Exercice 1

Énoncé

On considère le système d'équations linéaires (S), dont l'écriture matricielle est donnée par : $AX = b$ avec :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \text{ et } b = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Partie I :

1. Montrer que (S) admet une unique solution.
2. Montrer que A admet une décomposition LU.
3. Justifier la convergence de la méthode itératif de Jacobi pour la résolution du (S)

Partie II :

1. Résoudre (S) par la méthode de Gauss.
2. Donner le schéma itératif de la méthode de Jacobi associé au système (S).
3. Pour le vecteur $X^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, donner les résultats des deux premières itérations de la méthodes de Jacobi pour résolution du (S).

esprit Se former autrement

Exercice 1

Partie I

Solution

Rappel

(S) admet une unique solution $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$.

Exercice 1

Partie I

Solution

Rappel

(S) admet une unique solution $\Leftrightarrow$ $\det(A) \neq 0$.

1 On a $\det(A) = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 4(16-1) - 4 = 56 \neq 0$.

Donc, (S) admet une unique solution.

Exercice 1

Partie I

Solution

Rappel

(S) admet une unique solution $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$.

1 On a $\det(A) = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 4(16-1) - 4 = 56 \neq 0.$

Donc, (S) admet une unique solution.

Rappel

A admet une décomposition LU ssi tous les mineurs principaux de A sont inversibles.

Exercice 1

Partie I

Solution

Rappel

(S) admet une unique solution $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$.

1. On a $\det(A) = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 4(16-1) - 4 = 56 \neq 0.$

   Donc, (S) admet une unique solution.

Rappel

A admet une décomposition LU ssi tous les mineurs principaux de A sont inversibles.

2. $A^{(1)} = (4)$; $\det(A^{(1)}) = |4| \neq 0$,

   $A^{(2)} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$; $\det(A^{(2)}) = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 15 \neq 0$,

   $A^{(3)} = A$; $\det(A^{(3)}) = 56 \neq 0$,

   Ainsi tous les mineurs principaux de A sont inversibles et par suite A admet une décomposition LU.

Solution

Rappel

Soit A une matrice à diagonale strictement dominante alors les méthodes de Jacobi et Gauss Seidel appliquées au système $(S) : AX = b$ sont convergentes pour tous $X^{(0)}$.

Une matrice A est à **diagonale strictement dominante** si la valeur absolue de chaque coefficient diagonal $a_{i,i}$ $(i \in \{1, \cdots, n\})$ de A est strictement supérieure à la somme des valeurs absolues des autres coefficients de A situés à la i ème ligne. En d'autre terme,

$$|a_{i,i}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{i,j}|, \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}.$$

Solution

Rappel

Soit A une matrice à diagonale strictement dominante alors les méthodes de Jacobi et Gauss Seidel appliquées au système $(S) : AX = b$ sont convergentes pour tous $X^{(0)}$.

Une matrice A est à **diagonale strictement dominante** si la valeur absolue de chaque coefficient diagonal $a_{i,i}$ $(i \in \{1, \cdots, n\})$ de A est strictement supérieure à la somme des valeurs absolues des autres coefficients de A situés à la i ème ligne. En d'autre terme,

$$|a_{i,i}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{i,j}|, \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\}.$$

3 On a ,

$$\begin{cases} |4| > |1| + |0| \\ |4| > |1| + |1| \\ |4| > |0| + |1| \end{cases}$$

Ainsi A à diagonale strictement dominante et par suite la méthode de Jacobi est convergente.

Exercice 1

Partie II

Solution

3-

- Étape 1 : Écrire la matrice élargie relative à (S), notée par $(A|b)$, et déterminer un premier pivot non nul.

$$(A|b)^{(1)} = \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{4} & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & 9 \end{array}\right)$$

On $a_{11} \neq 0$.

Exercice 1

Partie II

Solution

3-

- Étape 1 : Écrire la matrice élargie relative à (S), notée par $(A|b)$, et déterminer un premier pivot non nul.

$$(A|b)^{(1)} = \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{4} & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & 9 \end{array}\right)$$

  On $a_{11} \neq 0$.

- Étape 2 : Annuler tous les coefficients situant en dessous du premier pivot.

$$L_2 \longleftarrow L_2 - \left(\frac{1}{4}\right) L_1$$

$$(A|b)^{(2)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 15/4 & 1 & 23/4 \\ 0 & 1 & 4 & 9 \end{array}\right)$$

Solution

- Étape 3: Passer au pivot suivant, vitrifier qu'il est non nul et annuler tous les coefficients situant en dessous du deuxième pivot.

$$L_3 \longleftarrow L_3 - \left(\frac{1}{\frac{15}{4}}\right) L_2 = L_3 - \left(\frac{4}{15}\right) L_2$$

$$(A|b)^{(3)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{15/4} & 1 & 23/4 \\ 0 & 0 & 56/15 & 112/15 \end{array}\right)$$

Solution

- Étape 3: Passer au pivot suivant, vitrifier qu'il est non nul et annuler tous les coefficients situant en dessous du deuxième pivot.

$$L_3 \longleftarrow L_3 - \left(\frac{1}{\frac{15}{4}}\right) L_2 = L_3 - \left(\frac{4}{15}\right) L_2$$

$$(A|b)^{(3)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{15/4} & 1 & 23/4 \\ 0 & 0 & 56/15 & 112/15 \end{array}\right)$$

Ainsi on obtient un système triangulaire supérieur équivalent au système (S) :

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 & = 1 \\ \quad \frac{15}{4}x_2 + x_3 & = \frac{23}{4} \\ \qquad \frac{56}{15}x_3 & = 112/15 \end{cases}$$

Solution

- Étape 3: Passer au pivot suivant, vitrifier qu'il est non nul et annuler tous les coefficients situant en dessous du deuxième pivot.

$$L_3 \longleftarrow L_3 - \left(\frac{1}{\frac{15}{4}}\right) L_2 = L_3 - \left(\frac{4}{15}\right) L_2$$

$$(A|b)^{(3)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{15/4} & 1 & 23/4 \\ 0 & 0 & 56/15 & 112/15 \end{array}\right)$$

Ainsi on obtient un système triangulaire supérieur équivalent au système (S) :

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 & = 1 \\ \quad \frac{15}{4}x_2 + x_3 & = \frac{23}{4} \\ \qquad \frac{56}{15}x_3 & = 112/15 \end{cases}$$

Le nouveau système triangulaire supérieur est très simple à résoudre :

(L_3) donne : $x_3 = \frac{\frac{37}{5}}{\frac{56}{15}} = \frac{112}{56} = 2.$

Puis dans (L_2) : $\frac{15}{4}x_2 + x_3 = \frac{23}{4}$ donc $x_2 = 1$.

Enfin dans (L_1) : $4x_1 + x_2 = 1$ donc $x_1 = 0$.

Conclusion : La solution du système (S) est $(x_1, x_2, x_3) = (0, 1, 2)$.

Solution

2- Décomposition de Jacobi: $A = D - E - F$

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{k+1} \\ x_2^{k+1} \\ x_3^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Solution

2- Décomposition de Jacobi: $A = D - E - F$

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{k+1} \\ x_2^{k+1} \\ x_3^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Le schéma itératif de la méthode de Jacobi est donné par:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{b_1 - a_{1,2} x_2^{(k)} - a_{1,3} x_3^{(k)}}{a_{1,1}} = \frac{1 - x_2^{(k)}}{4} \\ x_2^{(k+1)} = \frac{b_2 - a_{2,1} x_1^{(k)} - a_{2,3} x_3^{(k)}}{a_{2,2}} = \frac{6 - x_1^{(k)} - x_3^{(k)}}{4} \\ x_3^{(k+1)} = \frac{b_3 - a_{3,1} x_1^{(k)} - a_{3,2} x_2^{(k)}}{a_{3,3}} = \frac{9 - x_2^{(k)}}{4} \end{cases}$$

Solution

2- Décomposition de Jacobi: $A = D - E - F$

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{k+1} \\ x_2^{k+1} \\ x_3^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Le schéma itératif de la méthode de Jacobi est donné par:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{b_1 - a_{1,2}x_2^{(k)} - a_{1,3}x_3^{(k)}}{a_{1,1}} = \frac{1 - x_2^{(k)}}{4} \\ x_2^{(k+1)} = \frac{b_2 - a_{2,1}x_1^{(k)} - a_{2,3}x_3^{(k)}}{a_{2,2}} = \frac{6 - x_1^{(k)} - x_3^{(k)}}{4} \\ x_3^{(k+1)} = \frac{b_3 - a_{3,1}x_1^{(k)} - a_{3,2}x_2^{(k)}}{a_{3,3}} = \frac{9 - x_2^{(k)}}{4} \end{cases}$$

3- Pour le vecteur initial $X^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, les deux premiers itération de Jacobi sont :

- Itération 1 : $X^{(1)} = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 3/2 \\ 9/4 \end{pmatrix}$
- Itération 2 : $X^{(2)} = \begin{pmatrix} -0.125 \\ 0.875 \\ 1.875 \end{pmatrix}$