

# 线性代数 – HW 6 解答

小明, 12345678901

2025.08.30

**问题 1.** 证明：实对称矩阵的不同特征值之间的特征向量相互正交.

**证明：** 考虑实内积空间  $V$  上的一个对称双线性变换  $\mathcal{A}$ ，他在一组基下的矩阵式对称矩阵. 假设  $\mathcal{A}$  的属于两个特征值  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  的特征向量分别是  $\eta_1, \eta_2 \neq 0$ ，于是我们有：

$$\lambda_1(\eta_1, \eta_2) = (\mathcal{A}\eta_1, \eta_2) = (\eta_1, \mathcal{A}\eta_2) = \lambda_2(\eta_1, \eta_2)$$

因此可以得出：  $(\eta_1, \eta_2) = 0$  . ■

**问题 2.** 证明：实对称矩阵可以正交对角化.

**证明：** 由 问题 1 可以得到：实对称矩阵的不同特征值之间的特征向量相互正交. 又可以证明：实对称矩阵矩阵特征多项式的所有复根都是实根. 因此实对称矩阵一定可以对角化. 不同的特征子空间之间的特征向量相互正交，同一特征子空间内的向量可以通过 Schmidt 正交化得到正交基，因此得证. ■