Plan del curso

Profesor:

Yannic VARGAS.
Correo: yv@synergy.vision

Horario (tentativo):

lunes, 8h a 9h30, Honey Comb.
jueves, 8h a 9h30, Honey Comb.

Objetivo del curso:

Hacer un estudio detallado de conceptos y resultados clásicos del análisis matemático, las probabilidades y la teoría de la medida, con énfasis en la aplicación a las finanzas.

Material previo:

El curso está estructurado de manera que todos los temas se aborden en profundidad, a partir de nociones básicas vistas en clase. Sin embargo, muchos temas que anteceden a este curso no serán discutidos por motivos de tiempo. En las referencias siguientes se pueden encontrar material para completar los tópicos que anteceden a este curso:

- Bloch, Ethan, Proofs and Fundamentals, Birkhaüser, 2000.
- Maia, Manuel, Lógica proposicional, teoremas y demostraciones, 2012. https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/b/b4/Logica_y_demostraciones.pdf
- Sibley, Thomas, Foundations of Mathematics, John Wiley & Sons 2009.

Contenido:

Parte I: Análisis real

Conjuntos y funciones: operaciones, conjuntos numéricos, relaciones, funciones, cardinalidad.

Sistema numérico real y complejo: propiedades algebraicas, estructura de orden, completitud, inducción matemática, espacios Euclídeos.

Estructuras algebraicas: semigrupos y grupos, espacios vectoriales, transformaciones lineales, espacios vectoriales y cocientes, álgebras.

Sucesiones numéricas: límite de una sucesión, sucesiones monótonas, subsucesiones, límite inferior y superior.

Sucesiones y series: límite de una función, límite inferior y superior, funciones continuas, propiedades, continuidad uniforme.

Diferenciación: definición y ejemplos, el Teorema del Valor Medio, funciones convexas, funciones inversas, Regla de L'Hospital, Teorema de Taylor en $\mathbb{R}$, método de Newton.

Integración de Riemann: integral de Riemann-Darboux, propiedades de la integral, evaluación de la integral, fórmula de Stirling, versión integral del Teorema del Valor Medio, estimación de la integral, integrales impropias, la integrabilidad según Riemann, funciones a variación acotada, la integral de Riemann-Stieltjes.

Series numéricas infinitas: definición y ejemplos, series con términos no-negativos, criterios de convergencia, convergencia condicional y absoluta, sucesiones dobles y series.

Sucesiones y series de funciones: convergencia de sucesiones de funciones, propiedades del límite de funciones, convergencia de las series de funciones, series de potencia.

Funciones en varias variables: transformaciones lineales, diferenciación, Principio de la Contracción, Teorema de la Función Inversa, Teorema de la Función Implícita, Teorema del Rango, determinantes, derivadas de orden superior, diferenciación de integrales.

Integración de formas diferenciales: integración, aplicaciones de primitivas, cambio de variables, formas diferenciales, cadenas y símplices, Teorema de Stoke, formas cerradas y formas exactas, análisis vectorial.

Parte II: Principios de topología

Espacios métricos.

Espacios lineales y normados: normas y seminormas, completación de un espacio normado, series infinitas en espacios normados, sumas no-ordenadas en espacios normados, transformaciones lineales acotadas, álgebras de Banach.

Espacios topológicos: abiertos y cerrados, sistemas de entornos, bases de entornos, topología relativa, nets.

Continuidad en espacios topológicos: propiedades generales, topologías iniciales, topología producto, topología cociente, espacio de funciones continuas, conjuntos F-sigma y G-delta.

Espacios topológicos normados: Lema de Urysohn, Teorema de Extensión de Tietze.

Espacios topológicos compactos: convergencia en espacios compactos, compacidad del producto cartesiano, continuidad y compacidad.

Espacios métricos totalmente acotados.

Equicontinuidad.

Teorema de Stone-Weierstrass.

Espacios topológicos localmente compactos: propiedades generales, funciones a soporte compacto, funciones que se anulan en al infinito, compactificación a un punto.

Espacio de funciones diferenciables.

Particiones de la unidad.

Conexidad.

Espacios convexos: familias de seminormas, Teorema de Separación y de Prolongamiento, Teorema de Krein-Milman.

Parte III: Medida e integración

Conjuntos medibles: introducción, espacios medibles, medidas, espacios medibles completos, medida externa y medibilidad, extensión de una medida, medida de Lebesgue, medida de Lebesgue-Stieltjes, conjuntos especiales.

Funciones medibles: transformaciones medibles, funciones numéricas medibles, funciones simples, convergencia de funciones medibles.

Integración: construcción de la integral, propiedades básicas, conexiones con la integral de Riemann en $\mathbb{R}^n$, teoremas de convergencia, integración sobre una medida producto, aplicaciones del Teorema de Fubini.

Espacios L^p: definición y propiedades generales, aproximación en L^p, convergencia en L^p, integrabilidad uniforme, funciones convexas y desigualdad de Jensen.

Diferenciación: medidas con signo, medidas complejas, continuidad absoluta de medidas, diferenciación de medidas, funciones a variación acotada, funciones absolutamente continuas.

Análisis de Fourier en $\mathbb{R}^n$: convolución de funciones, la transformada de Fourier, funciones de rápido decrecimiento, análisis de Fourier de medidas en $\mathbb{R}^n$.

Medidas en espacios localmente compactos: medidas de Radon, Teorema de Representación de Riesz, productos de medidas de Radon, convergencia "vague", Teorema de Representación de Daniell-Stone.

PARTE IV: ANÁLISIS FUNCIONAL

Espacios de Banach: espacios normados, separación de conjuntos convexos, Teorema del Prolongamiento, duales de los espacios ℓ^p, convergencia débil, Teorema de Banach-Steinhaus, espacios reflexivos, operadores contínuos y compactos, Teorema de Fredholm-Riesz, aplicaciones abiertas y grafos cerrados, caso complejo.

Espacios localmente convexos: propiedades generales, funcionales lineales contínuos, Teoremas de Separación de Hahn-Banach, algunas construcciones.

Topologías débiles en espacios normados: topología débil, espacios reflexivos, espacios uniformemente convexos.

Espacios de Hilbert: principios generales, ortogonalidad, bases ortonormales, el adjunto del espacio de Hilbert.

Teoría de operadores: tipos de operadores, operadores compactos y de rango finito, el Teorema Espectral para operadores normales compactos, el álgebra del grupo L^1, representaciones, grupos abelianos localmente compactos.

Álgebras de Banach: principios básicos, Teoría Espectral, el espectro de un álgebra, Teoría de Gelfand, el caso no-unitario, cálculo de operadores.

PARTE V: APLICACIONES

Distribuciones: teoría general, operaciones en distribuciones, distribuciones a soportes compactos, convolución de distribuciones, Teoría de Sobolev.

Análisis en grupos localmente compactos: grupos topológicos, medida de Haar, representaciones, grupos abelianos localmente compactos.

Análisis en semigrupos: semigrupos con topologías, funciones débilmente quasi-periódicas, la estructura de los semigrupos compactos, funciones fuertemente quasi-periódicas, semigrupo de operadores.

Teoría de probabilidades: variables aleatorias, independencia, esperanza condicional, sucesiones de variables aleatorias independientes, martingalas a tiempo discreto, procesos estocásticos, movimiento browniano.

Integración estocástica: integral de Ito para procesos simples, integral de Ito generalizada, integral de Ito como una martingala.

Aplicación a las finanzas: el proceso de precios de Stock, portafolios autofinanciados, opciones de llamadas, opción de precios de Black-Scholes.

REFERENCIAS:

Apostol, Thom, Mathematical Analysis, 2nd ed. Addison-Wesley, 2000

R. Ash and C. Doleans-Dade, Probability and Measure Theory, 2nd Ed., Academic Press, San Diego, 2000.

H. Brezis, Functional Analysis, Sobolev Spaces, and Partial Differential Equations, Springer-Verlag, New York, 2011.

J. Conway, A Course in Functional Analysis, Springer-Verlag, New York, 1990.

Dudley, Richard, Real Analysis and Probability, Cambridge University Press, 2002.

G. Folland, Real Analysis. Modern Techniques and Their Applications, 2nd Ed. John Wiley & Sons, New York, 1999.

H. Junghenn, Option Valuation: A First Course in Financial Mathemtics, CRC Press, Boca Raton, 2012.

H. Junghenn, A Course in Real Analysis, CRC Press, Boca Raton, 2015.

S. Lang, Real and Functional Analysis, 3rd Ed., Springer-Verlag, New York, 1993.

I. Rana, An Introduction to Measure and Integration, 2nd Ed., Graduate Studies in Mathematics Vol. 45, AMS, Providence, 2002.

Rudin, Walter, Principles of Mathematical Analysis, 3rd ed. McGraw-Hill, 1976.

S. Shreve, Stochastic Calculus for Finance, Springer-Verlag, New York, 2004.

Strang, Gilbert, Linear Algebra and Its Application, 4th ed. Thomson Brooks/Cole, 2006.

EVALUACIÓN:

La evaluación consistirá de una serie de trabajos y exposiciones orales a lo largo del semestre.