

Derivadas

Cálculo

[http:// synergy.vision/](http://synergy.vision/)

Contenido

LA DERIVADA	2
TÉCNICAS BASICAS DE DERIVACIÓN	3
DERIVADAS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMETRICAS	6
DERIVADAS DE LAS FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARITMICAS	6
LA REGLA DE LA CADENA	7

LA DERIVADA

En los problemas del 1 al 9, hallar la derivada de la función en el punto a indicado.

1. $f(x) = 2$ en $a = 1$

2. $g(x) = x$ en $a = 3$

3. $h(x) = 3x$ en $a = 2$

4. $f(x) = 4x - 1$ en $a = 2$

5. $g(x) = 2x^2 - 5$ en $a = -1$

6. $h(x) = \frac{3}{x}$ en $a = -2$

7. $f(x) = 3x^2 - 5$ en $a = -1$

8. $g(x) = x + \frac{1}{x}$ en $a = 2$

9. $h(x) = x^3 + 2$ en $a = -1$

10. Probar que la siguiente función es diferenciable en 0:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 0 \\ 0 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

11. Probar que la siguiente función no es diferenciable en 0:

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

12. Hallar los valores de a y b para que sea diferenciable en 1:

$$f(x) = \begin{cases} ax + b & \text{si } x < 1 \\ \sqrt[3]{x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

En los problemas del 13 al 21, hallar la derivada de la función indicada.

13. $f(x) = 2$

14. $g(x) = x$

15. $h(x) = 3x$

16. $f(x) = 4x - 1$

17. $g(x) = 2x^2 - 5$

18. $h(x) = \frac{3}{x}$

19. $f(x) = 3x^2 - 5$
20. $g(x) = x + \frac{1}{x}$
21. $h(x) = x^3 + 2$
22. Dada la función $f(x) = x^3 + x^2$
 - a. Hallar la pendiente de la recta tangente al gráfico de f en el punto donde $x = 1$.
 - b. Hallar la recta tangente al gráfico de f en el punto donde $x = 1$.
 - c. Hallar la recta normal al gráfico de f en el punto donde $x = 1$.
23. Dada la función $g(x) = \sqrt{x - 3}$
 - a. Hallar la pendiente de la recta tangente al gráfico de g en el punto donde $x = 12$
 - b. Hallar la recta tangente al gráfico de g en el punto donde $x = 12$.
 - c. Hallar la recta normal al gráfico de g en el punto donde $x = 12$.
24. Dada la función $h(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + 7$
 - a. Hallar su función derivada.
 - b. ¿En qué punto del gráfico de h la tangente es paralela a la recta $y = 3x + 6$?
 - c. Hallar la recta tangente al gráfico de h en el punto encontrado en la parte b.
25. Dada la función $f(x) = \sqrt{2x + 1}$
 - a. Hallar la función derivada de f .
 - b. Una tangente al gráfico de f tiene por pendiente $1/2$. Hallar una ecuación de esta tangente.

TÉCNICAS BÁSICAS DE DERIVACIÓN

En los problemas del 1 al 38, hallar la derivada de la función indicada. Las letras a,b,c y d son constantes.

1. $y = 4x^2 - 6x + 1$
2. $y = 1 - \frac{x}{3} + \frac{x^6}{6}$
3. $y = 0,5x^4 - 0,3x^2 + 2,5x$
4. $u = y^{10} - \frac{3y^8}{4} + 0,4y^3 + 0,1$
5. $s = 2t^{-5} + \frac{t^3}{3} - 0,3t^{-2}$.

$$6. z = \frac{1}{3y} - \frac{3}{y^2} + 2$$

$$7. f(x) = 3x^{5/6} - 4x^{-2/3} - 10$$

$$8. g(x) = ax^5 - bx^{-4} + cx^{3/2} + d$$

$$9. y = -\frac{2x^6}{3a}$$

$$10. z = \frac{x^3}{a+b} + \frac{x^5}{a-b} - x$$

$$11. z = \frac{t^3 - bt^2 - 3}{6}$$

$$12. y = 4\sqrt{x - \frac{3}{2x^2}} + \sqrt{3}$$

$$13. z = \sqrt[3]{t} - \frac{1}{\sqrt[3]{t}}$$

$$14. u = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{x}} - \frac{5}{3\sqrt[3]{x^2}} + \sqrt[3]{3}$$

$$15. y = (5x^4 - 4x^5)(3x^2 + 2x^3)$$

$$16. y = x^3 e^x$$

$$17. y = \sqrt{x} e^x$$

$$18. y = x^e + e^x$$

$$19. y = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$$

$$20. y = \frac{1}{3}(2x^3 - 1)(3x^2 - 2)(6x - 5)$$

$$21. z = \sqrt{t}(t^4 - 1)(t^6 - 2)$$

$$22. y = (\sqrt{x - 1})(\sqrt{x} + 1)$$

$$23. u = 2\sqrt{x}(x^2 - \sqrt{x} + \sqrt{5})$$

$$24. y = (\sqrt{x} - 3) \left(\frac{2}{x} - 1 \right)$$

$$25. y = \frac{3}{x-9}$$

$$26. y = \frac{x}{x-8}$$

$$27. y = \frac{x+3}{x-3}$$

$$28. z = \frac{t}{t^2+1}$$

$$29. u = \frac{2t^3+1}{t-1}$$

$$30. y = \frac{x^3-2x}{x^2+x+1}$$

$$31. y = \frac{ax^2+bx+c}{x}$$

$$32. y = \frac{ax^2+bx+c}{\sqrt{x}}$$

$$33. y = \frac{ax^2+b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$34. y = \frac{x^2+1}{x^2-1} - (x-1)(x^2-1)$$

$$35. y = \frac{1}{(x-1)(x-3)}$$

$$36. y = \frac{1-\sqrt{x}}{1+2\sqrt{x}}$$

$$37. y = \frac{1-\sqrt[3]{x}}{1+3\sqrt[3]{x}}$$

$$38. y = \frac{e^x-1}{e^x+1}$$

En los problemas del 39 al 42, hallar la recta tangente al gráfico de la función en el punto especificado.

$$39. y = x^4 - 3x^2 + x - 2, (1, -3)$$

$$40. y = x^2(x-5), (2, -12)$$

$$41. f(x) = \frac{x^2-2}{x^2-3}, (-1, \frac{1}{2})$$

$$42. g(x) = \frac{x^3}{2a-x}, (a, a^2)$$

43. Hallar el punto en la parábola $y = 3x^2 - 2x - 1$ en el cual la recta tangente es horizontal (paralela al eje X).

44. Hallar la recta tangente horizontal a la curva $y = \frac{e^x}{x}$

45. Hallar la recta tangente horizontal a la curva $y = \frac{e^x}{1+x^2}$

46. Hallar los puntos del gráfico de la función $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6x - \frac{7}{2}$ en los cuales la recta tangente es horizontal (paralela al eje X).

47. Hallar la tangente al gráfico de $f(x) = x^3 - 3x^2 - 5$ que es paralela a la recta $3x + y - 1 = 0$.

48. Hallar la tangente al gráfico de $g(x) = \sqrt{x} + 2$ que es perpendicular a la recta $2x + y + 8 = 0$.

49. Hallar la parábola $y = ax^2 + bx$ que tenga a (2,-12) como punto más bajo.

50. Hallar la parábola $y = ax^2 + bx$ que tenga a (4,16) como punto más alto.

51. Hallar la parábola $y = x^2 + bx + c$ que es tangente a la recta $2x + y + 7 = 0$ en el punto (-2,-3).

DERIVADAS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMETRICAS

En los problemas del 1 al 9 hallar la derivada de la función dada.

1. $f(x) = 5\operatorname{sen}x + 2\cos x$
2. $g(\theta) = \theta \cot \theta$
3. $y = \tan \alpha \operatorname{sen} \alpha$
4. $y = \tan x - \cot x$
5. $h(t) = \frac{\operatorname{sen} t}{1 + \cos t}$
6. $f(x) = \frac{\tan x}{x}$
7. $g(x) = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$
8. $y = \frac{\operatorname{sen} t + \cos t}{\operatorname{sen} t - \cos t}$
9. $y = \frac{\tan x - 1}{\sec x}$
10. Si $f(x) = \sec x - 2\cos x$, hallar:
 - a. La recta tangente al gráfico de f en el punto $(\pi/3, 1)$.
 - b. La recta normal al gráfico de f en el punto $(\pi/3, 1)$.
11. Si la recta tangente al gráfico de función $f(x) = \operatorname{sen} x$ en el punto $(a, \operatorname{sen} a)$ pasa por el origen, probar que se cumple que $\tan a = a$.
12. Probar que $D_x \cos x = -\operatorname{sen} x$
13. Probar que $D_x \cot x = -\operatorname{cosec}^2 x$
14. Probar que $D_x \operatorname{cosec} x = -\operatorname{cosec} x \cot x$.

DERIVADAS DE LAS FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARITMICAS

1. $y = \sqrt{x}e^x$
2. $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$
3. $y = x^2 2^x$
4. $y = x^2 e^{-x}$

5. $y = e^x \ln x$
6. $y = 2^x \log_2 x$
7. $y = \frac{\ln x}{e^x}$
8. $y = \frac{\log_2 x}{2^x}$
9. $y = \frac{1 + \ln x}{1 - \ln x}$
10. Hallar la recta tangente horizontal a la curva $y = \frac{e^x}{1+x^2}$
11. Hallar la recta tangente al gráfico de $f(x) = xe^{-x}$ en el punto donde $x = -1$.
12. Hallar la recta tangente al gráfico de $g(x) = \frac{4-x}{\ln x}$ en el punto donde $x = 4$.

LA REGLA DE LA CADENA

En los problemas del 1 al 61 derivar la función indicada. Las letras a,b y c denotan constantes.

1. $y = (x^2 - 3x + 5)^3$
2. $f(x) = (15 - 8x)^4$
3. $g(t) = (2t^3 - 1)^{-3}$
4. $z = \frac{1}{(5x^5 - x^4)^8}$
5. $y = (3x^2 - 8)^3(-4x^2 + 1)^4$
6. $f(u) = \frac{2u^3 + 1}{u^2 - 1}$
7. $y = \left(\frac{x-1}{x+3}\right)^2$
8. $g(t) = \left(\frac{3t^2 + 2}{2t^3 - 1}\right)^2$
9. $y = \sqrt{1 - 2x}$
10. $u = \sqrt{1 + t - 2t^2 - 8t^3}$
11. $h(x) = x^2 \sqrt{x^4 - 1}$
12. $g(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$
13. $y = \sqrt{3x^2 - 1} \sqrt[3]{2x + 1}$
14. $z = (1 - 3x^2)^2 (\sqrt{x} + 1)^{-2}$
15. $h(t) = \frac{1+t}{\sqrt{1-t}}$

$$16. z = \sqrt[3]{\frac{1}{1+t^2}}$$

$$17. z = \sqrt[3]{b + ax^3}$$

$$18. f(x) = \frac{x}{b^2\sqrt{b^2+x^2}}$$

$$19. y = \frac{1-\sqrt{1+x}}{1+\sqrt{1+x}}$$

$$20. f(x) = \sqrt{(x-a)(x-b)(x-c)}$$

$$21. y = \sqrt[3]{x + \sqrt{x}}$$

$$22. y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$$

$$23. y = \tan 4x$$

$$24. y = 2\cot\frac{x}{2}$$

$$25. u = \cos(x^3)$$

$$26. v = \cos^3 x$$

$$27. y = \tan(x^4) + \tan^4 x$$

$$28. z = \cos\sqrt{x}$$

$$29. u = \sqrt{\cos x}$$

$$30. y = \sqrt{\cos\sqrt{x}}$$

$$31. y = \sqrt[3]{\tan 3x}$$

$$32. y = \cot\sqrt[3]{1+x^2}$$

$$33. y = \frac{4}{\sqrt{\sec x}}$$

$$34. y = \operatorname{cosec}\frac{1}{x^2}$$

$$35. y = \operatorname{sen}^3 \left[\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} \right]$$

$$36. y = \frac{\tan x}{\sqrt{\sec^2 x + 1}}$$

$$37. y = \sqrt{\frac{1+\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x}}$$

$$38. y = \sqrt{1 + \cot(x + 1/x)}$$

$$39. y = \frac{\cot(x/2)}{\sqrt{1-\cot^2(x/2)}}$$

$$40. y = \sqrt{a \operatorname{sen}^2 x + b \cos^2 x}$$

41. $y = \cos(\cos x)$
42. $y = \sen(\cos x^2)$
43. $y = \sen^2(\cos 4x)$
44. $y = \sen(\sen(\sen x))$
45. $y = \cos^2(\cos x) + \sen^2(\sen x)$
46. $y = \sen(\tan \sqrt{\sen x})$
47. $y = \tan(\sen^2 x)$
48. $y = e^{-3x^2+1}$
49. $y = 2^{\sqrt{x}}$
50. $y = x^n a^{-x^2}$
51. $y = 3^{\cot(1/t)}$
52. $y = 2^{3\sen^2 x}$
53. $y = \sqrt{\log_5 x}$
54. $y = \ln\left(\frac{x}{e^x}\right)$
55. $y = \frac{\ln t}{e^{2t}}$
56. $y = \ln \frac{e^{4x}-1}{e^{4x}+1}$
57. $y = e^{x \ln x}$
58. $y = \ln \left[\frac{x+1}{\sqrt{x-2}} \right]$
59. $y = \ln \left[\frac{x+1}{x-1} \right]^{3/5}$
60. $y = \ln(x^3 \sen x)$
61. $y = \ln \cos \frac{x-1}{x}$
62. Si $G(x) = (g(x))^{2/3}$ $g(2) = 125$ y $g'(2) = 150$, hallar $G'((2))$.
63. Si $F(t) = [f(\sen t)]^2$, $f(0) = -3$ y $f'(0) = 5$, hallar $F'(0)$.
64. Dadas $f(u) = \frac{1}{4}u^3 - 3u + 5$ y $g(x) = \frac{x-1}{x+1}$, hallar la derivada de $f \circ g$ de dos maneras:
 - a. Encontrando $(f \circ g)(x)$ y derivando este resultado.
 - b. Aplicando la regla de la cadena.

En los ejercicios del 65 al 69, hallar $h'(x)$ si $h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x))$.

65. $f(u) = u^3 - 2u^2 - 5, g(x) = 2x - 1$

66. $f(v) = \sqrt{v}, g(x) = 2x^3 - 4$

67.