Teoría de Conjuntos

A continuación presentaremos una breve introducción a la teoria de conjuntos, introduciendo definiciones y algunas demostraciones de propiedades de los mismos.

Conjuntos

```
Los __conjuntos__ generamente se definen como una colección de objetos, no tienen dimensión ni orden, lo
```

La forma matemática que usaremos para representarlos es la siguiente:

- A los conjuntos los denotaremos con letras mayúsculas, por ejemplo: A, B, Ω.
- Los elementos del conjunto los denotaremos con letras minusculas, ejemplo : a, ω, x.
- Los elementos se colocaran entre llaves $\{\}$ y se separaran con comas ,.
- Los elementos de un conjunto se pueden representar de dos maneras:
- Colocando todos los elementos de la colección.
- Mediante una regla o propiedad que cumplan los elementos. La estructura en esta parte es colocar el nombre de los elementos seguido de : o | (simbolos que significan tal que) y luego la propiedad que cumplen dichos elementos, esto se leen como los elementos tales que cumplen cierta propiedad.

```
Los números naturales menores que 6, está colección de números son 1, 2, 3, 4, 5. Llamemos a este conjur

$$X=\{ 1, 2, 3, 4, 5\}=\{ x\in \mathbb N : x<6 \}$$
```

- Cuando un elemento x está en un conjunto X se denota mediante el simbolo $\in$, es decir $x \in X$ y se lee como "x pertenece a el conjunto X".
- Para indicar que un elemento no está en un conjunto, se usa el simbolo $\notin$, es decir $x \notin X$ y se lee como "x no pertenece al conjunto X".

```
Los **subconjuntos** son conjuntos de elementos tomados de algún conjunto, se denotan con el simbolo $\s
```

- $B \subseteq A$ se cumple si los elementos del conjunto B están en el conjunto A.
- Si $B \subseteq A$ y $A \subseteq B$ entonces $A = B$.

```
El conjunto que no tiene elementos lo definiremos como el **conjunto vacío**, lo denotaremos por $\empty
Definiremos el conjunto universal como el que contiene todos los posibles elementos de algún fenómeno pa
```

- Para todo elemento x entonces $x \notin \emptyset$.
- Para todo elemento x entonces $x \in \Omega$.
- $\emptyset \subseteq X \subseteq \Omega$.

TODO: Existe una forma de representar elementos y es mediante los **diagramas de Veen**

Unión de Conjuntos

```
Supongamos que tenemos dos conjuntos $A$ y $B$, la __unión__ de estos dos conjuntos es un nuevo conjunto

$$
\begin{equation}
A\cup B = \{ x\in \Omega\ :\ x\in A \quad o \quad x\in B\}
(\#eq:union)
\end{equation}
```

$$

Entonces podemos decir que un elemento x está en $A \cup B$ si y solo si $x \in A$ ó $x \in B$. Mediante esta definición tenemos:

- $A \cup \emptyset = A$, la unión de un conjunto cualquiera A con el conjunto vacío $\emptyset$ siempre dará el conjunto A.
- $A \cup A = A$
- $A \cup \Omega = \Omega$, la unión de un conjunto cualquiera A con el conjunto universal Ω dará el conjunto universal ya que $A \subseteq \Omega$.

Propiedades de la unión de conjuntos

1. $A \subseteq A \cup B$ y $B \subseteq A \cup B$

Para demostrarlo tomemos un elemento $x \in A$, por @ref(eq:union) x este elemento pertenece a la unión ya que pertenece a uno de los dos conjuntos que lo conforman, así $x \in A \cup B$, como esto se cumple para cualquier elemento de A entonces $A \subseteq A \cup B$.

En el segundo caso utilicemos un elemento $x \in B$, igualmente por @ref(eq:union) $x \in A \cup B$, y como tomamos cualquier elemento del conjunto B tenemos que $B \subseteq A \cup B$.

2. $A \cup B = B \cup A$, llamada **propiedad conmutativa** de la unión de conjuntos.

Recordemos que no importa el orden como se colocan los elementos de un conjunto.

Ahora por @ref(eq:union) tenemos que:

$$\begin{aligned}
A \cup B &= \{x \in \Omega : x \in A \; o \; x \in B\} \\
&= \{x \in \Omega : x \in B \; o \; x \in A\} \\
A \cup B &= B \cup A
\end{aligned}$$

3. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, llamada **propiedad asociativa de la unión** de conjuntos.

Esta igualdad la demostraremos basandonos en la doble contención.

Veamos primero que $(A \cup B) \cup C \subseteq A \cup (B \cup C)$

Tomemos un elementos $x \in (A \cup B) \cup C$ por @ref(eq:union) tenemos

$$\begin{aligned}
x \in (A \cup B) \cup C &\Rightarrow x \in (A \cup B) \; o \; x \in C \\
&\Rightarrow x \in A \; o \; x \in B \; o \; x \in C \\
&\Rightarrow x \in A \; o \; x \in (B \cup C) \\
&\Rightarrow x \in A \cup (B \cup C)
\end{aligned}$$

Así $(A \cup B) \cup C \subseteq A \cup (B \cup C)$.

Ahora veamos que $A \cup (B \cup C) \subseteq (A \cup B) \cup C$

Tomemos un elementos $x \in A \cup (B \cup C)$ por @ref(eq:union) tenemos

$$\begin{aligned}
x \in A \cup (B \cup C) &\Rightarrow x \in A \; o \; x \in (B \cup C) \\
&\Rightarrow x \in A \; o \; x \in B \; o \; x \in C \\
&\Rightarrow x \in (A \cup B) \; o \; x \in C \\
&\Rightarrow x \in (A \cup B) \cup C
\end{aligned}$$

Como esto se cumple para cualquier elemento entonces $A \cup (B \cup C) \subseteq (A \cup B) \cup C$.

Para concluir

$$
\begin{aligned}
(A\cup B)\cup C\subseteq A\cup(B\cup C) \quad & \text{y} \quad A\cup(B\cup C)\subseteq(A\cup B)\cup C\\
\Rightarrow (A\cup B)\cup C \quad & = A\cup(B\cup C)
\end{aligned}
$$

Intersección de Conjuntos

```
Supongamos que tenemos los conjuntos $A$ y $B$, la __intersección__ de estos dos conjuntos es un nuevo c

$$
\begin{equation}
A\cap B=\{x\in \omega\ :\  x\in A\quad y \quad x\in B \}
(\#eq:intersec)
\end{equation}
$$
```

Asi un elemento x está en $A\cap B$ si y solo si $x\in A$ y $x\in B$, y consecuencia de esto tenemos:

- $A\cap\emptyset=\emptyset$, cualquier conjunto A intersectado con el conjunto vacío $\emptyset$ es el conjunto vacío, no hay elementos comunes entre ellos.
- $A\cap A=A$
- $A\cap\Omega=A$, ya que cualquier conjunto es subconjunto del conjunto universal $A\subseteq\Omega$.

```
Supongamos que tenemos dos conjuntos distintos del conjunto vacío,$A$ y $B$ si la intersección de estos
```

En cambio si entre ellos hay elementos comunes entonces decimos que los conjuntos se intersectan.

Propiedades de la intersección de conjuntos

1. $A\cap B\subseteq A$ y $A\cap B\subseteq B$

Tomemos un elemento $x\in A\cap B$, por @ref(eq:intersec) tenemos que ese elemento tiene que pertenecer a ambos conjuntos, así $x\in A$ y como se cumple para cualquier elemento que pertenece a la intersección se tiene que $A\cap B\subseteq A$. Para la otra contención igualmente por @ref(eq:intersec) tenemos que ese elemento $x\in B$ y así $A\cap B\subseteq B$.

2. $A\cap B=B\cap A$, llamada **propiedad conmutativa de la intersección** de conjuntos.

Aplicando la propiedad de que el orden en los elementos del conjunto no importa y @ref(eq:intersec) tenemos:

$$
\begin{aligned}
A\cap B \quad & =\{x\in\Omega : x\in A\ y\ x\in B\}\\
& =\{x\in\Omega : x\in B\ y\ x\in A\}\\
A\cap B \quad & = B\cap A
\end{aligned}
$$

3) $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$, llamada **propiedad asociativa en la intersección** de conjuntos.

Igualmente probaremos esto utilizando la doble contención.

Primero veamos que $(A\cap B)\cap C\subseteq A\cap(B\cap C)$.

Tomemos un elemento $x\in(A\cap B)\cap C$, por @ref(eq:intersec) tenemos

$$
\begin{aligned}
x\in(A\cap B)\cap C \quad & \Rightarrow x\in(A\cap B)\ y\ x\in C\\
& \Rightarrow x\in A\ y\ x\in B\ y\ x\in C\\
& \Rightarrow x\in A\ y\ x\in(B\cap C)\\
& \Rightarrow x\in A\cap(B\cap C)
\end{aligned}
$$

Así $(A\cap B)\cap C\subseteq A\cap(B\cap C)$.

Para la otra contención, $A \cap (B \cap C) \subseteq (A \cap B) \cap C$, tomemos un elemento $x \in A \cap (B \cap C)$, y realizando operaciones similares que en el caso anterior tenemos:

$$
\begin{aligned}
x \in A \cap (B \cap C) \quad &\Rightarrow x \in A \text{ y } x \in (B \cap C) \\
&\Rightarrow x \in A \text{ y } x \in B \text{ y } x \in C \\
&\Rightarrow x \in (A \cap B) \text{ y } xC \\
&\Rightarrow x \in (A \cap B) \cap C
\end{aligned}
$$

Por lo tanto $A \cap (B \cap C) \subseteq (A \cap B) \cap C$.

Diferencia de Conjuntos

```
La __diferencia__ de dos conjuntos $A$ y $B$, la denotaremos con el simbolo $\setminus$ ó con $-$, $A\se

$$
\begin{equation}
A\setminus B= A-B =\{x\in \Omega\ :\ x\in A \ y\ x\notin B\}
(\#eq:diferencia)
\end{equation}
$$
```

Así un elemento $x \in A \setminus B$ si y solo si $x \in A$ y $x \notin B$. Consecuentemente tenemos:

- $A \setminus \emptyset = A$
- $A \setminus A = \emptyset$
- $A \setminus \Omega = \emptyset$
- Si $A \subseteq B$ entonces $A \setminus B = \emptyset$

Probaremos esto por reducción al adsurdo.

Supongamos que el conjunto $A \setminus B$ es distinto del vacío, tomemos $x \in A \setminus B$ por definición $x \in A$ y $x \in B$ pero esto es una contradicción ya que por hipótesis A es un subconjunto de B, por lo tanto no existe nigún elemento dentro de la diferencia, así $A \setminus B = \emptyset$.

- $A \setminus B \neq B \setminus A$

```
Supongamos $A=\{1,2\}$ y $B=\{3,2\}$, entonces $A\setminus B=\{ 1\}$ y $B\setminus A=\{ 3\}$
```

Complemento de un conjunto

```
El __complemento__ de un conjunto $A$ lo denotaremos como $A^c$, consta de los elementos del espacio mue

$$
\begin{equation}
A^c=\{x\in \Omega\ :\ x\notin A\}
(\#eq:complemento)
\end{equation}
$$
```

Un elemento $x \in A^c$ si y solo si $x \notin A$, consecuentemente:

- $A^c = \Omega \setminus A$, el complemento de un conjunto es igual a la diferencia entre el universo y el conjunto.
- $\Omega^c = \emptyset$, el complemento del conjunto universal es el vacío.

- $\emptyset^c = \Omega$, el complemento del vacío es el conjunto universal.
- Para todo conjunto A tenemos que $(A^c)^c = A$.

Propiedades de Conjuntos

1. Si $A \subseteq C$ y $B \subseteq C$ entonces $A \cup B \subseteq C$

Tomemos un elemento cualquier $x \in A \cup B$, por definición de la unión de conjuntos tenemos

$$\begin{aligned} x \in A \cup B \quad & \Rightarrow x \in A \text{ ó } x \in B \\ & \Rightarrow x \in C \text{ ó } x \in C \text{ ya que } A \subseteq C \text{ y } B \subseteq C \\ & \Rightarrow x \in C \end{aligned}$$

Así $A \cup B \subseteq C$.

---

2. Si $A \subseteq B$ y $A \subseteq C$ entonces $A \subseteq B \cap C$

Tomemos un elemento x cualquiera del conjunto A, entonces como $x \in A$ y por hipótesis se tiene que

$$\begin{aligned} A \subseteq B \quad & \Rightarrow x \in B \\ A \subseteq C \quad & \Rightarrow x \in C \end{aligned}$$

Entonces $x \in (B \cap C)$.

---

3. $A \setminus B = A \cap B^c$ restar un conjunto es igual a intersectarlo con su complemento.

Se demostrará con la doble contención.

Primero veamos que $A \setminus B \subseteq A \cap B^c$

Tomemos un elemento cualquiera $x \in A \setminus B$, por definición de la diferencia tenemos:

$$\begin{aligned} x \in A \setminus B \quad & \Rightarrow x \in A \text{ y } x \notin B \\ & \Rightarrow x \in A \text{ y } x \in B^c \\ & \Rightarrow x \in (A \cap B^c) \end{aligned}$$

Así probamos que $A \setminus B \subseteq A \cap B^c$.

Ahora hagamos el camino inverso, probemos que $A \cap B^c \subseteq A \setminus B$.

Tomemos $x \in A \cap B^c$, por @ref(eq:intersec) tenemos:

$$\begin{aligned} x \in (A \cap B^c) \quad & \Rightarrow x \in A \text{ y } x \in B^c \\ & \Rightarrow x \in A \text{ y } x \notin B \\ & \Rightarrow x \in A \setminus B \end{aligned}$$

Por lo tanto $A \cap B^c \subseteq A \setminus B$.

Como se cumplen ambas contenciones, se tiene que $A \setminus B = A \cap B^c$.

---

4. $A \subseteq B$ si y solo si $B^c \subseteq A^c$.

($\Rightarrow$)

Por hipótesis tenemos que $A \subseteq B$. Tomemos un elemento cualquiera $x \in B^c$, por @ref(eq:complemento) y usando la hipótesis tenemos:

$$x \in B^c \Rightarrow x \notin B \Rightarrow x \notin A \Rightarrow x \in A^c$$

Como esto se cumple para cualquier elemento de B^c, se tiene que $B^c \subseteq A^c$.

($\Leftarrow$)

En este sentido tenemos por hipótesis que $B^c \subseteq A^c$. Tomemos un elemento cualquiera $x \in A$, por propiedades del complemento y usando la hipótesis comprobemos que este elemento también pertenece a B.

$$x \in A \Rightarrow x \notin A^c \Rightarrow x \notin B^c \Rightarrow x \in B$$

Por lo tanto $A \subseteq B$.

Leyes Distributivas

1. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Esta demostración se hará por doble contención, para probar así la igualdad.

($\subseteq$)

Tomemos un elemento $x \in A \cap (B \cup C)$ por @ref(eq:intersec) tenemos:

$$\begin{aligned} x \in A \cap (B \cup C) \quad & \Rightarrow x \in A \text{ y } x \in (B \cup C) \\ & \Rightarrow x \in A \text{ y } x \in B \text{ ó } x \in C \\ & \Rightarrow x \in A \text{ y } (x \in B \text{ ó } x \in C) \end{aligned}$$

De aquí se desprenden dos casos

- $x \in A$ y $x \in B \Rightarrow x \in (A \cap B)$
- $x \in A$ y $x \in C \Rightarrow x \in (A \cap C)$

Entonces $x \in (A \cap B)$ ó$x \in (A \cap C) \Rightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Así probamos que $A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$

($\supseteq$)

Por @ref(eq:intersec) y @ref(eq:union) tenemos

- $A \cap B \subseteq A$ y $A \cap C \subseteq A$
- $A \cap B \subseteq B \subseteq B \cup C \Rightarrow A \cap B \subseteq B \cup C$
- $A \cap C \subseteq C \subseteq B \cup C \Rightarrow A \cap C \subseteq B \cup C$

Por lo tanto

- $A \cap B \subseteq A \cap (B \cup C)$
- $A \cap C \subseteq A \cap (B \cup C)$

De aquí

$$(A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq A \cap (B \cup C)$$

Como las dos contenciones se cumplen tenemos $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

2. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Igualmente se demostrará por la doble contención.

$(\subseteq)$

Sabemos que $B \cap C \subseteq B$ y $B \cap C \subseteq C$ por lo tanto

$A \cup (B \cap C) \subseteq A \cup B$ y $A \cup (B \cap C) \subseteq A \cup C$, así

$$A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$(\supseteq)$

Para demostrar esta contención tomemos un elemento cualquiera $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$, es decir, $x \in (A \cup B)$ y $x \in (A \cup C)$, de aquí se desprenden dos casos:

- Si $x \in A$

Como el elemento está en el conjunto A también estará en $A \cup (B \cap C)$.

- Si $x \notin A$

Como el elemento no está en A pero pertenece a $(A \cup B)$ y $(A \cup C)$, entonces $x \in B$ y $x \in C$ por lo tanto $x \in (B \cap C)$, entonces $x \in A \cup (B \cap C)$

En ambos casos $x \in A \cup (B \cap C)$. Como esto se cumple para cualquier elemento, entonces tenemos finalmente que

$$(A \cup B) \cap (A \cup C) \subseteq A \cup (B \cap C)$$

Podemos concluir entonces que

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Leyes de Morgan

1. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

$(\subseteq)$

Supongamos que tenemos un elemento cualquiera $x \in (A \cup B)^c$, por @ref(eq:complemento) tenemos:

$$\begin{aligned} x \in (A \cup B)^c \quad & \Rightarrow x \notin A \cup B \\ & \Rightarrow x \notin A \text{ y } x \notin B \\ & \Rightarrow x \in A^c \text{ y } x \in B^c \\ & \Rightarrow x \in A^c \text{ y } x \in B^c \\ & \Rightarrow x \in A^c \cap B^c \end{aligned}$$

Como se cumple para cualquier elemento, entonces $(A \cup B)^c \subseteq A^c \cap B^c$.

$(\supseteq)$

Para esta contención tomemos un elemento cualquiera $x \in A^c \cap B^c$, por @ref(eq:intersec) de conjuntos tenemos

$$\begin{aligned} x \in A^c \cap B^c &\Rightarrow x \in A^c \text{ y } x \in B^c \\ &\Rightarrow x \notin A \text{ y } x \notin B \\ &\Rightarrow x \notin (A \cup B) \\ &\Rightarrow x \in (A \cup B)^c \end{aligned}$$

Por lo tanto tenemos que $A^c \cap B^c \subseteq (A \cup B)^c$

Como se cumplen las dos contenciones se tiene que

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

2. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

Igualmente utilizaremos la técnica de doble contención.

($\subseteq$)

Supongamos que tenemos un elemento cualquiera $x \in (A \cap B)^c$, por @ref(eq:complemento) tenemos:

$$\begin{aligned} x \in (A \cap B)^c &\Rightarrow x \notin A \cap B \\ &\Rightarrow x \notin A \; o \; x \notin B \\ &\Rightarrow x \in A^c \; o \; x \in B^c \\ &\Rightarrow x \in A^c \; o \; x \in B^c \\ &\Rightarrow x \in A^c \cup B^c \end{aligned}$$

Como se cumple para cualquier elemento, entonces $(A \cap B)^c \subseteq A^c \cup B^c$.

($\supseteq$)

Ahora tomemos un elemento cualquiera $x \in A^c \cup B^c$, por @ref(eq:intersec) de conjuntos tenemos

$$\begin{aligned} x \in A^c \cup B^c &\Rightarrow x \in A^c \; o \; x \in B^c \\ &\Rightarrow x \notin A \; o \; x \notin B \\ &\Rightarrow x \notin (A \cap B) \\ &\Rightarrow x \in (A \cap B)^c \end{aligned}$$

Por lo tanto $A^c \cup B^c \subseteq (A \cap B)^c$

Como se cumplen las dos contenciones se tiene que

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

Producto Cartesiano

```
Las __parejas ordenadas__ son pares de objetos, que denotaremos y definiremos como $(a,b)$ en la cual s
```

Si $(a,b) = (c,d)$ entonces $a = c$ y $b = c$.

```
Supongamos que tenemos dos conjuntos $A$ y $B$, el __producto cartesiano__ es la colección de todos los

$$
\begin{equation}
```

```
A\times B = \{(a,b) : a\in A\ y\ b\in B\}
(\#eq:prodcartesiano)
\end{equation}
$$
```

```
Supongamos que tenemos el conjunto $A=\{1,2\}$, el producto cartesiano de $A\times A$ es:

$$
\begin{array}{rl}
A\times A & = \{ (a,b) : a\in A\ \text{y}\ b\in A\}\\
A\times A & = \{ (1,1), (1,2), (2,1), (2,2)\}
\end{array}
$$
```

```
Otro ejemplo de producto cartesiano muy utilizado es el plano cartesiano, es decir
```

```
$$\mathbb R^2 = \mathbb R\times \mathbb R=\{(x,y): x,y\in \mathbb R\}$$
```

En general tenemos que el producto cartesiano cumple las siguientes propiedades

- Para cualquier conjunto A tenemos que $A \times \emptyset = \emptyset \times A = \emptyset$.
- Para dos conjuntos cualquieras A y B se tiene que $A \times B \neq B \times A$.

Potencia

```
La __potencia__ de un conjunto se define como el conjunto que contiene a todos los subconjuntos posible
```

```
Como ejemplo retomemos el conjunto definido en \@ref(exm:ejem-prod-cart1) donde A=\{1,2\}. El conjunto c
```

```
$$\mathcal{P}(A)=\{\{1\},\{2\}, \{1,2\},\emptyset\}$$
```

Propiedades de la potencia de un conjunto

- $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$, ésto se debe a que el $\emptyset \subseteq A$ para cualquier conjunto.
- $A \in \mathcal{P}(A)$, ya que $A \subseteq A$.