統計データ解析課題 1

J4-170273 奥田敬二郎

2018 年 5 月 28 日

1

$\lim_{n\to\infty} I_n(f) = \int_0^\infty f(x)dx$ なので、n を大きくすると計算結果は $\int_0^\infty f(x)dx$ に近づく。

1.1

$f(x) = \dfrac{1}{(1+x)^2}$ の時、$\int_0^\infty f(x)dx = 1$ であり、計算結果は

$$\begin{cases} I_{10}(f) = 0.8611662368776232 \\ I_{100}(f) = 0.9851161663661924 \\ I_{1000}(f) = 0.9985011661666946 \\ I_{10000}(f) = 0.9998500116663119 \end{cases}$$

1.2

$f(x) = \dfrac{2}{1+x^2}$ の時、$\int_0^\infty f(x)dx = \pi$ であり、計算結果は

$$\begin{cases} I_{10}(f) = 2.843242180027292 \\ I_{100}(f) = 3.11159432008312 \\ I_{1000}(f) = 3.1385926552561965 \\ I_{10000}(f) = 3.141292653591556 \end{cases}$$

1.3 ガウス積分

$f(x) = \exp\left(-\dfrac{1}{2}x^2\right)$ の時、$\int_0^\infty f(x)dx = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$, $2\left(\int_0^\infty f(x)dx\right)^2 = \pi$ であり、計算結果は

$$\begin{cases} I_{10}(f) = 1.2033141373155003 \\ I_{100}(f) = 1.2483141373155004 \\ I_{1000}(f) = 1.25281413731549 \\ I_{10000}(f) = 1.2532641373154276 \end{cases} \quad \begin{cases} 2I_{10}(f)^2 = 2.8959298261266935 \\ 2I_{100}(f)^2 = 3.116576370843484 \\ 2I_{1000}(f)^2 = 3.139086525315111 \\ 2I_{10000}(f)^2 = 3.141341995761966 \end{cases}$$

1.4

$f(x) = \begin{cases} x^2(1-x)^3 & (0 < x < 1) \\ 0 & (x \geq 1) \end{cases}$ の時、$\displaystyle\int_0^\infty f(x)dx = \frac{1}{60}$ であり、計算結果は

$$\begin{cases} I_{10}(f) = 0.016665000000000003 \\ I_{100}(f) = 0.016666666499999993 \\ I_{1000}(f) = 0.01666666666665003 \\ I_{10000}(f) = 0.016666666666666576 \end{cases}$$

2

2.1

$x_j\,(j = 1, ..., 6) = 0.3835199, 1.3669469, -0.3452020, 1.3491541, 0.3029958, 0.5207242$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0.3835199 & 1.3669469 & -0.3452020 \\ -0.3835199 & 0 & 1.3491541 & 0.3029958 \\ -1.3669469 & -1.3491541 & 0 & 0.5207242 \\ 0.3452020 & -0.3029958 & -0.5207242 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0.24993987 & -0.4849698 & 0.8378762 & 0.01725761 \\ -0.71024416 & 0.27593963 & 0.360502 & 0.53800453 \\ -0.35887576 & -0.82909093 & -0.37703558 & 0.20410927 \\ 0.55162622 & 0.03563492 & -0.16076676 & 0.81767519 \end{pmatrix}$$

2.2

$$\mathrm{detA} = 0.462674447965\,,\ \mathrm{detB} = 1$$

2.3

固有値を λ_{a_i}、固有ベクトルを $\vec{a_i}$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ とすると

$$\lambda_{a_1} = 8.32667268 \cdot 10^{-17} + 2.05134642j,\ \boldsymbol{a_1} = \begin{pmatrix} -0.12411189 - 0.4812949j \\ 0.12141420 - 0.47230595j \\ 0.68536757 + 0.j \\ -0.01123030 + 0.21279641j \end{pmatrix}$$

$$\lambda_{a_2} = 8.32667268 \cdot 10^{-17} - 2.05134642j,\ \boldsymbol{a_2} = \begin{pmatrix} -0.12411189 + 0.4812949j \\ 0.12141420 + 0.47230595j \\ 0.68536757 - 0.j \\ -0.01123030 - 0.21279641j \end{pmatrix}$$

$$\lambda_{a_3} = 4.16333634 \cdot 10^{-17} + 0.33158796j,\ \boldsymbol{a_3} = \begin{pmatrix} 0.14983522 + 0.48010506j \\ 0.15108778 - 0.48924244j \\ 0.01141575 + 0.17361155j \\ 0.67423406 + 0.j \end{pmatrix}$$

$$\lambda_{a_4} = 4.16333634 \cdot 10^{-17} - 0.33158796j,\ \boldsymbol{a_4} = \begin{pmatrix} 0.14983522 - 0.48010506j \\ 0.15108778 + 0.48924244j \\ 0.01141575 - 0.17361155j \\ 0.67423406 - 0.j \end{pmatrix}$$

2.4

固有値を λ_{b_i}、固有ベクトルを $\vec{b_i}$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ とすると

$$\lambda_{b_1} = -0.46226703 + 0.88674077j,\ \boldsymbol{b_1} = \begin{pmatrix} 0.12411189 + 0.4812949j \\ -0.12141420 + 0.47230595j \\ -0.68536757 + 0.j \\ 0.01123030 - 0.21279641j \end{pmatrix}$$

$$\lambda_{b_2} = -0.46226703 - 0.88674077j,\ \boldsymbol{b_2} = \begin{pmatrix} 0.12411189 - 0.4812949j \\ -0.12141420 - 0.47230595j \\ -0.68536757 - 0.j \\ 0.01123030 + 0.21279641j \end{pmatrix}$$

$$\lambda_{b_3} = 0.94552658 + 0.3255449j,\ \boldsymbol{b_3} = \begin{pmatrix} 0.14983522 + 0.48010506j \\ 0.15108778 - 0.48924244j \\ 0.01141575 + 0.17361155j \\ 0.67423406 + 0.j \end{pmatrix}$$

$$\lambda_{b_4} = 0.94552658 - 0.3255449j,\ \boldsymbol{b_4} = \begin{pmatrix} 0.14983522 - 0.48010506j \\ 0.15108778 + 0.48924244j \\ 0.01141575 - 0.17361155j \\ 0.67423406 - 0.j \end{pmatrix}$$

2.5

A の固有値の指数関数は

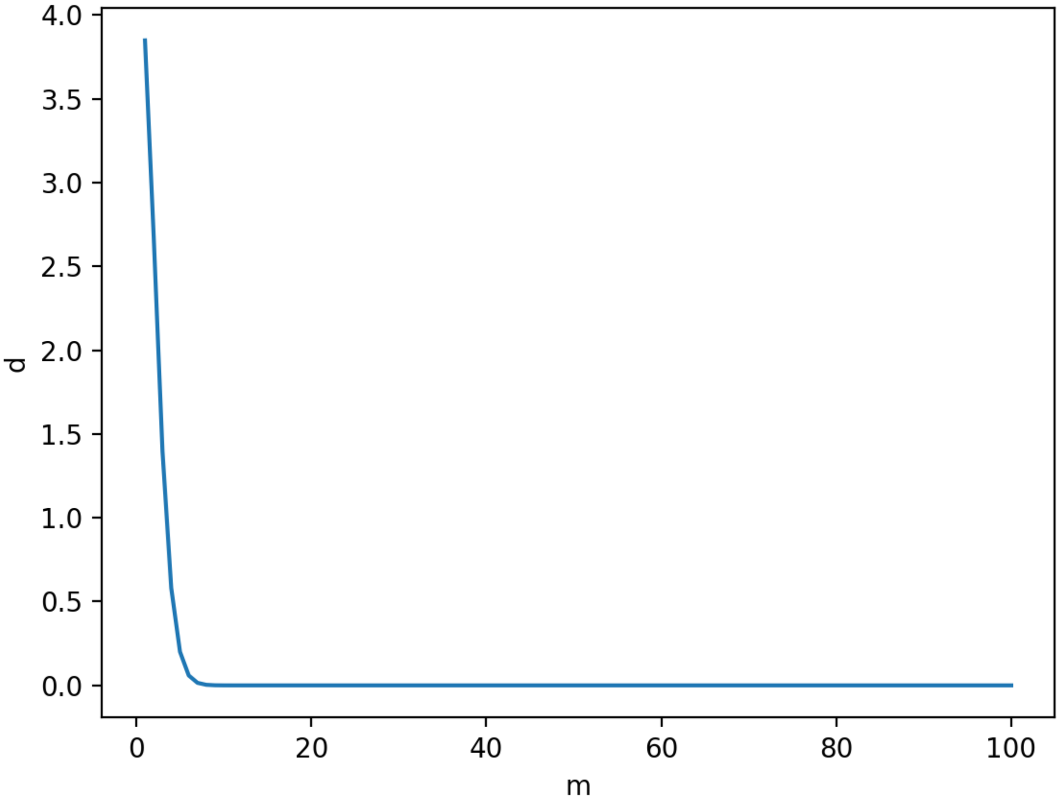
$$\begin{cases} -0.4622670324619393 + 0.8867407686008535j \\ -0.4622670324619393 - 0.8867407686008535j \\ 0.945526584150717 + 0.3255448950057075j \\ 0.945526584150717 - 0.3255448950057075j \end{cases}$$

これらは B の固有値とほとんど等しい

また、上記の 2.3、2.4 から分かるように、A と B の固有ベクトルもほとんど等しい

さらに、$B = I_4 + \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n!} A^n$ として、A の固有値の指数関数と、B の固有値の値の差の絶対値の和

$d\ (=\sum_{i=1}^{4}|\exp(\lambda_{a_i})-\lambda_{b_i}|)$ として、横軸 m、縦軸 d のグラフにすると、

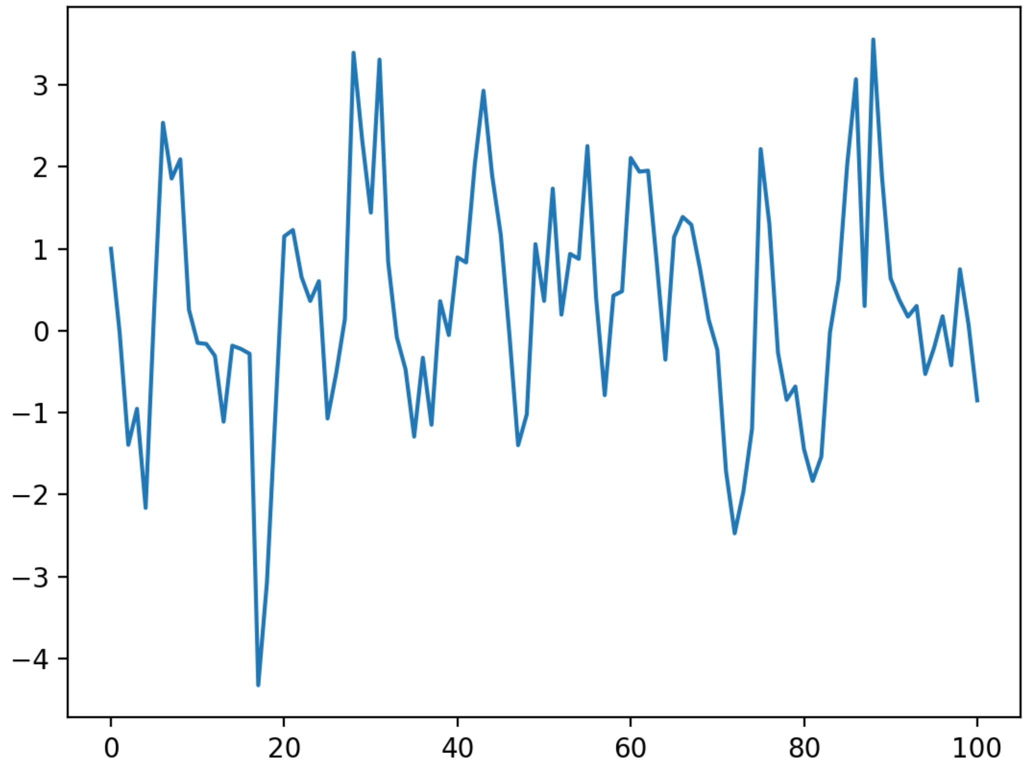


となり、m が大きくなると B の固有値は A の固有値の指数関数に収束すると推測される。

3

t 分布の確率密度関数は、$f(t)=\dfrac{\Gamma((\nu+1)/2)}{\sqrt{\nu\pi}\,\Gamma(\nu)}(1+t^2/\nu)^{-(\nu+1)/2}$ (ν は自由度、Γ はガンマ関数) であり、$\lim_{\nu\to\infty}f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\dfrac{x^2}{2\sigma^2}\right)=$ ” $N(0,\sigma^2)$ の確率密度関数” (ただし $\sigma^2=(1-\theta^2)^{-1}$) となる

3.1

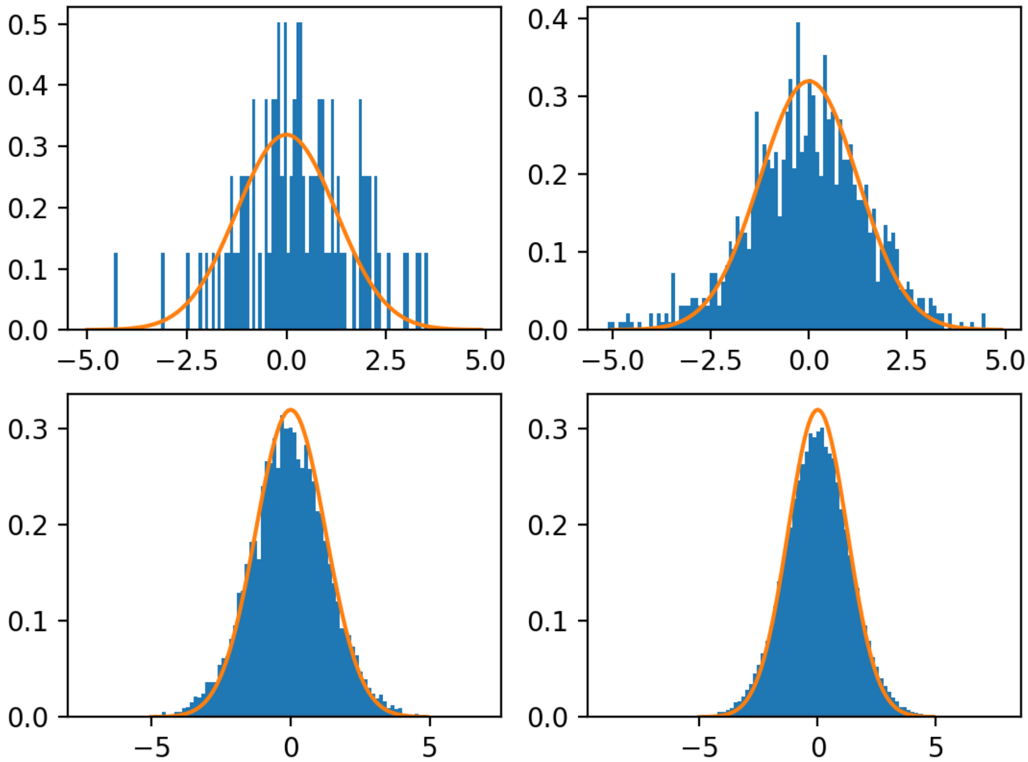


3.2

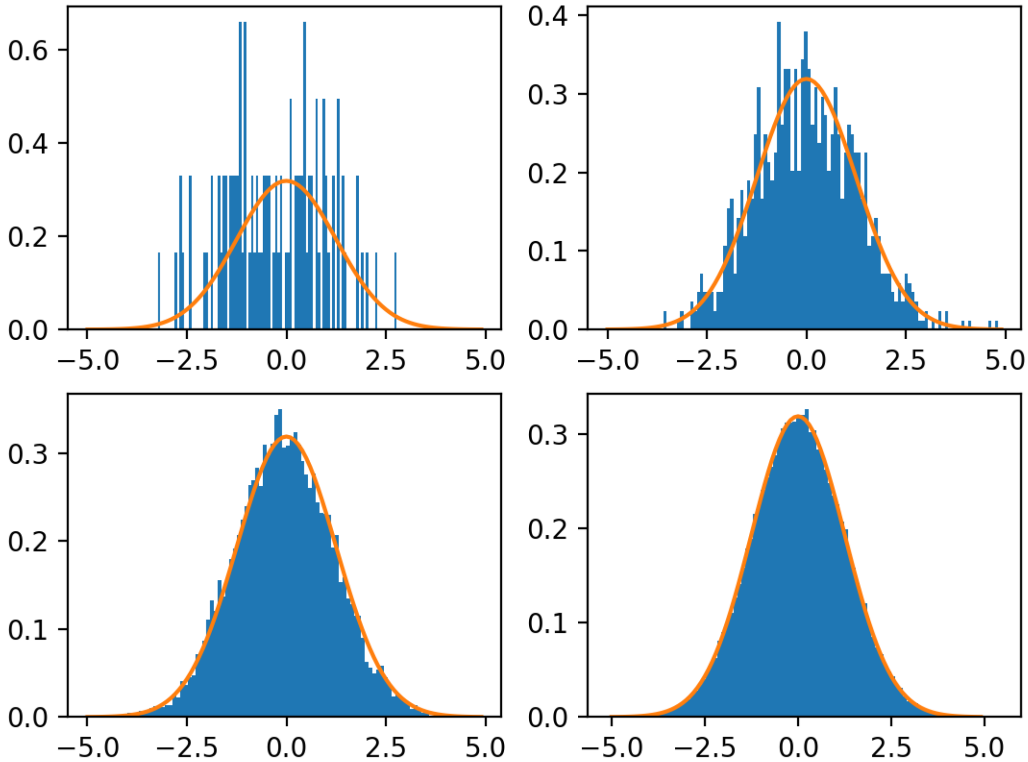
$T = 10^5$ の時

$$(T+1)^{-1}\sum_{t=0}^{T} X_t = -0.00371338716465,\ T^{-1}\sum_{t=1}^{T} X_{t-1}^2 = 1.96217931557$$

3.3

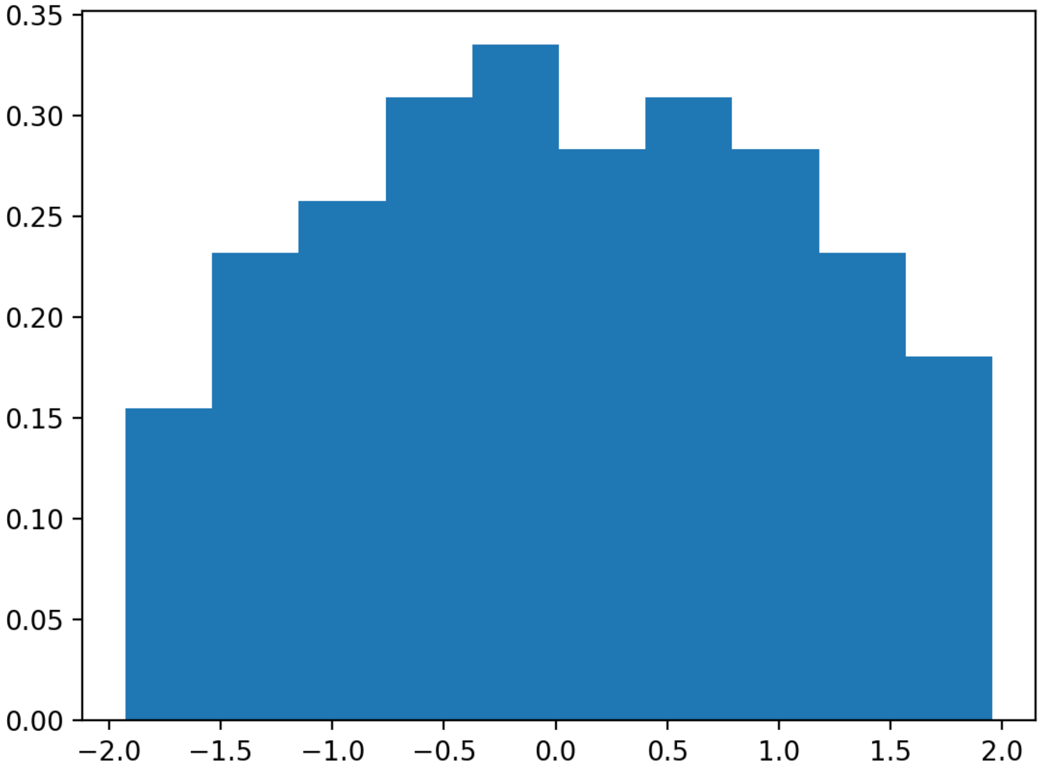


また、自由度 ν を 100000 と大きくしてみると、$T^{-1}\sum_{t=1}^{T} X_{t-1}^2 = 1.55918524828$ となり、これは $\sigma^2 = (1-\theta^2)^{-1} = 1.5625$ に近い値になる。その時のヒストグラムは以下のようになり、確かに ν が ∞ に近づくことで正規分布に近づくことが確認できる。

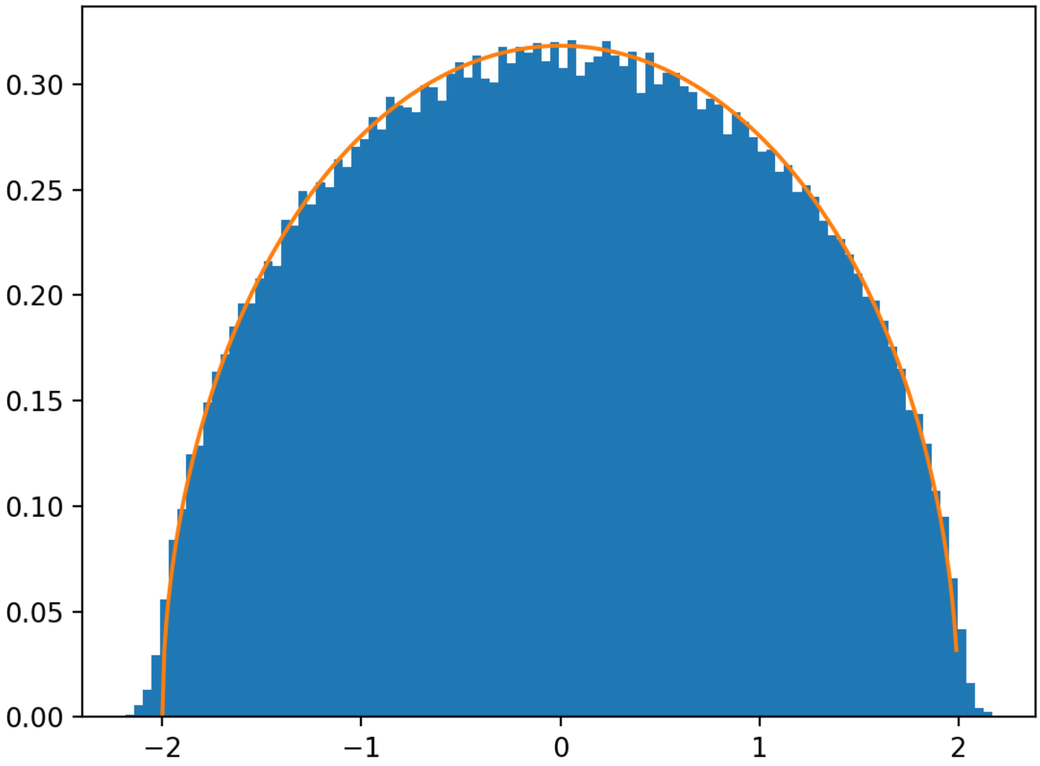

0.6
0.4
0.2
0.0
−5.0
−2.5
0.0
2.5
5.0
0.4
0.3
0.2
0.1
0.0
−5.0
−2.5
0.0
2.5
5.0
0.3
0.2
0.1
0.0
−5.0
−2.5
0.0
2.5
5.0
0.3
0.2
0.1
0.0
−5.0
−2.5
0.0
2.5
5.0

4　ウィグナー行列

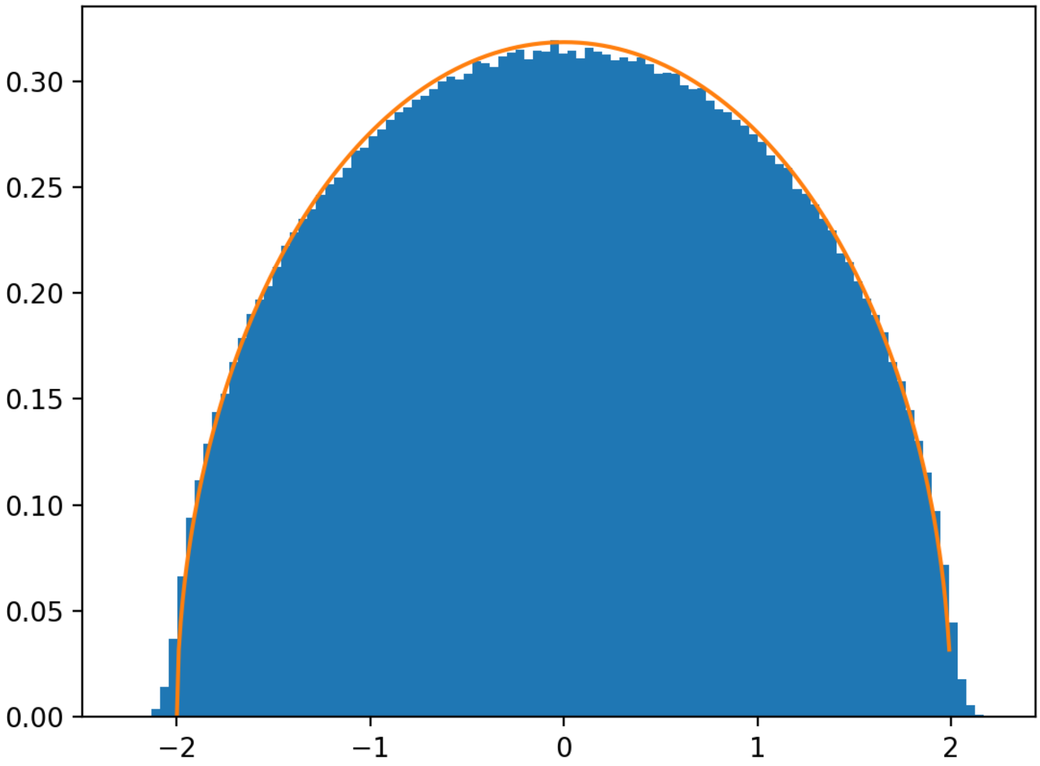
4.1



4.2　ウィグナーの半円則



ランダム行列を 10000 個生成すると以下のようになり、より楕円にフィットする。


0.30
0.25
0.20
0.15
0.10
0.05
0.00
−2
−1
0
1
2