

# Ejercicios de Límite

Cálculo

*<http://synergy.vision/>*

## Contenido

LIMITES	2
CONTINUIDAD	9
EJERCICIOS DE LIMITES INFINITOS Y ASINTOTAS VERTICALES	12

## LIMITES

$$1. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 6}{x^2 - 3}$$

$$2. \lim_{y \rightarrow 0} \left[ \frac{y^2 - 2y + 2}{y - 4} + 1 \right]$$

$$3. \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \frac{x^2 - 2}{x^4 + x + 1}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{\frac{2x^2 + 2}{8x^2 + 1}}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$$

$$6. \lim_{y \rightarrow -5} \frac{y^2 - 25}{y + 5}$$

$$7. \lim_{h \rightarrow 2} \frac{h - 2}{h^2 - 4}$$

$$8. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2}$$

$$9. \lim_{y \rightarrow -3} \frac{y^3 + 27}{y + 3}$$

$$10. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 + 4x - 32}{x - 4}$$

$$11. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x - 3}{x + 1}$$

$$12. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\frac{1}{x+1} + 1}{x + 2}$$

$$13. \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{8x^3 - 1}{6x^2 - 5x + 1}$$

$$14. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 16}{x - 2}$$

$$15. \lim_{x \rightarrow 8} \frac{16 - x^{4/3}}{4 - x^{2/3}}$$

$$16. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 + 5} - 3}{x^2 - 2x}$$

$$17. \lim_{x \rightarrow 9} \frac{x^2 - 81}{\sqrt{x} - 3}$$

$$18. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{x+2} - \sqrt{2}}$$

$$19. \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sqrt{y+3} - \sqrt{3}}{y}$$

$$20. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x - 1}$$

$$21. \lim_{y \rightarrow 5} \frac{\sqrt{y-1} - 2}{y + 5}$$

$$22. \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+h^2} - 1}{h}$$

$$23. \lim_{x \rightarrow 7} \frac{2 - \sqrt{x-3}}{x^2 - 49}$$

$$24. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1}$$

$$25. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}}$$

$$26. \lim_{x \rightarrow 8} \frac{x - 8}{\sqrt[3]{x} - 2}$$

$$27. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x^2+1} - 1}{x^2}$$

$$28. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}}{x}$$

$$29. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt[3]{x} - 1}$$

$$30. \lim_{x \rightarrow 64} \frac{\sqrt{x} - 8}{\sqrt[3]{x} - 4}$$

$$31. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt[4]{x} - 1}$$

$$32. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[n]{x} - 1}{\sqrt[m]{x} - 1}$$

$$33. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{6-x} - 2}{\sqrt{3-x} - 1}$$

$$34. \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^3 - a^3}{x^2 - ax - x + a}$$

$$35. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{ax+b} - \sqrt{bx+a}}{\sqrt{cx+d} - \sqrt{dx+c}}$$

$$36. \text{ Si } f(x) = \frac{1}{x}, \quad x \neq 0, \text{ probar que}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = -\frac{1}{x^2}$$

$$37. \text{ Si } f(x) = \sqrt{x}, \quad x > 0, \text{ probar que}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$38. \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x-2}}{2x-1}$$

$$39. \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{x-4}{\sqrt{x^2-16}}$$

$$40. \lim_{x \rightarrow 2^-} [x]$$

$$41. \lim_{x \rightarrow 2^+} [x]$$

$$42. \lim_{x \rightarrow -2^-} [x]$$

$$43. \lim_{x \rightarrow -2^+} [x]$$

$$44. \lim_{x \rightarrow 5/2} [x]$$

$$45. \lim_{x \rightarrow 2^-} (x - [x])$$

$$46. \lim_{x \rightarrow 2^+} (x - [x])$$

$$47. \lim_{x \rightarrow 3^-} [x^2 + x + 1]$$

$$48. \lim_{x \rightarrow 3^+} [x^2 + x + 1]$$

$$49. \lim_{x \rightarrow 3^-} [[x] + [4-x]]$$

$$50. \lim_{x \rightarrow 3^+} [[x] + [4-x]]$$

$$51. \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{x-4}{|x-4|}$$

$$52. \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x+4} - \sqrt{4x+1}}{\sqrt{x-1}}$$

$$53. \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{\sqrt{4-x^2} + 2 - x}{\sqrt{4-x^3/2} + \sqrt{2x-x^2}}$$

$$54. \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{x\sqrt{x} - a\sqrt{a}}{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{a}}$$

$$55. \text{ Si } h(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si } x \leq 2 \\ x^2+1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Hallar:

$$a. \lim_{x \rightarrow 2^-} h(x)$$

$$b. \lim_{x \rightarrow 2^+} h(x)$$

$$c. \lim_{x \rightarrow 2} h(x)$$

$$56. \text{ Si } f(x) = \begin{cases} x^3, & \text{si } x \leq 2 \\ x^2+4, & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Hallar:

$$a. \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$$

$$b. \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$$

$$c. \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$$

$$57. \text{ Si } f(x) = \begin{cases} -4 & \text{si } x < -2 \\ \frac{x^3}{2} & \text{si } -2 \leq x < 2 \\ x-1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

Hallar:

$$a. \lim_{x \rightarrow -2} f(x)$$

$$b. \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$$

58. Hallar la función  $f$  tal que:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 3 \text{ y que no exista } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$$

59. Pruebe, con un contraejemplo, que las proposiciones siguientes son falsas:

$$a. \text{ Existe } \lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] \Rightarrow \text{ Existe } \lim_{x \rightarrow a} f(x) \text{ y existe } \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

b. Existe  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)g(x)] \Rightarrow$  Existe  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  y existe  $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$

60. Probar que: existe  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$  y  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$

De esta proposición se obtiene:

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq 0$  y  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0 \Rightarrow$  no existe  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$

En los siguientes problemas probar, mediante  $\varepsilon\delta$ , el límite indicado.

61.  $\lim_{x \rightarrow 2} (4x - 3) = 5$

62.  $\lim_{t \rightarrow 4} (9 - 3t) = -3$

63.  $\lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{x}{5} + 1\right) = \frac{3}{5}$

64.  $\lim_{x \rightarrow 2} X^2 = 4$

65.  $\lim_{x \rightarrow -2} x^3 = -8$

66.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$

67.  $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 2x - 6) = -3$

68.  $\lim_{x \rightarrow 1} (2x^2 + 3x - 4) = -5$

69.  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{4}{x - 1} = 2$

70.  $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{6}{4 - x} = -6$

71.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x}{5 - 2x} = \frac{2}{3}$

72.  $\lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{x + 5} = 3$

73.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{|x| + 1} = 1$

74.  $\lim_{x \rightarrow 1/3} \frac{1 + x}{x} = 4$

75.  $\lim_{x \rightarrow a} c = c$ , c es una constante.

76.  $\lim_{x \rightarrow a} x = a$

$$77. \lim_{x \rightarrow a} x^n = a^n.$$

Sugerencia:  $x^n - a^n = (x - a)(x^{n-1} + x^{n-2}a + \dots + xa^{n-2} + a^{n-1})$

$$78. \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{x} = \frac{1}{a}$$

Sugerencia seguir el esquema tomando  $\beta = |a|/2$

$$79. \text{Probar: } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = |L|.$$

En los siguientes problemas, mediante el teorema del emparedado, probar que:

$$80. \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0$$

$$81. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{|x| + 1} = 1$$

$$82. \lim_{x \rightarrow 9} \left[ 2 - \sqrt{2} \cos \left( \frac{1}{x^2} \right) \right] = 0$$

$$83. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x + 1| - |x - 1|}{\sqrt{3x^2 + 1}} = 0$$

En los siguientes problemas hallar el límite indicado.

$$84. \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\operatorname{sen} x}{x - \pi}$$

$$85. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} 2x}{\operatorname{sen} 3x}$$

$$86. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{4x^2}$$

$$87. \lim_{x \rightarrow \pi/4} [\tan 2x - \sec 2x]$$

$$88. \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos t}{\operatorname{sen} t}$$

$$89. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}^2(x/2)}{\operatorname{sen} x}$$

$$90. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\operatorname{sen}^2(x - 1)}{x^2 - 2x + 1}$$

$$91. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{sen} 2x}{x - \operatorname{sen} 3x}$$

$$92. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \operatorname{sen} x}{x^3}$$

93.  $\lim_{x \rightarrow \pi/3} \frac{1 - 2\cos x}{\pi - 3x}$
94.  $\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\cos x - \operatorname{sen} x}{\cos 2x}$
95.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2} - \sqrt{1 + \cos x}}{\operatorname{sen}^2 x}$
96.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos \frac{\pi}{2} x}{1 - \sqrt{x}}$
97.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \sqrt{\cos x}}{x^2}$
98.  $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{1 - \operatorname{sen} x}{(x - \pi/2)^2}$
99.  $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos \theta)^2}{\tan^5 \theta - \tan^3 \theta}$
100.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \operatorname{sen} x} - \sqrt{1 - \operatorname{sen} x}}{\tan x}$
101.  $\lim_{\theta \rightarrow a} \frac{\operatorname{sen} \theta - \operatorname{sen} a}{\operatorname{sen}(0/2) - \operatorname{sen}(a/2)}$
102.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(a + x) - \cos(a - x)}{x}$
103.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(a + x) - \operatorname{sen}(a - x)}{\tan(a + x) - \tan(a - x)}$
104.  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2\operatorname{sen}^2 x - 3\operatorname{sen} x + 1}{2\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x - 1}$
105.  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{2\tan^2 x - \tan x - 1}{2\tan^2 x - 3\tan x + 1}$



## CONTINUIDAD

1. Probar que la función  $f$  es continua en el punto 2.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2} & \text{si } x \neq 2 \\ 4 & \text{si } x = 2 \end{cases}$$

2. Definir  $g(0)$  para que la función  $g$  sea continua en 0.  $g(x) = \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$

3. Probar que la siguiente función es discontinua en el punto 3 y que 3 es el único punto de discontinuidad.

$$g(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 2 & \text{si } x < 3 \\ 4 & \text{si } x = 3 \\ -x + 8 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

En los problemas del 4 al 11, hallar los puntos de discontinuidad de las funciones dadas, indicando el tipo de discontinuidad:

4.  $f(x) = \frac{1}{x}$

5.  $g(x) = \frac{1}{x+2}$

6.  $h(x) = \frac{1}{x^2-4}$

7.  $f(x) = \frac{x-1}{x-5}$

8.  $g(x) = \frac{x+2}{(x-3)(x+8)}$

9.  $h(x) = \frac{x+3}{\sqrt{x-2}}$

10.  $f(x) = \frac{x^2-9}{|x-3|}$

11.  $g(x) = \frac{|x-1|}{(x-1)^3}$

En los problemas del 12 al 15, graficar la función dada y localizar, mirando el gráfico, los puntos de discontinuidad.

12.  $f(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } x < 3 \\ 1 & \text{si } 3 \leq x < 5 \\ 4 & \text{si } x \geq 5 \end{cases}$

13.  $g(x) = \begin{cases} 3x + 1 & \text{si } x < -2 \\ 2x - 1 & \text{si } -2 \leq x < 4 \\ -\frac{x}{2} + 2 & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$

$$14. f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} + 1 & \text{si } x < 2 \\ 2x - 3 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

$$15. g(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \leq -2 \\ \frac{1}{x+1} & \text{si } -2 < x < 2 \\ \frac{1}{2x} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

En los problemas del 16 al 19, hallar a y b para que las funciones dadas sean continuas en sus dominios.

$$16. g(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } x < -1 \\ ax + b & \text{si } -1 \leq x < 3 \\ 2 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

$$17. g(x) = \begin{cases} -\sin^2 x & \text{si } x < \pi/4 \\ ax + b & \text{si } \pi/4 \leq x \leq \pi/3 \\ \cos^2 x & \text{si } x \geq \pi/3 \end{cases}$$

$$18. g(x) = \begin{cases} -2\sin x & \text{si } x \leq -\pi/2 \\ a\sin x + b & \text{si } -\pi/2 < x < \pi/2 \\ \cos x & \text{si } x \geq \pi/2 \end{cases}$$

$$19. g(x) = \begin{cases} a - x^2 \sin \frac{\pi}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ b, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

En los problemas del 20 al 25, hallar el conjunto de puntos donde la función dada es discontinua.

$$20. f(x) = [x + 1/2]$$

$$21. g(x) = [x/4]$$

$$22. h(x) = 1/[x]$$

$$23. g(x) = [\sqrt{1 - x^2}]$$

$$24. g(x) = 1 - x + [x] - [1 - x]$$

Sugerencia:  $g(x) = \begin{cases} 1 - x + 2n, & \text{si } n < x < n + 1 \\ n, & \text{si } x = n \end{cases}$

$$25. f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \text{ es racional} \\ 1, & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$$

Sugerencia: En todo intervalo abierto siempre existe un racional y un irracional.

En los problemas del 26 al 28, probar que la ecuación dada una raíz en el intervalo indicado. Aproximar la raíz con un error menor que 0,1.

$$26. x^3 + 1 = 3x, \quad \text{en } [1, 2]$$

27.  $2x^3 - 3x^2 - 12x + 2 = 0$ , en  $[-2, -1]$

28.  $\cos x = x$ , en  $[0, 1]$

29. Sea  $f$  una función con dominio  $\mathbb{R}$  tal que:

$$f(x + y) = f(x)f(y), \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Si  $f$  es continua en 0, probar que  $f$  es continua en todo punto  $a$ .

## EJERCICIOS DE LIMITES INFINITOS Y ASINTOTAS VERTICALES

1.  $f(x) = \frac{1}{x-2}$

2.  $g(x) = \frac{1}{|x-2|}$

3.  $h(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$

4.  $f(x) = \frac{x}{x-4}$

5.  $g(x) = \frac{x+1}{x-5}$

6.  $h(x) = \frac{1}{x(x+2)}$

7.  $f(x) = \frac{x}{x^2-2x+3}$

8.  $g(x) = \frac{x^2+4}{x^2-4}$

9.  $h(x) = x - \frac{1}{x}$

En los problemas del 10 al 28 calcular el limite indicado.

10.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} [x]/x$

11.  $\lim_{x \rightarrow 0^-} [x]/x$

12.  $\lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} \sec x$

13.  $\lim_{x \rightarrow (\pi/2)^+} \sec x$

14.  $\lim_{x \rightarrow (-3\pi/2)^+} \sec x$

15.  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left[ \frac{x-1}{1-\sqrt{2x-x^2}} \right]$

16.  $\lim_{x \rightarrow 2^+} \left[ \frac{x-2}{\sqrt{4x-x^2}-2} \right]$

17.  $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x^2-4}}{x-2}$

18.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[ \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right]$

19.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[ \frac{1}{x^2-4} - \frac{1}{x-2} \right]$

20.

$$21. \lim_{y \rightarrow 1^+} \left[ \frac{1}{y-1} - \frac{3}{y^3-1} \right]$$

22.

$$23. \lim_{x \rightarrow 0^-} \left[ \frac{1}{x} - \frac{1}{|x|} \right]$$

24.

$$25. \lim_{x \rightarrow 0^+} x \operatorname{cosec}(x^2)$$