第 27 届全国中学生物理竞赛决赛试卷

（参考解答及评分标准）

厦　门

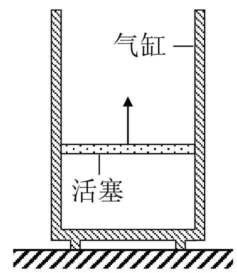
2010.10.31

一、（25 分）填空题

1. 一个粗细均匀的细圆环形橡皮圈，其质量为 M ，劲度系数为 k ，无形变时半径为 R . 现将它用力抛向空中，忽略重力的影响，设稳定时其形状仍然保持为圆形，且在平动的同时以角速度 ω 绕通过圆心垂直于圆面的轴线匀速旋转．这时它的半径应为________________．［答案：$4\pi^2 kR/(4\pi^2 k - M\omega^2)$；6 分］

2. 鸽哨的频率是 f ．如果鸽子飞行的最大速率是 u ，由于多普勒效应，观察者可能观测到的频率的范围是从________________到________________．设声速为 V ．［答案： $fV/(V+u)$, $fV/(V-u)$；4 分］

3. 如图所示，在一个质量为 M 、内部横截面积为 A 的竖直放置的绝热气缸中，用活塞封闭了一定量温度为 T_0 的理想气体．活塞也是绝热的，活塞质量以及活塞和气缸之间的摩擦力都可忽略不计．已知大气压强为 p_0，重力加速度为 g ．现将活塞缓慢上提，当活塞到达气缸开口处时，气缸刚好离开地面．已知理想气体在缓慢变化的绝热过程中 pV^γ 保持不变，其中 p 是气体的压强，V 是气体的体积， γ 是一常数．根据以上所述，可求得活塞到达气缸开口处时气体的温度为________________．［答案：$T_0(1-\frac{Mg}{p_0 A})^{1-1/\gamma}$；6 分 ］

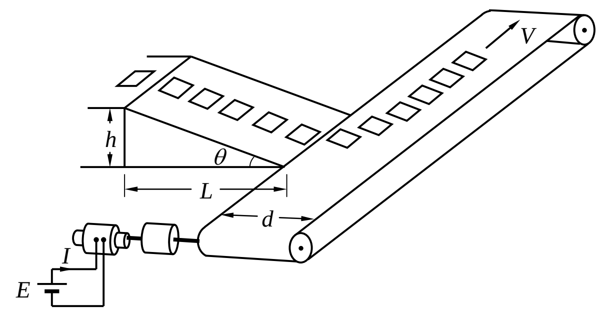


4．（本题答案保留两位有效数字）在电子显微镜中，电子束取代了光束被用来“照射”被观测物．要想分辨 $1.0\times10^{-10}\,\mathrm{m}$ (即原子尺度)的结构，则电子的物质波波长不能大于此尺度．据此推测电子的速度至少需被加速到___________．如果要想进一步分辨 $1.0\times10^{-12}\,\mathrm{m}$ 尺度的结构，则电子的速度至少需被加速到___________，且为使电子达到这一速度，所需的加速电压为____________．已知电子的静止质量 $m_e = 9.1\times10^{-31}\,\mathrm{kg}$ ，电子的电量 $e = -1.6\times10^{-19}\,\mathrm{C}$ ，普朗克常量 $h = 6.7\times10^{-34}\,\mathrm{J\cdot s}$ ，光速 $c = 3.0\times10^{8}\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$．［答案：$7.3\times10^{6}\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$，$2.8\times10^{8}\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$， $8.4\times10^{5}\,\mathrm{V}$； 9 分］

二、（20 分）图示为一利用传输带输送货物的装置．物块（视为质点）自平台经斜面滑到一以恒定速度 V 运动的水平长传输带上，再由传输带输送到远处目的地．已知斜面高 h=2.0m，水平边长 L=4.0m，传输带宽 d =2.0m，传输带的运动速度 V=3.0m/s，物块与斜面间的摩擦系数 μ_1=0.30，物块自斜面顶端下滑的初速度为零，沿斜面下滑的速度方向与传输带运动方向垂直．设斜面与传输带接触处为非常小的一段圆弧，使得物块通过斜面与传输带交界处时其速度的大小不变．重力加速度 $g=10\text{m/s}^2$．

1、为使物块滑到传输带上后不会从传输带边缘脱离，物块与传输带之间的摩擦系数 μ_2 至少为多少？

2、假设传输带由一带有稳速装置的直流电机驱动，与电机连接的电源的电动势 $E=200\text{V}$，内阻可忽略；电机的内阻 $R=10\Omega$，传输带空载（无输送货物）时工作电流 $I_0=2.0\text{A}$．求当货物的平均流量（单位时间里输送的货物质量）稳定在 $\eta=\dfrac{640}{9}$ kg/s 时，电机的平均工作电流等于多少？假设除了货物与传输带之间的摩擦损耗和电机的内阻热损耗外，其它部分的能量损耗与传输带上的货物量无关．



参考解答：

1、 令 m 表示物块的质量，物块在斜面上滑动的加速度

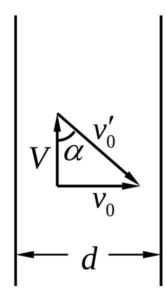
$$a=\frac{mg\sin\theta-\mu_1 mg\cos\theta}{m}=g(\sin\theta-\mu_1\cos\theta), \qquad (1)$$

物块滑到斜面底端的速度

$$v_0=\sqrt{2ah/\sin\theta}=\sqrt{2gh(1-\mu_1\cot\theta)}=4.0\ \text{m/s}. \qquad (2)$$

以传输带为参照系，物块滑到传输带的初速度大小

$$v_0'=\sqrt{{v_0}^2+V^2}=5.0\ \text{m/s}. \qquad (3)$$



运动方向与传输带边缘的夹角 α 满足

$$\tan\alpha=\frac{4}{3}, \qquad (4)$$

物块在传输带上作减速运动，其加速度大小

$$a'=\frac{\mu_2 mg}{m}=\mu_2 g. \qquad (5)$$

当物块与传输带相对静止时在传输带上运动的距离

$$s' = \frac{v_0'^2}{2a'} = \frac{v_0'^2}{2\mu_2 g}, \qquad (6)$$

物块不超过传输带宽的边缘对应的最小摩擦系数 μ_2 应满足

$$s' \sin\alpha = \frac{v_0'^2 \sin\alpha}{2\mu_2 g} = d, \qquad (7)$$

因此可得

$$\mu_2 = \frac{v_0'^2 \sin\alpha}{2gd} = 0.5. \qquad (8)$$

2、物块对传输带的摩擦力大小

$$F = \mu_2 \cdot \frac{\eta g}{\mu_2 g} v_0' = \eta v_0', \qquad (9)$$

方向与 v_0' 的方向相同。从地面参照系来看，传送带速度为 V，单位时间内物块对传输带所做的功

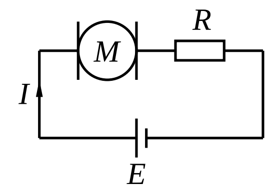
$$\dot{W} = -FV\cos\alpha, \qquad (10)$$

因此负载所引起的附加功率

$$\Delta P = -\dot{W} = \eta V^2 = 640\text{W}. \qquad (11)$$

考虑到无负载时电机的输出功率

$$P_0 = I_0 E - I_0^2 R = 360\text{W}, \qquad (12)$$



有负载时电机的输出功率为

$$P = P_0 + \Delta P = 1000\text{W}. \qquad (13)$$

设有负载时的工作电流为 I，则

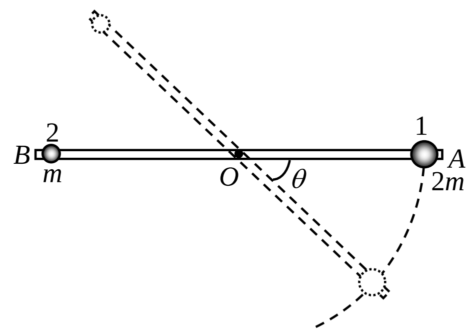
$$P = IE - I^2 R, \qquad (14)$$

解之得

$$I = 10\text{A}. \qquad (15)$$

评分标准：（2）式 2 分，（3）、（4）式共 2 分，（6）式 2 分，（7）式 3 分，（8）式 1 分，（9）式 4 分，（10）式 2 分，（13）式 2 分，（15）式 2 分.

三、(20 分)如图,刚性细轻杆(其质量可视为零)可绕通过其中点 O 的光滑水平轴在竖直面内自由转动. 两质量分别为 $2m$ 和 m 的小球 1 和 2(可视为质点)串在轻杆上,它们与轻杆之间的静摩擦系数为 $\mu = 5\sqrt{3}/6$. 开始时轻杆静止在水平位置,小球 1 和 2 分别位于紧靠轻杆两端点 A 和 B 的位置. 现让系统自水平位置以零初速下摆,求



1、小球 1 脱离轻杆时的位置(用小球 1 脱离杆时杆与水平线的夹角表示);

2、小球 2 脱离轻杆时的位置(用小球 2 脱离杆时杆与水平线的夹角表示).

参考解答:

设轻杆的杆长为 $2l$,当杆与水平线的夹角为θ时,球1和球2的速度分别为 v_1 和 v_2,杆转动的角速度为ω,因机械能守恒,有

$$0 = mgl\sin\theta - 2mgl\sin\theta + \frac{1}{2}(2m)v_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2\,, \tag{1}$$

又因

$$v_1 = v_2 = l\omega\,, \tag{2}$$

可由(1)、(2)解得

$$\omega = \sqrt{\frac{2g\sin\theta}{3l}}\,. \tag{3}$$

轻杆与两小球构成的系统对转轴的角动量

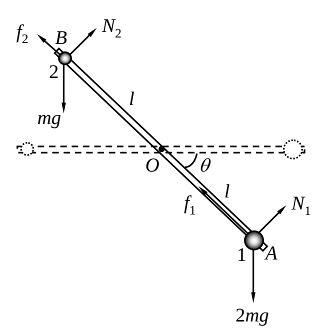
$$L = 2mlv_1 + mlv_2\,, \tag{4}$$

由角动量定律有

$$2mgl\cos\theta - mgl\cos\theta = \frac{\Delta L}{\Delta t}\quad . \tag{5}$$

根据角加速度β的定义

$$\beta = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}\quad , \tag{6}$$



由(2)、(4)、(5)、(6)各式得

$$\beta = \frac{g\cos\theta}{3l}\,. \tag{7}$$

当两球都未脱离轻杆时,两球都绕转轴作圆周运动,球 1 的切向加速度和法向加速度分别为

$$a_{1t} = l\beta\,, \tag{8}$$

$$a_{1n} = l\omega^2 .\tag{9}$$

以 N_1 表示沿垂直于轻杆方向球 1 与杆的相互作用力的大小，以 f_1 表示沿着轻杆方向球 1 与杆的相互作用力的大小，根据牛顿第二定律，有

$$2mg\cos\theta - N_1 = 2ma_{1t} ,\tag{10}$$

$$f_1 - 2mg\sin\theta = 2ma_{1n} .\tag{11}$$

由(3)、(9)、(10)、(11)各式得

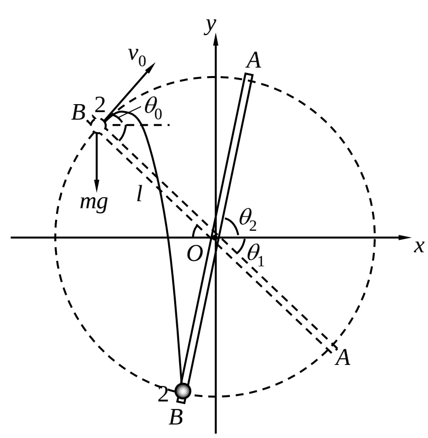
$$N_1 = \frac{4}{3}mg\cos\theta ,\tag{12}$$

$$f_1 = \frac{10}{3}mg\sin\theta .\tag{13}$$

对 2 球作同样的分析，沿垂直于轻杆方向球 2 与杆的相互作用力的大小 N_2 与沿着轻杆方向球 2 与杆的相互作用力的大小 f_2 分别为

$$N_2 = \frac{4}{3}mg\cos\theta ,\tag{14}$$

$$f_2 = \frac{1}{3}mg\sin\theta .\tag{15}$$



由(12)、(14)式可知，杆与小球 1、杆与小球 2 的最大静摩擦力相等，而(13)、(14)式表明小球 1 与杆的摩擦力大于小球 2 与杆的摩擦力，故在转动过程中，小球 1 与杆之间的摩擦力先达到最大静摩擦力，故小球 1 先滑动.设 1 球开始滑动时，细杆与水平线夹角为 θ_1，则 $f_1(\theta_1) = \mu N_1(\theta_1)$，

即

$$\frac{10}{3}mg\sin\theta_1 = \frac{4}{3}\mu mg\cos\theta_1 ,\tag{16}$$

由(16)式并代入数据得

$$\theta_1 = \frac{\pi}{6} .\tag{17}$$

当 $\theta = \theta_1$ 时，球 1 开始向外滑动. 由于球 1 的初始位置紧靠轻杆末端，球 1 从开始滑动到脱离细杆的时间可忽略不计，因此球 1 脱离细杆时细杆与水平线夹角也为 $\theta_1 = \dfrac{\pi}{6}$.

球 1 一旦脱离轻杆，因轻杆没有质量，球 2 与轻杆间的相互作用立即消失,此后球 2 只受重力作用而作斜抛运动，注意到(2)、(3)、(7)各式，抛出时的初速度

$$\upsilon_0 = l\sqrt{\frac{2g\sin\theta_1}{3l}} = \frac{\sqrt{3gl}}{3} ,\tag{18}$$

初速度的方向与水平线的夹角

$$\theta_0 = \frac{\pi}{2} - \theta_1 = \frac{\pi}{3}. \tag{19}$$

在球 2 作抛体运动的过程中，球与轻杆间虽无相互作用，但球仍套在杆上，轻杆将跟着球运动，但不会干扰小球的运动.当球离转轴的距离再次等于 l 时，球 2 便脱离轻杆. 建立如图所示的坐标系 Oxy，根据斜抛运动规律可得任意 t 时刻（取球 2 开始作抛体运动的时刻为计时起点）球 2 的位置坐标

$$x = -l\cos\theta_1 + v_0\cos\theta_0 t, \tag{20}$$

$$y = l\sin\theta_1 + v_0\sin\theta_0 t - \frac{1}{2}gt^2, \tag{21}$$

球 2 脱离细杆时有

$$l^2 = x^2 + y^2. \tag{22}$$

利用(17)、(18)、(19)各式得

$$t^2(t^2 - 2\sqrt{\frac{l}{g}}t - \frac{2}{3}\frac{l}{g}) = 0, \tag{23}$$

从而解得

$$t = (1 + \frac{\sqrt{15}}{3})\sqrt{\frac{l}{g}}. \tag{24}$$

此时

$$\begin{cases} x = -\dfrac{2\sqrt{3}-\sqrt{5}}{6}l \\ y = -\dfrac{2+\sqrt{15}}{6}l \end{cases}. \tag{25}$$

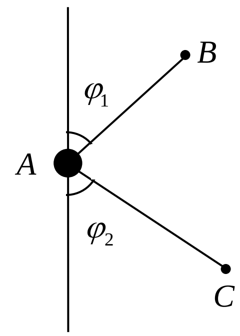
设球 2 脱离细杆时细杆与水平线夹角也为 θ_2（如图），则

$$\cos\theta_2 = \frac{|x|}{l} = \frac{2\sqrt{3}-\sqrt{5}}{6}, \tag{26}$$

$$\theta_2 = \arccos(\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{5}}{6}) = 78.2^\circ \text{（或 1.36 弧度）}. \tag{27}$$

评分标准：（3）式 2 分，（7）式 3 分，（12）－（15）式各 1 分，（16）式 2 分，（17）式 1 分，（18）式 2 分，（19）式 1 分，（20）－（22）式各 1 分，（26）、（27）式各 1 分.

四、（15 分）如图所示，A、B、C 为三个质点，A 的质量远远大于 B、C 的质量，B 和 C 的质量相等. 已知 A、B 之间、A、C 之间存在相互吸引力，B、C 之间存在相互排斥力，三个质点在相互间引力或斥力的作用下运动. 如果作用力合适，可以存在一种如下形式的运动：

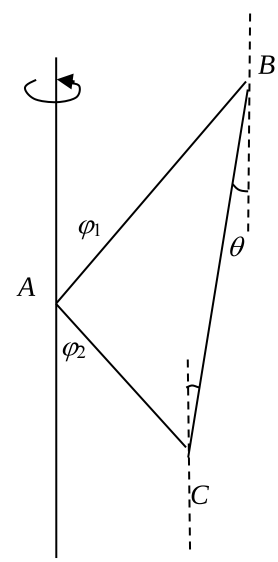


A、B、C 的相对位置固定，它们构成一个平面， 三个质点绕着位于这个平面内的某条轴匀速转动； 因为质点 A 的质量远远大于 B、C 的质量，可认为该转轴过质点 A 且固定不动；连线 AB 与转轴的夹角 φ_1 与连线 AC 与转轴的夹角 φ_2 不相等，且 $0<\varphi_1<\pi/2$， $0<\varphi_2<\pi/2$.

若 AB 之间吸引力的大小 $f_{AB}=k|AB|^\alpha$，AC 之间吸引力的大小为 $f_{AC}=k|AC|^\alpha$，其中 $|AB|$、$|AC|$ 分别为 A、B 与 A、C 之间的距离，k 为比例系数. 不计重力的影响, 试问 α 的值在什么范围内，上述运动才能实现？

参考解答 1:

以 m 表示质点 B 的质量，θ 表示连线 BC 与竖直方向的夹角，ω 表示转动的角速度， f_{BC} 表示 BC 间排斥力的大小. 根据牛顿定律有



$$f_{AB}\sin\varphi_1-f_{BC}\sin\theta=m\omega^2|AB|\sin\varphi_1, \tag{1}$$

$$f_{AB}\cos\varphi_1-f_{BC}\cos\theta=0, \tag{2}$$

$$f_{AC}\sin\varphi_2+f_{BC}\sin\theta=m\omega^2|AC|\sin\varphi_2, \tag{3}$$

$$f_{AC}\cos\varphi_2-f_{BC}\cos\theta=0. \tag{4}$$

由(1)、(3)两式并利用(2)、(4)两式可得

$$\frac{f_{\mathrm{AB}}\sin(\varphi_1-\theta)}{f_{\mathrm{AC}}\sin(\varphi_2+\theta)}=\frac{|AB|}{|AC|}\frac{\sin\varphi_1}{\sin\varphi_2}. \tag{5}$$

考虑到几何关系

$$\frac{|AB|}{|AC|}=\frac{\sin(\varphi_2+\theta)}{\sin(\varphi_1-\theta)} \tag{6}$$

并利用已知的 f_{AB} 和 f_{BC} 的表达式，可由(5)得到

$$\left(\frac{|AB|}{|AC|}\right)^{\alpha-2}=\frac{\sin\varphi_1}{\sin\varphi_2}. \tag{7}$$

又，由(2)、(4)式可得

$$\frac{f_{AB}}{f_{AC}}=\frac{\cos\varphi_2}{\cos\varphi_1}\quad , \tag{8}$$

带入已知的 f_{AB} 和 f_{BC} 的表达式可得

$$\frac{|AB|^{\alpha}}{|AC|^{\alpha}}=\frac{\cos\varphi_2}{\cos\varphi_1}\quad . \tag{9}$$

联立(7)、(9)从而有

$$\sin^{\alpha}\varphi_1\cos^{\alpha-2}\varphi_1=\sin^{\alpha}\varphi_2\cos^{\alpha-2}\varphi_2. \tag{10}$$

如果 $\varphi_1\neq\varphi_2$，则意味着方程

$$\sin^{\alpha}\varphi\cos^{\alpha-2}\varphi-C=0 \tag{11}$$

在 $(0,\pi/2)$ 区间有两个不同的解，其中 C 为某一合适的常数．这要求函数 $\sin^{\alpha}\varphi\cos^{\alpha-2}\varphi$ 在 $(0,\pi/2)$ 区间不能是单调函数，也就是说 $\sin^{\alpha}\varphi$ 和 $\cos^{\alpha-2}\varphi$ 不能同时为单调增函数或单调减函数．因此，当 φ 增大时，若 $\sin^{\alpha}\varphi$ 增大，则 $\cos^{\alpha-2}\varphi$ 应减小；反之，若 $\sin^{\alpha}\varphi$ 减小，则 $\cos^{\alpha-2}\varphi$ 应增大，故 α 与 $\alpha-2$ 同号．因此有

$$\alpha<0 \tag{12}$$

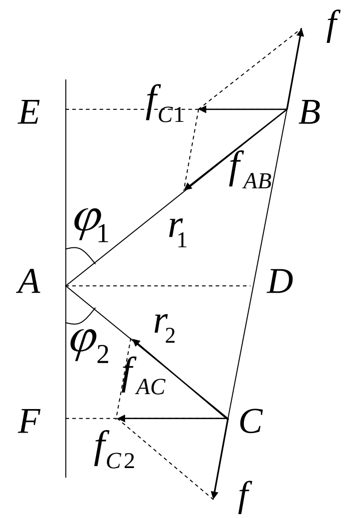
或

$$\alpha>2. \tag{13}$$

对 $\alpha<0$，可知 $\sin^{-\alpha}\varphi\cos^{2-\alpha}\varphi$ 在 $\varphi=0$ 及 $\pi/2$ 时均为零，因此 $\sin^{-\alpha}\varphi\cos^{2-\alpha}\varphi$ 在 $(0,\pi/2)$ 区间一定存在极值点，意味着方程（11）在 C 合适选取的情况下必有两个或两个以上的不同解．对 $\alpha>2$ 亦然. 因此条件（12）、（13）是符合题意要求的充分必要条件.

评分标准：（1）－（4）式各 1 分，（6）式 1 分，（10）式 6 分，（12）、（13）式及其以下说明共 4 分.

参考解答 2：



如图，设 B、C 间的排斥力是 f，它们受到 A 的引力分别是 f_{AB}、f_{AC}，向心力分别是 f_{C1}、f_{C2}，距离 A 分别是 r_1、r_2；根据三角形的相似关系，有

$$\frac{f_{AB}}{r_1}=\frac{f_{C1}}{AD}=\frac{f}{BD}, \tag{1a}$$

$$\frac{f_{AC}}{r_2}=\frac{f_{C2}}{AD}=\frac{f}{CD}. \tag{2a}$$

以上两式相比可得

$$\frac{f_{AB}}{f_{AC}}\frac{r_2}{r_1}=\frac{f_{C1}}{f_{C2}}=\frac{CD}{BD} \tag{3a}$$

依题意有

$$\frac{f_{AB}}{f_{AC}}=\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{\alpha}, \tag{4a}$$

$$\frac{f_{C1}}{f_{C2}}=\frac{EB}{FC}=\frac{r_1\sin\varphi_1}{r_2\sin\varphi_2}, \tag{5a}$$

$$\frac{CD}{BD}=\frac{AF}{AE}=\frac{r_2\cos\varphi_2}{r_1\cos\varphi_1}, \tag{6a}$$

将(4a)~(6a)代入(3a)得

$$\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{\alpha-1}=\frac{r_1\sin\varphi_1}{r_2\sin\varphi_2}=\frac{r_2\cos\varphi_2}{r_1\cos\varphi_1}. \tag{7a}$$

由(7a)得

$$\sin^{\alpha}\varphi_1\cos^{\alpha-2}\varphi_1=\sin^{\alpha}\varphi_2\cos^{\alpha-2}\varphi_2. \tag{8a}$$

之后的讨论与“参考解答 1”相同.

评分标准：参考“参考解答 1 ”.

五、（15 分）南极冰架崩裂形成一座巨型冰山，随洋流漂近一个城市. 有人设计了一个利用这座冰山来发电的方案，具体过程为：(a) 先将环境中一定量的空气装入体积可变的容器，在保持压强不变的条件下通过与冰山接触使容器内空气温度降至冰山温度；(b) 使容器脱离冰山，保持其体积不变，让容器中的冷空气从环境中吸收热量，使其温度升至环境温度； (c) 在保持容器体积不变的情况下让空气从容器中喷出，带动发电装置发电. 如此重复，直至整座冰山融化. 已知环境温度 $T_a = 293\mathrm{K}$，冰山的温度为冰的熔点 $T_\mathrm{I} = 273\mathrm{K}$，可利用的冰山的质量 $m = 1.0\times10^{11}\mathrm{kg}$. 为了估算可能获得的电能，设计者做出的假设和利用的数据如下：

1) 空气可视为理想气体.
2) 冰的熔解热 $L = 3.34\times10^5\mathrm{J/kg}$；冰融化成温度为 T_I 的水之后即不再利用.
3) 压强为 p、体积为 V 的空气的内能 $U = 2.5pV$.
4) 容器与环境之间的热传导良好，可以保证喷气过程中容器中空气温度不变.
5) 喷气过程可分解为一连串小过程，每次喷出的气体的体积都是 u，且 u 远小于容器的体积. 在每个小过程中；喷管中的气体在内外压强差的作用下加速，从而获得一定动能 ΔE，从喷嘴喷出. 不考虑喷出气体在加速过程中体积的改变，并认为在喷气过程中容器内的气体压强仍是均匀的, 外压强为大气压.
6) 假设可能获得的电能是 ΔE 总和的 45%.
7) 当 $|x| << 1$ 时，$\ln(1+x) \approx x$.

试根据设计者的假设，计算利用这座冰山可以获得的电能.

参考解答 1:

以 p_a 表示环境中大气的压强，则初始时装入容器的空气的压强为 p_a，温度为 T_a，以 V_a 表示其体积. 当容器与冰山接触，达到平衡时，容器中空气的温度为 T_I，体积减小为 V_0，根据题意，空气经历的过程为等压过程，故有

$$\frac{V_0}{T_\mathrm{I}} = \frac{V_a}{T_a} \quad . \tag{1}$$

在这一过程中，容器中空气内能的增加量为

$$\Delta U = 2.5p_a\left(V_0 - V_a\right) \quad , \tag{2}$$

大气对所考察空气做功为

$$W = -p_a\left(V_0 - V_a\right) \quad . \tag{3}$$

若以 Q 表示此过程中冰山传给容器中空气的热量，根据热力学第一定律有

$$Q = \Delta U - W \quad . \tag{4}$$

由以上四式得

$$Q = 3.5 p_a V_a \left(\frac{T_{\mathrm{I}} - T_a}{T_a}\right) \quad . \tag{5}$$

(5)式给出的 Q 是负的，表示在这一过程中，实际上是容器中的空气把热量传给冰山.

容器中空气的温度降至冰山温度后，又经一过等容升温过程，即保持体积 V_0 不变，温度从 T_{I} 升至环境温度 T_a，并从周围环境吸热. 若以 p_1 表示所考察空气的压强，则有

$$\frac{p_1}{T_a} = \frac{p_a}{T_{\mathrm{I}}} \quad . \tag{6}$$

设喷管的体积为 u; 当喷管中的气体第一次被喷出时，容器中空气的压强由 p_1 降到 p_2; 根据题目给出的条件，有

$$p_1\left(V_0 - u\right) = p_2 V_0 \quad , \tag{7}$$

即

$$p_2 = p_1 \frac{V_0 - u}{V_0} \quad . \tag{8}$$

喷出气体获得的动能

$$\Delta E_{\mathrm{k}1} = \left(p_1 - p_a\right)u \quad . \tag{9}$$

当喷管中的空气第二次被喷出后，容器中空气压强由 p_2 降到 p_3，根据题给出的条件可得

$$p_3 = p_2 \frac{V_0 - u}{V_0} \quad , \tag{10}$$

喷出气体获得的动能

$$\Delta E_{\mathrm{k}2} = \left(p_2 - p_a\right)u \quad . \tag{11}$$

当喷管中的空气第 N 次被喷出后，容器内空气的压强由 p_N 降到 p_{N+1}，根据题给出的条件可得

$$p_{N+1} = p_N \frac{V_0 - u}{V_0} \quad , \tag{12}$$

喷出气体获得的动能

$$\Delta E_{\mathrm{kN}}=\left(p_N-p_a\right)u \quad . \tag{13}$$

如果经过 N 次喷射后，容器中空气的压强降到周围大气的压强，即

$$p_{N+1}=p_a \quad , \tag{14}$$

这时喷气过程终止. 在整过喷气过程中，喷出气体的总动能

$$E_{\mathrm{k}}=\Delta E_{\mathrm{k1}}+\Delta E_{\mathrm{k2}}+\ldots+\Delta E_{\mathrm{kN}} \quad . \tag{15}$$

利用(8)到(13)式，(15)式可化成

$$E_{\mathrm{k}}=p_1u\left[1+\left(\frac{V_0-u}{V_0}\right)+\left(\frac{V_0-u}{V_0}\right)^2+\ldots\left(\frac{V_0-u}{V_0}\right)^{N-1}\right]-Np_au \quad , \tag{16}$$

(16)式等号右边第 1 项方括号内是 N 项的等比级数，故有

$$E_{\mathrm{k}}=p_1u\frac{1-\left(\dfrac{V_0-u}{V_0}\right)^N}{1-\dfrac{V_0-u}{V_0}}-Np_au \quad . \tag{17}$$

又，根据(8)、(10)、(12)、(14)各式可得

$$p_1\left(\frac{V_0-u}{V_0}\right)^N=p_a \quad , \tag{18}$$

对(18)式等式两边取自然对数得

$$N\ln\left(1-\frac{u}{V_0}\right)=\ln\frac{p_a}{p_1} \quad . \tag{19}$$

因 $u<<V_0$ ，可利用近似公式 $\ln\left(1+x\right)\approx x$ 把(19)进一步化简，即

$$N=\frac{V_0}{u}\ln\frac{p_1}{p_a} \quad . \tag{20}$$

进而由(17)、(18)、(20)三式得

$$E_{\mathrm{k}}=\left(p_1-p_a\right)V_0-p_aV_0\ln\frac{p_1}{p_a} \quad . \tag{21}$$

将(1)、(6)代入(21)式，可得

$$E_{\mathrm{k}}=p_aV_a\left(1-\frac{T_{\mathrm{I}}}{T_a}+\frac{T_{\mathrm{I}}}{T_a}\ln\frac{T_{\mathrm{I}}}{T_a}\right)\ . \tag{22}$$

根据题意，这些动能可转化成的电能为

$$E\ =0.45p_aV_a\left(1-\frac{T_{\mathrm{I}}}{T_a}+\frac{T_{\mathrm{I}}}{T_a}\ln\frac{T_{\mathrm{I}}}{T_a}\right)\ . \tag{23}$$

以上讨论表明，要获得电能 E，冰山必须吸收-Q 的热量. 整座冰山化掉可吸收的总热量

$$Q_t=mL\ , \tag{24}$$

因此可产生的总电量为

$$E_t=\frac{mL}{-Q}E\ . \tag{25}$$

将(5)和(23)带入(25)式，得

$$E_t=\frac{9}{70}mL\frac{1-\frac{T_{\mathrm{I}}}{T_a}+\frac{T_{\mathrm{I}}}{T_a}\ln\frac{T_{\mathrm{I}}}{T_a}}{1-\frac{T_{\mathrm{I}}}{T_a}}\ ; \tag{26}$$

代入数据后有

$$E_t=1.5\times10^{14}\,\mathrm{J}. \tag{27}$$

评分标准：（5）式 3 分，（7）式 1 分，（9）式 2 分，（17）式 2 分，（18）式 1 分，（22）式 3 分，（25）—（27）式各 1 分.

参考解答 2:

以 p_a 表示环境中大气的压强。 设融化整座冰山可使 n 摩尔的空气参与如题所述的过程，且在过程（a）中体积和温度变化分别为 ΔV 和 $\Delta T = T_{\mathrm{I}} - T_a$，则在此过程中这部分气体放出的热量为

$$Q = -p_a \Delta V - \frac{5}{2} p_a \Delta V \text{，} \tag{1}$$

其中右边第一项表示大气对系统做的功，第二项表示系统内能的变化。考虑到物态方程，有

$$Q = \frac{7}{2} nR(T_a - T_{\mathrm{I}})\text{，} \tag{2}$$

这部分热量等于冰山融化吸收的熔解热，故

$$Q = mL\text{，} \tag{3}$$

因此联立（2）、（3）可得

$$n = \frac{2mL}{7R(T_a - T_{\mathrm{I}})}. \tag{4}$$

在气体等容吸热的过程（b）中，设最后达到压强 p_0，体积达到 V_0，　则易得

$$p_0 = \frac{T_a p_a}{T_{\mathrm{I}}}\text{，} \tag{5}$$

$$V_0 = \frac{nRT_a}{p_0}. \tag{6}$$

再考虑喷气过程；因为等温，在每个喷气的小过程中过后，容器内的压强增量 Δp 满足

$$\frac{p + \Delta p}{p} = \frac{V_0 - u}{V_0} \quad \text{，} \tag{7}$$

其中 V_0 为过程（b）中系统的体积， p 为这个喷气过程中容器内的压强。那么喷出的气体的动能

$$\Delta E_k = (p - p_a)u \quad \text{，} \tag{8}$$

与（7）联立，消去 u，得

$$\Delta E_k = -(p - p_a)V_0 \frac{\Delta p}{p}. \tag{9}$$

因此，做变换 $\Delta E \to dE$， $\Delta p \to dp$，总的动能则为

$$
\begin{aligned}
E_k &= \int_{p_0}^{p_a} -(p-p_a)V_0 \frac{dp}{p} \\
&= \left(p_0 - p_a\right)V_0 - p_a V_0 \ln\frac{p_0}{p_a}
\end{aligned}
. \tag{10}
$$

最后，据题意所获得的总的电能为

$$E = 0.45E_k\,, \tag{11}$$

将（4)、(5)、(6)、(10）带入（11）式，得

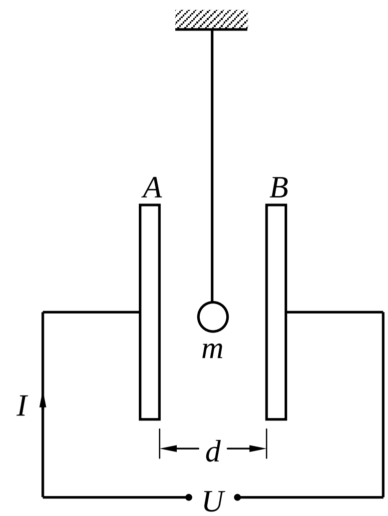
$$E = \frac{9}{70}mL\frac{1-\dfrac{T_{\mathrm{I}}}{T_a}+\dfrac{T_{\mathrm{I}}}{T_a}\ln\dfrac{T_{\mathrm{I}}}{T_a}}{1-\dfrac{T_{\mathrm{I}}}{T_a}}\;; \tag{12}$$

代入数据后有

$$E = 1.5\times10^{14}\,\mathrm{J}. \tag{13}$$

评分标准：参照“参考解答 1 ”的评分标准.

六、（15 分）如图，两块大金属板 A 和 B 沿竖直方向平行放置，相距为 d，两板间加有恒定电压 U. 一表面涂有金属膜的乒乓球垂吊在两板之间，其质量为 m. 轻推乒乓球，使之向其中一金属板运动，乒乓球与该板碰撞后返回，并与另一板碰撞，如此不断反复. 假设乒乓球与两板的碰撞为非弹性碰撞，其恢复系数为 e，乒乓球与金属板接触的时间极短，并在这段时间内达到静电平衡. 达到静电平衡时，乒乓球所带的电荷量 q 与两极板之间电势差的关系可表示为 $|q|=C_0U$，其中 C_0 为一常量. 同时假设乒乓球半径远小于两金属板间距 d，乒乓球上的电荷不影响金属板上的电荷分布；连接乒乓球的绳子足够长，乒乓球的运动可近似为沿水平方向的直线运动；乒乓球第一次与金属板碰撞时的初动能可忽略，空气阻力可忽略. 试求



1、乒乓球运动过程中可能获得的最大动能.

2、经过足够长时间后，通过外电路的平均电流.

参考解答 1：

1、根据题意，乒乓球与金属板第一次碰撞前其动能和速度分别为

$$E_{\mathrm{k}1}=0 \tag{1}$$

$$\upsilon_1=0 \tag{2}$$

刚碰后，乒乓球带的电荷量

$$q=C_0U \tag{3}$$

其动能和速度分别为

$$E'_{\mathrm{k}1}=0 \tag{4}$$

$$\upsilon'_1=0 \tag{5}$$

此后在电场力作用下乒乓球向另一金属板加速运动. 当它到达另一金属板，与金属板第二次碰撞前其动能为

$$E_{\mathrm{k}2}=E'_{\mathrm{k}1}+qU \tag{6}$$

注意到(3)、(4)式有

$$E_{k2} = C_0 U^2 \tag{7}$$

与金属板第二次碰撞前的速度为

$$\upsilon_2 = \sqrt{\frac{2E_{k2}}{m}} \tag{8}$$

第二次碰撞后的速度和动能分别

$$\upsilon_2' = e\upsilon_2 \tag{9}$$

$$E_{k2}' = \frac{1}{2} m\upsilon_2'^2 \tag{10}$$

由(9)、(10)式得

$$E_{k2}' = e^2 E_{k2} \tag{11}$$

乒乓球与金属板第三次碰撞前动能为

$$E_{k3} = E_{k2}' + qU \tag{12}$$

由(3)、(7)、(11)、(12)式得

$$E_{k3} = \left(1 + e^2\right) C_0 U^2 \tag{15}$$

乒乓球与金属板第三次碰撞前速度

$$\upsilon_3 = \sqrt{\frac{2E_{k3}}{m}} \tag{16}$$

乒乓球与金属板第三次碰撞后的速度和动能分别为

$$\upsilon_3' = e\upsilon_3 \tag{17}$$

$$E_{k3}' = e^2 E_{k3} \tag{18}$$

乒乓球与金属板四次碰撞前的动能

$$E_{k4} = E_{k3}' + qU \tag{19}$$

由(3)、(15)、(18)、(19)式得

$$E_{k4} = \left(1 + e^2 + e^4\right) C_0 U^2 \tag{20}$$

乒乓球与金属板第四次碰撞前速度为

$$\upsilon_4 = \sqrt{\frac{2E_{k4}}{m}} \tag{21}$$

乒乓球与金属板第四次碰撞后的速度和动能分别为

$$\upsilon_4' = e\upsilon_4 \tag{22}$$

$$E_{\mathrm{k}4}' = e^2 E_{\mathrm{k}4} \tag{23}$$

以此类推，可得乒乓球与金属板第 n 次碰撞前、后的动能分别为

$$E_{\mathrm{k}n} = [1+e^2+\cdots+e^{2(n-2)}]C_0U^2 \tag{24}$$

$$E_{\mathrm{k}n}' = e^2[1+e^2\cdots+e^{2(n-2)}]C_0U^{22} \tag{25}$$

即

$$E_{\mathrm{k}n} = \frac{1-e^{2(\mathrm{n}\text{-}1)}}{1-e^2}C_0U^2 \tag{26}$$

$$E_{\mathrm{k}n}' = \frac{e^2\left[1-e^{2(\mathrm{n}\text{-}1)}\right]}{1-e^2}C_0U^2 \tag{27}$$

对非弹性碰撞， $e<1$，可由以上两式看出 $E_{\mathrm{k}n}$ 和 $E_{\mathrm{k}n}^{'}$ 均随碰撞次数单调递增。当 $n\to\infty$ 时有

$$E_{\mathrm{k}\infty} = \frac{1}{1-e^2}C_0U^2 \tag{28}$$

$$E_{\mathrm{k}\infty}' = \frac{e^2}{1-e^2}C_0U^2 \tag{29}$$

乒乓球运动过程中能达到的最大动能应为与金属板碰撞前的极限动能，即

$$E_{k,\max} = E_{k\infty} = \frac{1}{1-e^2}C_0U^2 \tag{30}$$

2、经过足够长时间后亦即 $n\to\infty$ 时，乒乓球在某一次与金属板碰撞后和下一次碰撞前的速度分别为

$$\upsilon_\infty' = \sqrt{\frac{2E_{k\infty}'}{m}} = eU\sqrt{\frac{2C_0}{(1-e^2)m}} \tag{31}$$

$$\upsilon_\infty = \sqrt{\frac{2E_{k\infty}}{m}} = U\sqrt{\frac{2C_0}{(1-e^2)m}} \tag{32}$$

此间时间间隔

$$T = \frac{d}{\dfrac{\upsilon_\infty' + \upsilon_\infty}{2}} \tag{33}$$

因此可得，通过外电路的平均电流强度

$$I=\frac{q}{T} \tag{34}$$

由(31)、(32)、(33)、(34)各式得

$$I=\frac{C_0U^2}{d}\sqrt{\frac{1+e}{1-e}\frac{C_0}{2m}} \tag{35}$$

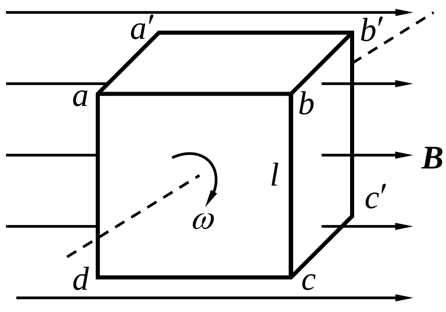
评分标准：（26)、（27）式或（28)、（29）式共 8 分，（30）式 2 分，（31）－（33）式各 1 分，（35）式 2 分.

七、（20 分）如图（a）所示，十二根均匀的导线杆联成一边长为 l 的刚性正方体，每根导线杆的电阻均为

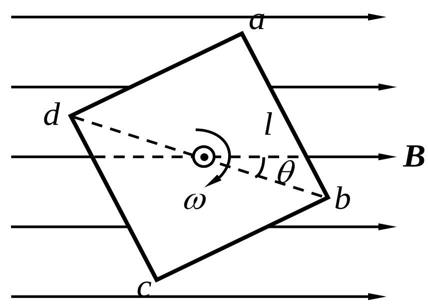
R. 该正方体在匀强磁场中绕通过其中心且与 $abcd$ 面垂直的转动轴作匀速转动，角速度为ω. 已知磁感应强度大小为 B，方向与转动轴垂直. 忽略电路的自感. 当正方体转动到如图（b）所示的位置（对角线 db 与磁场方向夹角为θ）时，求

1、通过导线 ba、ad、bc 和 cd 的电流强度.

2、为维持正方体作匀速转动所需的外力矩.



（a）



（b）

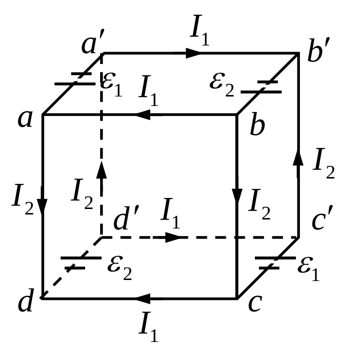
参考解答 1：

1、$a'a$ 和 cc' 中的感应电动势为

$$\varepsilon_{a'a} = \varepsilon_{cc'} = \varepsilon_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} Bl^2 \omega \sin\theta \qquad (1)$$

$b'b$ 和 dd' 中的感应电动势为

$$\varepsilon_{b'b} = \varepsilon_{dd'} = \varepsilon_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} Bl^2 \omega \cos\theta \qquad (2)$$



根据电路的对称性可知

$$I_{ba} = I_{a'b'} = I_{d'c'} = I_{cd} \equiv I_1,\quad I_{ad} = I_{d'a'} = I_{c'b'} = I_{bc} \equiv I_2 \qquad (3)$$

根据基耳霍夫第一定律，有

$$I_{aa'} = I_{c'c} = I_1 - I_2 \qquad (4)$$

$$I_{b'b} = I_{dd'} = I_1 + I_2 \qquad (5)$$

根据基耳霍夫第二定律，有

$$I_1 R + I_{aa'} R + I_1 R + I_{b'b} R = \varepsilon_2 - \varepsilon_1 \qquad (6)$$

$$I_2R+I_{dd'}R+I_2R-I_{aa'}R=\varepsilon_2+\varepsilon_1 \tag{7}$$

根据（1）～（7）可解得

$$I_{ba}=I_{cd}=I_1=\frac{\sqrt{2}}{8}\frac{Bl^2\omega}{R}(\cos\theta-\sin\theta) \tag{8}$$

$$I_{ad}=I_{bc}=I_2=\frac{\sqrt{2}}{8}\frac{Bl^2\omega}{R}(\cos\theta+\sin\theta) \tag{9}$$

2、当正方体转动到任意位置（对角线 db 与磁场夹角为任意 θ）时，通过 $a'a$、cc'、$b'b$、dd' 的电流

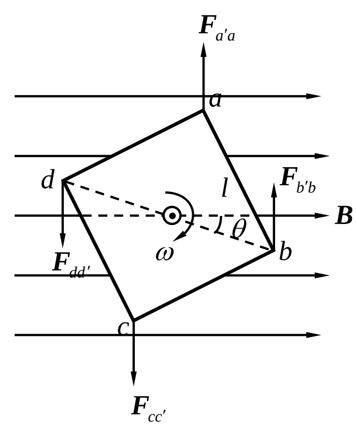
$$I_{a'a}=I_{ad}-I_{ba}=\frac{\sqrt{2}}{4}\frac{Bl^2\omega}{R}\sin\theta \tag{10}$$

$$I_{cc'}=I_{bc}-I_{cd}=\frac{\sqrt{2}}{4}\frac{Bl^2\omega}{R}\sin\theta \tag{11}$$

$$I_{b'b}=I_{ba}+I_{bc}=\frac{\sqrt{2}}{4}\frac{Bl^2\omega}{R}\cos\theta \tag{12}$$

$$I_{dd'}=I_{ad}+I_{cd}=\frac{\sqrt{2}}{4}\frac{Bl^2\omega}{R}\cos\theta \tag{13}$$

为维持正方体作匀速转动所需的外力矩等于磁场对电路作用的合力矩，即



$$F_{a'a}=F_{cc'}=BlI_{a'a},\quad F_{b'b}=F_{dd'}=BlI_{b'b} \tag{14}$$

$$M=2F_{a'a}\frac{\sqrt{2}}{2}l\sin\theta+2F_{b'b}\frac{\sqrt{2}}{2}l\cos\theta \tag{15}$$

将（11）—（14）代入（15），得

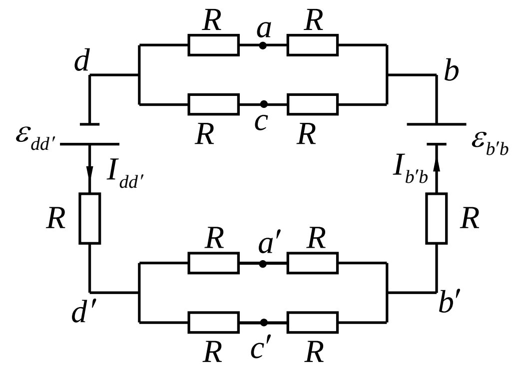
$$M=\frac{B^2l^4\omega}{2R}. \tag{16}$$

评分标准：（1）、（2）式共 2 分，（4）、（5）式共 4 分，（6）、（7）式共 4 分，（8）、（9）式共 4 分，（10）—（13）式共 2 分，（14）式 1 分，（15）式 2 分，（16）式 1 分.

参考解答 2：

1、$a'a$ 和 cc' 中的感应电动势为

$$\varepsilon_{a'a}=\varepsilon_{cc'}=\frac{\sqrt{2}}{2}Bl^2\omega\sin\theta \qquad (1b)$$



$b'b$ 和 dd' 中的感应电动势为

$$\varepsilon_{b'b}=\varepsilon_{dd'}=\frac{\sqrt{2}}{2}Bl^2\omega\cos\theta \qquad (2b)$$

先计算 $\varepsilon_{b'b}$ 和 $\varepsilon_{dd'}$ 单独存在（$\varepsilon_{a'a}$ 和 $\varepsilon_{cc'}$ 短路）时流过各支路的电流。若将 $a'a$ 和 cc' 断开，则等效电路如图所示，则通过 $b'b$ 和 dd' 电流

$$I_{b'b}^{(1)}=I_{dd'}^{(1)}=\frac{\varepsilon_{b'b}+\varepsilon_{dd'}}{4R}=\frac{\sqrt{2}}{4}\frac{Bl^2\omega}{R}\cos\theta \qquad (3b)$$

通过 ba、ad、bc 和 cd 的电流强度

$$I_{ba}^{(1)}=I_{ad}^{(1)}=I_{bc}^{(1)}=I_{cd}^{(1)}=\frac{1}{2}I_{b'b}^{(1)}=\frac{\sqrt{2}}{8}\frac{Bl^2\omega}{R}\cos\theta \qquad (4b)$$

根据电路的对称性，此时 a'、a 之间、c、c' 之间的电势差

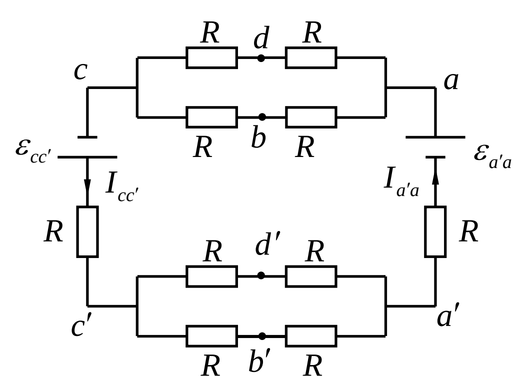
$$U_{a'a}=U_{cc'}=0 \qquad (5b)$$

由此连接 $a'a$ 和 cc' 后流过 $a'a$ 和 cc' 的电流

$$I_{a'a}^{(1)}=I_{cc'}^{(1)}=0 \qquad (6b)$$

因此连接 $a'a$ 和 cc' 不影响 ba 和 ad 中的电流。

再计算 $\varepsilon_{a'a}$ 和 $\varepsilon_{cc'}$ 单独存在（$\varepsilon_{b'b}$ 和 $\varepsilon_{dd'}$ 短路）时流过各支路的电流。若将 $b'b$ 和 dd' 断开，等效短路如图所示。采用与上述一样的方法可得 $\varepsilon_{a'a}$ 和 $\varepsilon_{cc'}$ 单独存在时流过 $a'a$ 和 cc' 电流



$$I_{a'a}^{(2)}=I_{cc'}^{(2)}=\frac{\sqrt{2}}{4}\frac{Bl\omega^2}{R}\sin\theta \qquad (7b)$$

通过 ba、ad、bc 和 cd 的电流

$$I_{ba}^{(2)}=I_{cd}^{(2)}=-\frac{\sqrt{2}}{8}\frac{Bl\omega^2}{R}\sin\theta \qquad (8b)$$

$$I_{ad}^{(2)}=I_{bc}^{(2)}=\frac{\sqrt{2}}{8}\frac{Bl\omega^2}{R}\sin\theta \qquad (9b)$$

此时b'、b之间和d、d'之间的电势差$U_{b'b}=U_{dd'}=0$，由此连接$b'b$和dd'后流过$b'b$和dd'的电流

$$I_{b'b}^{(2)}=I_{dd'}^{(2)}=0 \qquad (10b)$$

因此连接bb'和dd'不影响各支路中的电流。

根据叠加原理，ba、ad、bc和cd的电流强度：

$$I_{ba}=I_{ba}^{(1)}+I_{ba}^{(2)}=\frac{\sqrt{2}}{8}\frac{Bl\omega^2}{R}(\cos\theta-\sin\theta) \qquad (11b)$$

$$I_{ad}=I_{ad}^{(1)}+I_{ad}^{(2)}=\frac{\sqrt{2}}{8}\frac{Bl\omega^2}{R}(\cos\theta+\sin\theta) \qquad (12b)$$

$$I_{bc}=I_{bc}^{(1)}+I_{bc}^{(2)}=\frac{\sqrt{2}}{8}\frac{Bl\omega^2}{R}(\cos\theta+\sin\theta) \qquad (13b)$$

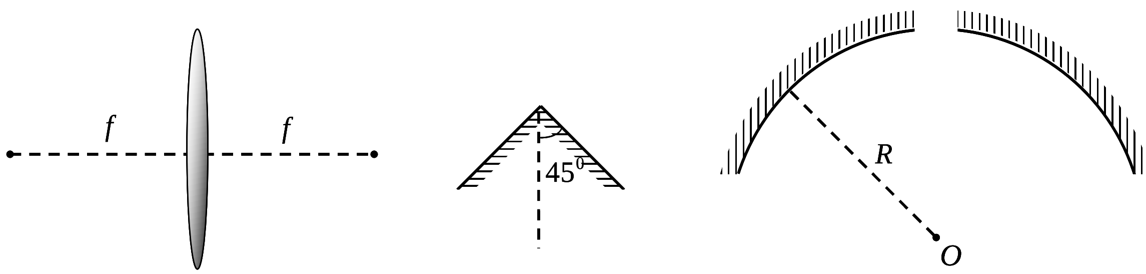
$$I_{cd}=I_{cd}^{(1)}+I_{cd}^{(2)}=\frac{\sqrt{2}}{8}\frac{Bl\omega^2}{R}(\cos\theta-\sin\theta) \qquad (14b)$$

2、与“参考解答 1”相同.

评分标准：参考“参考解答 1”的评分标准.

八、（10 分） 空心激光束是一种在传播方向上中心光强为零的圆筒形光束．由于这一特征，它可以把某些微小粒子约束在激光束的中心部位，作为激光导管、激光镊子、光学扳手等，实现对纳米粒子、生物细胞等微小粒子的精确操控．空心激光技术目前在生物学、激光加工、原子冷却等方面得到了广泛的应用，正逐渐成为一门新兴的学科分支．

产生空心激光束的基本做法是利用光学系统将一束实心的圆柱形激光转换成为一束空心的激光。给定如下光学器件：焦距为 f 的凸透镜，圆锥角为 45° 的锥面反射镜，半径为 R 的球面镜（中间有圆孔），如图：



（a） （b） （c）

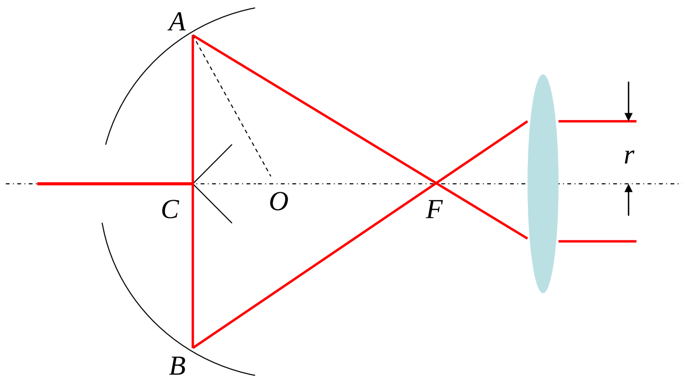
利用上述光学器件设计一光学系统，使得一束很细的实心圆柱形入射激光转化成一束空心的出射激光，且空腔为圆柱形，半径为 r．请回答如下问题：

1、画出该光学系统的光路图．

2、求该光学系统中锥面镜顶点到球面镜球心的距离 x．

参考解答：

1、光路图如下，指出被球面镜反射的光线汇聚于凸透镜的焦点.



2、参照所给光路图，可知 $CO = x$；设 $\angle CAO = \alpha$，有如下几何关系：

$$\sin\alpha = \frac{x}{R}, \tag{1}$$

$$r = f\cot(2\alpha) \quad . \tag{2}$$

两式联立，可求得

$$x = R\sin\left(\frac{1}{2}\arctan\frac{f}{r}\right). \tag{3}$$

评分标准： 正确画出光路图 5 分，（3）式 5 分.

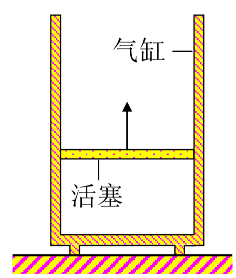
一、填空题

1. 一个粗细均匀的细圆环形橡皮圈，其质量为M，劲度系数为k，无形变时半径为R. 现将它用力抛向空中，忽略重力的影响，设稳定时其形状仍然保持为圆形，且在平动的同时以角速度ω绕通过圆心垂直于圆面的轴线匀速旋转. 这时它的半径应为________________.［**答案：** $4\pi^2 kR/(4\pi^2 k - M\omega^2)$］

解答： 设橡皮圈的半径变为R'；此时橡皮圈中任一点处的张力大小$F_t = 2\pi k(R'-R)$，方向沿着橡皮圈平面内与半径垂直的方向. 考虑橡皮圈上张角为θ的一小段，其所受合力大小为$F_{合} = 2F_t \sin\dfrac{\theta}{2}$，且在$\theta$趋于零的极限下$F_{合} = F_t\theta$. 又，这一小段以角速度$\omega$旋转所需的向心力为$F_{向} = \dfrac{M\theta}{2\pi}\cdot R'\cdot\omega^2$（右边第一项为这一小段的质量），因此令$F_{合} = F_{向}$便可解得$R' = 4\pi^2 kR/(4\pi^2 k - M\omega^2)$.

2. 鸽哨的频率是f. 如果鸽子飞行的最大速率是u，由于多普勒效应，观察者可能观测到的频率的范围是从________________到________________. 设声速为V.［**答案：** $fV/(V+u),\ fV/(V-u)$］

解答： 鸽哨声原本的波长是$\lambda = TV = V/f$. 若鸽子朝向观测者正面飞来，波长变为$\lambda' = T(V-u) = (V-u)/f$；因此与$\lambda'$相应的频率$f'$应为$f' = fV/(V-u)$. 同理，当鸽子以正背离观测者的方向飞离而去时，有$f' = fV/(V+u)$. 其它情况下频率介于二者之间.



3. 如图所示，在一个质量为M、内部横截面积为A的竖直放置的绝热气缸中，用活塞封闭了一定量温度为T_0的理想气体. 活塞也是绝热的，活塞质量以及活塞和气缸之间的摩擦力都可忽略不计. 已知大气压强为p_0，重力加速度为g. 现将活塞缓慢上提，当活塞到达气缸开口处时，气缸刚好离开地面. 已知理想气体在缓慢变化的绝热过程中pV^γ保持不变，其中p是气体的压强，V是气体的体积，γ是一常数. 根据以上所述，可求得活塞到达气缸开口处时气体

的温度为________________．［答案：$T_0(1-\frac{Mg}{p_0A})^{1-1/\gamma}$ ］

解答：设初始时气体的体积为V_0，活塞到达气缸开口处时气体的压强、体积和温度分别为p_1、V_1、T_1；则有 $p_1=p_0-\frac{Mg}{A}$（力学平衡条件），$\frac{p_0V_0}{T_0}=\frac{p_1V_1}{T_1}$（理想气体方程），$p_0V_0^\gamma=p_1V_1^\gamma$（绝热过程）．由后两式可得$T_1=T_0(\frac{p_1}{p_0})^{1-1/\gamma}$，代入第一式后得$T_1=T_0(1-\frac{Mg}{p_0A})^{1-1/\gamma}$．

4．（本题答案保留两位有效数字）在电子显微镜中，电子束取代了光束被用来“照射”被观测物．要想分辨$1.0\times10^{-10}\,\mathrm{m}$(即原子尺度)的结构，则电子的物质波波长不能大于此尺度．据此推测电子的速度至少需被加速到____________．如果要想进一步分辨$1.0\times10^{-12}\,\mathrm{m}$尺度的结构，则电子的速度至少需被加速到____________，且为使电子达到这一速度，所需的加速电压为____________．已知电子的静止质量$m_e=9.1\times10^{-31}\,\mathrm{kg}$，电子的电量$e=-1.6\times10^{-19}\,\mathrm{C}$，普朗克常量$h=6.7\times10^{-34}\,\mathrm{J\cdot s}$，光速$c=3.0\times10^{8}\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$．［答案：$(7.3-7.4)\times10^{6}\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$，$2.8\times10^{8}\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$，$(8.4-8.7)\times10^{5}\,\mathrm{V}$ ］

解答：速度为v时电子的质量为$m=m_e/\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$，动量为$p=mv$，电子的物质波波长$\lambda=h/p$．若使波长小于给定长度$l_0$，可得$v>c/\sqrt{1+\frac{c^2m_e^2}{h^2}l_0^2}$。由此可以求出当$l_0=10^{-10}\,\mathrm{m}$时$v>(7.27-7.36)\times10^{6}\,\mathrm{m/s}$，而当$l_0=10^{-12}\,\mathrm{m}$时$v>(2.774-2.778)\times10^{8}\,\mathrm{m/s}$．对于后者，电子通过加速电场获得的能量为$\Delta E=(m-m_e)c^2$，故加速电压应为

$$U=|\frac{\Delta E}{e}|=\frac{m_ec^2}{|e|}[\sqrt{\frac{h^2}{m_e^2c^2l_0^2}+1}-1]=(8.65-8.447)\times10^{5}\,\mathrm{V}\cdot$$