解答

一、参考解答：

1．以l_{i}表示第 i 个单摆的摆长，由条件（b）可知每个摆的周期必须是 40s 的整数分之一，即

$$T_{\mathrm{i}}=2\pi\sqrt{\frac{l_{\mathrm{i}}}{g}}=\frac{40}{N_{\mathrm{i}}}\quad（N_{\mathrm{i}}\text{为正整数}）\tag{1}$$

[(1)式以及下面的有关各式都是在采用题给单位条件下的数值关系.] 由(1)可得，各单摆的摆长

$$l_{\mathrm{i}}=\frac{400g}{\pi^2N_{\mathrm{i}}^2}\tag{2}$$

依题意，$0.450\mathrm{m}\le l_{\mathrm{i}}\le 1.000\mathrm{m}$，由此可得

$$\frac{20}{\pi}\sqrt{g}<N_{\mathrm{i}}<\frac{20}{\pi}\sqrt{\frac{g}{0.45}}\tag{3}$$

即

$$20\le N_{\mathrm{i}}\le 29\tag{4}$$

因此，第 i 个摆的摆长为

$$l_{\mathrm{i}}=\frac{400g}{\pi^2(19+\mathrm{i})^2}\quad(\mathrm{i}=1,2,\cdots,10)\tag{5}$$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
l_{i}/m	0.993	0.901	0.821	0.751	0.690	0.635	0.588	0.545	0.507	0.472

2． 20s

评分标准：本题 15 分.

第 1 小问 11 分.（2）式 4 分，（4）式 4 分，10 个摆长共 3 分.

第 2 小问 4 分.

二、参考解答：

设该恒星中心到恒星－行星系统质心的距离为d，根据题意有

$$d=\frac{L\Delta\theta}{2} \tag{1}$$

将有关数据代入（1）式，得$d=5\times10^{-3}\,\mathrm{AU}$．又根据质心的定义有

$$r-d=\frac{Md}{m} \tag{2}$$

式中r为行星绕恒星做圆周运动的轨道半径，即行星与恒星之间的距离. 根据万有引力定律有

$$G\frac{Mm}{r^2}=Md\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \tag{3}$$

由（2)、(3）两式得

$$\frac{m}{\left(1+M/m\right)^2}=\frac{4\pi^2}{G}\frac{d^3}{T^2} \tag{4}$$

[若考生用r表示行星到恒星□行星系统质心的距离，从而把(2)式写为$r=\frac{Md}{m}$，把(3)式写为$G\frac{Mm}{\left(r+d\right)^2}=Md\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2$，则同样可得到(4)式，这也是正确的.] 利用（1）式，可得

$$\frac{m}{\left(1+M/m\right)^2}=\frac{\left(L\Delta\theta\right)^3\pi^2}{2GT^2} \tag{5}$$

（5）式就是行星质量m所满足的方程.

可以把(5)试改写成下面的形式

$$\frac{\left(m/M\right)^3}{\left(1+m/M\right)^2}=\frac{\left(L\Delta\theta\right)^3\pi^2}{2GMT^2} \tag{6}$$

因地球绕太阳作圆周运动，根据万有引力定律可得

$$\frac{(1\mathrm{AU})^3}{(1\mathrm{y})^2}=\frac{GM_\mathrm{S}}{4\pi^2} \tag{7}$$

注意到$M=M_\mathrm{S}$，由（6）和（7）式并代入有关数据得

$$\frac{\left(m/M_S\right)^3}{\left(1+m/M_\mathrm{S}\right)^2}=8.6\times10^{-10} \tag{8}$$

由（8）式可知

$$\frac{m}{M_\mathrm{S}}\ll 1$$

由近似计算可得

$$m\approx1\times10^{-3}M_\mathrm{S} \tag{9}$$

由于 m/M 小于 1/1000，可近似使用开普勒第三定律，即

$$\frac{r^3}{T^2}=\frac{(1\mathrm{AU})^3}{(1\mathrm{y})^2} \tag{10}$$

代入有关数据得

$$r\approx 5\mathrm{AU} \tag{11}$$

评分标准：本题 20 分**.**

（1）式 2 分，（2）式 3 分，（3）式 4 分，（5）式 3 分，（9）式 4 分，（11）式 4 分.

三、参考解答：

解法一

一倾角为θ的直角三角形薄片(如图 1 所示)紧贴于半径为R的圆柱面，圆柱面的轴线与直角三角形薄片的沿竖直方向的直角边平行，若把此三角形薄片卷绕在柱面上，则三角形薄片的斜边就相当于题中的螺线环．根据题意有

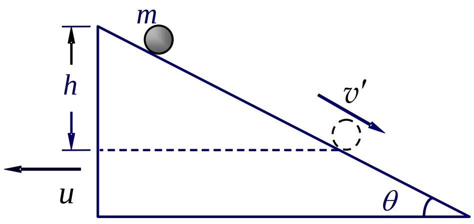


图 1

$$\tan\theta = \frac{\pi R}{2\pi R} = \frac{1}{2} \tag{1}$$

可得

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{5}}{5},\quad \cos\theta = \frac{2\sqrt{5}}{5} \tag{2}$$

设在所考察的时刻，螺旋环绕其转轴的角速度为ω，则环上每一质量为Δm_{i}的小质元绕转轴转动线速度的大小都相同，用u表示，

$$u = \omega R \tag{3}$$

该小质元对转轴的角动量

$$\Delta L_{\mathrm{i}} = \Delta m_{\mathrm{i}} uR = \Delta m_{\mathrm{i}} R^2 \omega$$

整个螺旋环对转轴的角动量

$$L = \sum \Delta L_{\mathrm{i}} = \sum \Delta m_{\mathrm{i}} R^2 \omega = mR^2 \omega \tag{4}$$

小球沿螺旋环的运动可视为在水平面内的圆周运动和沿竖直方向的直线运动的合成．在螺旋环的角速度为ω时，设小球相对螺旋环的速度为v'，则小球在水平面内作圆周运动的速度为

$$v_{\mathrm{P}} = v'\cos\theta - \omega R \tag{5}$$

沿竖直方向的速度

$$v_{\perp} = v'\sin\theta \tag{6}$$

对由小球和螺旋环组成的系绕，外力对转轴的力矩为 0，系统对转轴的角动量守恒，故有

$$0 = mv_{\mathrm{P}}R - L \tag{7}$$

由（4）、（5）、（7）三式得

$$v'\cos\theta - \omega R = \omega R \tag{8}$$

在小球沿螺旋环运动的过程中，系统的机械能守恒，有

$$mgh = \frac{1}{2}m\left(v_{\mathrm{P}}^2 + v_{\perp}^2\right) + \sum \frac{1}{2}\Delta m_{\mathrm{i}} u^2 \tag{9}$$

由（3）、（5）、（6）、（9）四式得

$$2gh = \left(v'\cos\theta - \omega R\right)^2 + v'^2\sin^2\theta + \omega^2 R^2 \tag{10}$$

解（8）、（10）二式，并利用（2）式得

$$\omega = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{2gh}{3}} \tag{11}$$

$$v' = \sqrt{\frac{10gh}{3}} \tag{12}$$

由（6)、(12）以及（2）式得

$$v_{\perp} = \sqrt{\frac{2}{3}gh} \tag{13}$$

或有

$$v_{\perp}^2 = 2\frac{1}{3}gh \tag{14}$$

（14）式表明，小球在竖直方向的运动是匀加速直线运动，其加速度

$$a_{\perp} = \frac{1}{3}g \tag{15}$$

若小球自静止开始运动到所考察时刻经历时间为t，则有

$$h = \frac{1}{2}a_{\perp}t^2 \tag{16}$$

由（11）和（16）式得

$$\omega = \frac{g}{3R}t \tag{17}$$

（17）式表明，螺旋环的运动是匀加速转动，其角加速度

$$\beta = \frac{g}{3R} \tag{18}$$

小球对螺旋环的作用力有：小球对螺旋环的正压力N_1，在图 1 所示的薄片平面内，方向垂直于薄片的斜边；螺旋环迫使小球在水平面内作圆周运动的向心力N_2'的反作用力N_2．向心力N_2'在水平面内，方向指向转轴 C，如图 2 所示．N_1、N_2两力中只有N_1对螺旋环的转轴有力矩，由角动量定理有

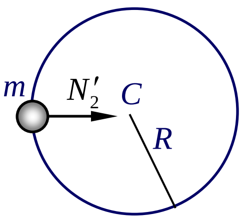


图 2

$$N_1 \sin\theta R\Delta t = \Delta L \tag{19}$$

由（4)、(18）式并注意到$\frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \beta$得

$$N_1 = \frac{mg}{3\sin\theta} = \frac{\sqrt{5}}{3}mg \tag{20}$$

而

$$N_2 = N_2' = m\frac{v_P^2}{R} \quad (21)$$

由以上有关各式得

$$N_2 = \frac{2h}{3R}mg \quad (22)$$

小球对螺旋环的作用力

$$N = \sqrt{N_1^2 + N_2^2} = \frac{1}{3}mg\sqrt{5+\frac{4h^2}{R^2}} \quad (23)$$

评分标准：本题 22 分．

（1)、（2）式共 3 分，（7）式 1 分，（9）式 1 分，求得（11）式给 6 分，（20）式 5 分，（22）式 4 分，（23）式 2 分．

解法二

一倾角为θ的直角三角形薄片(如图 1 所示)紧贴于半径为R的圆柱面，圆柱面的轴线与直角三角形薄片的沿竖直方向的直角边平行，若把此三角形薄片卷绕在柱面上，则三角形薄片的斜边就相当于题中的螺线环．根据题意有

$$\tan\theta = \frac{\pi R}{2\pi R} = \frac{1}{2} \quad (1)$$

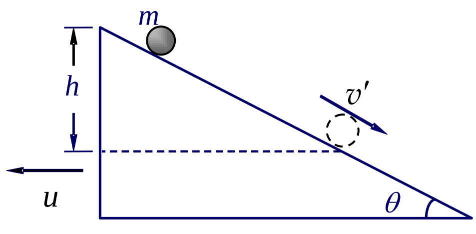


图 1

可得

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{5}}{5}，\quad \cos\theta = \frac{2\sqrt{5}}{5} \quad (2)$$

螺旋环绕其对称轴无摩擦地转动时，环上每点线速度的大小等于直角三角形薄片在光滑水平地面上向左移动的速度．小球沿螺旋环的运动可视为在竖直方向的直线运动和在水平面内的圆周运动的合成．在考察圆周运动的速率时可以把圆周运动看做沿水平方向的直线运动，结果小球的运动等价于小球沿直角三角形斜边的运动．小球自静止开始沿螺旋环运动到在竖直方向离初始位置的距离为h的位置时，设小球相对薄片斜边的速度为v'，沿薄片斜边的加速度为a'．薄片相对地面向左移动的速度为u，向左移动的加速度为a_0．u就是螺旋环上每一质元绕转轴转动的线速度，若此时螺旋环转动的角速度为ω，则有

$$u = \omega R \quad (3)$$

而a_0就是螺旋环上每一质元绕转轴转动的切向加速度，若此时螺旋环转动的角加速度为β，则有

$$a_0 = \beta R \quad (4)$$

小球位于斜面上的受力情况如图 2 所示：重力mg，方向竖直向下，斜面的支持力N，方向与斜面垂直，以薄片为参考系时的惯性力

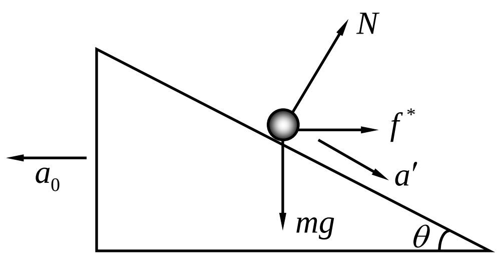


图2

f^*，方向水平向右，其大小

$$f^* = ma_0 \tag{5}$$

由牛顿定律有

$$mg\cos\theta - N - f^*\sin\theta = 0 \tag{6}$$

$$mg\sin\theta + f^*\cos\theta = ma' \tag{7}$$

$$N\sin\theta = ma_0 \tag{8}$$

解（5）、（6）、（7）、（8）四式得

$$a' = \frac{2\sin\theta}{1+\sin^2\theta}g \tag{9}$$

$$N = \frac{\cos\theta}{1+\sin^2\theta}mg \tag{10}$$

$$a_0 = \frac{\sin\theta\cos\theta}{1+\sin^2\theta}g \tag{11}$$

利用（2）式可得

$$a' = \frac{\sqrt{5}}{3}g \tag{12}$$

$$N = \frac{\sqrt{5}}{3}mg \tag{13}$$

$$a_0 = \frac{1}{3}g \tag{14}$$

由（4）式和（14）式，可得螺旋环的角加速度

$$\beta = \frac{1}{3R}g \tag{15}$$

若小球自静止开始运动到所考察时刻经历时间为t，则此时螺旋环的角速度

$$\omega = \beta t \tag{16}$$

因小球沿螺旋环的运动可视为在水平面内的圆周运动和沿竖直方向的直线运动的合成，而小球沿竖直方向的加速度

$$a_\perp = a'_\perp = a'\sin\theta \tag{17}$$

故有

$$h = \frac{1}{2}a_\perp t^2 \tag{18}$$

由（15）、（16）、（17）、（18）、以及（2）式得

$$\omega = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{2gh}{3}} \tag{19}$$

小球在水平面内作圆周运动的向心力由螺旋环提供，向心力位于水平面内，方向指向转轴，故向心力与图 2 中的纸面垂直，亦即与 N 垂直．向心力的大小

$$N_1 = m\frac{v_{\mathrm{P}}^2}{R} \tag{20}$$

式中 v_{P} 是小球相对地面的速度在水平面内的分量. 若 a_{P} 为小球相对地面的加速度在水平面内的分量，则有

$$v_{\mathrm{P}} = a_{\mathrm{P}}t \tag{21}$$

令 a'_{P} 为 a' 在水平面内的分量，有

$$a_{\mathrm{P}} = a'_{\mathrm{P}} - a_0 = a'\cos\theta - a_0 \tag{22}$$

由以上有关各式得

$$N_1 = \frac{2h}{3R}mg \tag{23}$$

小球作用于螺旋环的力的大小

$$N_0 = \sqrt{N^2 + N_1^2} \tag{24}$$

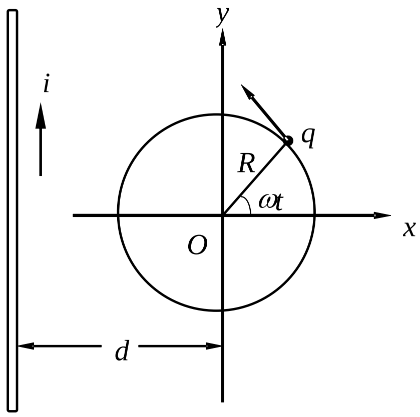
由（13）、（23）和（24）式得

$$N_0 = \frac{mg}{3}\sqrt{5 + \frac{4h^2}{R^2}} \tag{25}$$

评分标准：本题 22 分．

（1）、（2）式共 3 分，（9）或（12）式 1 分，（10）或（13）式 5 分，（11）或（14）式 1 分，（19）式 6 分，（23）式 4 分，（25）式 2 分．

四、参考解答：



以 v 表示粒子的速率，以 B 表示电流 i 产生磁场的磁感应强度，根据题意粒子作圆周运动的向心力为粒子受到的磁场洛仑兹力，因此有

$$qvB = m\frac{v^2}{R} \qquad (1)$$

而

$$v = \omega R \qquad (2)$$

由（1）、（2）两式得

$$B = \frac{m\omega}{q} \qquad (3)$$

如图建立坐标系，则粒子在时刻 t 的位置

$$x(t) = R\cos\omega t\text{，}y(t) = R\sin\omega t \qquad (4)$$

取电流的正方向与 y 轴的正向一致，设时刻 t 长直导线上的电流为 $i(t)$，它产生的磁场在粒子所在处磁感应强度大小为

$$B = k\frac{i(t)}{d + x(t)} \qquad (5)$$

方向垂直圆周所在的平面. 由（4）、（5）式，可得

$$i(t) = k\frac{m\omega}{q}(d + R\cos\omega t) \qquad (6)$$

评分标准：本题 12 分.

（3）式 4 分，（4）式 2 分，（5）式 4 分，（6）式 2 分.

五、参考解答：

1．质点在 $A \to B$ 应作减速运动（参看图 1）．设质点在 A 点的最小初动能为 E_{k0}，则根据能量守恒，可得质点刚好能到达 B 点的条件为

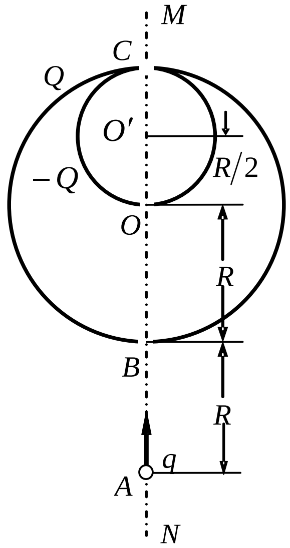


图 1

$$\frac{kqQ}{R}-\frac{kqQ}{3R/2}+mgR=E_{k0}+\frac{kqQ}{2R}-\frac{kqQ}{5R/2} \quad (1)$$

由此可得

$$E_{k0}=mgR+\frac{7kqQ}{30R} \quad (2)$$

2． 质点在 $B \to O$ 的运动有三种可能情况：

i．质点在 $B \to O$ 作加速运动（参看图 1），对应条件为

$$mg \le \frac{4kqQ}{9R^2} \quad (3)$$

此时只要质点能过 B 点，也必然能到达 O 点，因此质点能到达 O 点所需的最小初动能由（2）式给出，即

$$E_{k0}=mgR+\frac{7kqQ}{30R} \quad (4)$$

若（3）式中取等号，则最小初动能应比（4）式给出的 E_{k0} 略大一点．

ii．质点在 $B \to O$ 作减速运动（参看图 1），对应条件为

$$mg \ge \frac{4kqQ}{R^2} \quad (5)$$

此时质点刚好能到达 O 点的条件为

$$\frac{kqQ}{R}-\frac{kqQ}{R/2}+mg(2R)=E_{k0}+\frac{kqQ}{2R}-\frac{kqQ}{5R/2} \quad (6)$$

由此可得

$$E_{k0}=2mgR-\frac{11kqQ}{10R} \quad (7)$$

iii．质点在 $B \to O$ 之间存在一平衡点 D（参看图 2），在 $B \to D$ 质点作减速运动，在 $D \to O$ 质点作加速运动，对应条件为

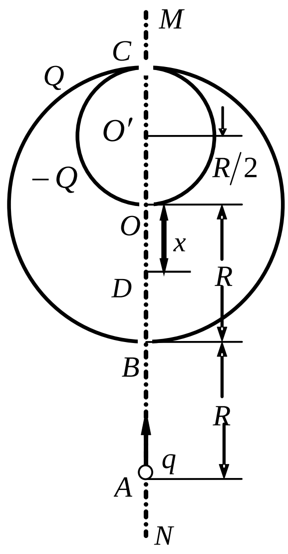


图 2

$$\frac{4kqQ}{9R^2}<mg<\frac{4kqQ}{R^2} \quad (8)$$

设 D 到 O 点的距离为 x，则

$$mg=\frac{kqQ}{\left(\left(R/2\right)+x\right)^2} \quad (9)$$

即

$$x=\sqrt{\frac{kqQ}{mg}}-\frac{R}{2}\qquad（10）$$

根据能量守恒，质点刚好能到达 D 点的条件为

$$\frac{kqQ}{R}-\frac{kqQ}{(R/2)+x}+mg(2R-x)=E_{\mathrm{k0}}+\frac{kqQ}{2R}-\frac{kqQ}{5R/2}\qquad（11）$$

由（10）、（11）两式可得质点能到达 D 点的最小初动能为

$$E_{\mathrm{k0}}=\frac{5}{2}mgR+\frac{9kqQ}{10R}-2\sqrt{kgmqQ}\qquad（12）$$

只要质点能过 D 点也必然能到达 O 点，所以，质点能到达 O 点的最小初动能也就是（12）式（严格讲应比（12）式给出的 E_{k0} 略大一点.）

评分标准：本题 20 分.

第 1 小问 5 分．求得（2）式给 5 分.

第 2 小问 15 分．算出第 i 种情况下的初动能给 2 分；算出第 ii 种情况下的初动能给 5 分；算出第 iii 种情况下的初动能给 8 分，其中（10）式占 3 分.

六、参考解答：

$n=1$时，A、B 间等效电路如图 1 所示， A、B 间的电阻

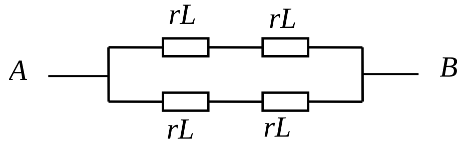


图1

$$R_1=\frac{1}{2}(2rL)=rL \tag{1}$$

$n=2$时，A、B 间等效电路如图 2 所示，A、B 间的电阻

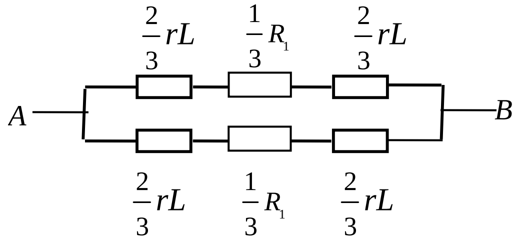


图 2

$$R_2=\frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}rL+\frac{1}{3}R_1\right) \tag{2}$$

由（1）、（2）两式得

$$R_2=\frac{5}{6}rL \tag{3}$$

$n=3$时，A、B 间等效电路如图 3 所示，A、B 间的电阻

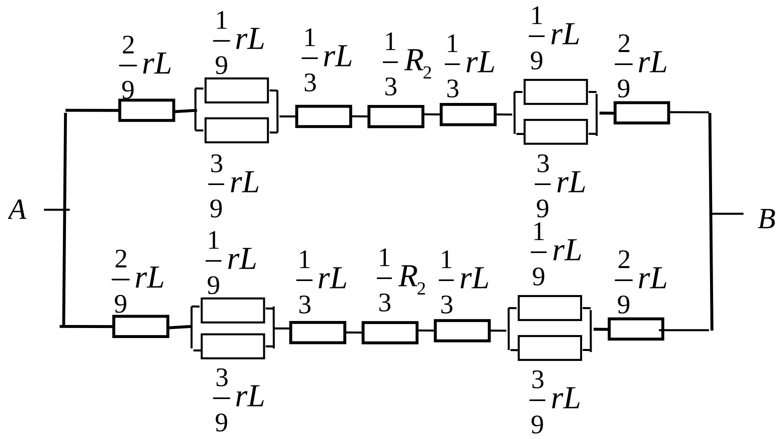


图 3

$$R_3=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{9}\left(2+\frac{3}{4}+3+3+\frac{3}{4}+2\right)rL+\frac{1}{3}R_2\right] \tag{4}$$

由（3）、（4）式得

$$R_3=\frac{7}{9}rL \tag{5}$$

评分标准：本题 20 分.

（1）式 4 分，（3）式 6 分，（5）式 10 分.

七、参考解答：

1．根据题意，太阳辐射的总功率 $P_S = 4\pi R_S^2 \sigma T_S^4$．太阳辐射各向同性地向外传播．设地球半径为 r_E，可以认为地球所在处的太阳辐射是均匀的，故地球接收太阳辐射的总功率为

$$P_I = \sigma T_S^4 \left(\frac{R_S}{d}\right)^2 \pi r_E^2 \tag{1}$$

地球表面反射太阳辐射的总功率为 αP_I．设地球表面的温度为 T_E，则地球的热辐射总功率为

$$P_E = 4\pi r_E^2 \sigma T_E^4 \tag{2}$$

考虑到温室气体向地球表面释放的热辐射，则输入地球表面的总功率为 $P_I + \beta P_E$．当达到热平衡时，输入的能量与输出的能量相等，有

$$P_I + \beta P_E = \alpha P_I + P_E \tag{3}$$

由以上各式得

$$T_E = T_S \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1-\alpha}{1-\beta}\right)^{1/4}\left(\frac{R_S}{d}\right)^{1/2} \tag{4}$$

代入数值，有

$$T_E = 287\text{K} \tag{5}$$

2．当地球表面一部分被冰雪覆盖后，以 α' 表示地球表面对太阳辐射的平均反射率，根据题意这时地球表面的平均温度为 $T_E = 273\text{K}$．利用（4）式，可求得

$$\alpha' = 0.43 \tag{6}$$

设冰雪覆盖的地表面积与总面积之比为 x，则

$$\alpha' = \alpha_1 x + \alpha_2 (1-x) \tag{7}$$

由（6）、（7）两式并代入数据得

$$x = 30\% \tag{8}$$

评分标准：本题 15 分．

第 1 小问 11 分．（1）式 3 分，（2）式 1 分，（3）式 4 分，（4）式 2 分，（5）式 1 分．

第 2 小问 4 分．（6）式 2 分，（8）式 2 分．

八、参考解答：

方案一：采光装置由平面镜 M 和两个凸透镜 L_1、L_2 组成．透镜组置于平面镜 M 后面，装置中各元件的相对方位及光路图如图 1 所示．

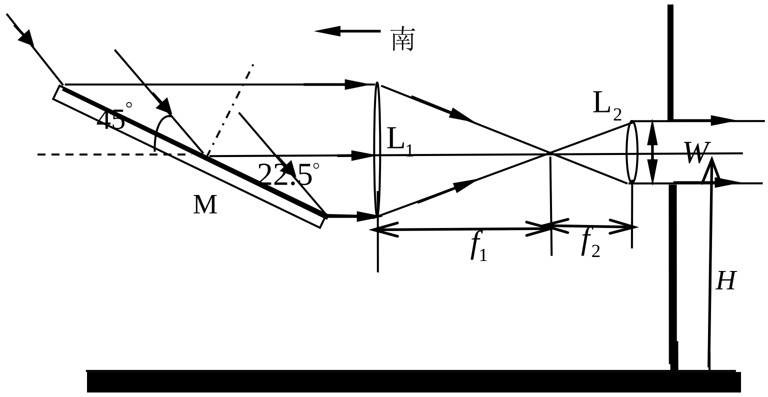


图 1

L_1、L_2 的直径分别用 D_1、D_2 表示，其焦距的大小分别为 f_1 、f_2．两透镜的距离

$$d = f_1 + f_2 \qquad (1)$$

直径与焦距应满足关系

$$\frac{f_1}{D_1} = \frac{f_2}{D_2} \qquad (2)$$

设射入透镜 L_1 的光强为 I'_{10}，透过透镜 L_1 的光强为 I'_1，考虑到透镜 L_1 对光的吸收有

$$I'_1 = 0.70 I'_{10} \qquad (3)$$

从透镜 L_1 透出的光通量等于进入 L_2 的光通量，对应的光强与透镜的直径平方成反比，进入 L_2 的光强用 I_{20} 表示，即

$$\frac{I_{20}}{I'_1} = \frac{D_1^2}{D_2^2} = \left(\frac{f_1}{f_2}\right)^2$$

故有

$$I_{20} = I'_1 \left(\frac{f_1}{f_2}\right)^2 \qquad (4)$$

透过 L_2 的光强 $I'_2 = 0.70 I_{20}$，考虑到（3）式，得

$$I'_2 = 0.49 I'_{10} \left(\frac{f_1}{f_2}\right)^2 \qquad (5)$$

由于进入透镜 L_1 的光强 I'_{10} 是平面镜 M 的反射光的光强，反射光是入射光的 80%，设射入装置的太阳光光强为 I_0，则

$$I'_{10} = 0.80 I_0$$

代入（5）式有

$$I'_2 = 0.39 I_0 \left(\frac{f_1}{f_2}\right)^2 \qquad (6)$$

按题设要求

$$I_2' = 2I_0$$

代入（6）式得

$$2I_0 = 0.39 I_0 \left(\frac{f_1}{f_2} \right)^2$$

从而可求得两透镜的焦距比为

$$\frac{f_1}{f_2} = 2.26 \tag{7}$$

L_2的直径应等于圆形窗户的直径 W，即 $D_2 = 10\text{cm}$，由（2）式得

$$D_1 = D_2 \frac{f_1}{f_2} = 22.6\text{cm} \tag{8}$$

由图可知，平面镜 M 参与有效反光的部分为一椭圆，其半短轴长度为

$$b = D_1 / 2 = 11.3\text{cm} \tag{9}$$

半长轴长度为

$$a = D_1 \big/ (2\sin 22.5^\circ) = 29.5\text{cm} \tag{10}$$

根据装置图的结构，可知透镜组的光轴离地应与平面镜 M 的中心等高，高度为 H .

评分标准：本题 20 分.

作图 8 分（含元件及其相对方位，光路），求得（7）、（8）两式共 10 分，（9）、（10）式共 2 分.

方案二：采光装置由平面镜 M 和两个凸透镜 L_1、L_2 组成，透镜组置于平面镜 M 前面，装置中各元件的相对方位及光路图如图 2 所示.

对透镜的参数要求与方案一相同.

但反射镜 M 的半短轴、半长轴的长度分别为

$$b = D_2 / 2 = 5.0\text{cm}$$

和

$$a = D_2 \big/ (2\sin 22.5^\circ) = 13.1\text{cm}$$

评分标准：参照方案一.

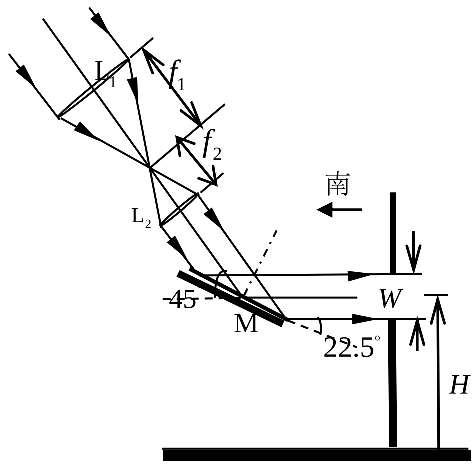


图 2

方案三、采光装置由平面镜 M 和一个凸透镜 L_1、一个凹透镜 L_2 组成，透镜组置于平面镜 M 后面（也可在 M 前面），装置中各元件的相对方位及光路图如图 3 所示.

有关参数与方案一相同，但两透镜的距离

$$d = f_1 - f_2$$

如果平面镜放在透镜组之前，平面镜的尺寸和方案一相同；如果平面镜放在透镜组之后，平面镜的尺寸和方案二相同.

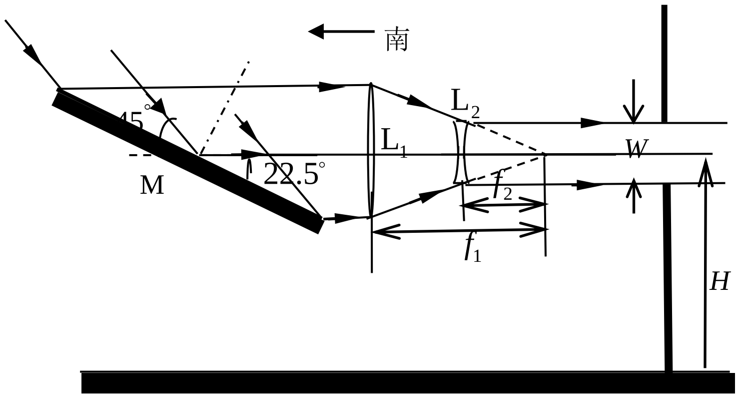
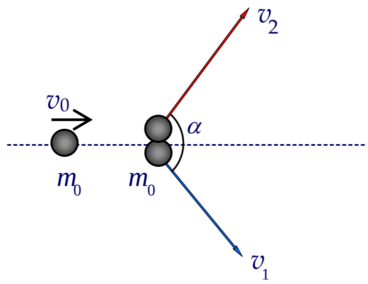


图 3

评分标准：参照方案一.

九、参考解答：

1．假设碰撞后球 1 和球 2 的速度方向之间的夹角为α（见图），则由能量守恒和动量守恒可得



$$m_0c^2+m_0c^2\gamma_0=m_0c^2\gamma_1+m_0c^2\gamma_2 \tag{1}$$

$$\left(m_0v_0\gamma_0\right)^2=\left(m_0v_1\gamma_1\right)^2+\left(m_0v_2\gamma_2\right)^2+2\left(m_0v_1\gamma_1\right)\left(m_0v_2\gamma_2\right)\cos\alpha \tag{2}$$

其中$\gamma_0=\dfrac{1}{\sqrt{1-v_0^2/c^2}}$，$\gamma_1=\dfrac{1}{\sqrt{1-v_1^2/c^2}}$，$\gamma_2=\dfrac{1}{\sqrt{1-v_2^2/c^2}}$.

由（1)、(2）式得

$$1+\gamma_0=\gamma_1+\gamma_2 \tag{3}$$

$$\gamma_0^2+1=\gamma_1^2+\gamma_2^2+2(v_1v_2/c^2)\gamma_1\gamma_2\cos\alpha \tag{4}$$

由（3)、(4）式得

$$\cos\alpha=\frac{\gamma_0^2+1-(\gamma_1^2+\gamma_2^2)}{2v_1v_2\gamma_1\gamma_2}c^2=\frac{(\gamma_1-1)(\gamma_2-1)}{v_1v_2\gamma_1\gamma_2}c^2>0 \tag{5}$$

$$\alpha<\frac{\pi}{2} \tag{6}$$

即为锐角.

在非相对论情况下，根据能量守恒和动量守恒可得

$$\frac{1}{2}m_0v_0^2=\frac{1}{2}m_0v_1^2+\frac{1}{2}m_0v_2^2 \tag{7}$$

$$\left(m_0v_0\right)^2=\left(m_0v_1\right)^2+\left(m_0v_2\right)^2+2\left(m_0v_1\right)\left(m_0v_2\right)\cos\alpha \tag{8}$$

对斜碰，v_1的方向与v_2的方向不同，要同时满足（1）和（2）式，则两者方向的夹角

$$\alpha=\frac{\pi}{2} \tag{9}$$

即为直角.

2．根据能量守恒和动量守恒可得

$$m_0c^2+\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-v_0^2/c^2}}=\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-v_1^2/c^2}}+\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-v_2^2/c^2}} \tag{10}$$

$$\frac{m_0v_0}{\sqrt{1-v_0^2/c^2}}=\frac{m_0v_1}{\sqrt{1-v_1^2/c^2}}+\frac{m_0v_2}{\sqrt{1-v_2^2/c^2}} \tag{11}$$

令

$$\gamma_0=\frac{1}{\sqrt{1-v_0^2/c^2}}，\ \gamma_1=\frac{1}{\sqrt{1-v_1^2/c^2}}，\ \gamma_2=\frac{1}{\sqrt{1-v_2^2/c^2}}$$

则有

$$v_0=c\sqrt{1-1/\gamma_0^2}，\ v_1=c\sqrt{1-1/\gamma_1^2}，\ v_2=c\sqrt{1-1/\gamma_2^2}$$

代入（10)、（11）式得

$$1+\gamma_0=\gamma_1+\gamma_2 \tag{12}$$

$$\sqrt{\gamma_0^2-1}=\sqrt{\gamma_1^2-1}+\sqrt{\gamma_2^2-1} \tag{13}$$

解（12)、（13）两式得

$$\gamma_1=1 \qquad \gamma_2=\gamma_0 \tag{14}$$

或

$$\gamma_1=\gamma_0 \qquad \gamma_2=1 \tag{15}$$

即

$$v_1=0\ ，\ v_2=v_0 \tag{16}$$

（或$v_1=v_0$，$v_2=0$，不合题意）

评分标准：本题 16 分．

第 1 小问 10 分．（1)、（2）式各 2 分，（6）式 4 分，（9）式 2 分．

第 2 小问 6 分．（10)、（11）式各 1 分，（16）式 4 分．