華東師範大學
EAST CHINA NORMAL UNIVERSITY

线性代数

笔记

East China Normal University

Contents

Chapter 1
向量空间

Suppose V is a linear space on $\mathbb{F}$.

线性代数是研究有限维向量空间上的线性映射的学问.我们最终会理解这些术语的具体 含义.在本章中，我们将定义向量空间并讨论它们的基本性质.

在线性代数中，如果将复数与实数放在一起研究，就会得到更好的定理和更深刻的见解.因此，我们将从介绍复数及其基本性质开始. 我们将把平面和三维空间这些例子推广到 $\mathbb{R}^n$ 和 $\mathbb{C}^n$ ，再进一步推广得到向量空间的概念. 我们将会明白，向量空间是具有满足自然的代数性质的加法和标量乘法运算的集合.

接着，我们将讨论子空间.子空间之于向量空间，就类似子集之于集合.最后，我们将关注子空间的和(类似于子集的并集)与子空间的直和(类似于不相交集合的并集)

1.1 $\mathbb{R}^n$ 和 $\mathbb{C}^n$

你应该已经熟悉了实数集合 $\mathbb{R}$ 的基本性质.发明复数，是为了让我们可以取负数的平方根.我们的想法是，假设 -1 有平方根，将其用 i 表示，并且它遵守通常的算术规则. 正式的定义如下.

Definition 1.1.1 复数(complex number) $\mathbb{C}$.
- 一个复数是一个有序对 (a,b)，其中 $a,b\in\mathbb{R}$，不过我们会把这个写成 $a+bi$
- 全体复数集合用 $\mathbb{C}$ 表示:

$$\mathbb{C}=\{a+bi:a,b\in\mathbb{R}\}$$

- $\mathbb{C}$ 上的加法和乘法定义为

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$$
$$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$$

其中 $a,b,c,d\in\mathbb{R}$.

Problem 1.1.1.
证明: $\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$.

Definition 1.1.2 复数(complex number) $\mathbb{C}$.
- 一个复数是一个有序对 (a,b)，其中 $a,b\in\mathbb{R}$，不过我们会把这个写成 $a+bi$
- 全体复数集合用 $\mathbb{C}$ 表示:

$$\mathbb{C}=\{a+bi:a,b\in\mathbb{R}\}$$

- $\mathbb{C}$ 上的加法和乘法定义为

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$$
$$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$$

其中 $a,b,c,d\in\mathbb{R}$.

Problem 1.1.2.
证明: $\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$.

Theorem 1.1.1 length of z **.**
Suppose $z\in\mathbb{C}$, then we have:

$$z\overline{z}=\overline{z}z=|z|^2$$

如果 a ∈ R，那么我们将 a + 0i 等同于实数 a.由此，我们将 R 视为 C 的子集.我们通常 将 0 + bi 简写作 bi，将 0 + 1i 简写作 i. 上述复数乘法定义式的来由可以这样说

Example 复数的算数运算**.**
运用 1 中的性质，可以算出 $(2+3i)(4+5i)$ 的值:

$$\begin{aligned}(2+3i)(4+5i)&=2\cdot(4+5i)+(3i)\cdot(4+5i)\\&=-7+22i\end{aligned}$$

1.2 向量空间的定义

Definition 1.2.1 复数(complex number) $\mathbb{C}$**.**
- 一个复数是一个有序对 (a,b)，其中 $a,b\in\mathbb{R}$，不过我们会把这个写成 $a+bi$
- 全体复数集合用 $\mathbb{C}$ 表示:

$$\mathbb{C}=\{a+bi:a,b\in\mathbb{R}\}$$

1.3 向量空间的定义

Chapter 2
Vector space with measurement

Back in middle school, we know such mapping called 'inner product', who receives 2 vectors and gives out one value. With innner product, we can define the length of a vector, angles of 2 vectors, and so on … and that's the motivation of this chapter.

2.1 Bilinear function

From the concept of inner product, we could formalize a kind of function $f : V \times V \to \mathbb{F}$, and it's also a linear stuff.

Definition 2.1.1 Bilinear function.
For $f : V \times V \to \mathbb{F}$, if it satisfies linearity for both of the 2 variables, aka.

- $f(k\alpha_1 + \alpha_2, \beta) = kf(\alpha_1, \beta) + f(\alpha_2, \beta)$
- $f(\alpha, k\beta_1 + \beta_2) = kf(\alpha, \beta_1) + f(\alpha + \beta_2)$

then we call such f a **bilinear function** on V.

Theorem 2.1.1 Expansion of bilinear function.
Let $V = \text{span}\ (e_1, e_2, \cdots, e_n)$, and 2 vectors in V are $\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n)', \beta = (b_1, b_2, \cdots, b_n)'$, we have

$$f(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_i b_j \cdot f(e_i, e_j)$$

Proof. Use the linearity to expand f, first α, then β. Readers can verify themselves. ■

Theorem 2.1.2 Matrix represention of bilinear function.
Let $V = \text{span}(e_1, e_2, \cdots, e_n), \alpha = [e_1\ e_2\ \cdots\ e_n]x, \beta = [e_1\ e_2\ \cdots\ e_n]y$, consider a matrix

$$A = \begin{pmatrix} f(e_1, e_1) & f(e_1, e_2) & \cdots & f(e_1, e_n) \\ f(e_2, e_1) & f(e_2, e_2) & \cdots & f(e_2, e_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f(e_n, e_1) & f(e_n, e_2) & \cdots & f(e_n, e_n) \end{pmatrix}$$

we conclude: $f(\alpha, \beta) = x'Ay$.

Proof. Use definiton of matrix multiplication, readers can verify themselves. ■

We call matrix A a **measure matrix**. You may be confused with this naming, but later we'll explain.

However, for this matrix A we can interpret it from another perspective.

Theorem 2.1.3 Another interpretation of measure matrix.
Let $V = \text{span}\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$, its dual space with dual basis $V' = \text{span}\{f_1, f_2, \cdots, f_n\}$ and f is a bilinear function on V. Consider a mapping $\varphi : V \to V'$, where $\varphi(\beta) = f(x, \beta)$, we have

$$\varphi[e_1\ e_2\ \cdots\ e_n] = [f_1\ f_2\ \cdots\ f_n]A$$

which means A is the matrix of φ under a basis of V and its correspondent dual basis.

Proof. This is proof. ■

Problem 2.1.1 Basis.
List a basis for the following linear spaces with default addition and scaling operator:
- $\mathbb{R}^2$
- $\mathbb{C}$

Solution.
- $(1, 0)'$, $(0, 1)'$
- 1

cpp

```cpp
#include <iostream>
using namespace std;

int main(){
  cout<<111<<endl;
  return 0;
}
```