующие выражения для вековых уходов элементов за время T_j полного оборота возмущающегося тела:

$$\begin{aligned}\Delta\Omega_{\dot{a}} &= -\frac{3}{2}\xi \frac{\pi}{\sqrt{1-\dot{a}^2}} \frac{T_j}{T_{\text{нн}}} (1-\dot{a}^2 + 5\dot{a}^2 \sin^2 \omega) \cos i, \\ \Delta\omega_{\dot{a}} &= \frac{15}{2}\xi \frac{\pi}{\sqrt{1-\dot{a}^2}} \frac{T_j}{T_{\text{нн}}} \left[(\cos^2 i - 1 + \dot{a}^2) \sin^2 \omega + \frac{2}{5}(1-e^2) \right], \\ \Delta e_{\dot{a}} &= \frac{15}{4}\xi \pi e \frac{T_j}{T_{\text{нн}}} \sqrt{1-\dot{a}^2} \sin^2 i \sin 2\omega, \\ \Delta i_{\dot{a}} &= -\frac{15}{8}\xi \frac{\pi e^2}{\sqrt{1-\dot{a}^2}} \frac{T_j}{T_{\text{нн}}} \sin 2i \sin 2\omega, \\ \Delta a_{\dot{a}} &= 0.\end{aligned}\tag{5.97}$$

Так как $p = a(1-e^2)$, то $\Delta p_{\text{в}} = -2ae\Delta e_{\text{в}}$ (учитывая, что $\Delta a_{\text{в}} = 0$).

Численный анализ возмущений орбиты ИСЗ, подсчитанных по формулам (5.92) и (5.95) дает следующие результаты, приведенные в табличной форме 5.2. Анализ данных табл. 5.2 показывает, что влияние Луны и Солнца на орбиту спутника, близкую к Земле очень невелико. Однако за один год высота перигея может изменяться на несколько километров, а положение узла на 5 – 7 угловых минут.

Таблица 5.2

Исходные данные:

$$a = 7350 \text{ км}, e = 0,1; \xi_{\text{л}} = \xi_{\text{л}} \approx 0,85 \cdot 10^{-7}; \xi_{\text{с}} = 0,40 \cdot 10^{-7}; \left(\frac{T_{\text{л}}}{T_{\text{сп}}} \right) = 410; \left(\frac{T_{\text{с}}}{T_{\text{сп}}} \right) \approx 5000.$$

Элемент	Изменения за один оборот спутника		Изменения за один оборот возмущенного тела	
	Влияние Луны	Влияние Солнца	Влияние Луны	Влияние Солнца
Долгота узла Ω	<0,17"	<0,08"	<34"	<3,2'
Угловое расстояние перигея от узла ω	<0,29"	<0,14"	<2'	<11,3'
Наклонение орбиты i	<0,17"	<0,08"	<0,43"	<2,4"

Эксцентриситет орбиты e	$< 2 \cdot 10^{-7}$ < 1,5 м	$< 0,93 \cdot 10^{-7}$ < 0,6 м	$< 1,41 \cdot 10^{-4}$ < 0,3 км	$< 2,31 \cdot 10^{-4}$ < 1,7 км
Перигейное расстояние орбиты спутника	Суммарное воздействие < 2,1 м		Суммарное воздействие за один год < 5,1 км	

5.7 Определение времени существования КА

Время существования КА определяется продолжительностью полета спутника с момента его выведения на орбиту до входа в плотные слои атмосферы. На время существования спутника Земли оказывают влияние многие факторы, в том числе все рассмотренные выше. Так давление солнечных лучей и действие притяжения Луны и Солнца приводят к тому, что орбита КА совершает периодические колебания и при перемещении перигея в более плотные слои атмосферы увеличивается торможение. Например, вследствие воздействия Луны высота перигея ИСЗ «Эксплорер-6» (США) менялась каждые 3 месяца в пределах от 250 до 160 км. Вследствие этого, время существования спутника оказалось два года (вместо рассчитанных 20 лет при отсутствии воздействия Луны)

Сплюснутость Земли приводит к перемещению перигея орбиты без изменения расстояния от центра Земли. Если, например, перигей переместится из полярной области в экваториальную, то он будет расположен ближе к поверхности Земли и, значит, окажется в более плотных слоях атмосферы. Плотность атмосферы меняется в течение суток: на высоте 300 км в полдень плотность почти вдвое больше чем в полночь. Плотность верхней атмосферы заметно увеличивается с усилением солнечной активности. Условиям, при которых спутник прекращает свое существование, соответствуют элементы некоторой критической орбиты – минимальная высота $h_{кр}$ полета, минимальный период обращения $T_{кр}$ и т.д. Под критической, понимается такая орбита, на которой спутник может сделать один полный оборот. Критические значения высоты полета и периода обращения зависят от баллистического коэффициента $b = \frac{C_x S_M}{m}$ и па-

раметров атмосферы. Установлено, что при изменении « b » в диапазоне

$\left[0,002 \leq b \leq 2,0 \frac{\text{м}^3}{\text{кгс} \cdot \text{сек}^2}\right]$ величины $h_{\text{кр}}$ и $T_{\text{кр}}$ меняются сравнительно мало:

$108 \leq h_{\text{кр}} \leq 188 \text{ км}$, $86,5 \leq T_{\text{кр}} \leq 88,1 \text{ мин}$. Обычно критическую высоту характеризуют минимально возможной высотой полета $h_{\text{ед}} = 110 - 120 \text{ км}$ и минимально возможным периодом обращения $T_{\text{кр}} = 86,5 - 86,7 \text{ мин}$.

Эти значения справедливы для различных моделей атмосферы. Вследствие торможения в атмосфере эксцентриситет орбиты « e » постепенно уменьшается и становится практически равным нулю в последние сутки, предшествующие прекращению существования. В результате обработки многочисленных данных установлено, что для спутников, орбиты которых имеют перигей на высоте $200 - 300 \text{ км}$ и $e > 0,02$ уменьшение эксцентриситета до значений $e = 0,001 - 0,002$ практически совпадает (с точностью до одних – двух суток) с моментом прекращения существования КА.

Время существования определяется в результате решения дифференциальных уравнений для оскулирующих элементов орбиты (системы (5,34), (5,36), (5,39)). На ранних стадиях проектирования находят применение приближенные аналитические зависимости, а также зависимости, найденные на основании многочисленных исследований и расчетов, представленных в виде диаграмм. Приведем некоторые из этих зависимостей. В случае круговых орбит можно пользоваться соотношениями, приведенными в табл.5.3. Эти зависимости отвечают модели CIRA1961, которая соответствует периоду максимальной плотности атмосферы. Точность расчета времени существования по соотношениям табл.5.3 не хуже 15% получаемых фактических данных.

Таблица 5.3

№	Диапазон высот полета h [км]	Время существования $t_{\text{сум}}$ [суток]
1	200-250	$(-0,092 - 0,0005h) \frac{m}{S_M}$
2	250-300	$(-0,34 - 0,0015h) \frac{m}{S_M}$
3	300-350	$(-1,4 - 0,005h) \frac{m}{S_M}$

4	350-400	$(-3,1-0,01h) \frac{m}{S_M}$
---	---------	------------------------------

В работе [13] приводятся следующие зависимости для определения времени снижения КА с высоты h_1 на высоту $h_2 < h_1$ из-за сопротивления атмосферы в случае круговой орбиты:

$$\Delta t = t_1 - t_2 = \frac{F(h_1) - F(h_2)}{b_1}, \quad (5.98)$$

где $b_1 = \frac{b}{2} = \frac{1}{2} \frac{C_x S_M}{m}$ — конструктивный баллистический коэффициент,

$F(h) = \frac{1}{2\sqrt{\mu}} \int_0^h \frac{\partial h}{p(h)\sqrt{r}}$, $r = R + h$ — радиус круговой орбиты. Время существования

спутника на круговой орбите высотой h_0 определяется формулой:

$$t_{\text{поу}} = \frac{F(h_0)}{b_1}. \quad (5.99)$$

Значение функции $F(h)$ для изотермической модели атмосферы приводится в работе [13]. Таблица построена для диапазона высот 100 – 800 км. Ниже приводится фрагмент этой таблицы для высот 200 – 540 км, наиболее распространенных для ИСЗ (табл. 5.4).

Таблица 5.4

Высота $h, \text{км}$	$F(h),$ $\frac{\text{м}^3 \text{сут}}{\text{кгс} \cdot \text{сек}^2}$	Высота $h, \text{км}$	$F(h),$ $\frac{\text{м}^3 \text{сут}}{\text{кгс} \cdot \text{сек}^2}$	Высота $h, \text{км}$	$F(h),$ $\frac{\text{м}^3 \text{сут}}{\text{кгс} \cdot \text{сек}^2}$
200	0,0912	320	2,22	440	23,5
220	0,172	340	3,44	460	32,9
240	0,306	360	5,23	480	45,3
260	0,523	380	7,81	500	61,7
280	0,868	400	11,5	520	83,0
300	1,400	420	16,8	540	111

Для получения оценок времени существования в случае эллиптической орбиты можно использовать следующие зависимости [6, 7]:

$$t_{\text{сущ}} = \frac{3}{8} \frac{h_A - h_I}{a} \frac{T}{\left(-\frac{dT}{dt}\right)} \quad (5.100)$$

где h_A, h_I – высоты апогея и перигея орбиты [км], a – большая полуось орбиты [км], T – период обращения [сек], $\frac{dT}{dt}$ – скорость изменения периода обращения $\left[\frac{\text{сек}}{\text{сут}}\right]$.

Приведем данные расчета по формуле (5.100). Предположим, что ИСЗ 9.11.57 г. находился на орбите с параметрами $h_I = 210 \text{ км}$, $h_A = 810 \text{ км}$, для которой период обращения $T = 5610 \text{ сек}$ и большая полуось $a = 6880 \text{ км}$. Скорость изменения периода обращения $\left(-\frac{dT}{dt}\right)$ составляла $2,94 \frac{\text{сек}}{\text{сут}}$. Вычисление по формуле (5.100) дает $t_{\text{сущ}} = 60 \text{ суток}$. С использованием вычисленного времени существования $t_{\text{сущ}}$, датой прекращения полета спутника должна быть 8.01.58 г, а в действительности спутник упал на Землю 4.01.58 г. Т.о., получаем весьма близкий результат. В работе [12] приводятся примеры расчетов $t_{\text{сущ}}$ по аналитическим зависимостям, полученным с помощью разложения подынтегральных функций в формулах (5.81) в ряды по степеням эксцентриситета « e ». Эти зависимости имеют достаточно громоздкий вид. Гораздо проще использовать графическую методику. В работе [13] даны результаты расчета на ЭВМ времени существования ИСЗ на эллиптической орбите в функции высот перигея и апогея, наклона плоскости орбиты и начального положения перигея. Диапазон изменения переменных:

высот перигея, км	150 – 190 с шагом 10 км;
высот апогея, км	200 – 400 с шагом 10 км;
наклонений орбиты, град	45 – 90;
начального положения перигея, град	0 – 90.

Результаты получены интегрированием системы уравнений для оскулирующих элементов орбиты с учетом возмущающего влияния силы сопротивления атмосферы. Примерный вид графиков приводиться на рис. 5.9.

В заключение отметим, что ошибки расчета времени существования в связи с вариациями плотностей атмосферы могут составлять десятки процентов, а на больших высотах (более 500 км) и в годы максимума солнечной активности могут в несколько раз превышать прогнозируемое время существования спутника.

ГЛАВА 6 ТРАССА ИСКУССТВЕННОГО СПУТНИКА ЗЕМЛИ

В настоящей главе вводится понятие трассы искусственного спутника Земли (ИСЗ), анализируется характер трасс в зависимости от элементов орбиты, приводится алгоритм расчета трассы.

6.1 Понятие трассы ИСЗ

Предположим, что Земля имеет шаровую форму. Назовем проекцией спутника на земную поверхность точку, в которой прямая, соединяющая спутник с центром Земли, пересекает её поверхность. Проекция положения спутника Земли на её поверхность называется подспутниковой точкой. Совокупность подспутниковых точек называется трассой спутника. Если считать траекторию спутника невозмущенной, то его орбита (см. гл. 2) принадлежит невращающейся плоскости, проходящей через центр Земли. В этих условиях, если бы Земля не вращалась вокруг своей оси, то трассой спутника был бы большой круг, по которому плоскость орбиты спутника пересекала бы поверхность Земли. Вращение Земли приводит к существенной деформации трассы. Чтобы выявить закономерности трассы спутника, рассмотрим ту меридиональную плоскость, которая перпендикулярна плоскости орбиты ИСЗ (рис. 6.1). Спутник, двигаясь по орбите, проходит восходящий узел, при этом его широта, так же как и широта подспутниковой точки, (геоцентрическая, геодезическая или географическая) будет равна нулю. В дальнейшем будем пользоваться понятием геоцентрической широты φ' (см. гл. 1). Затем широта φ' спутника и подспутниковой точки

увеличивается, достигая максимального значения в точке максимального возвышения спутника над плоскостью экватора. В этой точке аргумент широты «и» равен 90° , а геоцентрическая широта спутника равна наклонению орбиты i . Если пользоваться понятием геоцентрической широты φ' , то в любой момент времени $\varphi'_{\text{сп}} = \varphi'_{\text{тр}}$, где $\varphi'_{\text{сп}}$ – геоцентрическая широта спутника, а $\varphi'_{\text{дд}}$ – геоцентрическая широта подспутниковой точки (трассы). После того, как спутник достиг максимального возвышения над плоскостью экватора, его геоцентрическая широта начинает уменьшаться. Таким образом, максимальная широта спутника и подспутниковой точки оказывается равной i . Когда спутник, пройдя нисходящий узел орбиты, окажется в южном полушарии, аналогично можно заключить, что максимальная южная широта спутника и его подспутниковой точки есть опять i . Таким образом, на вращающейся Земле трасса спутника оказывается некоторой кривой на поверхности Земли, лежащей в широтном поясе $[-i, +i]$, если $i < \frac{\pi}{2}$. Если $i > \frac{\pi}{2}$, то подспутниковые точки принадлежат широтному поясу $[i - \pi, \pi - i]$. В результате существуют зоны на поверхности Земли, которые не могут быть подспутниковыми. Эти зоны заштрихованы на рис. 6.1.

Форма трассы определяется зависимостью $\varphi'_{\text{тр}}(\lambda'_{\text{тр}})$ ($\lambda'_{\text{дд}}$ – долгота подспутниковой точки) на развертке поверхности Земли. Эта форма определяется главным образом наклонением орбиты и периодом обращения спутника. Благодаря тому, что трасса вычерчивается спутниками на вращающейся Земле, угол пересечения трассой экватора всегда отличается от наклонения орбиты. (В частности, для полярных орбит он не равен 90° , т.к. при пересечении экватора подспутниковая точка отклоняется к западу.)

Для прямых спутников с низкими околокруговыми орбитами и периодом обращения существенно меньшим 24 ч (возможное значение периода $T \cong 90$ мин) трасса напоминает синусоиду, многократно опоясывающую земной шар. На рис. 6.2 показан характер трассы таких спутников на двух витках орбиты. Если за начальный момент времени взять время прохождения восходящего узла ор-

биты t_Ω , то координаты подспутниковой точки равны: $\varphi'_{\delta\delta}(t_\Omega) = 0$; $\lambda'_{\delta\delta}(t_\Omega) = \lambda'_\Omega$, где λ'_Ω – долгота подспутниковой точки в момент прохождения восходящего узла. Если пренебречь возмущением долготы восходящего узла из-за несферичности Земли и влияния Луны и Солнца, то через виток траектории (в момент времени $t_\Omega + T$) координаты подспутниковой точки будут: $\varphi'_{\delta\delta}(t_\Omega + T) = 0$; $\lambda'_{\delta\delta}(t_\Omega + T) = \lambda'_\Omega - \omega_\zeta T$, где, как обычно, ω_ζ – угловая скорость суточного вращения Земли. Трассы двух соседних витков орбиты сдвинуты (к западу) на угол $\omega_\zeta T$ (рис. 6.2). На подобных трассах движение всюду направлено к северо-востоку или к юго-востоку, а в крайних северных и южных точках – на восток. Иная картина трассы будет иметь место в случае сильно вытянутых орбит (с большим радиусом апогея) и орбит с большими периодами обращения. В этих случаях Земля в своем вращении на некоторых широтах (особенно вблизи экватора) будет обгонять спутник и на трассе могут появиться «петли», так, что движение, по крайней мере, по части трассы будет для прямого спутника $\left(i < \frac{\pi}{2}\right)$ происходить в западном направлении. На рис. 6.3 представлена качественная картина трассы на одном витке траектории спутника с большим эксцентриситетом орбиты, апогей которой находится в северном полушарии и совпадает с точкой максимального возвышения над плоскостью экватора ($U=90^\circ$). Аргумент перицентра этой орбиты равен 270° . На рис. 6.4 показаны трассы с круговыми орбитами при $i=65^\circ$ и с очень большими периодами обращения: случай а) $T=20$ ч, б) $T=30$ ч.

Представляют интерес спутники с периодом обращения, кратным времени оборота Земли вокруг оси (т.е. звездными сутками – 23 ч 56 м 4 сек). Их иногда называют синхронными. Трасса такого спутника представляет собой замкнутую линию. Синхронный спутник периодически появляется над любой точкой трассы. Частным случаем синхронного спутника является суточный спутник – с периодом обращения равным звездным суткам. В случае если его орбита круговая, ее высота над Землей должна составлять ≈ 35786 км (радиус орбиты 42164 км). Трассы суточных спутников с круговыми орбитами и накло-

нением i , отличным от нуля, имеют форму восьмерки, перекрестие которой расположено в некоторой точке экватора. Эти трассы – «восьмерки» не опоясывают земной шар, а лежат в одной его стороне. Максимальная широта подспутниковой точки (высота «восьмерки») равна наклонению плоскости орбиты. Наконец, частным и чрезвычайно важным в практическом отношении случаем суточного спутника является стационарный спутник, круговая орбита (с прямым обращением) которого лежит в плоскости экватора. Трасса такого спутника вырождается в точку на экваторе, так как угловые скорости радиус-вектора такого спутника и Земли совпадают.

Описывая трассы спутников, мы считали их движение невозмущенным. Наиболее существенно на трассы низких спутников влияют возмущения от несферичности Земли. Стационарный спутник должен совершать долготные колебания благодаря тому, что Земля, помимо того, что сплюснута у полюсов, имеет также “поперечное сжатие” (экваториальное сечение Земли представляет собой не круг, а эллипс). Он должен также испытывать сравнительно сильное возмущающее влияние притяжений Солнца и Луны. Поэтому стационарные спутники снабжаются корректирующими двигательными установками, которые должны их удерживать над определенным пунктом земной поверхности. С этой целью на американских стационарных спутниках «АТС» используются экспериментальные электрические двигатели.

6.2 Расчет трассы

Построение трассы сводится к определению геоцентрических координат (широты φ' и долготы λ') подспутниковых точек в гринвичской системе координат $Ox_r y_r z_r$. Трасса начинается в определенный момент времени, но для построения и анализа трассы удобно в качестве начального момента времени использовать время прохождения восходящего узла орбиты t_Ω . На рис. 6.5 представлена схема построения трассы. Рассматривается случай околокруговой орбиты, характеризуемой высотой h и наклонением i .

На рис. 6.5 точка M_1 – подспутниковая точка, соответствующая моменту времени t движения спутника на орбите с учетом вращения Земли и смещения долготы восходящего узла $\delta\Omega$ из-за сжатия Земли. Точка M_0 соответствует движению спутника без учета указанных факторов. Из сферического треугольника AM_0B следует (рис. 6.5):

$$\sin \varphi'_0 = \sin u \sin i, \quad \sin \tilde{AB} = \frac{\operatorname{tg} \varphi'_0}{\operatorname{tg} i}. \quad (6.1)$$

Т.к. вращение Земли и смещение узла орбиты на широту точки M_0 не влияют, то $\varphi'_{\text{тр}} = \varphi'_0$.

Долгота подспутниковой точки в гринвичской СК для произвольного момента времени t равна:

$$\lambda'_{\text{тр}} = \lambda'_{\Omega} + \tilde{AB} - \omega_{\Sigma}(t - t_{\Omega}), \quad (6.2)$$

где ω_{Σ} – суммарная угловая скорость (скорость вращения Земли и прецессии узла орбиты), λ'_{Ω} – долгота подспутниковой точки в момент прохождения восходящего узла (т. А).

Смещение долготы восходящего узла $\delta\Omega$ определяется формулой (5.54):

$$\delta\Omega = \frac{-\varepsilon \cos i}{\mu p^2} u, \quad \delta\dot{\Omega} = \frac{-\varepsilon \cos i}{\mu p^2} \dot{u}, \quad \dot{u} = \frac{\sqrt{\mu p}}{r^2 j} \quad (j \approx 1),$$

где u – аргумент широты в момент времени t . В случае круговой орбиты: $p = r = R + h$ (R – радиус Земли);

$$u = vt = \sqrt{\frac{\mu}{(R+h)^3}} t, \quad \left(v = \frac{V_{\text{эд}}}{R+h} \right), \quad \dot{u} = v = \sqrt{\frac{\mu}{(R+h)^3}}.$$

Тогда

$$\omega_{\Sigma} = \omega_3 - \frac{\varepsilon \cos i}{\sqrt{\mu}(R+h)^{7/2}}, \quad (6.3)$$

$$\omega_3 = \frac{2\pi}{T_{\text{зв}}} (T_{\text{сд}} - \text{сдвиг}).$$

Разность времени можно выразить через аргумент широты:

$$t - t_{\Omega} = \frac{u}{2\pi} T, \quad (6.4)$$

где T – период обращения спутника по круговой орбите радиуса $r=R+h$:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{\mu}} = 2\pi \frac{(R+h)^{3/2}}{\sqrt{\mu}}.$$

Таким образом, при расчете трассы на интервале $0 \leq u \leq 2\pi$ с учетом (6.1), (6.2), (6.4) следует использовать следующие соотношения:

$$\begin{aligned} 1) \quad \varphi'_{\delta\delta} &= \arcsin(\sin i \sin u); \\ 2) \quad \lambda'_{\delta\delta} &= \lambda'_{\Omega} + \tilde{A}\hat{A} - \left(\frac{T}{T_{\zeta\hat{a}}} - \frac{\varepsilon \cos i}{\mu(R+h)^2} \right) u; \\ 3) \quad \tilde{A}\hat{A} &= \begin{cases} \arcsin \frac{\operatorname{tg} \varphi'}{\operatorname{tgi}} & \text{ïðè } 0 \leq u \leq \pi/2, \\ \pi - \arcsin \frac{\operatorname{tg} \varphi'}{\operatorname{tgi}} & \text{ïðè } \pi/2 \leq u \leq \frac{3}{2}\pi, \\ 2\pi - \arcsin \frac{\operatorname{tg} \varphi'}{\operatorname{tgi}} & \text{ïðè } \frac{3}{2}\pi \leq u \leq 2\pi. \end{cases} \end{aligned} \quad (6.5)$$

Из 1-ой формулы (6.5) следует, что $\varphi' = \varphi'_{\max} = \arcsin(\sin i) = i$ при $u = \pi/2$ и $\varphi' = \varphi'_{\min} = -\arcsin(\sin i)$ при $u = 3/2\pi$. Из 2-ой формулы (6.5) следует, что при изменении аргумента широты на 360° , начало трассы каждого последующего витка смещено относительно предыдущего на величину $\Delta\lambda'_a$:

$$\Delta\lambda'_a = -2\pi \left(\frac{\dot{O}}{T_{\zeta\hat{a}}} - \frac{\varepsilon \cos i}{\mu(R+h)^2} \right). \quad (6.6)$$

Отсюда также следует, что любая точка трассы на последующем витке смещена по долготе в западном направлении на одну и ту же величину $\Delta\lambda'_e$. Это смещение называется межвитковым сдвигом. Например, для высоты круговой орбиты 284 км (период $T=1,5$ ч) величина межвиткового сдвига составляет $22,5^\circ$ [10]. После полного поворота Земли (звездные сутки), витки трассы последующих суток будут каким-то образом располагаться относительно витков предыдущих суток.

Если в звездных сутках укладывается целое число периодов обращения спутника, то трасса, начиная с некоторого витка, повторяется. (Последнее справедливо при отсутствии возмущений, т.е. при $\omega_{\Sigma} = \omega_3$.) Если в звездных сутках

не содержится целое число периодов, то наблюдается сдвиг по долготе, который называется суточным сдвигом.

Проведенный анализ по межвитковому и суточному сдвигу справедлив и для эллиптических орбит, т.к. единственным параметром, определяющим рассмотренные эффекты, является период обращения спутника. Необходимо заметить, что на небольших интервалах времени (1 – 2 витка орбиты ИСЗ) долгота точки весеннего равноденствия $\lambda'_* \approx 0$ и, следовательно, $\lambda'_\Omega \approx \Omega$.

Формулы (6.5) справедливы при расчете трассы околокруговых орбит. Для расчета трассы эллиптических орбит следует использовать формулы (6.1), (6.2). Все приведенные выше зависимости учитывают влияние на характер трассы только одного возмущающего ускорения: от сжатия земного эллипсоида. В общем случае, при учете действия и других возмущающих факторов, можно рекомендовать следующий алгоритм расчета трассы.

1. Рассматривается система уравнений для оскулирующих элементов орбиты (5.34), (5.36), (5.39). Эта система решается численным интегрированием, и находятся оскулирующие элементы орбиты спутника $p, i, \Omega, \omega, e, \tau$.

2. По формулам (3.6) находятся декартовы координаты x, y, z спутника в инерциальной геоцентрической экваториальной системе координат $Oxyz$ (см. параграф.3.3).

3. Используя таблицу направляющих косинусов (табл. 3.4) и рис. 3.5, находим декартовы координаты x_r, y_r, z_r спутника в гринвичской (географической) СК, связанной с вращением Земли. А именно:

$$x_r = x \cos \lambda'_* + y \sin \lambda'_*; \quad y_r = -x \sin \lambda'_* + y \cos \lambda'_*; \quad z_r = z, \quad (6.7)$$

где λ'_* – долгота точки весеннего равноденствия.

Напомним (см. параграф.3.2), что $\lambda'_* = 360^\circ - S_a$, где S_a – гринвичское звездное время, которое находится по астрономическим ежегодникам.

4. Используя геометрические связи, определяем гринвичские угловые координаты подспутниковой точки $\varphi'_{тр}$ и $\lambda'_{тр}$. Широта подспутниковой точки: $\varphi'_{тр} = \varphi'_{сп} = \varphi'$, где $\varphi'_{сп}$ – геоцентрическая широта спутника. Имеем (рис. 6.5):

$\sin \varphi' = \frac{z_r}{r}$, где r – радиус-вектор спутника относительно центра Земли, а $z_r = z$.

Таким образом,

$$\varphi'_{\text{тр}} = \arcsin \frac{z}{r}. \quad (6.8)$$

Далее можем записать:

$$y_r = r \cos \varphi' \sin \lambda'_{\text{тр}},$$

откуда

$$\sin \lambda'_{\text{тр}} = \frac{y_r}{r \cos \varphi'}$$

или

$$\lambda'_{\text{тр}} = \arcsin \left(\frac{y_r}{r \cos \varphi'} \right). \quad (6.9)$$

Если рассматривать Землю как сжатый сфероид (эллипсоид вращения), то значение радиус-вектора r' подспутниковой точки определяется формулой [4]:

$$r' = a_3 \sqrt{\frac{1 - e_3^2}{1 - e_3^2 \cos^2 \varphi'}}, \quad (6.10)$$

где (см.гл.1) $a_3 = 6378,245$; $e_3^2 = 2\alpha_3 - \alpha_3^2$; $\alpha_3 = \frac{1}{298,3}$. Формулы (6.8) и (6.9)

решают поставленную задачу.

Заметим, что на практике, как правило, оказывается достаточным метод расчета трассы по формулам (6.1) и (6.2), а описанный выше общий метод может служить для оценки погрешности расчета.

РЕСУРСЫ ИНТЕРНЕТ

Фирмы и общественные организации

Airline Pilots Association: <http://www.alpa.org>

American Institute of Aeronautics and Astronautics: <http://www.aiaa.org>

American Mobile Satellite Corp.: <http://www.skycell.com>

Analog Devices Inc.: <http://www.analog.com>

Alpine Electronics: <http://www.alpinel.com>

Ashtech Inc.: <http://www.ashtech.com>

ATX Technologies: <http://www.track.com>

Comroad: <http://www.solidinfo.com>

Blue Marble Geographies: <http://www.blumarblegeo.com>

Delorme Mapping: <http://www.delorme.com>

Dimensions International Inc.: <http://www.dimensions-mtl.com>

Etak Inc.: <http://www.etak.com>

Garmin International: <http://www.garmin.com>

Geotek: <http://www.geotek.com>

The Goeken Group: <http://www.goeken.com>

Greenfield Associates: <http://www.greenf.com/greenf/>

Hewlett Packard: <http://www.hp.com>

Honeywell Inc.: <http://www.honeywell.com>

Hughes Electronics Corp.: <http://www.hughes.com>

Institute of Navigation: <http://www.ion.org>

ITS America: <http://www.itsa.org>

Liikuva Systems International: <http://www.liikkuva.com>

Megapulse: <http://www.megapulse.com>

Motorola Inc.: <http://www.mot.com>

Navitrak International Corp.: <http://www.navitrak.com>

Navstar Systems: <http://www.telecom.com/navstar>

Navsys Corp.: <http://www.navsys.com>

Odetics Inc.: <http://www.odetics.com>

Orbital Sciences Corp.: <http://www.orbital.com>

Pelorus Navigation Systems Inc.: <http://www.pelorus.ca>

Pro Tech: <http://www.ptm.com>

Raytheon Co.: <http://www.raytheon.com>

Rockwell Collins: <http://www.cca.rockwell.com>

RTCA: <http://www.rtca.org>

SiRF Technology: <http://www.sirf.com>

Trimble Navigation: <http://www.trimble.com>

WR Inc.: <http://www.galaxy.net.com/wri>

Xypoint: <http://www.xypoint.com>

Координационный научно-информационный центр: <http://www.glonass-center.ru>

Компания Геокосмос": <http://www.geokosmos.ru>

ЗАО НПП "Навгеоком": <http://www.agp.ru>

ГИС-ассоциация (является проектом компании Profound Solutions):
<http://www.allgis.ru>

Ижевский радиозавод: <http://www.irz.ru/products/navig/glonas>

Центр телематических решений: <http://telematica.ru>

ООО "Моринтех" (Морские информационные технологии): <http://www.ecdis.ru>

Библиографический список

1. Аксенов, Е.П. Теория движения ИСЗ. М.: Наука 1977.
2. Алексеев, К.Б. Маневрирование космических аппаратов. / К.Б. Алексеев, Г.Г. Бебенин, В.А. Ярошевский. М., 1970.
3. Андреевский, В.В. Динамика спуска космических аппаратов на Землю. М., 1970.
4. Балк, М.Б. Сборник задач по небесной механике и космодинамике. / М.Б. Балк, В.Г. Демин, А.Л. Куницын. М., 1972.
5. Дубошин, Г.Н. Небесная механика. Основные задачи и методы. М.1975.
6. Иванов, Н.М. Баллистика и навигация космических аппаратов. /Н.М. Иванов, А.А. Дмитриевский, Л.Н. Лысенко. М., 1986.
7. Иванов, Н.М. Баллистика и навигация космических аппаратов. /Н.М. Иванов, Л.Н. Лысенко. М., 2004.
8. Космонавтика. Энциклопедия. /Под ред. В.П. Глушко. М., 1985.
9. Левантовский, В.И. Механика космического полета в элементарном изложении. М., 1980.
10. Механика космического полета (М.С. Константинов, Е.Ф. Каменков, Б.П. Перельгин, В.К. Безвербый. /Под ред. В.П. Мишина). М., 1989.
11. Мишин, В.П. Основы проектирования летательных аппаратов. / В.П. Мишин, В.К. Безвербый, Б.М. Панкратов, Д.Н. Щеверов. М., 1985.
12. Основы теории полета и элементы проектирования искусственных спутников Земли. /Под ред. М.К. Тихонравова. М., 1974.
13. Полет космических аппаратов. Примеры и задачи. Справочник. /Под общей ред. Г.С. Титова. М., 1990.
14. Разыграев, А.П. Основы управления полетом космических аппаратов и кораблей. М., 1977.
15. Санников, В.А.. Математические модели динамики летательных аппаратов. / Санников В.А., Шалыгин А.С. Ленинград, 1988.

16. Скребушевский, Б.С. Управление полетом беспилотных космических аппаратов./ Б.С.Скребушевский. М.: «Владмо», 2003. 436 с.
17. Справочное руководство по небесной механике и астродинамике. /Под ред. Дубошина Г.Н. М.: Наука, 1976.
18. Тарасов, Е.В. Космонавтика. М., 1977.
19. Чепмен, Д.Р. Приближенный аналитический метод исследования входа тел в атмосферы планет. М., 1962.
20. Ярошевский, В.А. Вход в атмосферу космических летательных аппаратов. М., 1988.

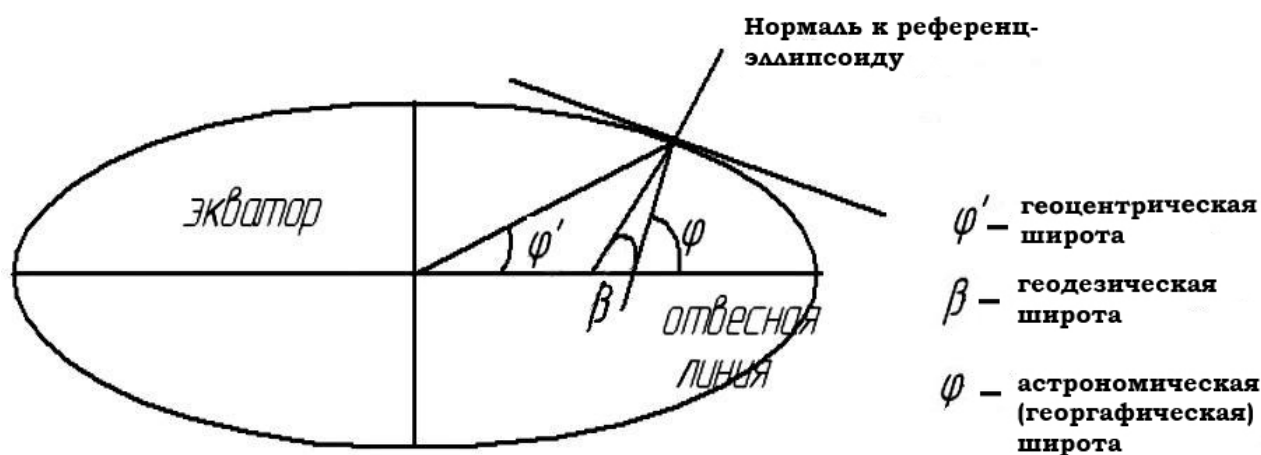


Рис. 1.1.

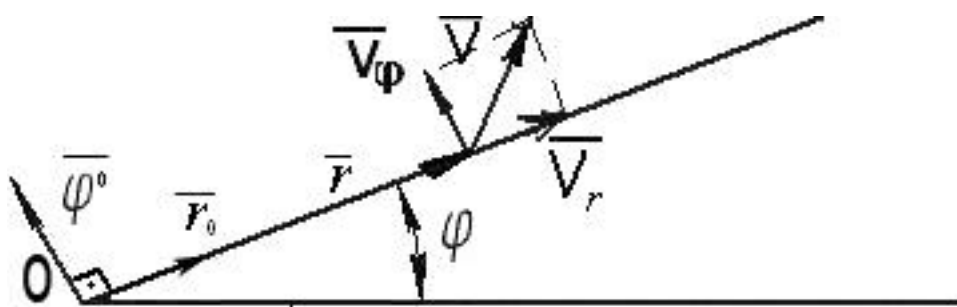


Рис. 2.1

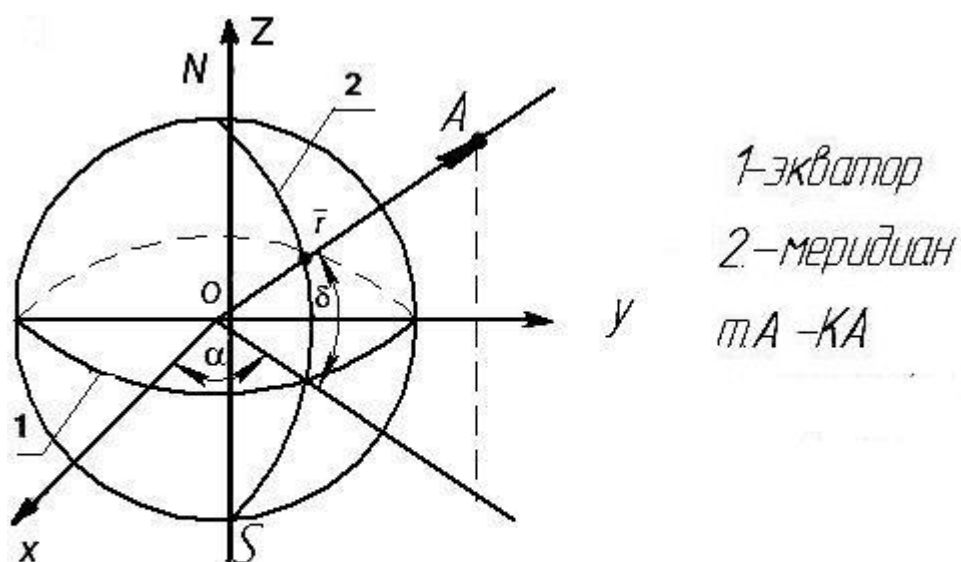


Рис. 3.1

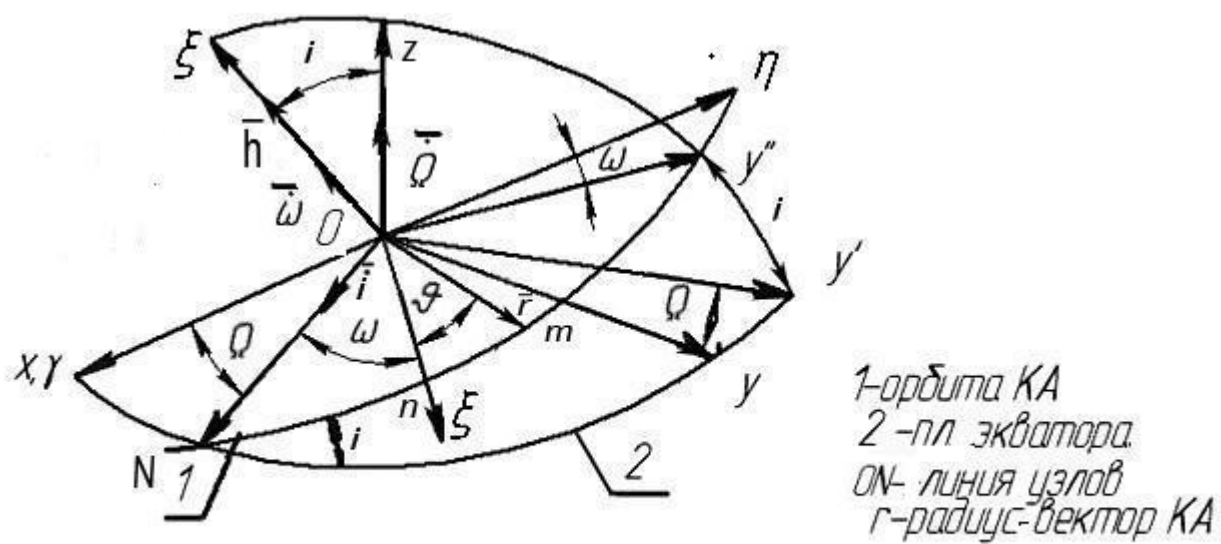


Рис. 3.2

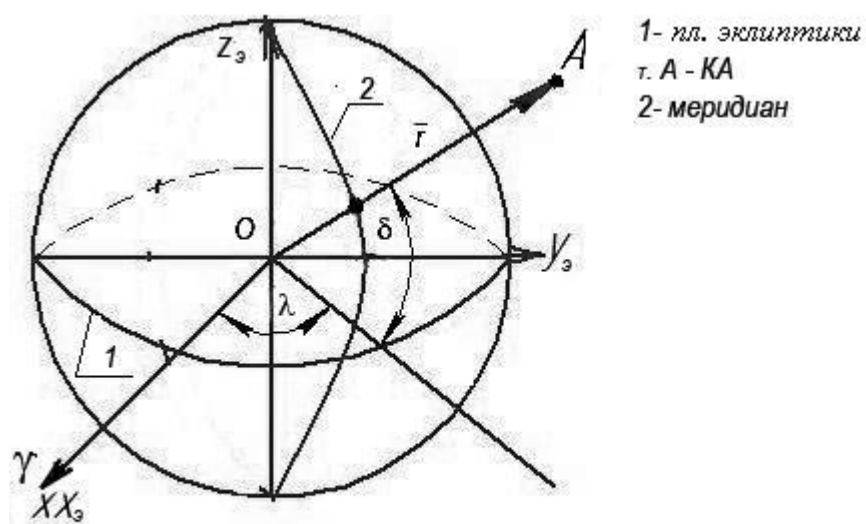
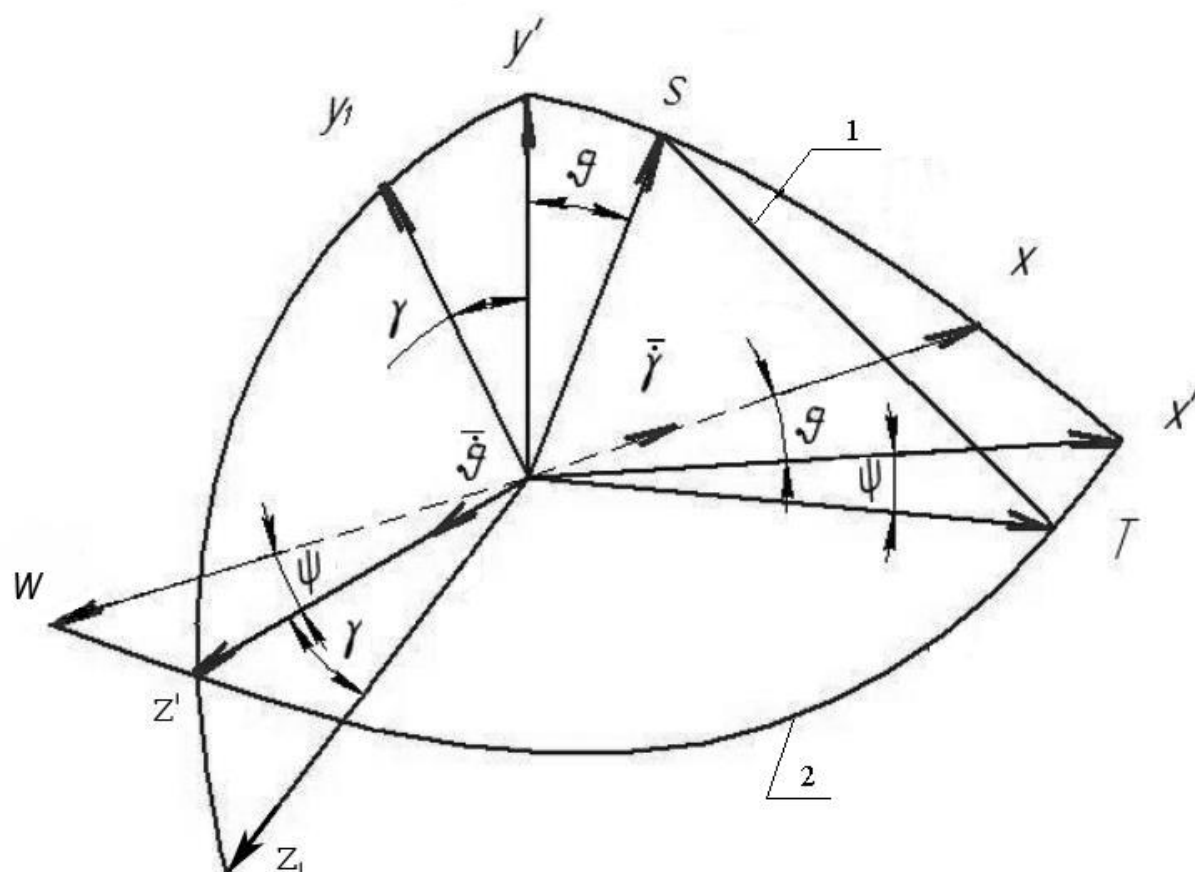


Рис. 3.3



1. Плоскость орбиты
2. Плоскость горизонта

Рис. 3.7

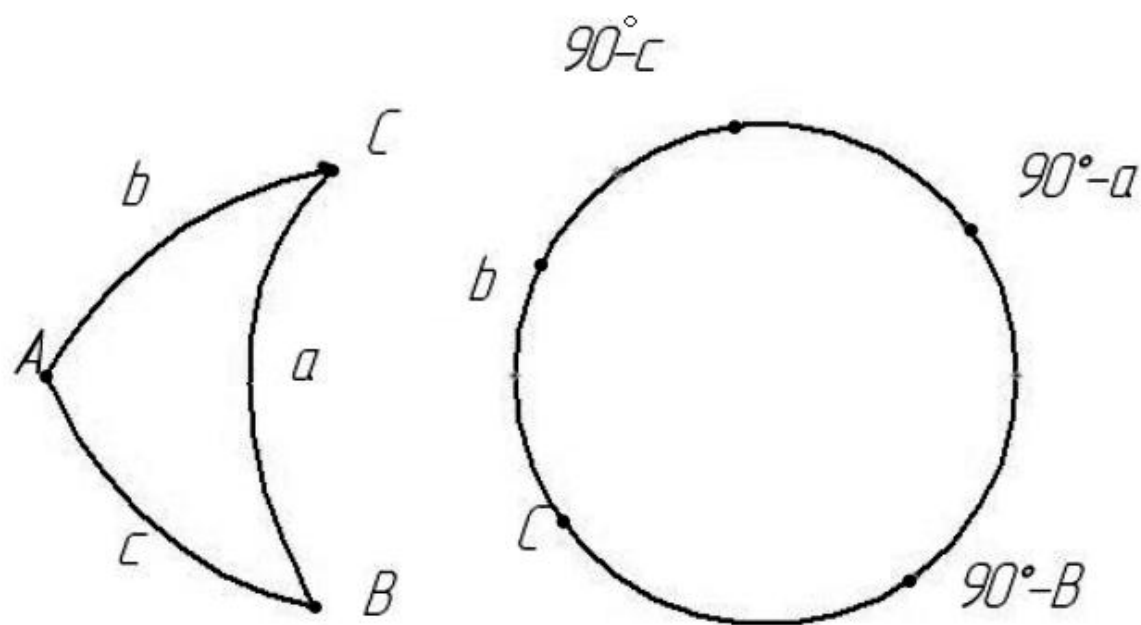


Рис. 3.8. Правила Непера

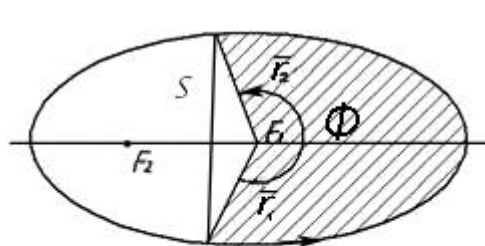


Рис. 4.1 а

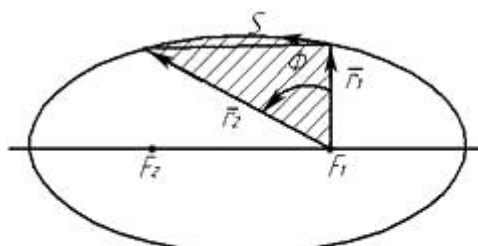


Рис. 4.1 б

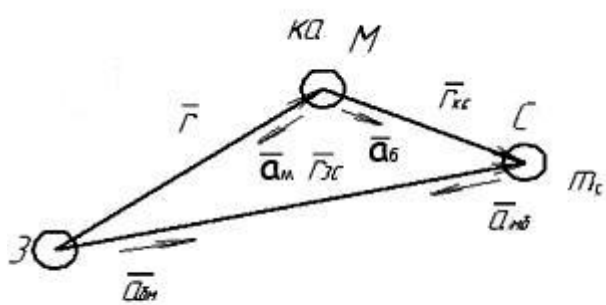
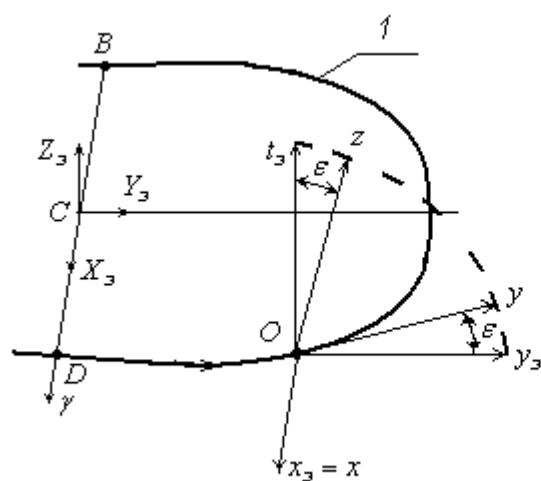
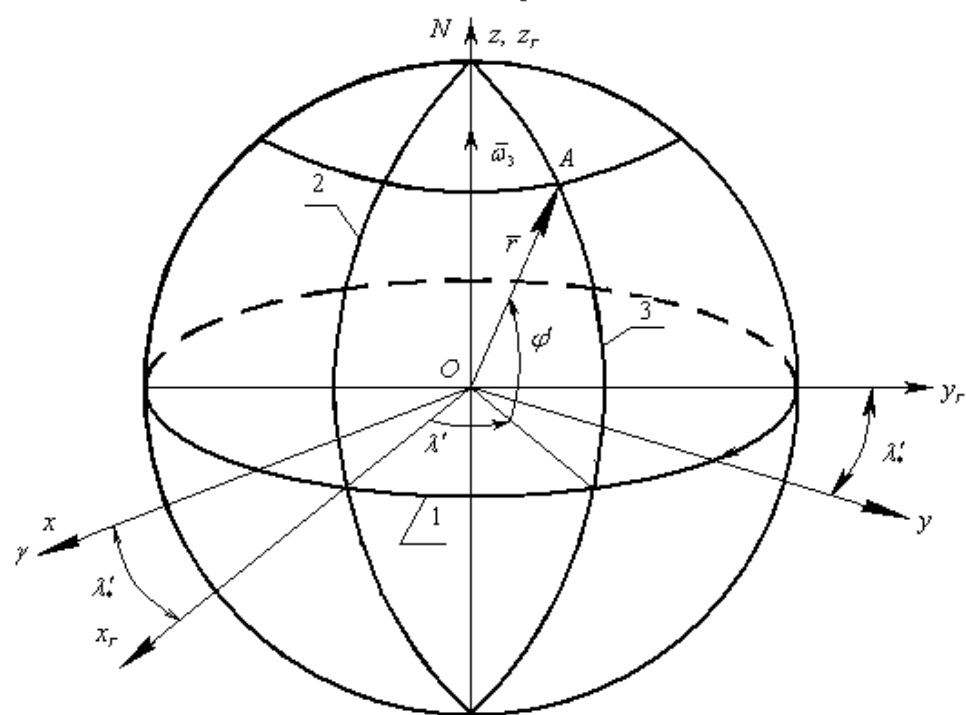


Рис. 4.2



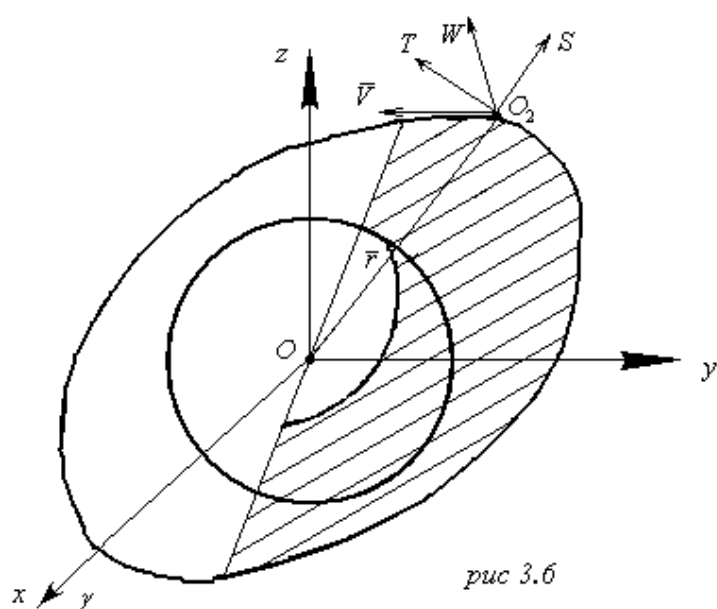
1 - Орбита Земли
 т. В - положение Земли в день
 весеннего равноденствия.
 т. С - центр Солнца
 т. О - центр Земли
 пл. CX_3Y_3 - пл. эклиптики

рис. 3.4



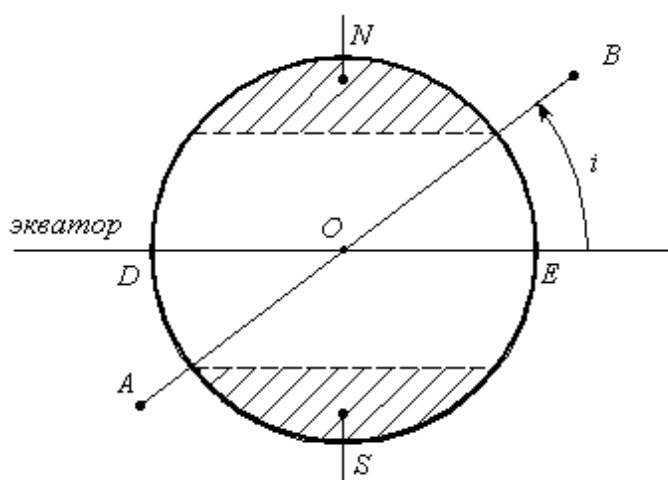
1 - экватор
 т. О - центр Земли
 т. O_1 - центр масс КА

рис 3.5



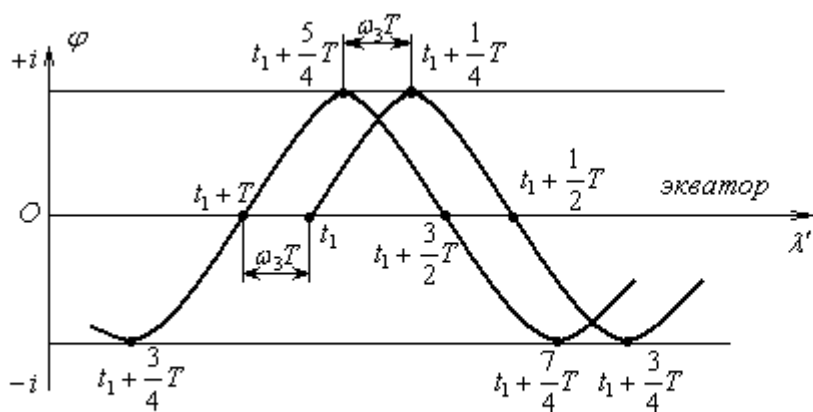
l - орбита
 m, O - центр Земли
 m, O_1 - центр масс КЗ

рис 3.6



m, O - центр Земли
 AB - след пл. Орбиты.
 m, B - точка наибольшего воздействия
 спутника относительно пл-и экватора.
 N, S - географические полюса Земли

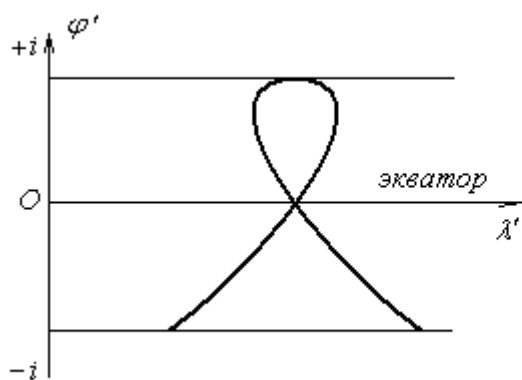
рис 6.1



Трасса спутника на
 развертке поверхности
 Земли

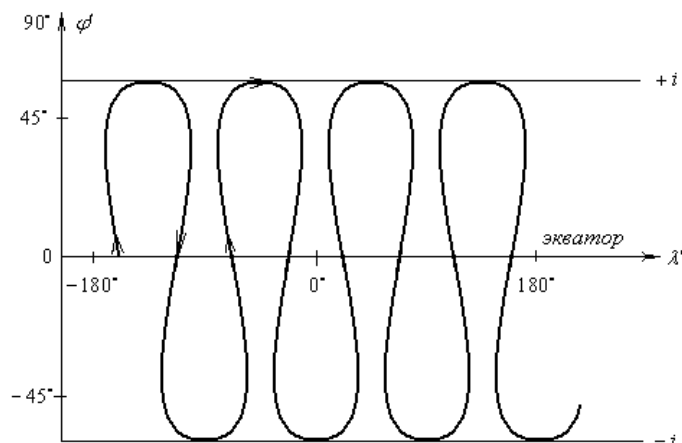
T - период орбиты

рис 6.2

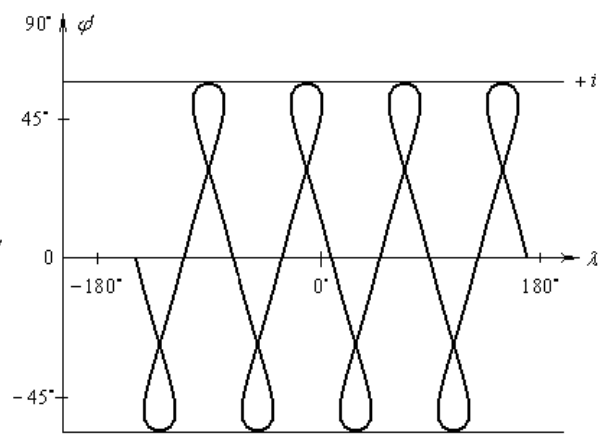


Часть трассы
спутника с большим
эксцентриситетом
орбиты.

рис. 6.3



а) круговая орбита
 $i = 65^\circ$ $T = 20$ час



б) круговая орбита
 $i = 65^\circ$ $T = 30$ час

рис. 6.4

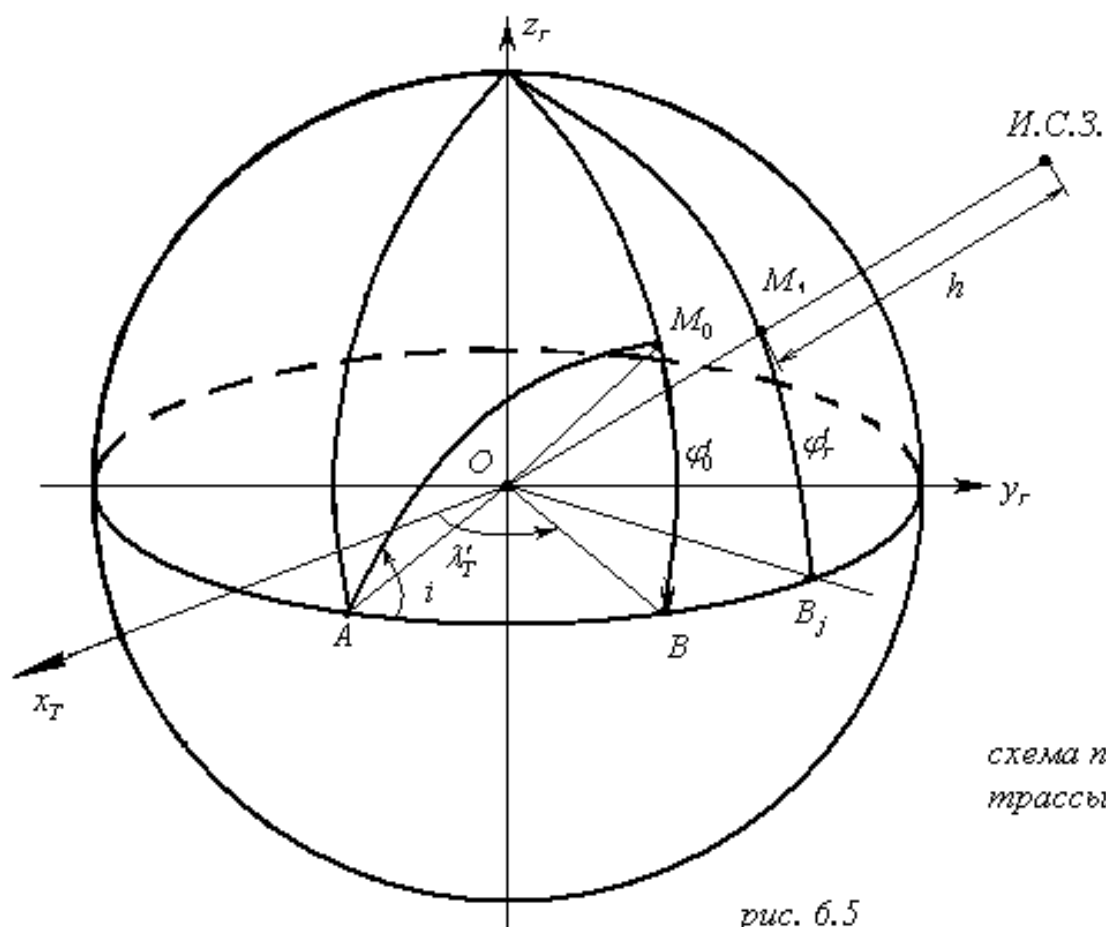
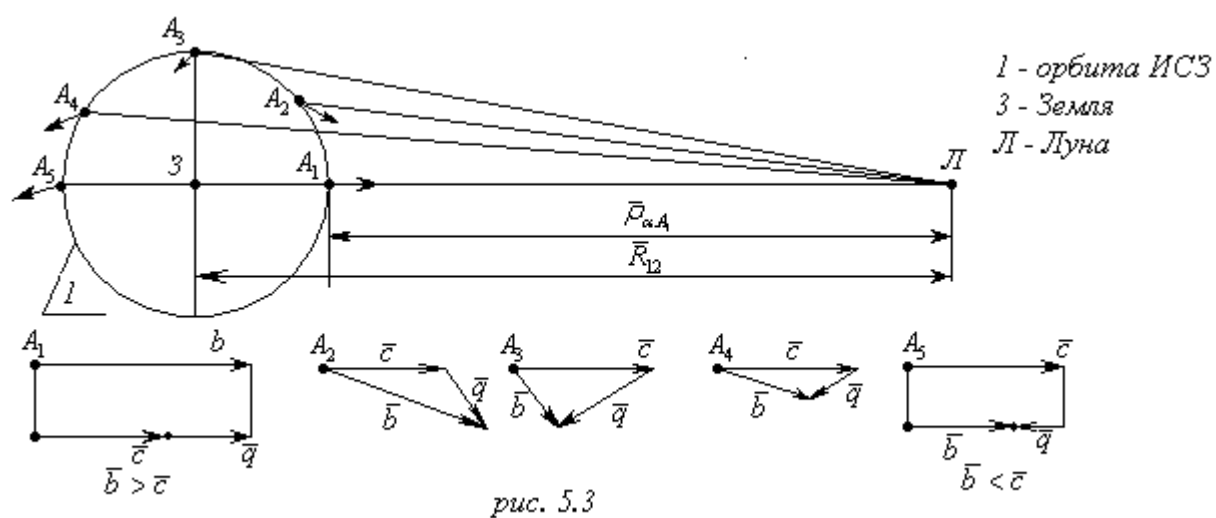
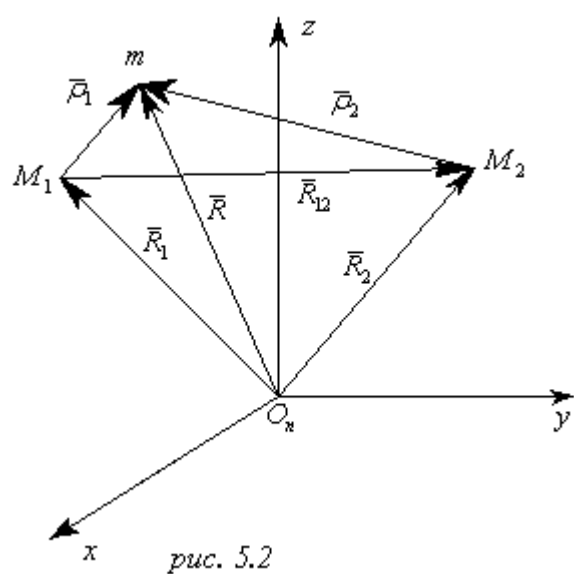
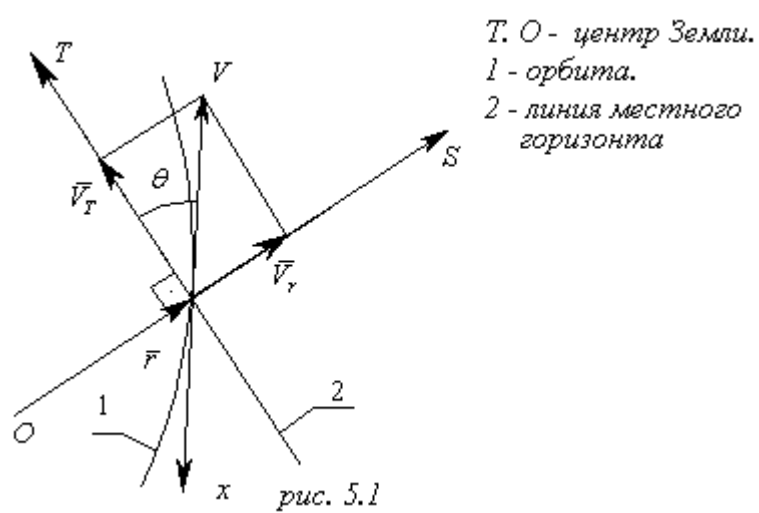
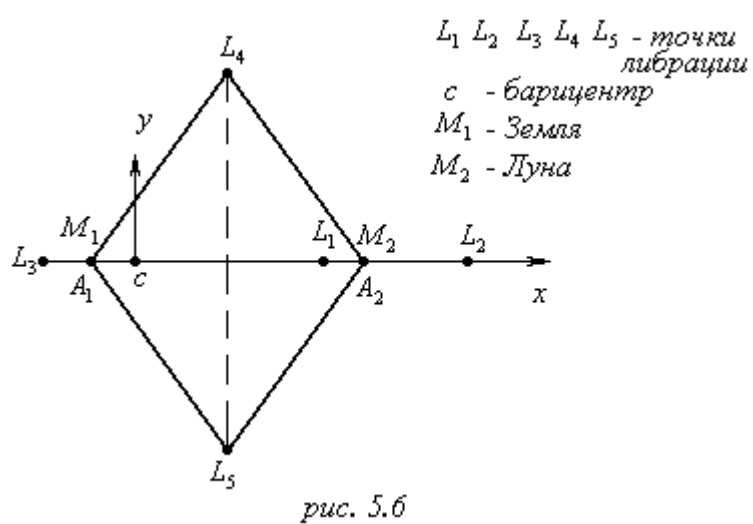
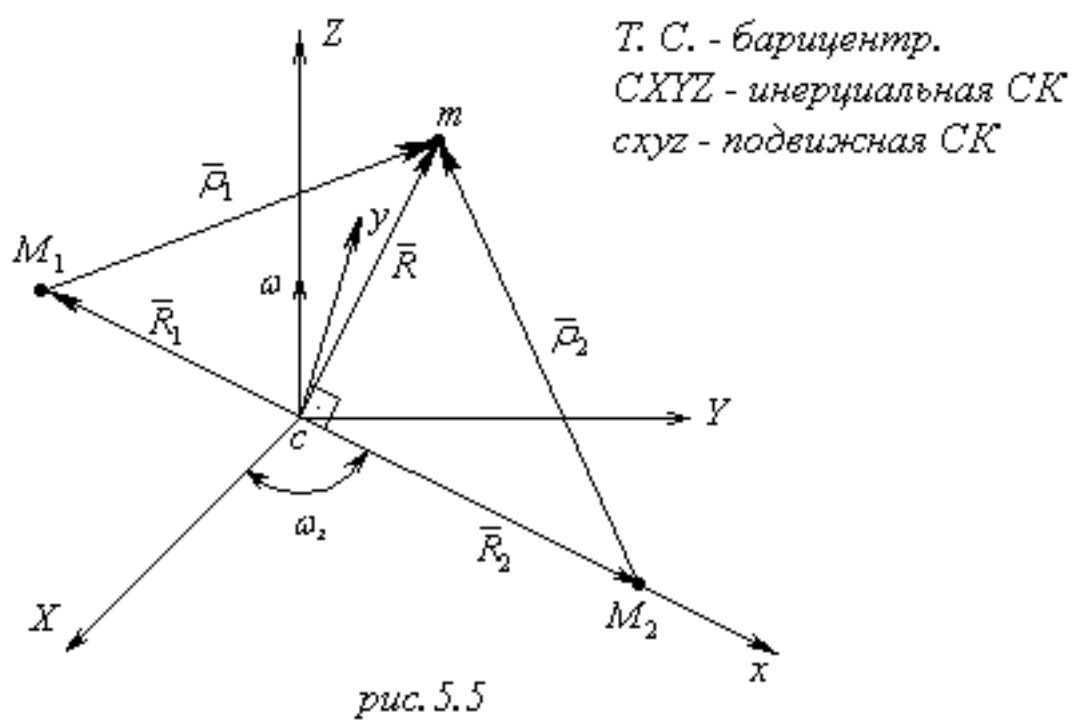
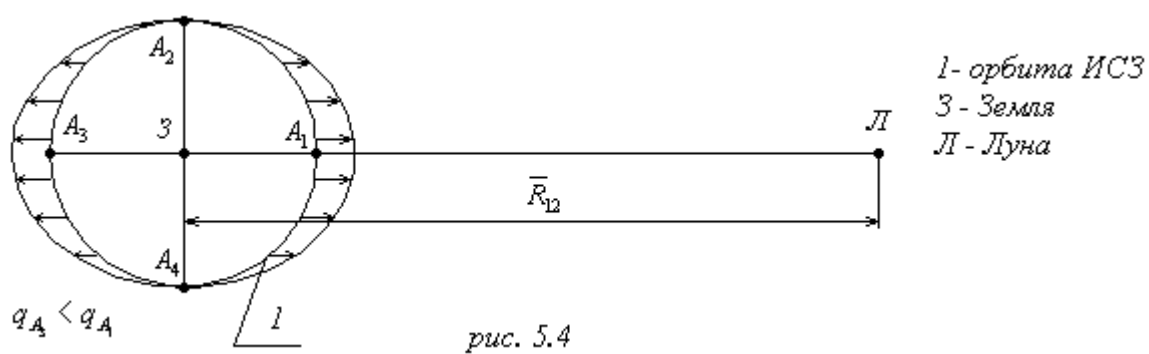
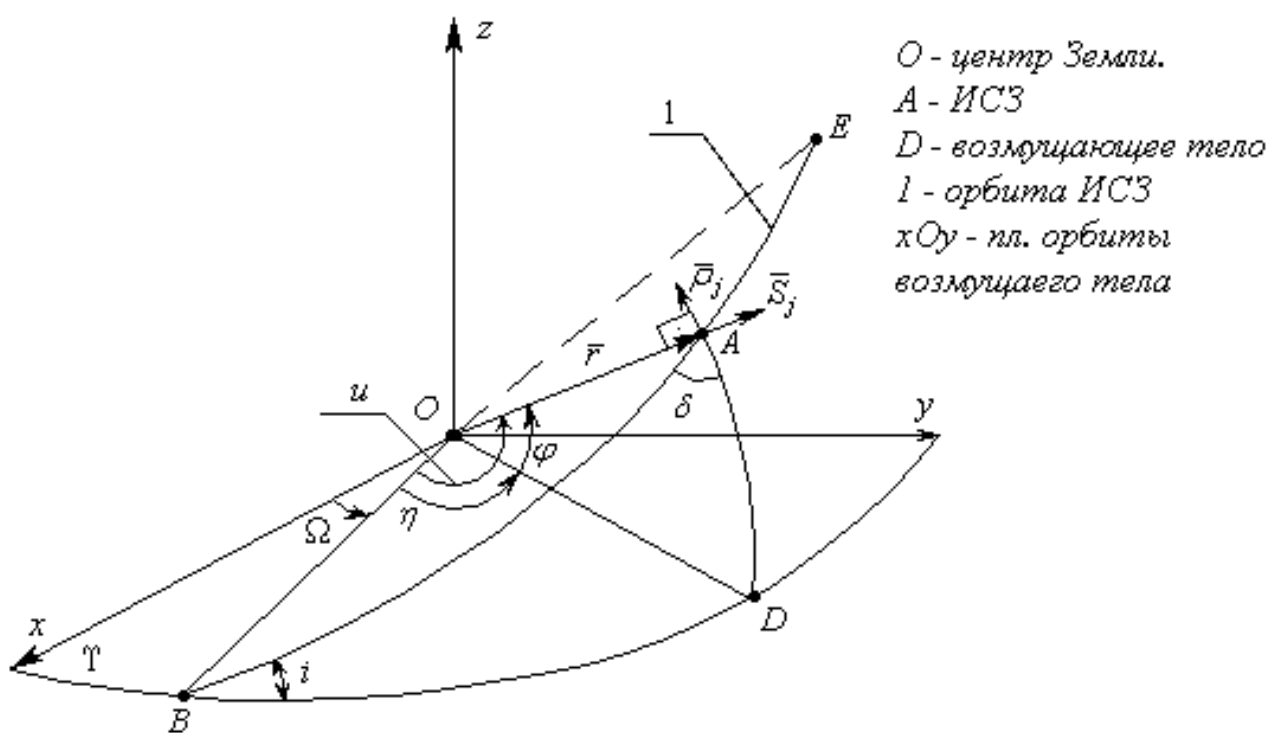
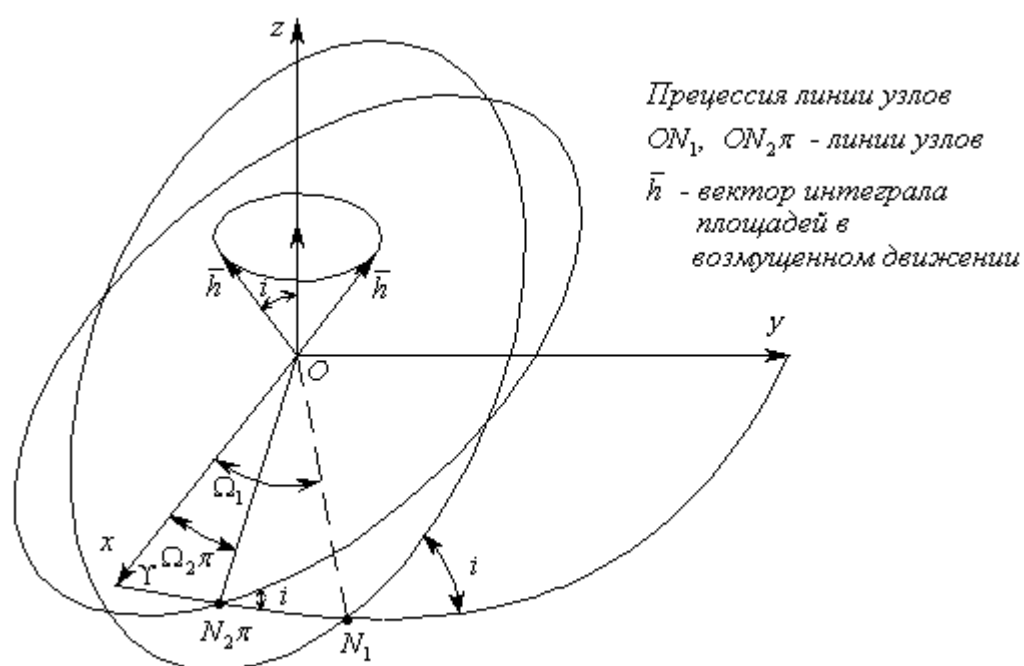


схема построения
трассы

рис. 6.5







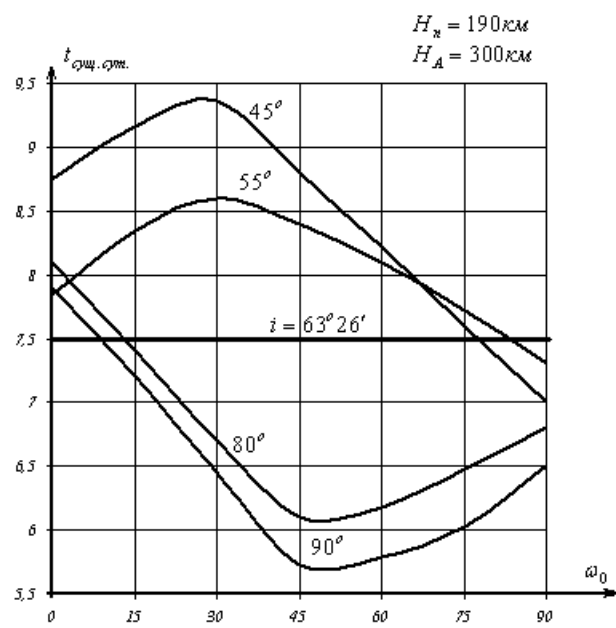
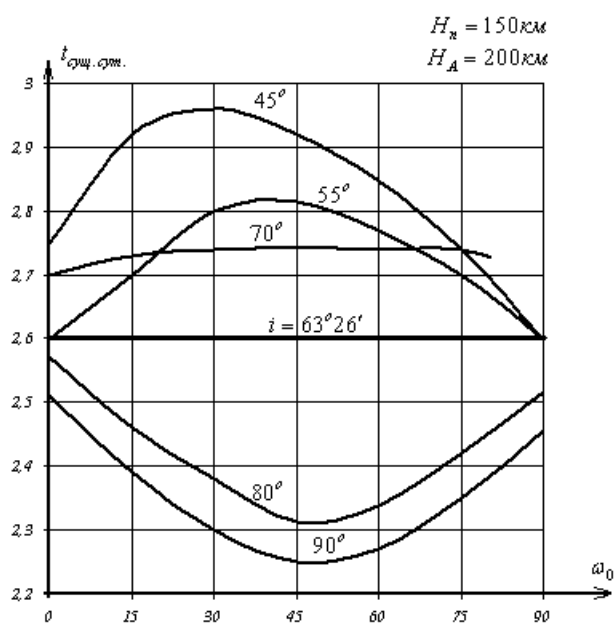


рис. 5.9