



華東師範大學
EAST CHINA NORMAL UNIVERSITY

抽象代数

笔记

© syqwq
East China Normal University

Contents

1. 域论、线性空间	3
1.1. 定义和例子	3
1.2. 域的同态	8
1.3. 域的特征 (characteristic)	11
2. 环论、模论	12
3. 群论、群作用	13
4. Galois 理论	14

Chapter 1

域论、线性空间

1.1 定义和例子

Definition 1.1.1 域.

假设集合 F 有如下元素和定义在 F 上的运算：

- 零元: $0 := 0_F$
- 单位元: $1 := 1_F \neq 0_F$
- 加法: $+: F \times F \rightarrow F, (x, y) \mapsto x + y$
- 乘法: $\cdot: F \times F \rightarrow F, (x, y) \mapsto x \cdot y$

并且, F 上的加法和乘法满足:

1. 加法结合律: $(x + y) + z = x + (y + z)$
2. 加法交换律: $x + y = y + x$
3. 加法单位元: $x + 0 = 0 + x = x$
4. 加法逆元: $\forall x \in F, \exists y \in F, x + y = y + x = 0$, 记作 $-x$
5. 乘法结合律: $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$
6. 乘法交换律: $x \cdot y = y \cdot x$
7. 乘法单位元: $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$
8. 乘法逆元: $\forall x \in F^*, \exists y \in F, x \cdot y = y \cdot x = 1$, 记作 x^{-1}
9. 分配律:
 1. $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$
 2. $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$

Lemma 1.1.1 关于零元.

- $0 \cdot 0 = 0$
- $\forall x \in F, x \cdot 0 = 0$

Proof.

- 考虑如下事实:

$$\begin{aligned} a &= 0 \cdot (0 + 1) = 0 \cdot 1 = 0 \\ &= 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0 \cdot 0 + 0 = 0 \cdot 0 \end{aligned}$$

- 考虑 $x \cdot 0 = x \cdot (0 + 0) = x \cdot 0 + x \cdot 0$, 令 $y = -(x \cdot 0)$, 得到

$$y + x \cdot 0 = y + x \cdot 0 + x \cdot 0 \Leftrightarrow 0 = x \cdot 0$$

■

注意到在定义中, 我们要求 $0_F \neq 1_F$, 若 $0 = 1$, 则 $\forall x \in F, x = x \cdot 1 = x \cdot 0 = 0$, 于是 $F = \{0\}$, 太平凡了, 于是我们排除这种情况.

又注意到, 在乘法逆元定义中我们要求 $x \neq 0$, 这是因为假设 $x = 0$ 有乘法逆 y , 则 $x \cdot y = y \cdot x = 1 \Rightarrow 0 \cdot y = y \cdot 0 = 1 \Rightarrow 1 = 0$, 则与上一条矛盾.

Remark 1.1.1 非零元记号.

为了方便讨论, 我们将域中的非零元记作 $F^* = F \setminus \{0\}$

Remark 1.1.2 逆元是唯一的.

- 加法逆元是唯一的. 假设 对于 x 存在两个加法意义下的逆元 y_1, y_2 , 则

$$y_1 = y_1 + 0 = y_1 + x + y_2 = 0 + y_2 = y_2$$

因此, $y_1 = y_2$.

- 乘法逆元是唯一的. 证明类似, 此处略.

Example 1.1.1 一些域的例子.

1. $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$
2. $F = \mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{x + \sqrt{2}y \mid x, y \in \mathbb{Q}\}$
可以验证, 每个元素确实存在加法逆元和乘法逆元 (分母有理化)
3. $F = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$

Proof $F = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$. 记 $\alpha = \sqrt[3]{2}$, $F = \{x + y\alpha + z\alpha^2 \mid x, y, z \in \mathbb{Q}\}$, 我们主要考虑乘法逆

$$\begin{aligned} \frac{1}{x + y\alpha + z\alpha^2} &= \frac{y - z\alpha}{(x + y\alpha + z\alpha^2)(y - z\alpha)} = \frac{*}{x(y - z\alpha) + \alpha(y^2 - z^2\alpha^2)} \\ &= A \cdot \frac{1}{s + t\alpha} = \frac{s^2 - st\alpha + t^2\alpha^2}{(s + t\alpha)(s^2 - st\alpha + t^2\alpha^2)} \\ &= \frac{*}{s^3 - t^3\alpha^3} = \frac{*}{s^3 - 2t^3} \in F \end{aligned}$$

Remark 1.1.3 $F[x]$ 与 $F(x)$.

注意区分 $F[x]$ 和 $F(x)$, 前者是 $\left\{ \sum_{i \geq 0} a_i x^i \mid a_i \in F \right\}$, 后者是在域 F 中添加 x 生成的新的域.

Proposition 1.1.1 $\mathbb{Q}(\alpha)$ 是域.

设 $\alpha \in \mathbb{C}$ 是 $f(x)$ 的根, 其中 f 是 \mathbb{Q} 上的首一不可约多项式, $\deg f = n$, 则有:

$$F = \mathbb{Q}(\alpha) = \{x_1 + x_2\alpha + \cdots + x_n\alpha^{n-1} \mid x_i \in \mathbb{Q}\}$$

F 是一个域.

Proof. 我们主要考虑乘法逆. 设 $f(\alpha) = \alpha^n + b_1\alpha^{n-1} + \dots + b_{n-1}\alpha + b_n = 0$, 对于形式更高阶的, 可以通过带余除法, 最终化成次数最高不超过 $n-1$ 的形式, 因此我们考虑如下的乘法逆:

$$\frac{1}{g(\alpha)} = \frac{1}{x_1 + x_2\alpha + \dots + x_n\alpha^{n-1}}$$

首先我们有 $(f, g) = 1$, 于是 $\exists u, v \in \mathbb{Q}[\alpha], ug + vf = 1$, 回到上面的式子

$$\frac{1}{g(\alpha)} = \frac{u}{ug + vf}(\alpha) = u(\alpha) \in \mathcal{P}_{n-1}(\alpha) = F$$

■

Example 1.1.2 在有理数域中加入两个无理数.

4. 考虑 $F = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = \{x_1 + x_2\sqrt{2} + x_3\sqrt{3} + x_4\sqrt{6} \mid x_i \in \mathbb{Q}\}$, 也是域.

Proof. 首先, 加法和乘法的封闭性容易验证. 我们考虑乘法逆.

$$\frac{1}{x_1 + x_2\sqrt{2} + x_3\sqrt{3} + x_4\sqrt{6}} = \frac{y_1 + y_2\sqrt{2} + y_3\sqrt{3} + y_4\sqrt{6}}{(x_1 + x_2\sqrt{2} + x_3\sqrt{3} + x_4\sqrt{6})(y_1 + y_2\sqrt{2} + y_3\sqrt{3} + y_4\sqrt{6})}$$

因此, 现在的核心任务就是考虑如何取 y_i 的值, 能够使得分母是一个有理数. 我们将分母展开之后, 进行待定系数, 求解线性方程组即可. 我们只需要无理数项的系数为 0, 因此只有三个方程, 而有四个未知数, 因此一定有非零解. ■

加了两个无理数, 也确实构成一个域. 但是其实, 加了这两个无理数和加一个无理数的效果是一样的.

我们来看看 $F' = \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$. 按照 Proposition 1.1.1 的思路, 我们考虑能否找到一个多项式使得 $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ 是他的根. 通过平方, 移项, 平方, 不难得到 $f(\alpha) = \alpha^4 - 10\alpha^2 + 1 = 0$, 利用 Eisenstein 判别法可以得到 f 是一个不可约多项式, 因此我们断言:

$$F' = \{x_1 + x_2\alpha + x_3\alpha^2 + x_4\alpha^3 \mid x_i \in \mathbb{Q}\}$$

接下来, 我们要说明: $F = F'$. 手玩得到:

$$\begin{cases} \alpha^3 = 11\sqrt{2} + 9\sqrt{3} \\ \alpha = \sqrt{2} + \sqrt{3} \end{cases}$$

因此, $\sqrt{2}, \sqrt{3}$ 都可以用 α 的多项式表示出来, 而他们又可以生成整个 F , 因此整个 F 都可以用 F' 表示出来. 或者可以这样考虑 $F = \text{span}(1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6}), F' = \text{span}(1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4)$, 而我们的线性方程组又给出了这两组基之间的基变换, 并且可以验证是双射, 因此这两组基可以互相线性表出, 从而他们张成的空间实际上是同一个空间.

我们把这种只加一个元的域扩张叫做**单扩张**, 加若干元的扩张叫**有限扩张**. 我们后面会看到, 其实在一定条件下, 有限域扩张就是单扩张.

Example 1.1.3 有限域的例子.

5. $\mathbb{F}_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$

6. $\mathbb{F}_3 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$

Proof. 通过列加法表、乘法表, 不难验证他们都构成域. ■

Example 1.1.4 模素数剩余系构成的有限域.

7. 设 $p \in \mathbb{N} \cap \mathbb{P}$, 则整数集的模 p 剩余系: $\mathbb{F}_p = \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{p-1}\}$ 是一个域.

Proof. 考虑乘法逆. 对于 $\bar{k} \in \mathbb{F}_p^*$, 由于 $p \in \mathbb{P}$, 那么 $k \perp p$, 根据 Bezout 定理, 我们有: $\exists u, v \in \mathbb{Z}, uk + vp = 1$ 两侧取模可得 \bar{u} 就是 \bar{k} 的乘法逆.

另解. 构造一个映射 $T: \mathbb{F}_p \rightarrow \mathbb{F}_p, y \mapsto ky$, 接下来, 我们证明: $\ker T = \{0\}$. 如果 $T(y) = 0 \Leftrightarrow ky \equiv 0 \Leftrightarrow ky = pm \Leftrightarrow p \mid y \Leftrightarrow y = \bar{0}$, 因此, 我们可以把映射限制到 \mathbb{F}_p^* 上, 为了证明每个元素都存在逆元, 我们只需要证明 T 是双射. 由于 T 是有限集合上的映射, 因此只需要证明 T 是单射即可. 考虑 $T(y_1) = T(y_2)$, 即 $ky_1 = ky_2 \Leftrightarrow k(y_1 - y_2) \equiv 0 \Leftrightarrow y_1 \equiv y_2$, 因此 T 是单射. 从而, 1 在 T 的原像是唯一且存在的. ■

Remark 1.1.4.

若 $p \notin \mathbb{P}, m \in \mathbb{N}, m \geq 2, \mathbb{Z}_m = \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{m-1}\}$, 则乘法逆不一定存在. 比如 $m = 4, 2 \cdot 2 = 0$, 而 $\bar{2} \neq \bar{0}$, 此时我们称 2 为零因子.

Example 1.1.5 函数域.

8. 设 F 是一个域. $F(x) = \left\{ \frac{p(x)}{q(x)} \mid p(x), q(x) \in F[x], q(x) \neq 0 \right\}$
9. $K = \mathbb{C}(x, \sqrt{x^3 + 2}) = \mathbb{C}(x)(y) \sim \mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{R_1(x) + R_2(x)y \mid R_1, R_2 \in \mathbb{C}[x], y = \sqrt{x^3 + 2}\}$, 此处类比向 \mathbb{Q} 中加入 $\sqrt{2}$. 这个 K 是一条代数曲线上的亚纯函数.

Definition 1.1.2 线性空间.

设 F 是一个域, 集合 V 和上面定义两个运算:

- 加法: $+: V \times V \rightarrow V$
- 数乘: $\cdot: F \times V \rightarrow V$

如果 $0_V \in V$, 且满足:

1. $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$
2. $\alpha + \beta = \beta + \alpha$
3. $\alpha + 0_V = 0_V + \alpha = \alpha$
4. $\forall \alpha \in V, \exists 1\beta \in V$ s.t. $\alpha + \beta = \beta + \alpha = 0_V$, 且 $-\alpha \triangleq \beta$
5. $(xy)\alpha = x(y\alpha)$
6. $1_F \cdot \alpha = \alpha$
7. $(x + y)\alpha = x\alpha + y\alpha$
8. $x(\alpha + \beta) = x\alpha + x\beta$

则称集合 V 连同它上面的两个运算为域 F 上的线性空间 V .

Example 1.1.6 线性空间的例子.

1. $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ 是 \mathbb{Q} 上的 2 维线性空间.
2. $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ 是 \mathbb{Q} 上的 3 维空间.
3. $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ 是 \mathbb{Q} 上的 4 维空间.
4. $F(x)$ 是无穷维的线性空间.
5. K 是 $\mathbb{C}(x)$ 上的 2 维线性空间.
6. \mathbb{R} 是 \mathbb{Q} 上的无穷维空间.
7. \mathbb{C} 是 \mathbb{R} 上的 2 维空间.

通过类比 Proposition 1.1.1, 我们来看一些更复杂的例子.

Theorem 1.1.1.

$p \in \mathbb{P}, d \in \mathbb{Z}_+$, 记 $q = p^d$, 则存在一个 q 元有限域 \mathbb{F}_q .

Proof. 还不会证明 🤔 🧐 🧐 🧐

Example 1.1.7 四元数.

10. 考虑四元数 $\mathbb{F}_4 = \{x + y\alpha \mid x, y \in \mathbb{F}_2\} = \mathbb{F}_2(\alpha)$ 的结构.

Solution. $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$, 为了方便研究, 我们画出 \mathbb{F}_2 的加法表和乘法表:

+	0	1
0	0	1
1	1	0

·	0	1
0	0	0
1	0	1

考虑 $\mathbb{F}_2[x] : f(x) = x^2 + px + q$ 中的不可约多项式, 其中 $p, q \in \mathbb{F}_2$.

首先, $f(x) \in \{x^2, x^2 + x, x^2 + 1, x^2 + x + 1\}$, 其中的不可约多项式实际上只有 $x^2 + x + 1$. 因此若 $\mathbb{F}_4 = \mathbb{F}_2(\alpha)$, 则 α 满足 $\alpha^2 + \alpha + 1 = 0 \Leftrightarrow \alpha^2 = 1 + \alpha$. 此时, $\mathbb{F}_4 = \{0, 1, \alpha, 1 + \alpha = \alpha^2\}$. 接下来我们可以验证这样的 \mathbb{F}_4 是否是域. 利用加法表和乘法表:

+	0	1	α	α^2
0	0	1	α	α^2
1	1	0	α^2	α
α	α	α^2	0	1
α^2	α^2	α	1	0

·	0	1	α	α^2
0	0	0	0	0
1	0	1	α	α^2
α	0	α	α^2	1
α^2	0	α^2	1	α

发现乘法逆其实是 $\alpha^{-1} = \alpha^2$. 因此这确实是一个域. □

类似的, 我们还可以找到一些比较简单的可以手玩的例子.

Example 1.1.8.

11. $\mathbb{F}_9 = \mathbb{F}_3(\alpha)$, 其中 $\alpha^2 = 2$ 或 $\alpha^2 + 1 = 0$.
12. $\mathbb{F}_8 = \mathbb{F}_2(\alpha)$, 其中 $\alpha^3 = 1 + \alpha$.

1.2 域的同态

Definition 1.2.1 线性空间的同态.

设 V_1, V_2 是域 F 上的线性空间, 若映射 $\varphi: V_1 \rightarrow V_2$ 满足:

1. $\varphi(\alpha + \beta) = \varphi(\alpha) + \varphi(\beta)$
2. $\varphi(k\alpha) = k\varphi(\alpha)$

则称 φ 是同态.

其实, 同态就是保运算的映射.

Definition 1.2.2 域的同态.

设 F_1, F_2 是两个域. 若 $\varphi: F_1 \rightarrow F_2$ 满足:

1. $\varphi(0_{F_1}) = 0_{F_2}$
2. $\varphi(1_{F_1}) = 1_{F_2}$
3. $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$
4. $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$

则称 φ 是同态.

若 φ 是同态, 有以下事实:

1. $\varphi(-x) = -\varphi(x)$
2. $\varphi(x^{-1}) = \varphi(x)^{-1}$

Theorem 1.2.1 域同态是单射.

若 $\varphi: F_1 \rightarrow F_2$ 是域同态, 则 φ 是单射.

Proof. 假设 $\varphi(x_1) = \varphi(x_2), x = x_2 - x_1$, 则

$$\varphi(x) = \varphi(x_1) - \varphi(x_2) = 0$$

若 $x \neq 0$, 则存在 x^{-1} , 于是

$$\text{LHS} = \varphi(x) \cdot \varphi(x^{-1}) = 1$$

$$\text{RHS} = 0 \cdot \varphi(x^{-1}) = 0$$

而 $0 \neq 1$, 因此 $\forall x_1 \neq x_2, \varphi(x_1) \neq \varphi(x_2)$. ■

Definition 1.2.3 子域、域扩张.

若 F 是域, E 是 F 的子集, 若满足:

1. $0_F \in E$
2. $1_F \in E$
3. $\forall x, y \in E, x + y \in E, xy \in E$
4. $\forall x \in E, -x \in E$
5. $x \in E \setminus \{0\}, x^{-1} \in E$

则称 E 为 F 的子域, F 为 E 的一个扩域. 记作 F/E .

Remark 1.2.1.

若存在 $\varphi: F_1 \rightarrow F_2$, 则 F_2 可以称为 F_1 的子域.

Definition 1.2.4 域的同构.

若 $\varphi: F_1 \rightarrow F_2$ 是域的同态, 若 φ 是满射, 则称 φ 是同构.

特别的, 如果 $F_1 = F_2$, 则称 φ 是 F 的自同构.

Example 1.2.1 子域的例子.

1. \mathbb{R}/\mathbb{Q}
2. \mathbb{C}/\mathbb{R}
3. $\mathbb{Q}(\sqrt{2})/\mathbb{Q}$
4. $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})/\mathbb{Q}(\sqrt{2})$
5. $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) \cong \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$
6. $\mathbb{F}_4/\mathbb{F}_2$

Definition 1.2.5 不动域.

设 $\sigma: F \rightarrow F$ 是 F 的自同构, 则 $E = \{x \in F \mid \sigma(x) = x\}$ 是一个子域, 叫做 σ 的不动域.

Example 1.2.2 自同构的例子.

设 $\bar{}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, x + yi \mapsto x - yi$, 可以验证满足:

1. $\bar{0} = 0$
2. $\bar{1} = 1$
3. $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$
4. $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$

则 $\bar{}$ 的不动域为 $z = \bar{z} \Rightarrow \mathbb{R}$.

Example 1.2.3 另一个例子.

定义 $\sigma: \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \rightarrow \mathbb{Q}(\sqrt{2}), x + \sqrt{2}y \mapsto x - \sqrt{2}y$ 也是自同构.

Proof. 设 $z_1 = x_1 + \sqrt{2}y_1, z_2 = x_2 + \sqrt{2}y_2$, 容易验证他满足域同构的所有要求. 考虑他的不动域: $z = \sigma(z) \Rightarrow x + \sqrt{2}y = x - \sqrt{2}y \Rightarrow z \in \mathbb{Q}$. ■

Problem 1.2.1 二次域之间的关系.

$\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ 和 $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ 有什么关系?

Solution. 没什么关系. 不存在同态 $\varphi: \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \rightarrow \mathbb{Q}(\sqrt{3})$. 若有同态 φ , 令 $a = \varphi(\sqrt{2}) = x + \sqrt{3}y$, 则 $a^2 = \varphi(\sqrt{2})^2 = \varphi(2) = \varphi(1) + \varphi(1) = 2$, 所以有 $(x + \sqrt{3}y)^2 = 2 \Rightarrow x, y \in \emptyset$. □

可见不同的二次域之间没啥关系.

Theorem 1.2.2 域与线性空间.

若 F/E , 则 F 是 E 的线性空间. 我们记 $[F:E] = \dim_E(F)$ 为 F 作为 E 的线性空间的维数, 称为 F/E 的次数.

Proof. 这很显然. ■

Proposition 1.2.1.

\mathbb{Q} 没有真子域.

Proof. 设 $E \subseteq \mathbb{Q}$, 且 $1 \in E, 0 \in E$. 若 E 为子域, 那么:

- 加法封闭: $\mathbb{N} \subseteq E$
- 加法有逆: $\mathbb{Z} \subseteq E$
- 乘法有逆: $\mathbb{Q} \subseteq E$

因此, $E = \mathbb{Q}$. ■

Proposition 1.2.2.

\mathbb{F}_q 没有真子域, 其中 $p \in \mathbb{P}$.

Proof. 设 \mathbb{F}_p/E , 于是有 $\#E, \#\mathbb{F}_p < \infty$, 因为 \mathbb{F}_p 可以看成是 E 上的线性空间, 考虑一组基和任意 $x \in \mathbb{F}_p$ 在这个基下的坐标, 可以得到 $\#\mathbb{F}_p = (\#E)^d$, 其中 $d = [F:E]$. 又 $p \in \mathbb{P}$, 我们得到 $d = 1, \#E = \#\mathbb{F}_p$, 因此 $E = \mathbb{F}_p$. ■

Definition 1.2.6 有限扩张.

若 $[F:E] < \infty$, 则称 F/E 是有限扩张.

Remark 1.2.2 E -代数.

111

1.3 域的特征 (characteristic)

Definition 1.3.1 域的特征.

F 是域. 定义映射 $N : \mathbb{N} \rightarrow F, n \mapsto n_F$, 即

$$\begin{cases} N(0_{\mathbb{N}}) &= 0_F \\ N(n+1) &= N(n) + 1_F \end{cases}$$

若 N 为单射, 则称 F 的特征为 0, 记作 $\text{char } F = 0$.

若 N 不是单射, 则存在一个最小的 $p \in \mathbb{N}^*$ s.t. $N(p) = 0$, 此时 $\text{char } F = p$.

Chapter 2

环论、模论

Chapter 3

群论、群作用

Chapter 4

Galois 理论

