華東師範大學
EAST CHINA NORMAL UNIVERSITY

抽象代数

笔记

© syqwq
East China Normal University

Contents

Chapter 1
域论、线性空间

1.1 定义和例子

Definition 1.1.1 域.
假设集合 F 有如下元素和定义在 F 上的运算：

- **零元**: $0 \coloneqq 0_F$
- **单位元**: $1 \coloneqq 1_F \neq 0_F$
- **加法**: $+ : F \times F \to F, (x, y) \mapsto x + y$
- **乘法**: $\cdot : F \times F \to F, (x, y) \mapsto x \cdot y$

并且， F 上的加法和乘法满足:

1. **加法结合律**: $(x + y) + z = x + (y + z)$
2. **加法交换律**: $x + y = y + x$
3. **加法单位元**: $x + 0 = 0 + x = x$
4. **加法逆元**: $\forall x \in F, \exists y \in F, x + y = y + x = 0$， 记作 $-x$
5. **乘法结合律**: $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$
6. **乘法交换律**: $x \cdot y = y \cdot x$
7. **乘法单位元**: $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$
8. **乘法逆元**: $\forall x \in F^*, \exists y \in F, x \cdot y = y \cdot x = 1$， 记作 x^{-1}
9. **分配律**:
    1. $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$
    2. $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$

则称 F 是一个**域**.

Lemma 1.1.1 关于零元.

- $0 \cdot 0 = 0$
- $\forall x \in F, x \cdot 0 = 0$

Proof.

- 考虑如下事实:

$$a = 0 \cdot (0+1) = 0 \cdot 1 = 0$$
$$= 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0 \cdot 0 + 0 = 0 \cdot 0$$

- 考虑 $x \cdot 0 = x \cdot (0+0) = x \cdot 0 + x \cdot 0$，令 $y = -(x \cdot 0)$，得到

$$y + x \cdot 0 = y + x \cdot 0 + x \cdot 0 \Leftrightarrow 0 = x \cdot 0$$

■

注意到在定义中，我们要求 $0_F \neq 1_F$，若 $0 = 1$，则 $\forall x \in F, x = x \cdot 1 = x \cdot 0 = 0$，于是 $F = \{0\}$，太平凡了，于是我们排除这种情况.

又注意到，在乘法逆元定义中我们要求 $x \neq 0$，这是因为假设 $x = 0$ 有乘法逆 y，则 $x \cdot y = y \cdot x = 1 \Rightarrow 0 \cdot y = y \cdot 0 = 1 \Rightarrow 1 = 0$，则与上一条矛盾.

Remark 1.1.1 非零元记号.
为了方便讨论，我们将域中的非零元记作 $F^* = F \setminus \{0\}$

Remark 1.1.2 逆元是唯一的.

- 加法逆元是唯一的. 假设 对于 x 存在两个加法意义下的逆元 y_1, y_2，则

$$y_1 = y_1 + 0 = y_1 + x + y_2 = 0 + y_2 = y_2$$

因此，$y_1 = y_2$.

- 乘法逆元是唯一的. 证明类似，此处略.

Example 1.1.1 一些域的例子.

1. $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$
2. $F = \mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{x + \sqrt{2}y \mid x, y \in \mathbb{Q}\}$
   可以验证，每个元素确实存在加法逆元和乘法逆元（分母有理化）
3. $F = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$

Proof $F = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$. 记 $\alpha = \sqrt[3]{2}$，$F = \{x + y\alpha + z\alpha^2 \mid x, y, z \in \mathbb{Q}\}$，我们主要考虑乘法逆

$$\frac{1}{x + y\alpha + z\alpha^2} = \frac{y - z\alpha}{(x + y\alpha + z\alpha^2)(y - z\alpha)} = \frac{*}{x(y - z\alpha) + \alpha(y^2 - z^2\alpha^2)}$$
$$= A \cdot \frac{1}{s + t\alpha} = \frac{s^2 - st\alpha + t^2\alpha^2}{(s + t\alpha)(s^2 - st\alpha + t^2\alpha^2)}$$
$$= \frac{*}{s^3 - t^3\alpha^3} = \frac{*}{s^3 - 2t^3} \in F$$

■

Remark 1.1.3 $F[x]$ 与 $F(x)$.
注意区分 $F[x]$ 和 $F(x)$，前者是 $\left\{\sum_{i\geq 0} a_i x^i \,\middle|\, a_i \in F\right\}$，后者是在域 F 中添加 x 生成的新的域.

Proposition 1.1.1 $\mathbb{Q}(\alpha)$ 是域.
设 $\alpha \in \mathbb{C}$ 是 $f(x)$ 的根，其中 f 是 $\mathbb{Q}$ 上的首一不可约多项式， $\deg f = n$， 则有:

$$F = \mathbb{Q}(\alpha) = \{x_1 + x_2\alpha + \cdots + x_n\alpha^{n-1} \mid x_i \in \mathbb{Q}\}$$

F 是一个域.

Proof. 我们主要考虑乘法逆. 设 $f(\alpha) = \alpha^n + b_1\alpha^{n-1} + \cdots + b_{n-1}\alpha + b_n = 0$ ，对于形式更高阶的，可以通过带余除法，最终化成次数最高不超过 $n-1$ 的形式，因此我们考虑如下的乘法逆:

$$\frac{1}{g(\alpha)} = \frac{1}{x_1 + x_2\alpha + \cdots + x_n\alpha^{n-1}}$$

首先我们有 $(f, g) = 1$，于是 $\exists u, v \in \mathbb{Q}[\alpha], ug + vf = 1$，回到上面的式子

$$\frac{1}{g(\alpha)} = \frac{u}{ug + vf}(\alpha) = u(\alpha) \in \mathcal{P}_{n-1}(\alpha) = F$$

■

Example 1.1.2 在有理数域中加入两个无理数.
4. 考虑 $F = \mathbb{Q}\left(\sqrt{2}, \sqrt{3}\right) = \{x_1 + x_2\sqrt{2} + x_3\sqrt{3} + x_4\sqrt{6} \mid x_i \in \mathbb{Q}\}$，也是域.

Proof. 首先，加法和乘法的封闭性容易验证. 我们考虑乘法逆.

$$\frac{1}{x_1 + x_2\sqrt{2} + x_3\sqrt{3} + x_4\sqrt{6}} = \frac{y_1 + y_2\sqrt{2} + y_3\sqrt{3} + y_4\sqrt{6}}{\left(x_1 + x_2\sqrt{2} + x_3\sqrt{3} + x_4\sqrt{6}\right)\left(y_1 + y_2\sqrt{2} + y_3\sqrt{3} + y_4\sqrt{6}\right)}$$

因此，现在的核心任务就是考虑如何取 y_i 的值，能够使得分母是一个有理数. 我们将分母展开之后，进行待定系数，求解线性方程组即可. 我们只需要无理数项的系数为 0，因此只有三个方程，而有四个未知数，因此一定有非零解. ■

加了两个无理数，也确实构成一个域. 但是其实，加了这两个无理数和加一个无理数的效果是一样的.

我们来看看 $F' = \mathbb{Q}\left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)$. 按照 Proposition 1.1.1 的思路， 考虑能否找到一个多项式使得 $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ 是他的根. 通过平方，移项，平方，不难得到 $f(\alpha) = \alpha^4 - 10\alpha^2 + 1 = 0$，利用 Eisenstein 判别法可以得到 f 是一个不可约多项式，因此我们断言:

$$F' = \{x_1 + x_2\alpha + x_3\alpha^2 + x_4\alpha^3 \mid x_i \in \mathbb{Q}\}$$

接下来，要说明： $F = F'$. 手玩得到:

$$\begin{cases}\alpha^3 = 11\sqrt{2}+9\sqrt{3}\\ \alpha \;=\; \sqrt{2}+\sqrt{3}\end{cases}$$

因此， $\sqrt{2},\sqrt{3}$ 都可以用 α 的多项式表示出来，而他们又可以生成整个 F，因此整个 F 都可以用 F' 表示出来. 或者可以这样考虑 $F=\mathrm{span}\left(1,\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{6}\right), F'=\mathrm{span}(1,\alpha,\alpha^2,\alpha^3,\alpha^4)$，而线性方程组又给出了这两组基之间的基变换，并且可以验证是双射，因此这两组基可以互相线性表出，从而他们张成的空间实际上是同一个空间.

我们把这种只加一个元的域扩张叫做**单扩张**，加若干元的扩张叫**有限扩张**. 在一定条件下，有限域扩张就是单扩张.

Example 1.1.3 有限域的例子.

5. $\mathbb{F}_2=\{\overline{0},\overline{1}\}$
6. $\mathbb{F}_3=\{\overline{0},\overline{1},\overline{2}\}$

Proof. 通过列加法表、乘法表，不难验证他们都构成域. ■

Example 1.1.4 模素数剩余系构成的有限域.

7. 设 $p\in\mathbb{N}\cap\mathbb{P}$，则整数集的模 p 剩余系： $\mathbb{F}_p=\{\overline{0},\overline{1},\cdots,\overline{p-1}\}$ 是一个域.

Proof. 考虑乘法逆. 对于 $\overline{k}\in\mathbb{F}_p^*$，由于 $p\in\mathbb{P}$，那么 $k\perp p$，根据 Bezout 定理，有： $\exists u,v\in\mathbb{Z}, uk+vp=1$ 两侧取模可得 $\overline{u}$ 就是 $\overline{k}$ 的乘法逆.

另解. 构造一个映射 $T:\mathbb{F}_p\to\mathbb{F}_p, y\mapsto ky$，接下来，我们证明： $\ker T=\{0\}$. 如果 $T(y)=0\Leftrightarrow ky\equiv 0\Leftrightarrow ky=pm\Leftrightarrow p\mid y\Leftrightarrow y=\overline{0}$，因此， 我们可以把映射限制到 $\mathbb{F}_p^*$ 上，为了证明每个元素 都存在逆元，我们只需要证明 T 是双射. 由于 T 是有限集合上的映射，因此只需要证明 T 是单射即可. 考虑 $T(y_1)=T(y_2)$，即 $ky_1=ky_2\Leftrightarrow k(y_1-y_2)\equiv 0\Leftrightarrow y_1\equiv y_2$，因此 T 是单射. 从而，1 在 T 的原像是唯一且存在的. ■

Remark 1.1.4.
若 $p\notin\mathbb{P}, m\in\mathbb{N}, m\geq 2, \mathbb{Z}_m=\left\{\overline{0},\overline{1},\cdots,\overline{m-1}\right\}$，则乘法逆不一定存在. 比如 $m=4, 2\cdot 2=0$，而 $\overline{2}\neq\overline{0}$，此时称 2 为零因子.

Example 1.1.5 函数域.

8. 设 F 是一个域. $F(x)=\left\{\frac{p(x)}{q(x)}\,\middle|\, p(x),q(x)\in F[x], q(x)\neq 0\right\}$
9. $K=\mathbb{C}\left(x,\sqrt{x^3+2}\right)=\mathbb{C}(x)(y)\sim\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right)=\left\{R_1(x)+R_2(x)y\,\middle|\, R_1,R_2\in\mathbb{C}[x], y=\sqrt{x^3+2}\right\}$，此处类比向 $\mathbb{Q}$ 中加入 $\sqrt{2}$. 这个 K 是一条代数曲线上的亚纯函数.

Definition 1.1.2 线性空间.
设 F 是一个域，集合 V 和上面定义两个运算：

- 加法： $+ : V \times V \to V$
- 数乘： $\cdot : F \times V \to V$

如果 $0_V \in N$，且满足：

1. $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$
2. $\alpha + \beta = \beta + \alpha$
3. $\alpha + 0_V = 0_V + \alpha = \alpha$
4. $\forall \alpha \in V, \exists! \beta \in V$ s.t. $\alpha + \beta = \beta + \alpha = 0_V$，且 $-\alpha \triangleq \beta$
5. $(xy)\alpha = x(y\alpha)$
6. $1_F \cdot \alpha = \alpha$
7. $(x + y)\alpha = x\alpha + y\alpha$
8. $x(\alpha + \beta) = x\alpha + x\beta$

则称集合 V 连同它上面的两个运算为 域 F 上的**线性空间** V.

Example 1.1.6 线性空间的例子.

1. $\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right)$ 是 $\mathbb{Q}$ 上的 2 维线性空间.
2. $\mathbb{Q}\left(\sqrt[3]{2}\right)$ 是 $\mathbb{Q}$ 上的 3 维空间.
3. $\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}, \sqrt{3}\right)$ 是 $\mathbb{Q}$ 上的 4 维空间.
4. $F(x)$ 是无穷维的线性空间.
5. K 是 $\mathbb{C}(x)$ 上的 2 维线性空间.
6. $\mathbb{R}$ 是 $\mathbb{Q}$ 上的无穷维空间.
7. $\mathbb{C}$ 是 $\mathbb{R}$ 上的 2 维空间.

通过类比 Proposition 1.1.1 ，我们来看一些更复杂的例子.

Theorem 1.1.1.
$p \in \mathbb{P}, d \in \mathbb{Z}_+$，记 $q = p^d$，则存在一个 q 元有限域 $\mathbb{F}_q$.

Proof. 取 $\mathbb{F}_p$ 上的一个 d 次不可约多项式 $f(x)$，构造商环 $K = \mathbb{F}_p[x]/\langle f(x) \rangle$ 可以看成是 $f(\alpha) = 0$ ，从而得到一个域 $\mathbb{F}_p$ 上的 d 维线性空间，一组基为 $1, x, x^2, \cdots, x^{d-1}$. 因此 K 一共有 p^d 个元素. 接下来考虑乘法逆是否存在. $\forall g(x) \in K, \deg g < d$ 且 f 是不可约多项式，因此 $(f, g) = 1$，从而由 Bezout 定理， $\exists u, v \in K$ s.t. $uf + vg = 1$，模掉 f，得到 g 的逆元为 v. 因此 K 就是所要求的 $\mathbb{F}_q$. ■

Example 1.1.7 四元数.

10. 考虑四元数 $\mathbb{F}_4 = \{x + y\alpha \,|\, x, y \in \mathbb{F}_2\} = \mathbb{F}_2(\alpha)$ 的结构.

Solution. $\mathbb{F}_2 = \{\overline{0}, \overline{1}\}$，为了方便研究，我们画出 $\mathbb{F}_2$ 的加法表和乘法表:

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

考虑 $\mathbb{F}_2[x] : f(x) = x^2 + px + q$ 中的不可约多项式，其中 $p, q \in \mathbb{F}_2$.

首先，$f(x) \in \{x^2, x^2 + x, x^2 + 1, x^2 + x + 1\}$，其中的不可约多项式实际上只有 $x^2 + x + 1$. 因此若 $\mathbb{F}_4 = \mathbb{F}_2(\alpha)$，则 α 满足 $\alpha^2 + \alpha + 1 = 0 \Leftrightarrow \alpha^2 = 1 + \alpha$. 此时，$\mathbb{F}_4 = \{0, 1, \alpha, 1 + \alpha = \alpha^2\}$. 接下来我们可以验证这样的 $\mathbb{F}_4$ 是否是域. 利用加法表和乘法表:

$+$	0	1	α	α^2
0	0	1	α	α^2
1	1	0	α^2	α
α	α	α^2	0	1
α^2	α^2	α	1	0

$\cdot$	0	1	α	α^2
0	0	0	0	0
1	0	1	α	α^2
α	0	α	α^2	1
α^2	0	α^2	1	α

发现乘法逆其实是 $\alpha^{-1} = \alpha^2$. 因此这确实是一个域. □

类似的，我们还可以找到一些比较简单的可以手玩的例子.

Example 1.1.8.

11. $\mathbb{F}_9 = \mathbb{F}_3(\alpha)$，其中 $\alpha^2 = 2$ 或 $\alpha^2 + 1 = 0$.
12. $\mathbb{F}_8 = \mathbb{F}_2(\alpha)$，其中 $\alpha^3 = 1 + \alpha$.

1.2 域的同态

Definition 1.2.1 线性空间的同态.

设 V_1, V_2 是域 F 上的线性空间，若映射 $\varphi : V_1 \to V_2$ 满足:

1. $\varphi(\alpha + \beta) = \varphi(\alpha) + \varphi(\beta)$
2. $\varphi(k\alpha) = k\varphi(\alpha)$

则称 φ 是**同态**.

其实，同态就是保运算的映射.

Definition 1.2.2 域的同态.
设 F_1, F_2 是两个域. 若 $\varphi : F_1 \to F_2$ 满足:

1. $\varphi\left(0_{F_1}\right) = 0_{F_2}$
2. $\varphi\left(1_{F_1}\right) = 1_{F_2}$
3. $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$
4. $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$

则称 φ 是**同态**.

若 φ 是同态, 有以下事实:

1. $\varphi(-x) = -\varphi(x)$
2. $\varphi(x^{-1}) = \varphi(x)^{-1}$

Theorem 1.2.1 域同态是单射.
若 $\varphi : F_1 \to F_2$ 是域同态, 则 φ 是单射.

Proof. 假设 $\varphi(x_1) = \varphi(x_2), x = x_2 - x_1$, 则

$$\varphi(x) = \varphi(x_1) - \varphi(x_2) = 0$$

若 $x \neq 0$, 则存在 x^{-1}, 于是

$$\text{LHS} \Rightarrow \varphi(x) \cdot \varphi(x^{-1}) = 1$$
$$\text{RHS} \Rightarrow 0 \cdot \varphi(x^{-1}) = 0$$

而 $0 \neq 1$, 因此 $\forall x_1 \neq x_2, \varphi(x_1) \neq \varphi(x_2)$. ■

Definition 1.2.3 子域、域扩张.
若 F 是域, E 是 F 的子集, 若满足:

1. $0_F \in E$
2. $1_F \in E$
3. $\forall x, y \in E, x+y \in E, xy \in E$
4. $\forall x \in E, -x \in E$
5. $\forall x \in E \setminus \{0\}, x^{-1} \in E$

则称 E 为 F 的**子域**, F 为 E 的一个**扩域**. 记作 F/E.

Remark 1.2.1.
若存在同态 $\varphi : F_1 \to F_2$, 则 F_1 可以称为 F_2 的子域.

同态一定是**单射**.

Definition 1.2.4 域的同构.
若 $\varphi : F_1 \to F_2$ 是域的同态，若 φ 是满射，则称 φ 是**同构**.
特别的，如果 $F_1 = F_2$，则称 φ 是 F 的**自同构**.

Example 1.2.1 子域的例子.

1. $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$
2. $\mathbb{C}/\mathbb{R}$
3. $\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right)/\mathbb{Q}$
4. $\mathbb{Q}\left(\sqrt{2},\sqrt{3}\right)/\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right)$
5. $\mathbb{Q}\left(\sqrt{2},\sqrt{3}\right) \cong \mathbb{Q}\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)$
6. $\mathbb{F}_4/\mathbb{F}_2$

Definition 1.2.5 不动域.
设 $\sigma : F \to F$是 F 的自同构，则 $E = \{x \in F \,|\, \sigma(x) = x\}$ 是一个子域，叫做 σ 的**不动域**.

Example 1.2.2 自同构的例子.
设 $\overline{\ } : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, x + yi \mapsto x - yi$，可以验证满足:

1. $\overline{0} = 0$
2. $\overline{1} = 1$
3. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
4. $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

则 $\overline{\ }$ 的不动域为 $z = \overline{z} \Rightarrow \mathbb{R}$.

Example 1.2.3 另一个例子.
定义 $\sigma : \mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right) \to \mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right), x + \sqrt{2}y \mapsto x - \sqrt{2}$ 也是自同构.

Proof. 设 $z_1 = x_1 + \sqrt{2}y_1, z_2 = x_2 + \sqrt{2}y_2$，容易验证他满足域同构的所有要求. 考虑他的不动域: $z = \sigma(z) \Rightarrow x + \sqrt{2}y = x - \sqrt{2}y \Rightarrow z \in \mathbb{Q}$. ■

Problem 1.2.1 二次域之间的关系.
$\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right)$ 和 $\mathbb{Q}\left(\sqrt{3}\right)$ 有什么关系?

Solution. 没什么关系. 不存在同态 $\varphi : \mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right) \to \mathbb{Q}\left(\sqrt{3}\right)$. 若有同态 φ，令 $a = \varphi\left(\sqrt{2}\right) = x + \sqrt{3}y$，则 $a^2 = \varphi\left(\sqrt{2}\right)^2 = \varphi(2) = \varphi(1) + \varphi(1) = 2$，所以有 $\left(x + \sqrt{3}y\right)^2 = 2 \Rightarrow x, y \in \emptyset$. □

可见不同的二次域之间没啥关系.

Theorem 1.2.2 域与线性空间.
若 F/E，则 F 是 E 的线性空间. 我们记 $[F:E]=\dim_E(F)$ 为 F 作为 E 的线性空间的维数，称为 F/E 的**次数**.

Proof. 这很显然. ■

Proposition 1.2.1.
$\mathbb{Q}$ 没有真子域.

Proof. 设 $E\subseteq\mathbb{Q}$，且 $1\in E,0\in E$. 若 E 为子域，那么:
- 加法封闭: $\mathbb{N}\subseteq E$
- 加法有逆: $\mathbb{Z}\subseteq E$
- 乘法有逆: $\mathbb{Q}\subseteq E$

因此，$E=\mathbb{Q}$. ■

Proposition 1.2.2.
$\mathbb{F}_q$ 没有真子域，其中 $p\in\mathbb{P}$.

Proof. 设 $\mathbb{F}_p/E$，于是有 $\#E,\#\mathbb{F}_p<\infty$，因为 $\mathbb{F}_p$ 可以看成是 E 上的线性空间，考虑一组基和任意 $x\in\mathbb{F}_p$ 在这个基下的坐标，可以得到 $\#\mathbb{F}_p=(\#E)^d$，其中 $d=[F:E]$. 又 $p\in\mathbb{P}$，我们得到 $d=1,\#E=\#\mathbb{F}_p$，因此 $E=\mathbb{F}_p$. ■

Definition 1.2.6 有限扩张.
若 $[F:E]<\infty$，则称 F/E 是**有限扩张**.

Remark **1.2.2** E-代数.
若 F/E 是有限扩张，且 $n=[F:E]$，则可以取 F 的一组基 $e_1,e_2,\cdots,e_n$，不妨设 $e_1=1$，则有

$$e_i\cdot e_j=\sum_{k=1}^{n}c_{ij}^k e_k\quad c_{ij}^k\in E$$

因此，$\forall x=\sum_{i=1}^n x_ie_i,y=\sum_{j=1}^n y_ie_j$，我们有

$$xy=\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}^k\right)e_k$$

此时，称 F 为一个 $\boldsymbol{E}$**-代数**.

Example 1.2.4.
1. $\mathbb{C} = \mathrm{span}_{\mathbb{R}}(1, i)$

1.3 域的特征 (characteristic)

Definition 1.3.1 域的特征.
F 是域. 定义映射 $N : \mathbb{N} \to F, n \mapsto n_F$，即

$$\begin{cases} N(0_{\mathbb{N}}) & = 0_F \\ N(n+1) = N(n) + 1_F \end{cases}$$

若 N 为单射，则称 F 的特征为 0，记作 $\mathrm{char}\, F = 0$.
若 N 不是单射，则存在一个最小的 $p \in \mathbb{N}^*$ s.t. $N(p) = 0$，此时 $\mathrm{char}\, F = p$.

Remark 1.3.1.
对于上述的 $N : \mathbb{N} \to F$，可以证明他满足:

1. $N(n+m) = N(n) + N(m)$
2. $N(n \cdot m) = N(n) \cdot N(m)$
3. $N(n-m) = N(n) - N(m)$

Proof. 先考虑第 1 条性质， $\mathbb{N}$ 上定义的加法是 $+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}, (x, y) \to x + y$，即

$$\begin{cases} n + 0 \triangleq n \\ n + (m+1) \triangleq (n+m) + 1 \end{cases}$$

我们把 $N(n+m) = N(n) + N(m)$ 看成是关于 m 的命题 $P(m)$，利用数学归纳法:

1. $P(0) : N(n) = N(n) + N(0) = N(n)$
2. $P(n + (m+1)) : N(n + (m+1)) = N(n+m) + N(1)$,
   $\mathrm{LHS} = N((n+m)+1) = N(n+m) + 1_F = N(n) + N(m) + 1_F$
   $\mathrm{RHS} = N(n) + N(m) + 1_F$

因此对于加法是对的.

考虑 $\mathbb{N}$ 上的乘法 $\cdot : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}, (x, y) \to x \cdot y$，即

$$\begin{cases} n \cdot 0 \triangleq 0 \\ n \cdot (m+1) \triangleq n \cdot m + n \end{cases}$$

同理利用数学归纳，证明略. ■

Proposition 1.3.1 有限域的特征为素数.
若 $\operatorname{char} F = p \neq 0$，则 $p \in \mathbb{P}$.

Proof. 反证法. 若 $p = q \cdot r, 1 < q, r < p$，则 $N(p) = N(q \cdot r) = N(q) \cdot N(r)$，由于 $N(p) = 0$，则 $N(q) = 0 \vee N(r) = 0$，与 p 是特征的定义矛盾. 因此 $p \in \mathbb{P}$. ■

Proposition 1.3.2.

1. 若 $\operatorname{char} F = 0$ ，则 $F/\mathbb{Q}$.
2. 若 $\operatorname{char} F = p > 0$ ，则 $F/\mathbb{F}_p$.

Proof. 注意：$F/E \Rightarrow$ 存在同态 $\varphi : E \to F$.
1. 考虑构造映射 $N : \mathbb{N} \to F, n \mapsto n_F$，不难发现是单射，于是 $\mathbb{N} \subseteq F \Rightarrow \mathbb{Z} \subseteq F \Rightarrow \mathbb{Q} \subseteq F \Leftrightarrow F/\mathbb{Q}$.
2. 考虑构造映射 $N : \mathbb{F}_p \to F, n \mapsto n_F$，发现他是同态，因此 $F/\mathbb{F}_p$.

■

Proposition 1.3.3.
若 $\varphi : E \to F$ 是域同态，则 $\operatorname{char} E = \operatorname{char} F$.

Proof. 若 $\operatorname{char} E = 0$，则 $E/\mathbb{Q} \Rightarrow F/\mathbb{Q} \Rightarrow \operatorname{char} F = 0$. 若 $\operatorname{char} E = p \in \mathbb{P}$， 注意到 $\varphi(n \cdot 1_E) = n \cdot 1_F, n \in \mathbb{N}$ ，不难得到 $\varphi(p_E) = \varphi(0_E) = 0_F$，因此 $\operatorname{char} F \mid p$，又因为 $p \in \mathbb{P}$ 得到 $\operatorname{char} F = p = \operatorname{char} E$. ■

Definition 1.3.2 Frobenius 自同构.
若 F 是域，且 $\operatorname{char} F = p > 0$，则映射 $\sigma : F \to F, x \mapsto x^p$ 是一个自同构，称他为 **Frobenius 自同构**.

Proof. 首先， $p \in \mathbb{P}$，考虑二项式定理:

$$(x+y)^p = x^p + \binom{p}{1} x^{p-1} y + \binom{p}{2} x^{p-2} y + \cdots + y^p$$

事实上， $p \in \mathbb{P}$ 时， $p \mid \binom{p}{k} = p^{\underline{k}}/k!$，这是因为 $1, 2, \cdots, k < p$，从而不能整除 p ，而组合数是一个整数，因此分子上的因子 p 被留了下来. 所以 $\binom{p}{k} = 0_F$，进而得到 $(x+y)^p = x^p + y^p$，容易验证 σ 满足其余的自同构要求. ■

Example 1.3.1 Frobenius 自同构 的例子.
考虑 $\mathbb{F}_4, \operatorname{char}\mathbb{F}_4 = 2$ 上的 Frobenius 自同构 $\sigma : \mathbb{F}_4 \to \mathbb{F}_4, x \mapsto x^2$

$\cdot$	0	1	α	α^2
0	0	0	0	0
1	0	1	α	α^2
α	0	α	α^2	1
α^2	0	α^2	1	α

x	0	1	α	α^2
$\sigma(x)$	0	1	α^2	α

σ 的不动域为 $\mathbb{F}_2$.

1.4 域的扩张

Definition 1.4.1 有限扩张.
若 E/F，且 $[E:F] < \infty$，则称 E 为 F 的**有限扩张**.

Definition 1.4.2 有限生成扩张 与 无限生成扩张.
设 E/F 是一个域扩张. 对于 E 的子集 S，定义 $F(S)$ 为 E 中包含 $F \cup S$ 的最小子域，称为由 S 在 F 上生成的子域.

- 若 S 是有限的，且 $F(S) = E$，则称 E 是 F 上的**有限生成扩张**.
- 若对于 E 的任何有限子集 S，都有 $F(S) \neq E$，则称 E 是 F 上的**无限生成扩张**.

注意：有限扩张是从维数的观点，有限生成扩张是从构造的观点.

Example 1.4.1.

1. $F = \mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right), \dim_{\mathbb{Q}} F = 2$
2. $F = \mathbb{Q}\left(\sqrt{2}, \sqrt{3}\right), \dim_{\mathbb{Q}} F = 4$
3. $F = \mathbb{R}(x)$ 是实系数有理函数域，是有限生成但不是有限. $\dim_{\mathbb{R}} F = \infty$.
4. $E = \mathbb{Q}(\sqrt{p} \,|\, p \in \mathbb{P})$ 是无限生成.

Example 1.4.2.

1. $E = \mathbb{Q}\left(2^{\frac{1}{2^k}} \,\middle|\, k = 1, 2, \cdots\right), F = \mathbb{Q}$ 是无限生成.

Proof. 设 $E_0 = F, E_1 = \mathbb{Q}\left(2^{\frac{1}{2}}\right), E_1 = \mathbb{Q}\left(2^{\frac{1}{2}}, 2^{\frac{1}{4}}\right) = \mathbb{Q}\left(2^{\frac{1}{4}}\right), \cdots$ 以此类推，于是有 $F = E_0 \subseteq E_1 \subseteq E_2 \subseteq \cdots E$，且 $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$，对于 E 的任意一个有限子集 $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\} \Rightarrow \exists N$ s.t. $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in E_N$，则 $F \cup S \subseteq E_N \Rightarrow F(S) \subseteq E_N \neq E$. ■

Theorem 1.4.1 有限扩张 $\Rightarrow$ 有限生成扩张.
有限扩张一定是有限生成扩张，但反之未必.

Proof. 设 E/F 是有限扩张，$[E:F]=n \Rightarrow E=\mathrm{span}_F(e_1,e_2,\cdots,e_n) \Rightarrow E=F(e_1,e_2,\cdots,e_n), e_1,e_2,\cdots,e_n \in E$ 是有限生成扩张.

有限生成扩张不是有限扩张的反例：$\mathbb{Q}(\pi),\mathbb{Q}(x)$. 注意：$\pi$ 是超越数，即 $p(\pi)\neq 0, p\in \mathbb{Q}[x], p\neq 0$. ■

Definition 1.4.3 代数扩张、超越扩张.
E/F，若 $u\in E$ 满足 $f(u)=0$，其中 $f\in F[x], f\neq 0$，则称 u 在 F 上代数，称 u 为 F 上的**代数元**；否则称 u 是**超越元**.

- 若 $\forall u\in E$，u 总是 F 上的代数元，则称 E 是 F 上的**代数扩张**.
- 若 $\exists u\in E$ s.t. u 不是任何 $f\in F[x], f\neq 0$ 的根，则称 E 是 F 上的**超越扩张**.

Example 1.4.3 代数扩张与超越扩张的例子.

1. $\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right)$ 是 $\mathbb{Q}$ 上的代数扩张.
2. $\mathbb{Q}(\pi)$ 是 $\mathbb{Q}$ 上的超越扩张.
3. $\mathbb{Q}(x)$ 是 $\mathbb{Q}$ 上的超越扩张.

Lemma 1.4.1 代数元的逆.
若 α 是 F 上的代数元，则 $-\alpha,\alpha^{-1}$ 也是 F 上的代数元.

Proof. 设 $\deg f=n$，对于加法逆，考虑替换为 $f(-x)$，对于乘法逆，考虑替换为 $x^n f\left(\frac{1}{x}\right)$ 即可. ■

Lemma 1.4.2 代数元的和与积.
若 α,β 是 F 上的代数元，则 $\alpha+\beta,\alpha\beta$ 也是 F 上的代数元.

Proof. 设 $f(\alpha)=0, g(\beta)=0, f,g\in F[x], \deg f=n, \deg g=m$. 记 $R_x(A[x],B[x])$ 为多项式 A,B 关于 x 的结式，也就是 $R_x(A[x],B[x])=0 \Leftrightarrow A,B$ 有公共根.

定义 $h(y)=R_x(f(x),g(y-x))\in F[y]$，我们断言 $h(\alpha+\beta)=0$，因为 $f(x),g(\alpha+\beta-x)$ 有公共根 $x=\alpha$. 同理，定义 $g(y)=R_x\left(f(x),x^m g\left(\frac{y}{x}\right)\right)$，可证 $\alpha\beta$ 为代数元. ■

Theorem 1.4.2 有限扩张 $\Rightarrow$ 代数扩张.
有限扩张一定是代数扩张，但反之未必.

Proof. 设 $[E:F]=n$，则 $\forall u\in E$，要找 $f\in F[x], f\neq 0$ s.t. $f(u)=0$. 考虑 $1,u,u^2,\cdots,u^n\in E$，由于 $\dim_F E=n$，因此他们线性相关，即 $\exists a_0,a_1,\cdots,a_n\in F$ 不全为 0 s.t. $a_0+a_1u+\cdots+a_nu^n=0$，取 $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$ 即可.

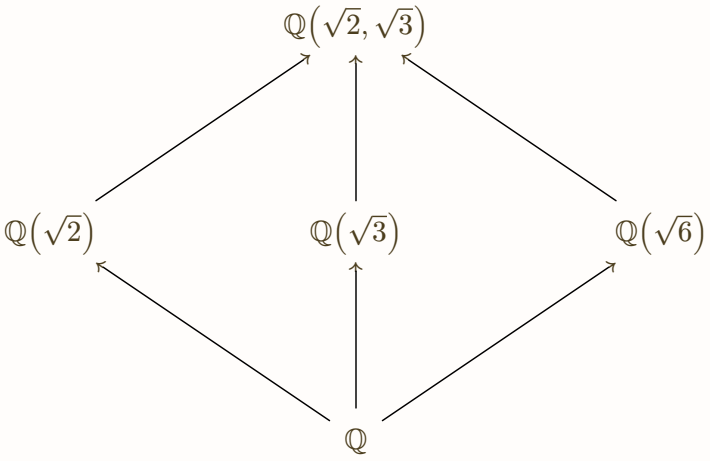
反例：$\mathbb{Q}\left(2^{\frac{1}{2^k}}\,\middle|\,k=1,2,\cdots\right)$. ■

Remark 1.4.1.

- 代数扩张 $\not\Rightarrow$ 有限生成扩张. 反例：$\mathbb{Q}\left(2^{\frac{1}{2^k}}\,\middle|\,k=1,2,\cdots\right)$
- 有限生成扩张 $\not\Rightarrow$ 代数扩张. 反例：$\mathbb{Q}(\pi),\mathbb{Q}(x)$.

Definition 1.4.4 中间域.
设 E/F 是一个域扩张，若 E 的子域 K 满足 $F\subseteq K$，则称 K 为扩张 E/F 的一个**中间域**.

Example 1.4.4 中间域的例子.
1. $\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right)\subseteq\mathbb{Q}\left(\sqrt{2},\sqrt{3}\right)$



2. $\mathbb{F}_2\subseteq\mathbb{F}_4\subseteq\mathbb{F}_4(x)$

Lemma 1.4.3 维度公式.
设 E/F 是域扩张，K 是一个中间域，则 $[E:F]=[E:K]\cdot[K:F]$.

Proof. $F\subseteq K\subseteq E$，首先证明：$E/K, K/F$ 都是有限扩张.

先证明：$[E:F]<\infty$. 由于 $[E:F]<\infty$，E 可以看成是 F 上的有限维线性空间，且 $\dim_F E=n$，由于 $K\subseteq E$ 且 K 本身也是 F 上的线性空间，则 $\dim_F E\leq\dim_F E<\infty$.

接着，证明：$[E:K]<\infty$，把 E 看成是 F 上的线性空间，则取 E 的一组基 $B=\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$，于是 $\forall\gamma\in E$,

$$\gamma = \sum_{i=1}^{n} c_i e_i, c_i \in F \subseteq K$$

把 E 看成是 K 上的线性空间 $F \subseteq K, c_i \in K$ ，说明 B 也张成了 K 上的线性空间 E，因此 $\dim_K E \leq n < \infty$.

设 $u_1, u_2, \cdots, u_n$ 是 K/F 的基， $v_1, v_2, \cdots, v_m$ 是 E/K 的基，下面构造 E/F 的基.

$\forall \beta \in E, \exists \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m \in K$ s.t.

$$\beta = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_m v_m$$

又 $\forall \alpha_i, \exists a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in} \in F$ s.t.

$$\alpha_i = a_{i1} u_1 + a_{i2} u_2 + \cdots + a_{in} u_n$$

因此，我们有

$$\beta = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} u_j \right) v_i = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} (u_j v_i)$$

于是，我们得到 $E \subseteq \mathrm{span}_F \left(u_j v_i \mid_{j=1,2,\cdots,n}^{i=1,2,\cdots,m} \right)$， 下证 $u_j v_i$ 是线性无关的.

设

$$\sum_{i,j} c_{ij} (u_j v_i) = \sum_{i} \left(\sum_{j} c_{ij} u_j \right) v_i = 0$$

由于 $v_1, v_2, \cdots v_m$ 线性无关，得到 $\forall i, \sum_{j=1}^{n} c_{ij} u_j = 0$. 由于 $u_1, u_2, \cdots, u_n$ 线性无关，得到 $\forall i, j, c_{ij} = 0$.

从而得到， $[E : F] = n \cdot m = [E : K] \cdot [K : F]$. ■

Corollary 1.4.1.
若 $[E : F] = p \in \mathbb{P}$，则 E/F 没有非平凡的中间域.

Lemma 1.4.4 单代数扩张 ⇒ 有限扩张 .
单代数扩张都是有限扩张，且扩张的次数就是单代数元作为生成元的极小多项式的次数.

Proof. 设 $E = F(u)$， u 是 F 上的代数元. 下证 $[E : F] < \infty$.

设 $f(x) \in F[x], f \neq 0$ s.t. $f(u) = 0$ 且 f 是满足该条件的次数最小的首一多项式. 我们称 f 为 u 的**极小多项式**. 有如下事实:

1. f 是唯一的.
   若 f_1, f_2，都是极小多项式，则 $\deg f_1 = \deg f_2$，则 $f_1 - f_2$ 次数更低，且 $f(u) = 0 \Rightarrow f = 0$，矛盾.
2. f 是不可约的.
   若 $f = gh, \deg f = n$，且 $1 \leq \deg g, \deg h \leq n - 1$，于是 $f(u) = 0 \Rightarrow g(u) = 0 \vee h(u) = 0$，矛盾.

若 f 是 $F[x]$ 中的不可约多项式， 且 $\deg g = n$，则 $\mathrm{span}_F(1, u, \cdots, u^{n-1}) = F(u) = E$ 一定是一个域，且 $[E : F] = n$. 证明可以参考 Proposition 1.1.1. ■

Theorem 1.4.3 有限扩张的塔性质.
设 $E/K, K/F$ 是有限扩张，则 E/F 是有限扩张.

Proof. 设 $[E:K]=m<\infty, [K:F]=n<\infty$，则由 Lemma 1.4.3

$$[E:F]=[E:K]\cdot[K:F]=m\cdot n<\infty$$

■

Theorem 1.4.4 有限生成扩张的塔性质.
设 $E/K, K/F$ 是有限生成扩张，则 E/F 是有限生成扩张.

Proof. 设 S,T 都是有限的，且 $E=K(S), K=F(T)$，则 $E=F(T)(S)=F(T\cup S)$，而 $T\cup S$ 也是有限的，因此 E/F 是有限生成扩张. ■

Theorem 1.4.5 有限生成的代数扩张 $\Leftrightarrow$ 有限扩张.
有限生成的代数扩张一定是有限扩张. 具体来说，以下等价:

(1) E/F 是有限扩张

(2) $E=F(u_1,u_2,\cdots,u_n)$，其中 $u_1,u_2,\cdots,u_n$ 都是 F 上的代数元，此时 E/F 是代数扩张.

Proof. (1)⇒(2) 比较简单. 设 $[E:F]=n$，$u_1,u_2,\cdots,u_n\in E$ 是 E/F 的基，则 $E=F(u_1,u_2,\cdots,u_n)$，因为 E/F 代数，所以 u_i 在 F 上代数.

(2)⇒(1) 设 $u_1,u_2,\cdots,u_n$ 为代数元，证明: $E=F(u_1,u_2,\cdots,u_n)/F$ 是有限扩张. 考虑从 F 开始，每一次加入 u_i，由于每一次都是单代数扩张，因此每一次都相当于一次有限扩张，由 Theorem 1.4.3 结果仍然是有限扩张，因此 E/F 是有限扩张. ■

Theorem 1.4.6 代数扩张的塔性质.
设 $E/K, K/F$ 是代数扩张，则 E/F 是代数扩张.

Proof. 设 $\alpha\in E, \exists f\in K[x], f\neq 0$，且 $f(\alpha)=0$. 设 $f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n, a_i\in K$. 设 $K'=F(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，注意到 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 在 F 上代数，则 $[K':F]<\infty$.

注意 $K'(\alpha)/K'$ 是一个单代数扩张，则 $[K'(\alpha):K']<\infty$. 由 Theorem 1.4.3 可知 $[K'(\alpha):F]=[K'(\alpha):K']\cdot[K':F]<\infty$（其实到这里已经足够了）. 因为 $F\subseteq K'$，所以 $F(\alpha)\subseteq K'(\alpha)\Rightarrow[F(\alpha):F]<\infty$，因此 $F(\alpha)/F$ 是代数扩张，即 α 是 F 上的代数元. ■

1.5 代数闭包

Definition 1.5.1 （相对）代数闭包.
设 E/F，则 $K=\{\alpha\in E\,|\,\alpha$ 在 F 上代数$\}$ 是 E/F 的中间域，称 K 为 F 在 E 中的**（相对的）代数闭包**.

Remark 1.5.1.
若 K 是 F 在 E 上的代数闭包， K' 是 E/K 的中间域，且 K'/K 是代数的，则 $K' = K$.

Proof. $K'/K, K/F$ 都是代数的，则 K'/F 也是代数的，从而 $K' = K$. ■

Example 1.5.1.

1. $E_1 = \mathbb{R}, F_1 = \mathbb{Q}, K_1 = \{\text{实代数数}\}$
2. $E_2 = \mathbb{C}, F_2 = \mathbb{Q}, K_2 = \{\text{复代数数}\}$

Definition 1.5.2 代数闭域**.**
若 K 没有真代数扩张，则称 K 是**代数闭域**.

也就是说任何以 K 为系数的多项式都在 K 上有根.

Example 1.5.2.

1. $\mathbb{C}$ 是代数闭域.
2. $\mathbb{R}$ 不是代数闭域，因为 $x^2 + 1$ 在 $\mathbb{R}$ 上没有根.
3. $\mathbb{Q}$ 不是代数闭域，因为 $x^2 - 2$ 在 $\mathbb{Q}$ 上没有根.

Definition 1.5.3 （绝对）代数闭包**.**
若 K/F 是一个代数扩张，且 K 是一个代数闭域，则称 K 为 F 的一个**（绝对的）代数闭包**.

Theorem 1.5.1.
E 是一个代数闭域， $F \subseteq E$，且 K 是 F 在 E 中的相对代数闭包，则 K 是 F 的一个绝对代数闭包.

Proof. 由相对代数闭包的定义， K/F 是代数扩张，只需证明 K 是代数闭域即可.

设 K'/K 是一个代数扩张，则有域塔 $F \subseteq K \subseteq K' \Rightarrow K'/F$ 也是代数扩张. $\forall \alpha \in K'$，因为 α 也是 F 上的代数元，因此 $\exists F$ 上的极小多项式 $m(x) \in F[x]$ s.t. $m(\alpha) = 0$，又 $F \subseteq E \Rightarrow m(x) \in E[x]$. 接下来，因为 E 是代数闭域，考虑 $E(\alpha)$，则 $E(\alpha)/E$ 是代数的 $\Rightarrow E(\alpha) = E \Rightarrow \alpha \in E$. 由 α 是 F 上的代数元，且 $\alpha \in E$，可知 $\alpha \in K$. 也就是 $\forall \alpha \in K', \alpha \in K$，得到 $K' = K$. ■

Example 1.5.3.
1. $\mathbb{Q}$ 在 $\mathbb{C}$ 中的相对代数闭包就是 $\mathbb{Q}$ 的一个绝对代数闭包.

Theorem 1.5.2.
对于任一域 F，存在 F 的绝对代数闭包，且他在同构的意义下是唯一的.

Proof. 还不会 👀💦💦💦 ■

1.6 Galois 群

这边他讲的顺序好迷啊. . . 怎么这么难啊 👀💦💦💦

Definition 1.6.1 对称群.
设 X 是一个集合，定义 $S(X)=\{\sigma: X\to X \mid \sigma \text{ 是双射}\}$，运算复合 $\circ: S\times S\to S, (\sigma,\tau)\mapsto \sigma\circ\tau$，运算逆 $(\ )^{-1}: S\to S, \sigma\mapsto\sigma^{-1}$，单位元 $e: X\to X, x\mapsto x$. 若满足:

1. $(\sigma\circ\tau)\circ\mu=\sigma\circ(\tau\circ\mu)$
2. $\sigma\circ e=e\circ\sigma=\sigma$
3. $\sigma\circ\sigma^{-1}=\sigma^{-1}\circ\sigma=e$

则称 $(S,\circ)$ 为 X 上的**对称群**.

Definition 1.6.2 置换群.
若 S 是一个对称群，$G\subseteq S$ 满足 $\forall\sigma,\tau\in G,\ \sigma\circ\tau\in G\ ,\ \sigma^{-1}\in G$ 则称 $(G,\circ)$ 为 X 上的**置换群**.

Definition 1.6.3 自同构群.
E 是一个域，则

$$\begin{aligned}\mathrm{Aut}(E)\triangleq\{\sigma\in S(E)\mid\ &\sigma(0)=0,\sigma(1)=1,\\ &\sigma(x+y)=\sigma(x)+\sigma(y),\\ &\sigma(xy)=\sigma(x)\sigma(y)\}\end{aligned}$$

称为 E 的**自同构群**.

Definition 1.6.4 （抽象）群.
设 G 是一个集合，定义 $\circ: G\times G\to G$, $(\ )^{-1}: G\to G$, $e\in G$. 若满足:

1. $(\sigma\circ\tau)\circ\mu=\sigma\circ(\tau\circ\mu)$
2. $\sigma\circ e=e\circ\sigma=\sigma$
3. $\sigma\circ\sigma^{-1}=\sigma^{-1}\circ\sigma=e$

则称 $(G,\circ)$ 为一个**群**.

Remark 1.6.1.

- 可知 e 是唯一的
- 可知 σ^{-1} 是唯一的

Definition 1.6.5 子群.
G 是一个群，$H \subseteq G$，若 $\forall \sigma, \tau \in H$，满足：

1. $\sigma \circ \tau \in H$
2. $\sigma^{-1} \in H$

则称 H 是 G 的一个**子群**，记作 $H \leq G$.

Definition 1.6.6 Galois 群.
若 E/F，则

$$\mathrm{Gal}(E/F) \triangleq \{\sigma \in \mathrm{Aut}(E) \,|\, \sigma|_F = \mathrm{id}|_F\}$$

称为 E/F 的 **Galois 群**.

Theorem 1.6.1.
E/F 是有限扩张，则 $\mathrm{Gal}(E/F)$ 是有限群.

What Gemini says.
证明思路

1. 一个 F -自同构 $\sigma \in \mathrm{Gal}(E/F)$ 是一个 $E \to E$ 的映射，它由其如何作用于 E 的一组基来完全确定.
2. 因为 E/F 是有限扩张，所以我们可以找到一组有限的基.
3. 我们将证明，对于基中的任何一个元素，σ 只能将其映射到有限个可能的目标上.
4. 既然基是有限的，且每个基元素的可选目标也是有限的，那么总共可能的 F -自同构的数量也必然是有限的.

Proof. 设 $[E:F] = n$，且 E 在 F 上的一组基为 $u_1, u_2, \cdots, u_n$，也就是 $E = F(u_1, u_2, \cdots, u_n)$.

那么，$\sigma \in \mathrm{Gal}(E/F)$，若 $\forall u \in E, u = c_1u_1 + c_2u_2 + \cdots + c_nu_n$ 考虑他在 σ 的作用下的像:

$$\sigma(u) = c_1\sigma(u_1) + c_2\sigma(u_2) + \cdots + c_n\sigma(u_n)$$

由于 σ 保持 F 中的每个元素，所以 E 中元素在 σ 下的像完全由基的像决定.

接下来，考察 σ 对基作用的像的范围. 因为 $[E:F] < \infty$，因此也是代数扩张，对于 u_i 他在 F 中的极小多项式 $m(x) = b_kx^k + \cdots + b_1x + b_0 \in F[x]$，于是

$$\begin{aligned}\sigma(m(u_i)) &= \sigma(0) = 0\\ &= \sigma\left(b_k u_i^k + \cdots + b_1 u_i + b_0\right)\\ &= b_k \sigma(u_i)^k + \cdots + b_1\sigma(u_i) + b_0 = m(\sigma(u_i))\end{aligned}$$

这说明： u_i 经过 σ 作用之后一定还是 $m(x)$ 的根，又 $\deg m \le [E:F] = n$，所以基中的一个元素最多有 n 种可能，从而一个上界是

$$|\mathrm{Gal}(E/F)| \le n^n$$

■

Definition 1.6.7 群的不动域.
设 E 是一个域， $G \le \mathrm{Aut}(E)$，定义

$$\mathrm{Inv}(G) \triangleq \{\alpha \in E \mid \forall \sigma \in G, \sigma(\alpha) = \alpha\}$$

则 $\mathrm{Inv}(G)$ 是 E 的子域，称为 G 的**不动域**.

Theorem 1.6.2 Artin 引理.
设 E 是一个域， G 是 $\mathrm{Aut}(E)$ 的有限子群，记 $F = \mathrm{Inv}(G)$，则

$$[E:F] \le |G|$$

从而， E/F 是有限扩张.

Proof. 设 $|G| = n, G = \{\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n\}$， 下证 $\forall m > n$， E 中的 m 个元素都 F-线性相关.

考虑 E 中的 m 个元素 $u_1, u_2, \cdots, u_m$，目标是寻找一组 $x_1, x_2, \cdots x_m$ s.t.

$$x_1u_1 + x_2u_2 + \cdots + x_mu_m = 0$$

由于 G 中的元素是 E 的自同构且保持 F，考虑 G 中的元素 η_j 的作用有:

$$\eta_j(x_1u_1 + x_2u_2 + \cdots + x_mu_m) = x_1\eta_j(u_1) + x_2\eta_j(u_2) + \cdots + x_m\eta_j(u_m) = 0$$

因为 $m > n$，该方程组一定在 E 上有非零解. 取所有解中非零元最少的解（零元最多的解）$X = (x_1, x_2, \cdots, x_m) \in E^m$，不妨设 $x_1 \neq 0$，进而可以假设 $x_1 = 1$，于是解选定为 $X = (1, x_2, \cdots, x_m)$， 下面证明 $X \in F$（此后定理证毕）.

考虑反证法. 假设 $\exists x_i \notin F$，不妨设 $x_2 \notin F$，也就是说 $\exists \eta \in G$ s.t. $\eta(x_2) \neq x_2$. 接下来，考察 $\eta(X) = (1, \eta(x_2), \cdots, \eta(x_m))$，有如下事实:
1. $\eta(X)$ 也是该方程组的解. 考虑将 η 作用在方程组上:

$$\eta\left(\sum_{i=1}^m x_i\eta_j(u_i)\right) = \eta(0) = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^m \eta\left(\eta_j(u_i)\right)\eta(x_i) = 0$$

因为 $\eta \circ \eta_j \in G$，所以当 η_j 遍历整个 G 的时候， $\eta \circ \eta_j$ 也会遍历整个 G，所以新方程组等价于原方程组，只是方程的顺序变了.

2. $\eta(X)$ 中零元的个数和 X 中零元的个数相等. 因为 η 是双射，所以 $\eta(x_i) = 0 \Leftrightarrow x_i = 0$.

3. $\eta(X)-X$ 仍是方程组的非零解，但是零元更多. 因为 $\eta(x_2)\neq x_2$，所以 $\eta(X)-X$ 中第二个元素不为 0，而第一个元素为 0. 这与 X 的取法矛盾. 证毕.

■

Problem 1.6.1 域-群-域.
设 E/F 是一个有限扩张， $G=\mathrm{Gal}(E/F)$ 是一个有限群， 且 $G\leq \mathrm{Aut}(E)$，令 $F'=\mathrm{Inv}(G)$，则 $F'=F$ 吗?

Solution. 不一定. 首先有 $F\subseteq F'$，我们可以找出反例其实. □

Problem 1.6.2 群-域-群.
设 E 是一个域， $G\leq \mathrm{Aut}(E)$ 是一个有限群， $F=\mathrm{Inv}(G)$，则 E/F 是有限扩张，于是 $G'=\mathrm{Gal}(E/F)$ 是有限群， $G'=G$ 吗?

Solution. 是. 称为 Artin 定理. □

Galois 理论就是研究什么样的有限扩张 E/F 可以使得 $\mathrm{Inv}(\mathrm{Gal}(E/F))=F$.

Chapter 2
环论、模论

Chapter 3
群论、群作用

Chapter 4
Galois 理论