고유벡터와 고유값

eigen decomposition(고유값 분해)

- 주어진 matrix있을 때, 중요한 정보를 추출하는 과정(matrix의 특성을 밝히는 과정)
- Eigenvectors & Eigenvalues(스칼라) ⇒ 정사각행렬에서만 따진다.
- Eigenvectors의 특징
    1. non-zero
    2. $Ax = \lambda x$ 만족
        - A: 정사각행렬(Ax는 내적 연산)
        - x 벡터를 A의 Eigenvector
        - λ: Eigenvalues, 스칼라 값

변환의 관점에서, 고유값 분해

- 하나의 벡터를 다른 형태의 벡터로 변환하는 선형변환의 과정으로 볼 수 있다.
- 입력벡터에서 출력벡터로 변환되며, 크기와 방향이 바뀔 것이다.
- $T(x) = Ax = \lambda x$
    - ⇒ "A를 통해서 변환이 이루어진 출력벡터는, 원래 입력벡터의 상수배이다" 라고 해석할 수 있다.
      (방향은 바뀌지 않고, 크기만 바뀜)

> 📌 **고유값과 고유벡터의 이용**
> - 계산상의 이득 (GPU에서도 이를 활용하여, 빠르게 연산할 수 있음)
> - 컴퓨터 그래픽스) 회전이동에 사용

Eigenvectors 식의 풀이

> 📌 $Ax = \lambda x$
> ⇒ $Ax - \lambda x = 0$
> ⇒ $(A - \lambda I)x = 0$ $(\lambda x = \lambda I x)$

- x: Eigenvectors, non-zero
    - ⇒ 0 벡터는 Eigenvectors로서, 실직적으로 유의미하지 않다.
    - 따라서, 이전 강의의 $Ax = 0$ 의 풀이에서, trivial solution($x = 0$)이 아닌,
      non-trivial solution이 존재하면, 해가 무수히 존재한다는 개념을 생각해보자.
    - 해가 무수히 존재하기 위해서는 A 행렬이 선형의존을 만족해야한다.
      = 원점에서 시작해서, 다른 점을 거쳐서, 다시 원점으로 돌아오는 coefficient의 선형결합이 존재한다.
      = 해가 하나 이상 존재한다. = 선형의존이다.
    - 선형의존의 실질적 검증
        - ⇒ 재료벡터를 하나씩 추가할 때, 기존 벡터 집합이 만드는 span 안에
          새로 추가하려는 벡터가 포함되면, 선형의존이다.
- 결론적으로, $A - \lambda I$ 가 선형의존적인 컬럼을 가질 때,
  non-trivial solution한 솔루션 x, 혹은 Eigenvectors가 존재하게 되는 것이다.
    - ⇒ Eigenvectors를 찾기 위해서는 $A - \lambda I$가 선형의존적이게 되는 λ를 찾아야한다.

영공간과 직교여공간

Null space

- $ColA$: A의 컬럼벡터로 만들어지는 subspace ⇒ 직사각행렬에서도 다룰 수 있다.
- Nul A: A의 null space ⇒ 직사각행렬에서도 다룰 수 있다.
  - Null space: $Ax = 0$을 만족하는 벡터 x의 집합. subspace이다.
  - 내적의 측면에서 보면, A의 행벡터들이 가리키는 방향과 x 벡터는 직교한다.
    (이러한 특징을 가지는 x 벡터들을 모아놓은 것)
- A가 아래처럼 표현될 때, (*열벡터를 기준으로 하므로, transpose하여 표현)

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1^T \\ \mathbf{a}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m^T \end{bmatrix},$$

  x는 다음의 조건을 만족해야한다.

$$\mathbf{a}_1^T\mathbf{x} = 0, \mathbf{a}_2^T\mathbf{x} = 0, \ldots, \mathbf{a}_m^T\mathbf{x} = 0$$

  Least Squares의 기하학적 해석에 따르면, $ColA$의 모든 벡터와 대상벡터($b - \hat{b}$)가 수직을 이뤄야 한다.
  A의 모든 컬럼벡터와 수직을 이뤄야, 평면과 수직임을 알 수 있다.

- 0인 솔루션은 언제나 존재(trivial solution)
- A의 컬럼벡터가 선형독립인 경우, 오직 0 솔루션만 존재한다.
  이를 다음과 같이 표현한다. $\Rightarrow NulA = \{0\}$

- 평면과 벡터의 각도가 0인 경우, 선형의존임을 알 수 있다.
- orthogonal: 평면과 벡터의 각도가 90도 ⇒ 당연히 선형독립
- orthogonal 의 전제조건: 선형독립
  - A의 컬럼벡터가 선형독립을 이루는 경우, orthogonal을 거론할 수 조차 없다.(불가)

Fundamental Subspaces Given by A

- 3x2 행렬의 경우, $RowA \in R^2$, $ColA \in R^3$
- subspace의 dim = subspace의 basis의 개수

- $Ax = 0$인 경우에, 가능한 x들이 존재하는 span?
  - = A가 만드는 hyperplane에 수직인 벡터의 모음
  - 선형독립인 벡터를 그램-슈미츠 과정을 통해 수직 성분을 뽑아낼 수 있다.

    따라서, 선형독립인 벡터를 찾아내면, orthogonal vector를 찾을 수 있다는 것
    반드시 수직인벡터를 찾지 않아도, 선형독립인 벡터만 찾아도 된다.
    (⇒ 수직으로 만들어주는 방법을 알기 때문에!)

- 3차원 공간에서 1개의 벡터가 주어지면, $NulA$의 차원은 $3 - 1 = 2$. 총 2 차원의 공간으로 나타난다.

Orthogonal Complement(여집합)

- Orthogonal Complement**:** 전체 space를 양분한다는 개념
- Rank Theorem
  - 총$dim = dimRowA + dimNulA$
- 표현

$$\text{Nul } A = (\text{Row } A)^{\perp}.$$
$$\text{Nul } A^T = (\text{Col } A)^{\perp}.$$

  - A 행렬의 행/열 벡터들의 공간에 수직인 벡터의 집합(A의 행/열 벡터에 모두 수직)
  - Null space(subspace)의 basis 개수: 주어진 재료벡터에 선형독립인 차원의 수 (찾을 수 있는, 남은 basis의 수)

- Null space는 subspace인가?
  - = 선형결합에 닫혀있는가?
  - $x, y \in NulA$ 라고 할 때, $ax + by \in NulA$을 만족해야한다.(닫혀있음)
  - 분배법칙이 성립하므로, 두 벡터를 각각 내적(=0)한 것과 같이 같다.(선형결합)
    ⇒ 따라서, 닫혀있음을 만족한다.