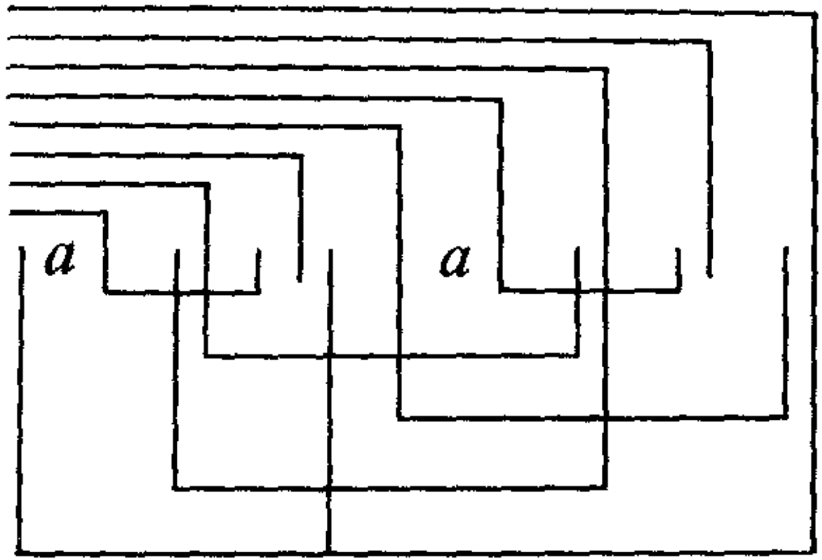
Universität Konstanz

Werkzeuge für den Formenkalkül

Sven Kosub

formlabor @ CODE, 31.01.2020

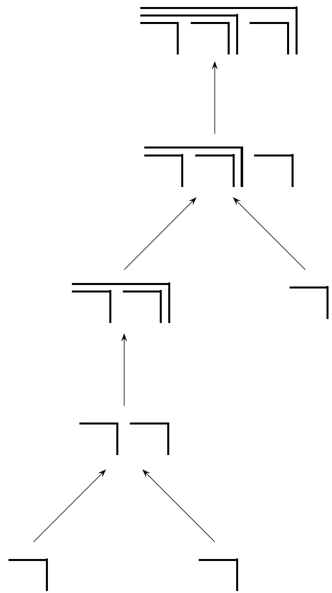
E4 $f =$



Formen

Formen sind induktiv definiert:

- Unmarkierter Zustand $\quad$ und markierter Zustand $\overline{\quad}|$ sind Formen
- Sind f, g Formen, so sind $\overline{\ f\ }|$ und $f\,g$ Formen
- Nichts sonst ist eine Form



Rechnen mit Formen:

- $\overline{\quad}|\ \overline{\quad}| = \overline{\quad}|$
- $\overline{\overline{\quad}|}| =$
- Somit: Jede Form entspricht einem Zustand

Formen

Formausdrücke sind induktiv definiert:

- Zustand und Variablen $x, y, z, x_1, x_2, \ldots$ sind Formausdrücke
- Sind f, g Formausdrücke, so sind $\overline{\,f\,}|$ und $f\,g$ Formausdrücke
- Nichts sonst ist ein Formausdruck

Beispiele: $\overline{\overline{\overline{\;\;}|\;\overline{\;\;}|}|\;\overline{\;\;}|}|$, $\overline{\overline{\overline{x_1\,}|\;\overline{\;\;}|}|\;\overline{x_2\,}|}|\;x_1$, $\overline{\overline{\overline{x\,}|\;\overline{y\,}|}|\;\overline{y\,}|}|\;z$

Semantik von Formausdrücken:

- Formausdruck entspricht *per se* nicht einzelnem Zustand
- Abhängigkeit von Zuständen der Variablen im Formausdruck
- Jede Belegung ergibt einen Zustand $\rightarrow$ Wertetabellen

Wertetabellen

$f =_{\mathrm{def}} \overline{\overline{\overline{x}\rceil\,\overline{y}\rceil}\rceil\,\overline{y}\rceil}\rceil\, z$

x	y	z	$\overline{\overline{\overline{x}\rceil\,\overline{y}\rceil}\rceil\,\overline{y}\rceil}\rceil\, z$	f
			$\overline{\overline{\overline{\;\;}\rceil\,\overline{\;\;}\rceil}\rceil\,\overline{\;\;}\rceil}\rceil$	
		$\overline{\;\;}\rceil$	$\overline{\overline{\overline{\;\;}\rceil\,\overline{\;\;}\rceil}\rceil\,\overline{\;\;}\rceil}\rceil\,\overline{\;\;}\rceil$	$\overline{\;\;}\rceil$
	$\overline{\;\;}\rceil$		$\overline{\overline{\overline{\;\;}\rceil\,\overline{\overline{\;\;}\rceil}\rceil}\rceil\,\overline{\overline{\;\;}\rceil}\rceil}\rceil$	$\overline{\;\;}\rceil$
	$\overline{\;\;}\rceil$	$\overline{\;\;}\rceil$	$\overline{\overline{\overline{\;\;}\rceil\,\overline{\overline{\;\;}\rceil}\rceil}\rceil\,\overline{\overline{\;\;}\rceil}\rceil}\rceil\,\overline{\;\;}\rceil$	$\overline{\;\;}\rceil$
$\overline{\;\;}\rceil$			$\overline{\overline{\overline{\overline{\;\;}\rceil}\rceil\,\overline{\;\;}\rceil}\rceil\,\overline{\;\;}\rceil}\rceil$	
$\overline{\;\;}\rceil$		$\overline{\;\;}\rceil$	$\overline{\overline{\overline{\overline{\;\;}\rceil}\rceil\,\overline{\;\;}\rceil}\rceil\,\overline{\;\;}\rceil}\rceil\,\overline{\;\;}\rceil$	$\overline{\;\;}\rceil$
$\overline{\;\;}\rceil$	$\overline{\;\;}\rceil$		$\overline{\overline{\overline{\overline{\;\;}\rceil}\rceil\,\overline{\overline{\;\;}\rceil}\rceil}\rceil\,\overline{\overline{\;\;}\rceil}\rceil}\rceil$	
$\overline{\;\;}\rceil$	$\overline{\;\;}\rceil$	$\overline{\;\;}\rceil$	$\overline{\overline{\overline{\overline{\;\;}\rceil}\rceil\,\overline{\overline{\;\;}\rceil}\rceil}\rceil\,\overline{\overline{\;\;}\rceil}\rceil}\rceil\,\overline{\;\;}\rceil$	$\overline{\;\;}\rceil$

Gleichungen

$$\overline{\overline{\overline{x}|\,\overline{y}|}|\,\overline{y}|}|\,z = \overline{x\,\overline{y}|}|\,z$$

x	y	z	$\overline{\overline{\overline{x}|\,\overline{y}|}|\,\overline{y}|}|\,z$	$=$	$\overline{x\,\overline{y}|}|\,z$
			$\overline{\overline{\overline{\;\;}|\,\overline{\;\;}|}|\,\overline{\;\;}|}|$		$\overline{\;\;\overline{\;\;}|}|$
		$\overline{\;\;}|$	$\overline{\overline{\overline{\;\;}|\,\overline{\;\;}|}|\,\overline{\;\;}|}|\,\overline{\;\;}|$	$\overline{\;\;}|$	$\overline{\;\;\overline{\;\;}|}|\,\overline{\;\;}|$
	$\overline{\;\;}|$		$\overline{\overline{\overline{\;\;}|\,\overline{\overline{\;\;}|}|}|\,\overline{\overline{\;\;}|}|}|$	$\overline{\;\;}|$	$\overline{\;\;\overline{\overline{\;\;}|}|}|$
	$\overline{\;\;}|$	$\overline{\;\;}|$	$\overline{\overline{\overline{\;\;}|\,\overline{\overline{\;\;}|}|}|\,\overline{\overline{\;\;}|}|}|\,\overline{\;\;}|$	$\overline{\;\;}|$	$\overline{\;\;\overline{\overline{\;\;}|}|}|\,\overline{\;\;}|$
$\overline{\;\;}|$			$\overline{\overline{\overline{\overline{\;\;}|}|\,\overline{\;\;}|}|\,\overline{\;\;}|}|$		$\overline{\overline{\;\;}|\,\overline{\;\;}|}|$
$\overline{\;\;}|$		$\overline{\;\;}|$	$\overline{\overline{\overline{\overline{\;\;}|}|\,\overline{\;\;}|}|\,\overline{\;\;}|}|\,\overline{\;\;}|$	$\overline{\;\;}|$	$\overline{\overline{\;\;}|\,\overline{\;\;}|}|\,\overline{\;\;}|$
$\overline{\;\;}|$	$\overline{\;\;}|$		$\overline{\overline{\overline{\overline{\;\;}|}|\,\overline{\overline{\;\;}|}|}|\,\overline{\overline{\;\;}|}|}|$		$\overline{\overline{\;\;}|\,\overline{\overline{\;\;}|}|}|$
$\overline{\;\;}|$	$\overline{\;\;}|$	$\overline{\;\;}|$	$\overline{\overline{\overline{\overline{\;\;}|}|\,\overline{\overline{\;\;}|}|}|\,\overline{\overline{\;\;}|}|}|\,\overline{\;\;}|$	$\overline{\;\;}|$	$\overline{\overline{\;\;}|\,\overline{\overline{\;\;}|}|}|\,\overline{\;\;}|$

Fundamentalgleichungen

Regel	Gleichung	Ref.
Kommutativität	$fg = gf$	J0*
Position	$\overline{\overline{f\,\vert}\;f\,\vert} =$	J1
Transposition	$\overline{\overline{fh\,\vert}\;\overline{gh\,\vert}\,\vert} = \overline{\overline{f\,\vert}\;\overline{g\,\vert}\,\vert}\;h$	J2
Reflexion	$\overline{\overline{f\,\vert}\,\vert} = f$	C1
Generierung	$\overline{fg\,\vert}\;g = \overline{f\,\vert}\;g$	C2
Integration	$\overline{\;\;\vert}\;f = \overline{\;\;\vert}$	C3
Verdeckung	$\overline{\overline{f\,\vert}\;g\,\vert}\;f = f$	C4
Iteration	$ff = f$	C5
Kontraktion	$\overline{\overline{f\,\vert}\;\overline{g\,\vert}\,\vert}\;\overline{\overline{f\,\vert}\;g\,\vert} = f$	C6
Echelon	$\overline{\overline{\overline{f\,\vert}\;g\,\vert}\;h\,\vert} = \overline{fh\,\vert}\;\overline{\overline{g\,\vert}\;h\,\vert}$	C7
Modifizierte Transposition	$\overline{\overline{f\,\vert}\;\overline{gr\,\vert}\;\overline{hr\,\vert}\,\vert} = \overline{\overline{f\,\vert}\;\overline{g\,\vert}\;\overline{h\,\vert}\,\vert}\;\overline{\overline{f\,\vert}\;\overline{r\,\vert}\,\vert}$	C8
Dualität	$\overline{\overline{f\,\vert}\;g\,\vert}\;\overline{fh\,\vert} = \overline{\overline{\overline{f\,\vert}\;\overline{g\,\vert}\,\vert}\;\overline{f\;\overline{h\,\vert}\,\vert}\,\vert}$	C9*
Anzahl	$\overline{\;\;\vert}\;\overline{\;\;\vert} = \overline{\;\;\vert}$	I1
Ordnung	$\overline{\overline{\;\;\vert}\,\vert} =$	I2

Re-entry

Verdeckung (C4) ergibt:

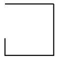
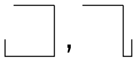
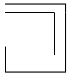
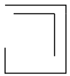
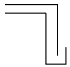
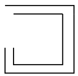
$$\underbrace{\overline{\overline{a\,}|\; b\,}|}_{f_0} = \underbrace{\overline{\overline{\overline{\overline{a\,}|\; b\,}|\; a\,}|\; b\,}|}_{f_1} = \underbrace{\overline{\overline{\overline{\overline{\overline{\overline{a\,}|\; b\,}|\; a\,}|\; b\,}|\; a\,}|\; b\,}|}_{f_2} = \ldots$$

Sequenz $f_0 \to f_1 \to f_2 \to \ldots$ entspricht:

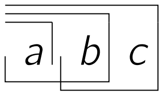
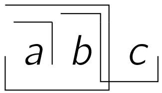
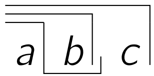
- $f_n = \overline{f_{n-1}\; \overline{a\,}|\; b\,}|$ für $n \geq 1$, $\quad f_0 = \overline{\overline{a\,}|\; b\,}|$ — Rekursion
- $f := \overline{f\; \overline{a\,}|\; b\,}|$ — Zuweisung
- $f = \overline{\overline{a\,}|\; b\,}|$ (mit Re-entry) — Re-entry

Re-entries ermöglichen kompakte semigraphische Beschreibungen dynamischer Systeme

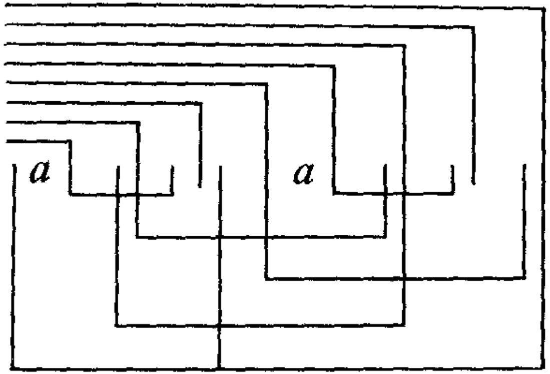
Galerie

Re-entry-Form	System von Zuweisungen	
	$h := \overline{\;h\;}\vert$	$f := h$
	$h := h\,\overline{}\vert = \overline{}\vert\, h\ (= \overline{}\vert)$	$f := h$
	$h := \overline{\overline{\;h\;}\vert}\vert$	$f := h$
	$h := \overline{h\,\overline{}\vert}\vert = \overline{\overline{}\vert\, h}\vert \quad (= \overline{\overline{}\vert}\vert = \ )$	$f := h$
	$h := \overline{}\vert\, h$	$f := \overline{}\vert h$
	$h_1 := \overline{\;h_1\;}\vert$ $h_2 := \overline{\;h_2\ h_1\;}\vert$	$f := h_2$

Galerie

Re-entry-Form	System von Zuweisungen	
	$h_1 := \overline{\overline{h_1\ a\,}\vert\ h_2\ b\,}\vert$ $h_2 := \overline{\overline{\overline{h_1\ a\,}\vert\ h_2\ b\,}\vert\ c\,}\vert$	$f := h_2$
	$h_1 := \overline{\overline{h_1\ a\,}\vert\ \overline{b\,}\vert\,}\vert$ $h_2 := \overline{b\,}\vert\ h_1$	$f := h_1\ c\ h_2$
	$h := \overline{a\,}\vert\ h$	$f := \overline{\overline{\overline{a\,}\vert\ b\,}\vert\ h\ c\,}\vert$

Galerie



System von Zuweisungen

$h_1 := \overline{h_8\ a}|\ h_1$

$h_2 := \overline{\overline{h_8\ a}|\ h_6}|\ h_2$

h_3 nicht rekursiv

$h_4 := \overline{\overline{\overline{\overline{h_8\ a}|\ h_6}|\ h_1}|\ h_8}|\ h_4$

$h_5 := \overline{\overline{\overline{\overline{\overline{h_8\ a}|\ h_6}|\ h_1}|\ h_8}|\ a}|\ h_5$

$h_6 := \overline{\overline{\overline{\overline{\overline{\overline{h_8\ a}|\ h_6}|\ h_1}|\ h_8}|\ a}|\ h_2}|$

h_7 nicht rekursiv

$h_8 := \overline{\overline{\overline{\overline{\overline{\overline{\overline{\overline{h_8\ a}|\ h_6}|\ h_1}|\ h_8}|\ a}|\ h_2}|\ h_5}|\ h_4}|$

$f := h_8$

Projekt A: Formale Analyse

Stabile Formen

Stabile Form beschreibt Fixpunkte (steady states, Gleichgewichte) von Re-entry-Formen

- $\overline{\overline{a}|\; b}|$ erfüllt $f = \overline{\overline{f\; a}|\; b}|$
- $\overline{b}|$ erfüllt ebenfalls $f = \overline{\overline{f\; a}|\; b}|$
- $\overline{\overline{a}|\; b}|$ und $\overline{b}|$ sind stabile Formen für $\overline{\overline{a}|\; b}|$
- $\overline{a}|$ besitzt Fixpunkte, aber keine stabile Form

f	a	$\overline{f\; a}|$	$=$	f
		$\overline{\quad}|$	$-$	
	$\overline{\quad}|$		$+$	
$\overline{\quad}|$			$-$	$\overline{\quad}|$
$\overline{\quad}|$	$\overline{\quad}|$		$-$	$\overline{\quad}|$

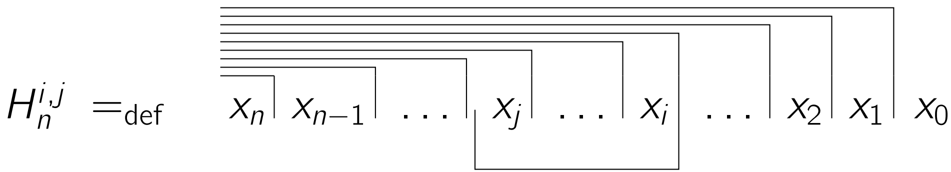
Normale Formen

- Jede Tiefe ist genau einmal besetzt

$$H_n =_{\text{def}} \overline{\overline{\overline{\overline{\overline{\overline{\overline{\overline{\overline{x_n \,|}\; x_{n-1} \,|}\; \ldots \,|}\; x_j \,|}\; \ldots \,|}\; x_i \,|}\; \ldots \,|}\; x_2 \,|}\; x_1 \,|}\; x_0$$

Normale Formen mit einem Re-entry

- Jede Tiefe ist genau einmal besetzt
- Eine Unterscheidung wird genau einmal wiedereingeführt



Normale Formen mit einem Re-entry: Stabilitätsanalyse

> **Theorem**
>
> Für $i \leq j$ besitzt $H_n^{i,j}$ genau dann eine stabile Form, wenn $j - i + 1$ gerade ist.

- Lösungsmenge für $H_n^{1,n} = \underline{\overline{\overline{\overline{\;x_n}|\;\ldots}|\;x_1}|}\;\; x_0$ und gerades n:

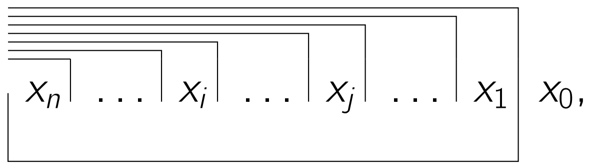
$$\overline{\overline{\overline{A x_n}|\;\ldots}|\;x_1}|\;\; x_0 \qquad \text{mit beliebigem Formausdruck } A$$

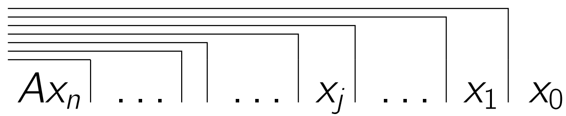
- Beispiellösungen für $\underline{\overline{\overline{\;a}|\;b}|}$: $\quad \overline{\overline{a}|\;b}|,\;\; \overline{\overline{\overline{\;\;}|\;a}|\;b}| = \overline{b}|,\;\; \overline{\overline{ba}|\;b}|,\;\; \overline{\overline{\overline{c}|\;a}|\;b}|,\;\; \ldots$

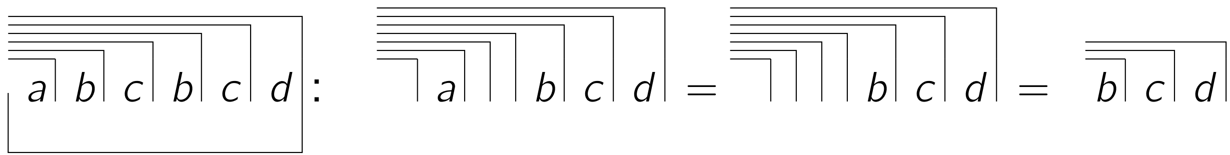
Normale Formen mit einem Re-entry: Stabilitätsanalyse

Theorem

Für $i \leq j$ besitzt $H_n^{i,j}$ genau dann eine stabile Form, wenn $j - i + 1$ gerade ist.

- Weitere Lösungen für $H_n^{1,n} =$  gerades n und $x_i = x_j$:

 mit beliebigem Formausdruck A

- Beispiellösung für 

Normale Formen mit einem Re-entry: Stabilitätsanalyse

> **Theorem**
>
> Für $i \leq j$ besitzt $H_n^{i,j}$ genau dann eine stabile Form, wenn $j - i + 1$ gerade ist.

- Lösungsmenge für $H_n^{i,j} =_{\mathrm{def}} \overline{\overline{\overline{\overline{\overline{\overline{\overline{x_n|}\ \dots|}\ x_j|}\ \dots|}\ x_i|}\ \dots|}\ x_1|}\ x_0$ mit $j - i + 1 > 0$ gerade:

$\overline{\overline{\overline{\overline{\overline{A' x_j|}\ \dots|}\ x_i|}\ \dots|}\ x_n|}\ x_0$ mit Formausdruck $A' =$ oder A' stabil für $\overline{\overline{\overline{x_n|}\ \dots|}\ x_1|}$

Projekt B: Tools

Follow Tools for the Laws of Form (Project):

`https://github.com/users/synoptiker/projects`

Follow GSB (LaTeX Repository):

`https://github.com/synoptiker/GSB`