线性代数 – HW 6 解答

小明, 12345678901

2025.08.30

问题 1. 证明：实对称矩阵的不同特征值之间的特征向量相互正交.

证明： 考虑实内积空间 V 上的一个对称双线性变换 $\mathcal{A}$，他在一组基下的矩阵式对称矩阵. 假设 $\mathcal{A}$ 的属于两个特征值 $\lambda_1 \neq \lambda_2$ 的特征向量分别是 $\eta_1, \eta_2 \neq 0$，于是我们有：

$$\lambda_1(\eta_1, \eta_2) = (\mathcal{A}\eta_1, \eta_2) = (\eta_1, \mathcal{A}\eta_2) = \lambda_2(\eta_1, \eta_2)$$

因此可以得出：$(\eta_1, \eta_2) = 0$. ■

问题 2. 证明：实对称矩阵可以正交对角化.

证明： 由 问题 1 可以得到：实对称矩阵的不同特征值之间的特征向量相互正交. 又可以证明：实对称矩阵矩阵特征多项式的所有复根都是实根. 因此实对称矩阵一定可以对角化. 不同的特征子空间之间的特征向量相互正交，同一特征子空间内的向量可以通过 Schmidt 正交化得到正交基，因此得证. ■