第七章 电磁感应

electromagnetic induction

§7.1 动生电动势

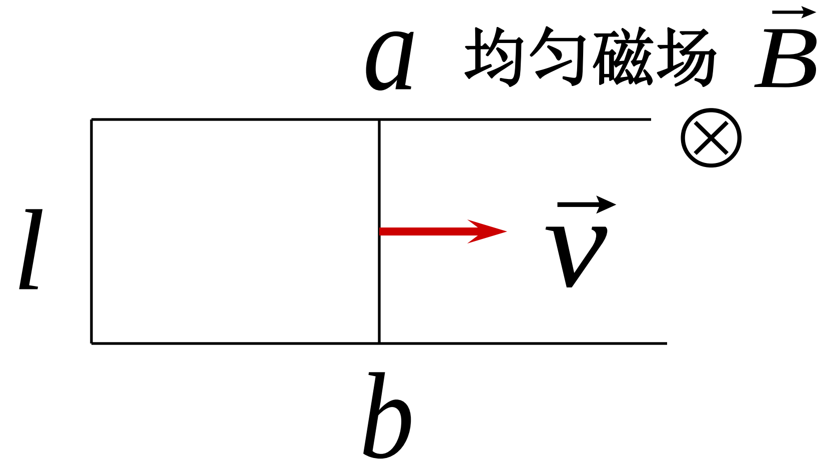
§7.2 感生电动势 感生电场

§7.3 自感 互感现象

§7.4 似稳电路和暂态过程

§7.1 动生电动势

一. 典型装置

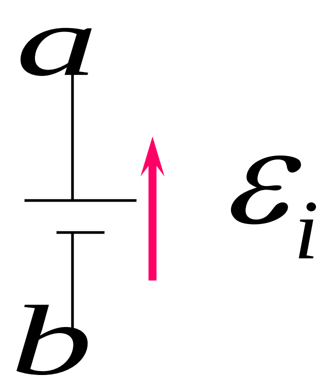


导线 ***ab***在磁场中运动

电动势怎么计算?

$$\varepsilon_i = -\frac{d\phi}{dt} = -Bl\frac{dx}{dt}$$

$$= -Blv$$



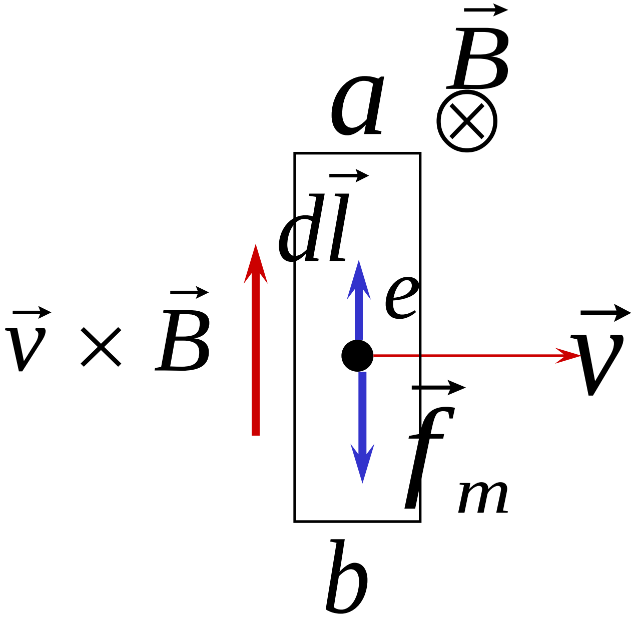
感应电动势只与
在磁场中运动的导体相关

导体在磁场中运动

非静电力——洛仑兹力

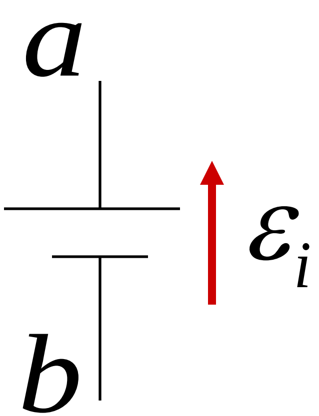
$$\boxed{\vec{f}_m = q\vec{v} \times \vec{B}}$$

$$\boxed{\vec{E}_K = \frac{q\vec{v} \times \vec{B}}{q} = \vec{v} \times \vec{B}}$$

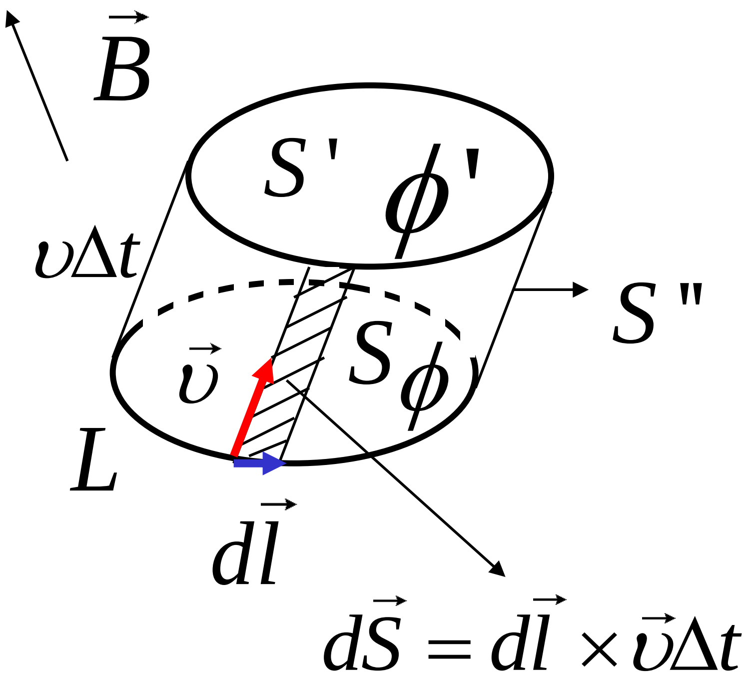


$$\varepsilon_i = \int_{(b)}^{(a)} \left(\vec{v} \times \vec{B}\right) \cdot d\vec{l}$$

$$\varepsilon_i = \int_{(ba)} vBdl = vBl \ > 0$$



闭合回路的动生电动势(一般情形)

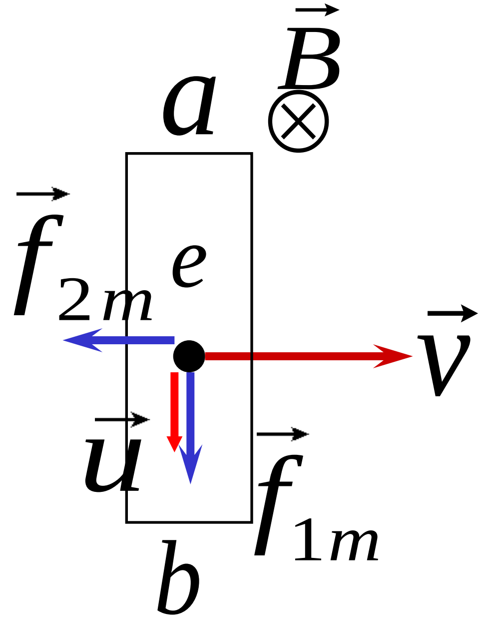


$$\varepsilon = -\frac{d\phi}{dt} = -\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\phi' - \phi}{\Delta t}$$

$$\phi = \phi' + \oint_L \vec{B} \cdot (d\vec{l} \times \vec{\upsilon}\Delta t)$$

$$\varepsilon = \oint_L \vec{B} \cdot (d\vec{l} \times \vec{\upsilon}) = \oint_L (\vec{\upsilon} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$$

- 电动势要对电路中载流子做功，
  但洛仑兹力不做功，
  动生电动势本质是洛仑兹力，
  矛盾？



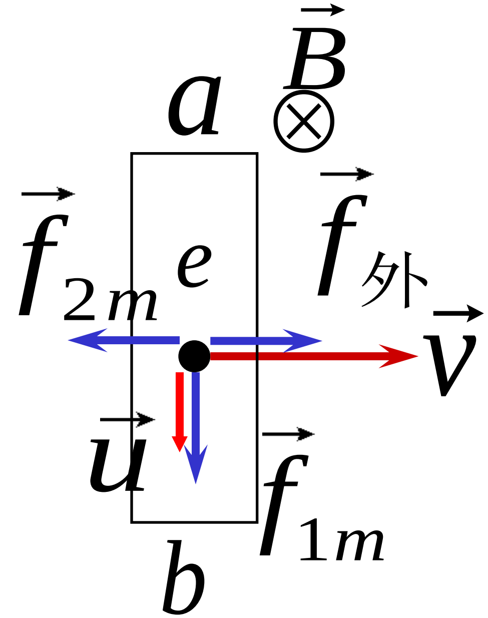
$$\vec{F} = \vec{f}_{1m} + \vec{f}_{2m} = -e(\vec{v} + \vec{u}) \times \vec{B} \qquad \perp \vec{u} + \vec{v}$$

$$\vec{F} \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = 0$$

$$\vec{f}_{1m} \cdot \vec{u} + \vec{f}_{2m} \cdot \vec{v} = 0$$

$$0 \neq \vec{f}_{1m} \cdot \vec{u} = -\vec{f}_{2m} \cdot \vec{v}$$

$$= \vec{f}_{外} \cdot \vec{v}$$



$\boxed{\text{外力作功转换为对电路作功}}$

§7.2 感生电动势 感生电场

感生电动势使静止导体中的电荷运动

驱动力是电场　　非静电场叫感生电场

一. 感生电场的性质

由于磁场的时间变化而产生的电场

$$\vec{B} = \vec{B}(\vec{r}, t)$$

$$\phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

$$\boxed{\varepsilon_i = -\frac{d\psi}{dt}} \Rightarrow \boxed{\varepsilon_i = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}}$$

电动势

$$\varepsilon_i = \oint_L \vec{E}_{非静电} \cdot d\vec{l}$$

$$\boxed{\oint_L \vec{E}_{感生} \cdot d\vec{l} = \iint_S -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}}$$

$$\boxed{\nabla \times \vec{E}_{感生} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}$$

$$\boxed{\oiint_S \vec{E}_{感生} \cdot d\vec{S} = 0}$$

法拉第电磁感应定律

非保守场

无源场 涡旋场

二. 感生电场的计算

1. 原则

$$\boxed{\oint_L \vec{E}_{感生} \cdot d\vec{l} = \iint_S -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}}$$

$\vec{E}_{感生}$具有某种对称性情形

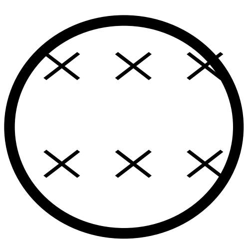
2. 特殊

空间均匀的磁场被限制在圆柱体内，磁感强度方向平行柱轴，如长直螺线管内部的场。

磁场随时间变化 则

感生电场具有柱对称分布

$\vec{B}(t)$

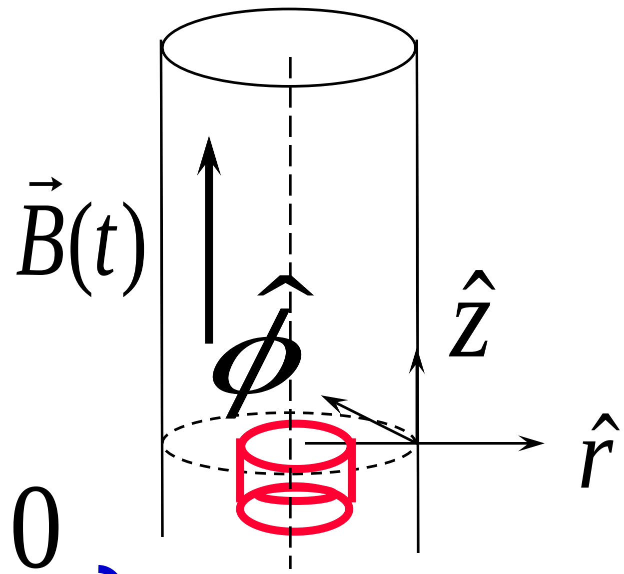


感生电场对称性的分析

限制在圆柱内的空间均匀的变化磁场

建柱坐标系

$$\vec{E}_{感生} = E_r\hat{r} + E_\phi\hat{\phi} + E_z\hat{z}$$



上下平移/镜像对称 $\Longrightarrow$ $E_z = 0$

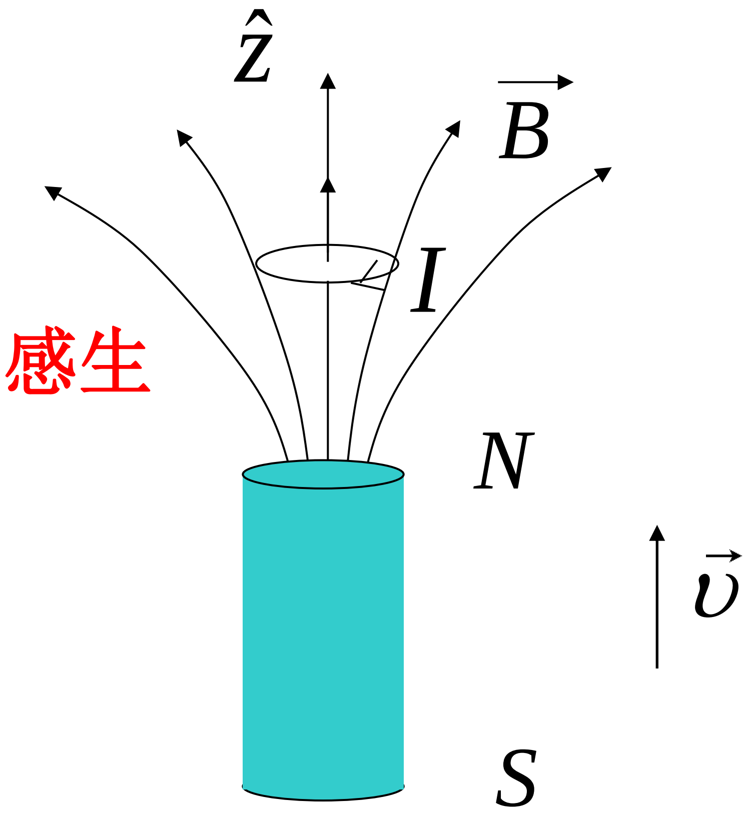
作正柱面，如图

$$\boxed{\oiint_S \vec{E}_{感生} \cdot d\vec{S} = 0} \Longrightarrow E_r = 0$$

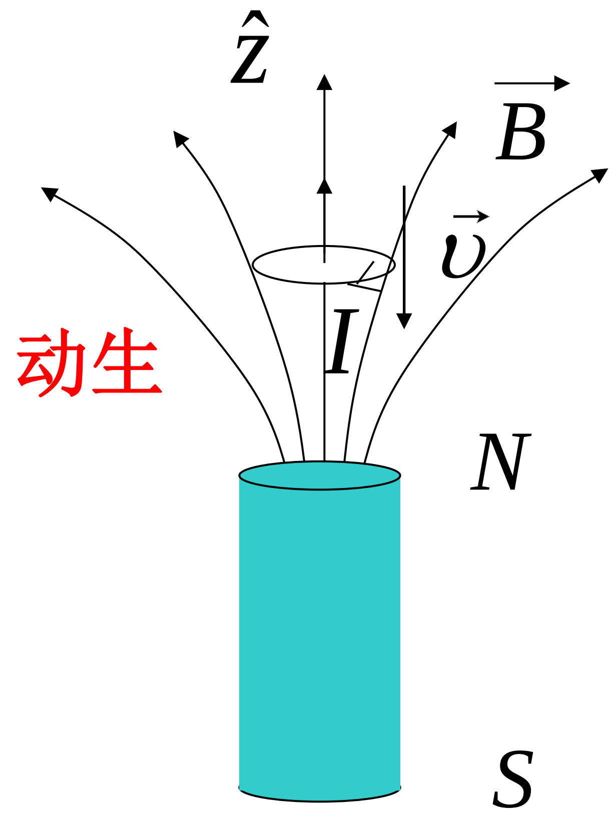
$$\boxed{\vec{E}_{感生} = E_\phi\hat{\phi}}$$

动生电动势 和 感生电动势的相对性

线圈不动 源动

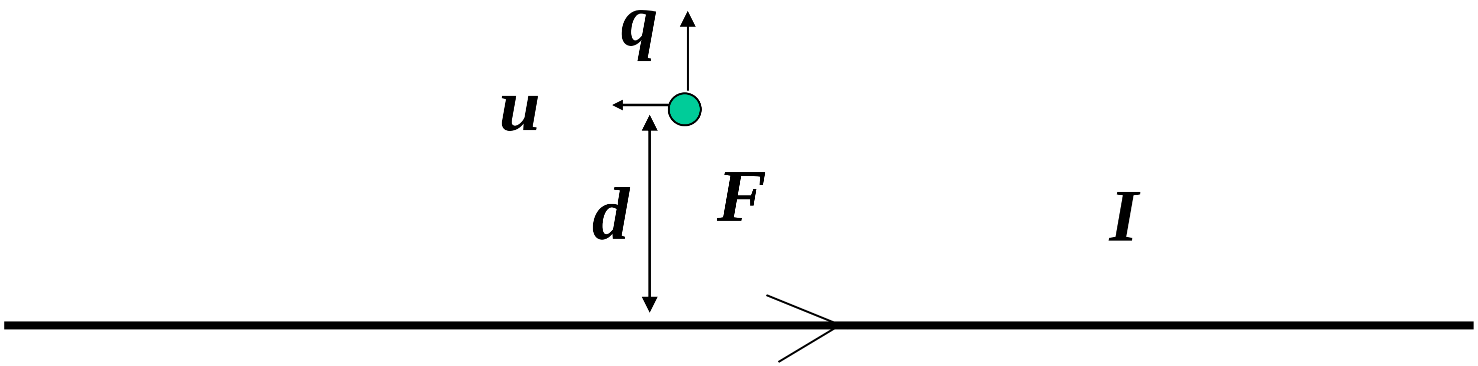


在源参考系　线圈动



运动电荷在磁场受力 <=> (换参考系) 静止电荷受电场力

无限长载流导线电流 I 与一运动电荷 q 相距 d

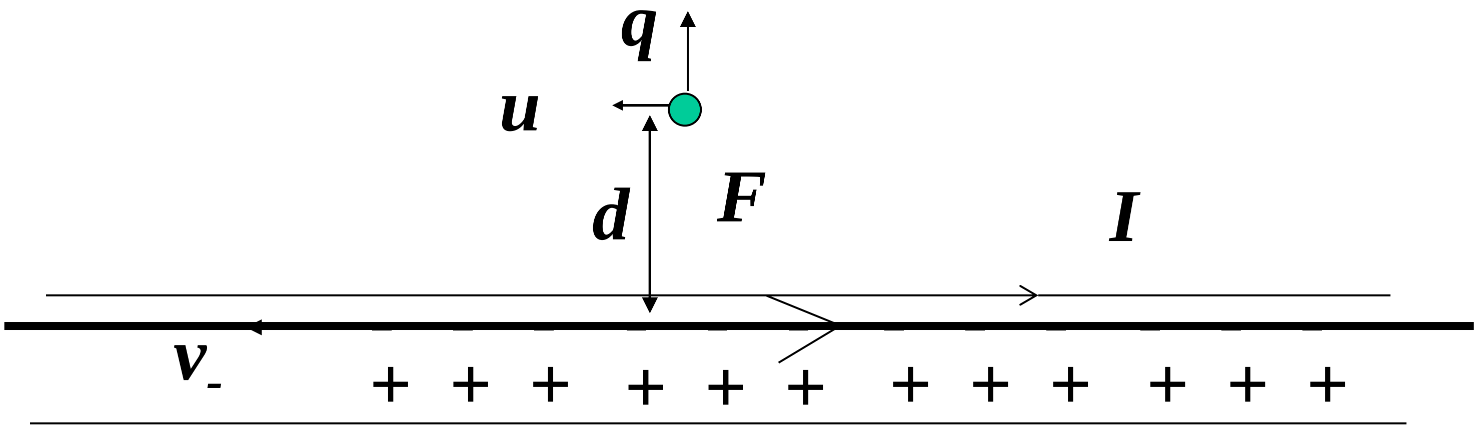


I 在 q 处 B 为

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi d}$$

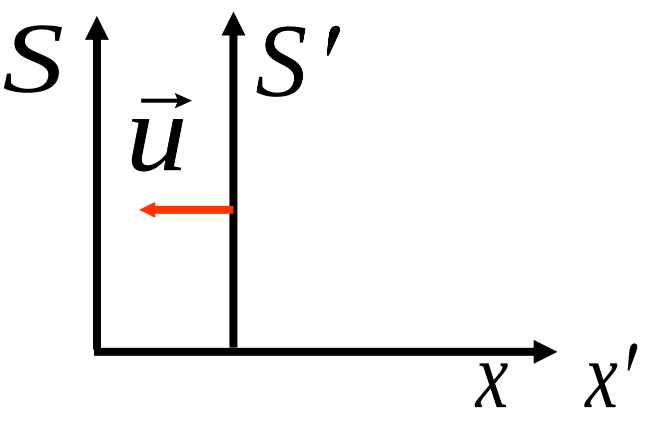
根据洛伦兹力，q受力

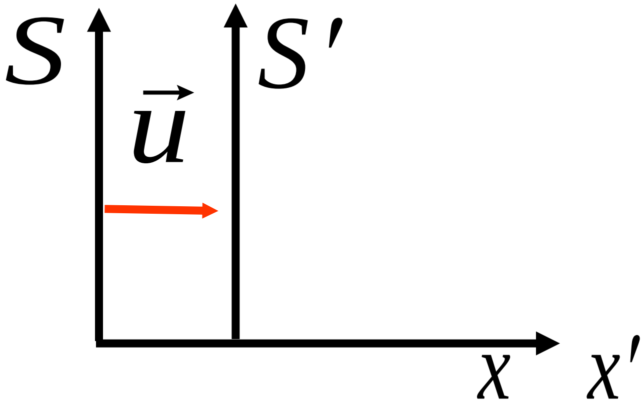
$$F_m = \frac{\mu_0 I q u}{2\pi d}$$



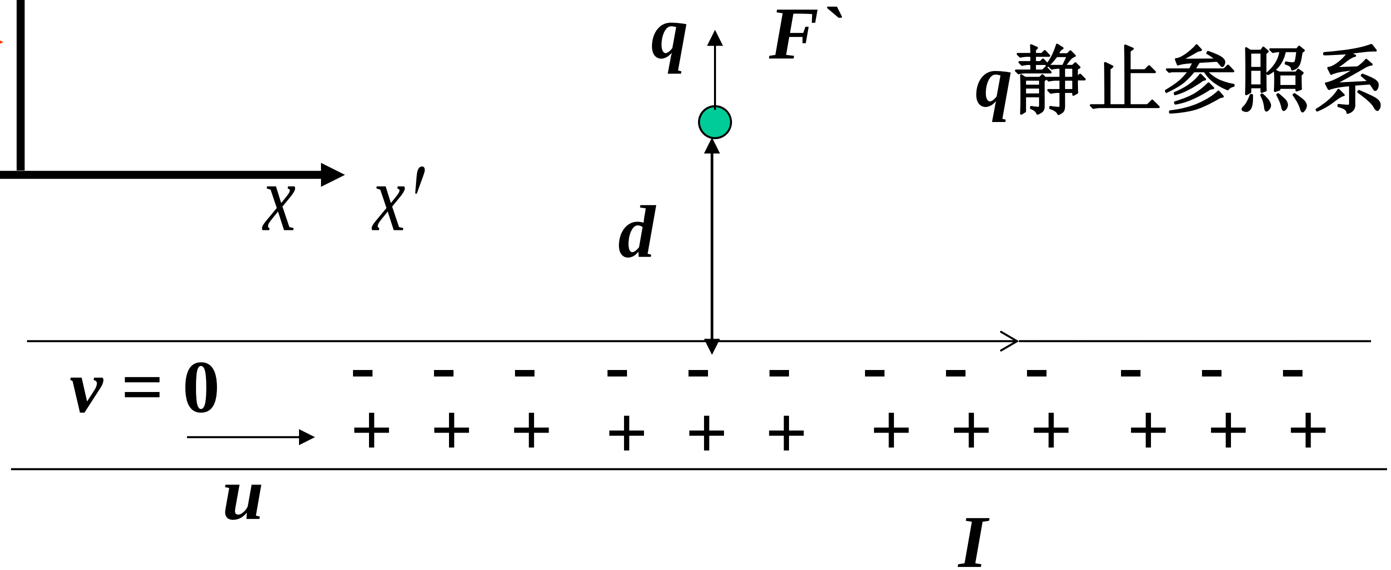
为了简便 $u = v_-$

假设电流电中性





q静止参照系



$$\because l = \frac{l_0}{\gamma} \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}}$$

$$l_+ = \frac{l_{+0}}{\gamma}$$

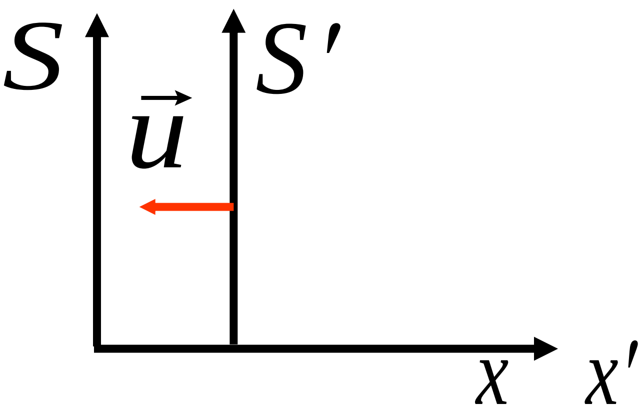
$$l_- = \gamma l_{-0}$$

电荷密度反比于间距

$$\lambda_- = \frac{\lambda_0}{\gamma} \qquad \lambda_+ = \lambda_0 \gamma$$

$$F' = q\frac{\lambda_+ - \lambda_-}{2\pi\varepsilon_0 d} = \frac{\lambda_0}{2\pi\varepsilon_0 d}\gamma\frac{u^2}{c^2}q = \frac{\mu_0 I q u}{2\pi d}\gamma$$

$$\boxed{F' = \gamma F}$$



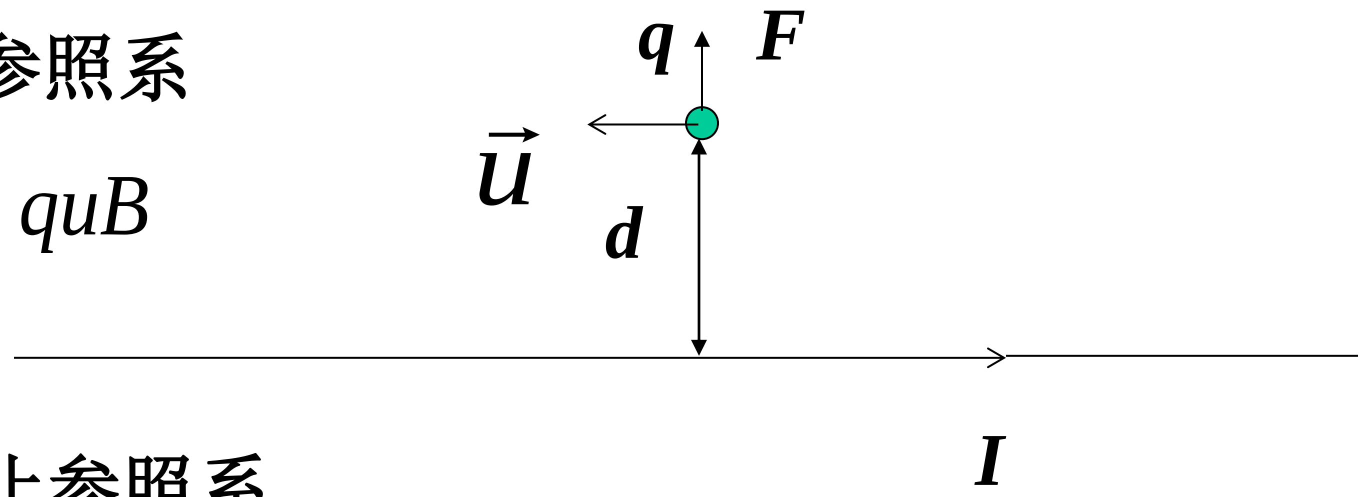
$$\frac{F_y'}{F_y} = \frac{\Delta p_y'/\Delta t'}{\Delta p_y/\Delta t} \searrow \gamma$$

原时最短

$$\boxed{\Delta t = \gamma \Delta t'}$$

地面参照系

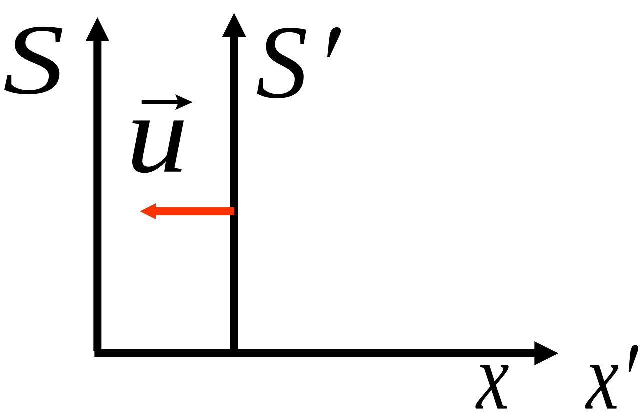
$$F = quB$$



q静止参照系

$$\gamma F = \gamma quB$$

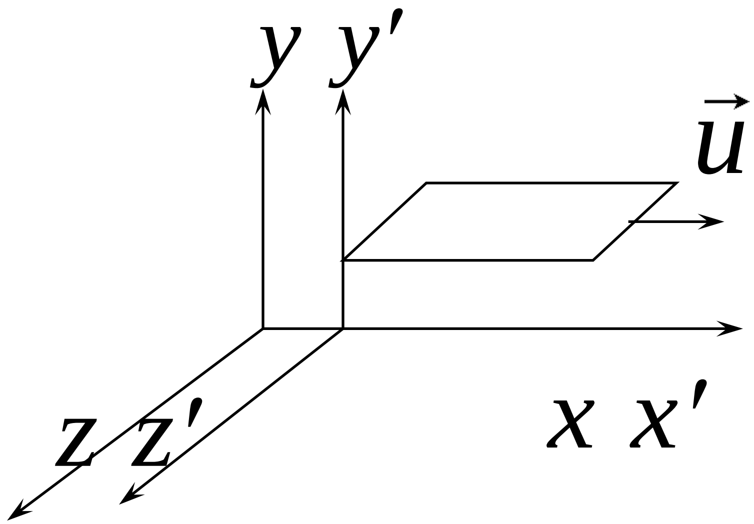
$$E'_y = \gamma uB$$



地面参考系只有磁场

运动参考系还有电场

均匀带电的无限大平面电荷面密度 σ



S` 系中只有静电场

$$\vec{E}' = \vec{E}'_y = \pm\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{y}$$

$$S: \quad \vec{j} = \sigma'\vec{u} = \gamma\sigma\vec{u}$$

$$\vec{B} = \pm\frac{\mu_0}{2}\gamma\sigma u\hat{z}$$

$$E_y = \gamma E'_y$$

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\vec{u}\times\vec{E}}{c^2}}$$

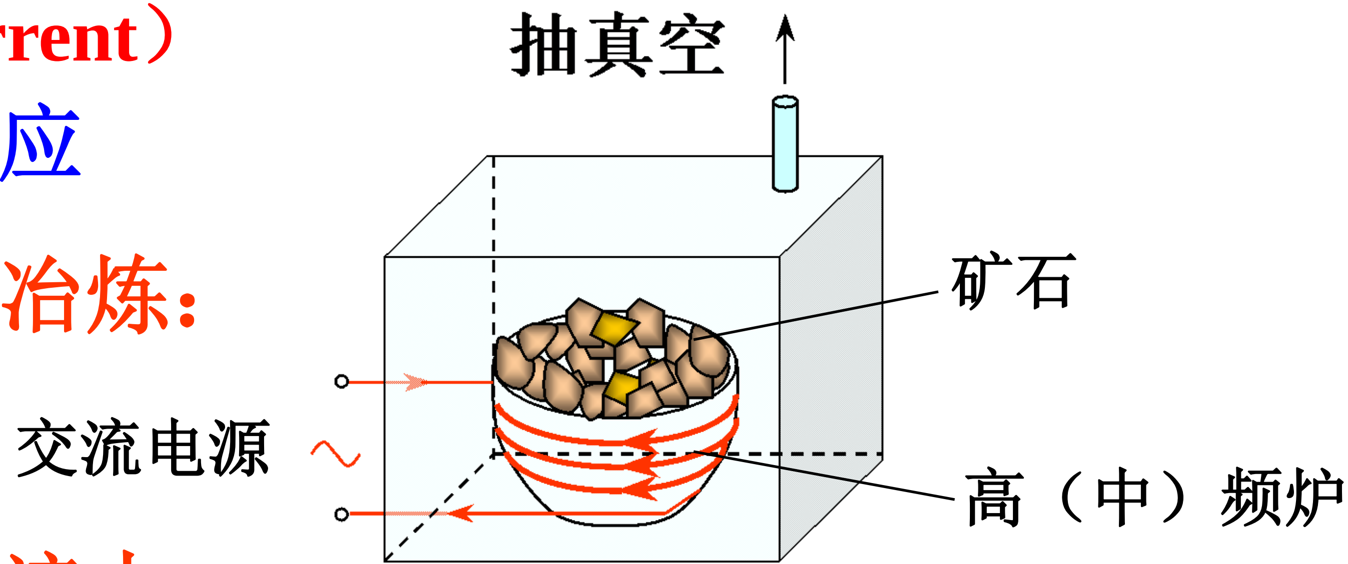
$$= \pm\frac{E_y u}{c^2}\hat{z}$$

* 涡流　大块导体中的感应电流称“涡流”。

（eddy current）

▲ 热效应

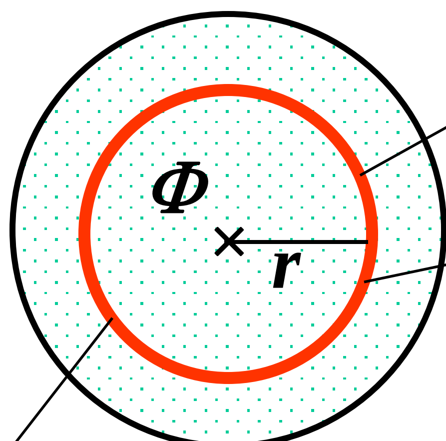
电磁冶炼：



电磁淬火：

导体⊥板面

$\vec{B}$⊥板面



$$\varepsilon \propto \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} \propto r^2$$

电阻 $R \propto r$

涡电流 $i = \varepsilon / R \propto r$

单位长度上的发热功率　$P_{热} = i^2 R \propto r^3$

越外圈发热越厉害，符合表面淬火的要求。

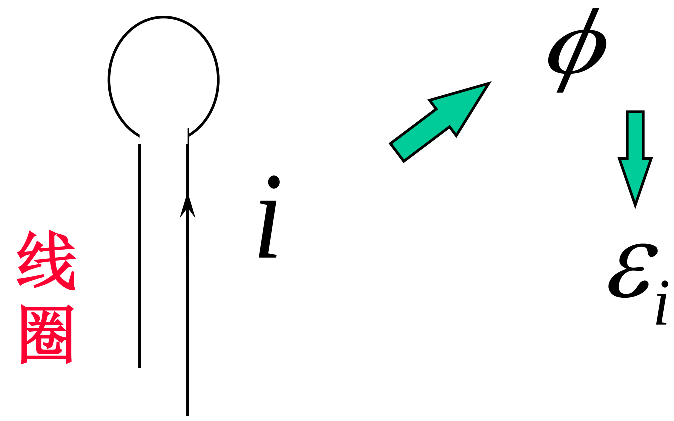
§7.3 自感　互感现象

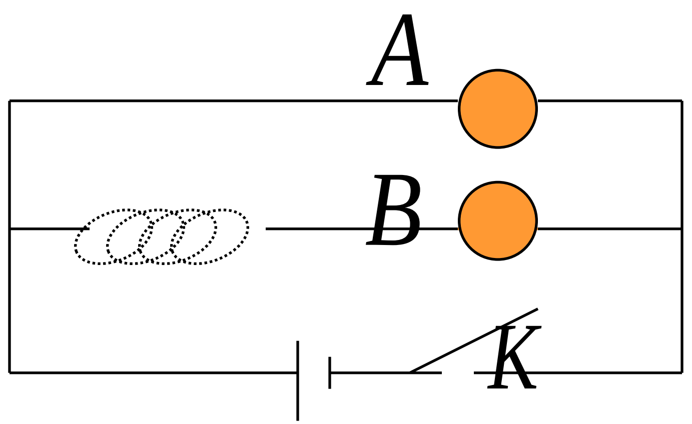
实际线路中的感生电动势问题

一. 自感现象　自感系数　self-indutance

反抗电流变化的能力

(电惯性)





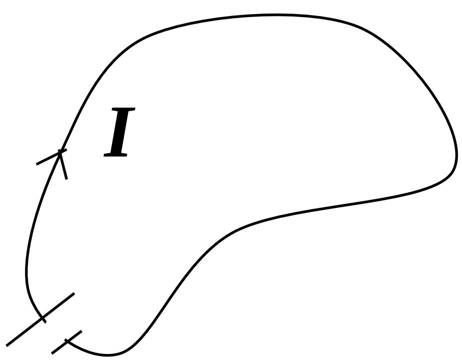
***K*合上 灯泡*A*先亮 *B*晚亮**

由于自己线路中的电流的变化　而在自己的线路中产生感应电流的现象——自感现象

自感系数的定义

非铁磁质　$I \longrightarrow \psi \propto I \longrightarrow \psi = LI$

μ

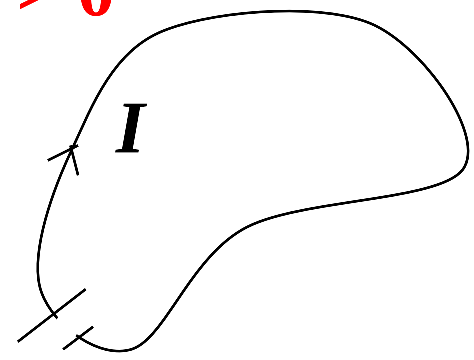


$$L = \frac{\psi}{I}$$

只与回路的几何形状及介质分布有关

只要遵守右手螺旋规则

总有 $L > 0$



由法拉第电磁感应定律

$$\varepsilon_i = -\frac{d\psi}{dt} = -L\frac{dI}{dt}$$

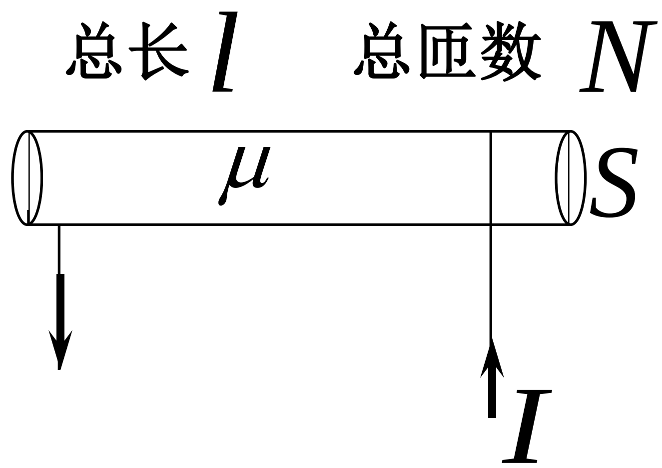
$$\boxed{L = -\frac{\varepsilon_i}{\frac{dI}{dt}}}$$

单位电流的变化对应的感应电动势

普遍定义

例：求长直螺线管的自感系数

几何条件如图



解：设通电流 I

$$\boxed{B=\mu\frac{N}{l}I}$$

$$\psi=N\phi=NBS$$

$$\boxed{L=\frac{\psi}{I}=\frac{\mu N^2 S}{l}}$$

几何条件

介质

固有的性质

电惯性

二. 互感现象　互感系数　mutual induction

第一个线圈内电流的变化，引起线圈2内的电动势

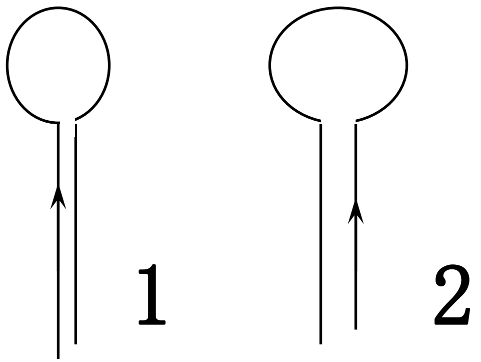
$$i_1\ \text{变化} \Rightarrow \psi_{21}\ \text{变化} \Rightarrow \varepsilon_{21}$$

非铁磁质

$$\boxed{\psi_{21} = M_{21} I_1}$$

同样有

$$\boxed{\psi_{12} = M_{12} I_2}$$



由法拉第电磁感应定律有

$$\boxed{\varepsilon_{12} = -\frac{d\psi_{12}}{dt} = -M_{12}\frac{dI_2}{dt}}$$

$$\boxed{\varepsilon_{21} = -\frac{d\psi_{21}}{dt} = -M_{21}\frac{dI_1}{dt}}$$

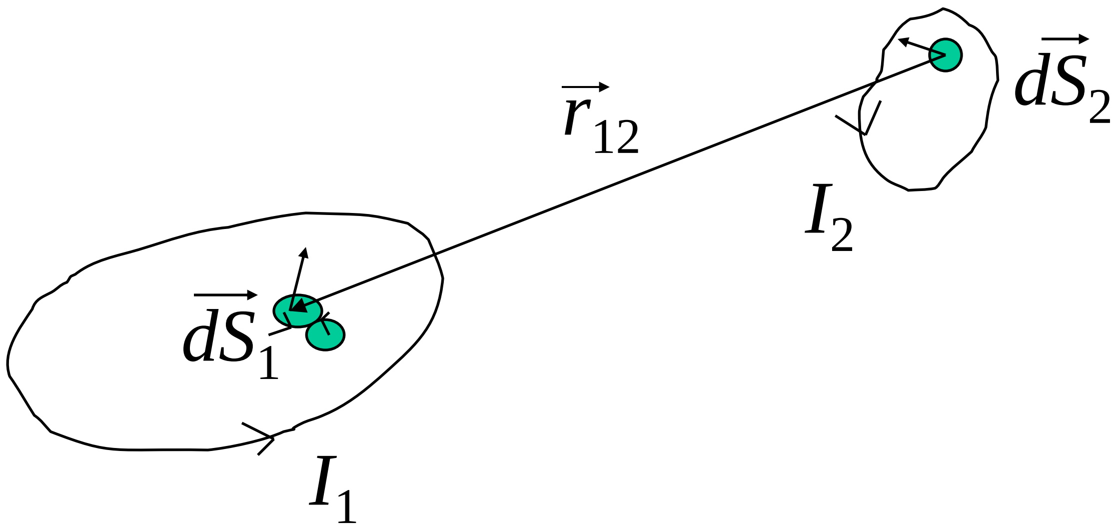
可以证明 $\boxed{M_{21} = M_{12} = M}$

$$\boxed{M = -\frac{\varepsilon_{12}}{dI_2/dt} = -\frac{\varepsilon_{21}}{dI_1/dt} = \frac{\psi_{12}}{I_2} = \frac{\psi_{21}}{I_1}}$$

互感系数只与两个回路的几何形状,
相对位置及介质分布有关

证明:

$$\boxed{\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi r^3}\left[-\vec{m}+3\left(\vec{m}\cdot\hat{r}\right)\hat{r}\right]}$$



$$\Phi_{12}=M_{12}I_2$$

$$\Phi_{21}=M_{21}I_1$$

$$\boxed{M_{12}=M_{21}}$$

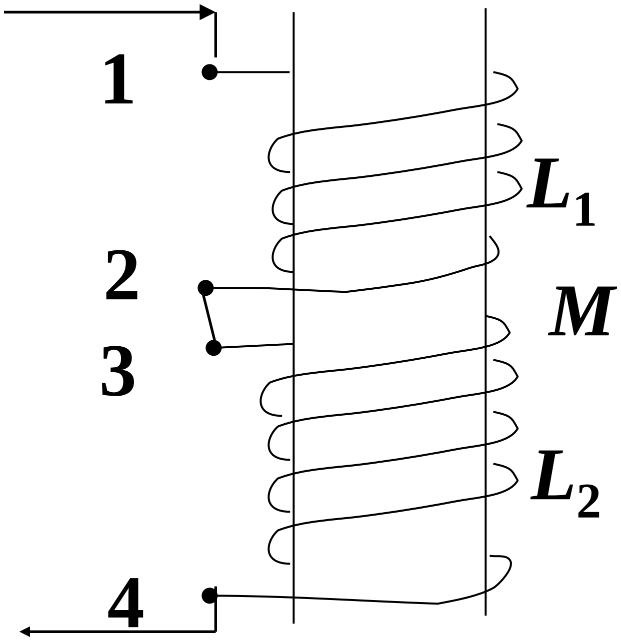
$$d\Phi_{21}=\vec{B}_1\cdot d\vec{S}_2=\frac{\mu_0 I_1}{4\pi r_{21}^{\ 3}}\left[-d\vec{S}_1+3\left(d\vec{S}_1\cdot\hat{r}_{21}\right)\hat{r}_{21}\right]\cdot d\vec{S}_2$$

$$\Phi_{21}=I_1\iint_{S_1S_2}\frac{\mu_0}{4\pi r_{21}^{\ 3}}\left[-d\vec{S}_1\cdot d\vec{S}_2+3\left(d\vec{S}_1\cdot\hat{r}_{21}\right)\left(\hat{r}_{21}\cdot d\vec{S}_2\right)\right]$$

$$\boxed{M_{21}=\iint_{S_1S_2}\frac{\mu_0}{4\pi r_{21}^{\ 3}}\left[-d\vec{S}_1\cdot d\vec{S}_2+3\left(d\vec{S}_1\cdot\hat{r}_{21}\right)\left(\hat{r}_{21}\cdot d\vec{S}_2\right)\right]}$$

三. 自感串、并联

两线圈绕向如图所示，求自感

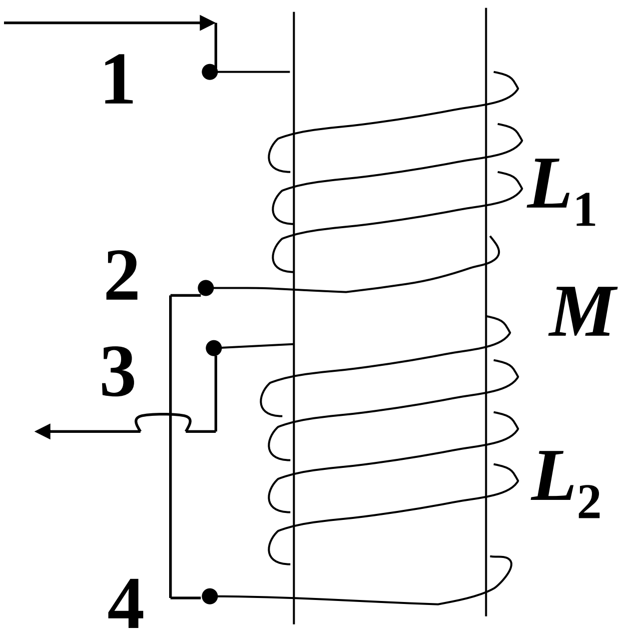


串联

$$\psi = LI$$

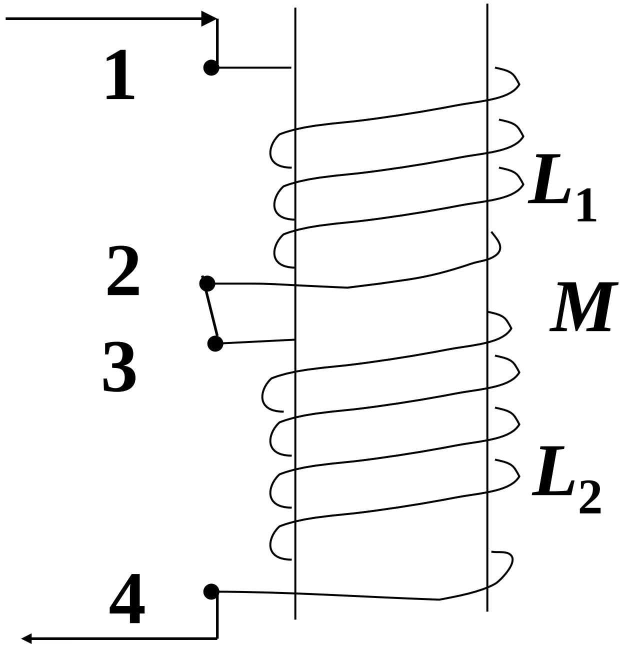
$$= L_1 I + L_2 I + MI + MI$$

$$L = L_1 + L_2 + 2M$$



（1）2、3连接 $M > 0$

（2）2、4连接 $M < 0$

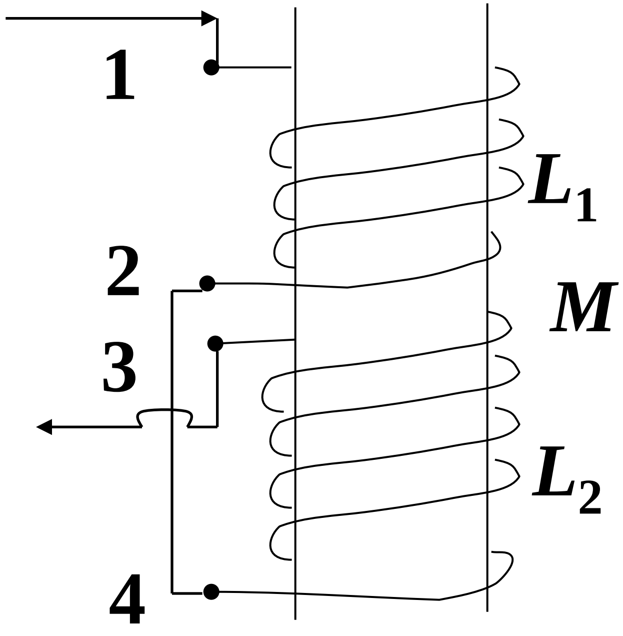


1、3 或 2、4 同名端

串联

（1）2、3连接

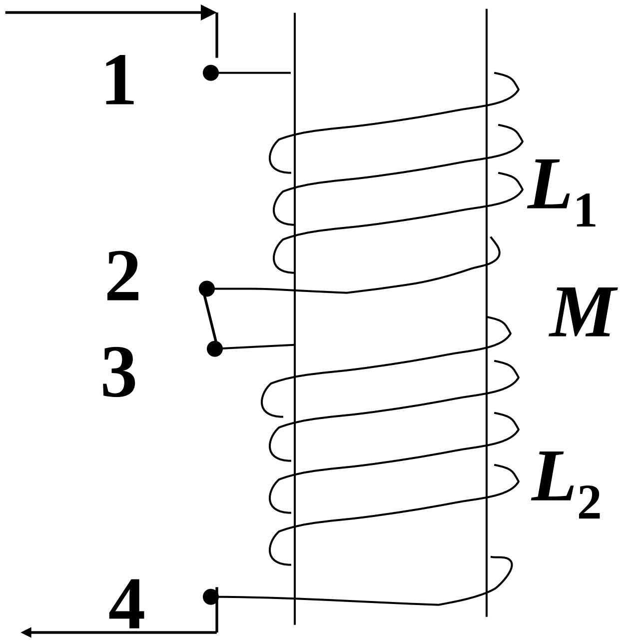
同名端流入（异名端连接）



（2）2、4连接

异名端流入（同名端连接）

互感系数变号



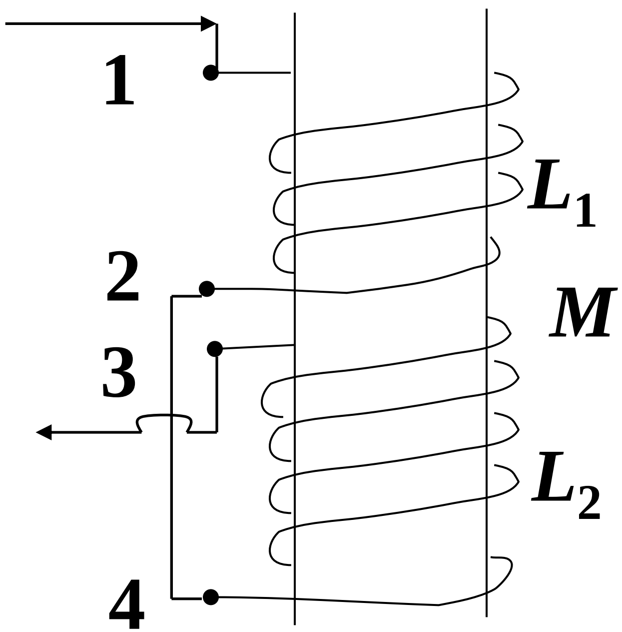
规定互感系数M只有大小

串联

（1）2、3连接

同名端流入（异名端连接）

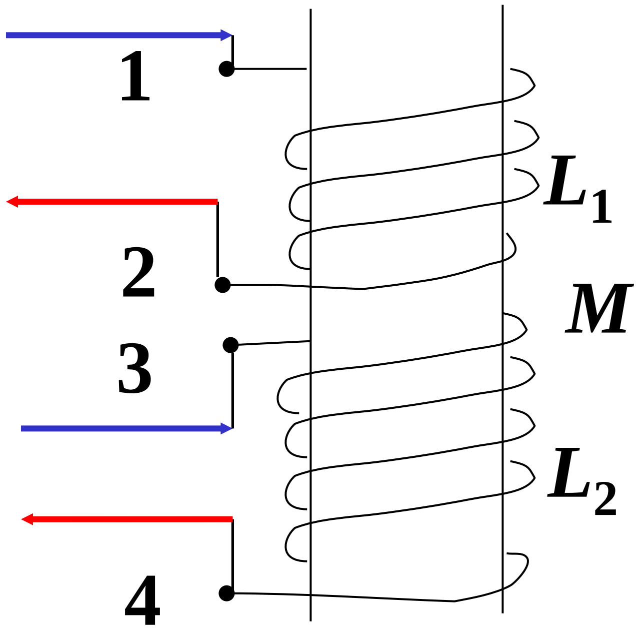
$$L = L_1 + L_2 + 2M$$



（2）2、4连接

异名端流入（同名端连接）

$$L = L_1 + L_2 - 2M$$



并联

（1）同名端流入

$$\psi_1 = L_1 I_1 + M I_2 \qquad M > 0$$

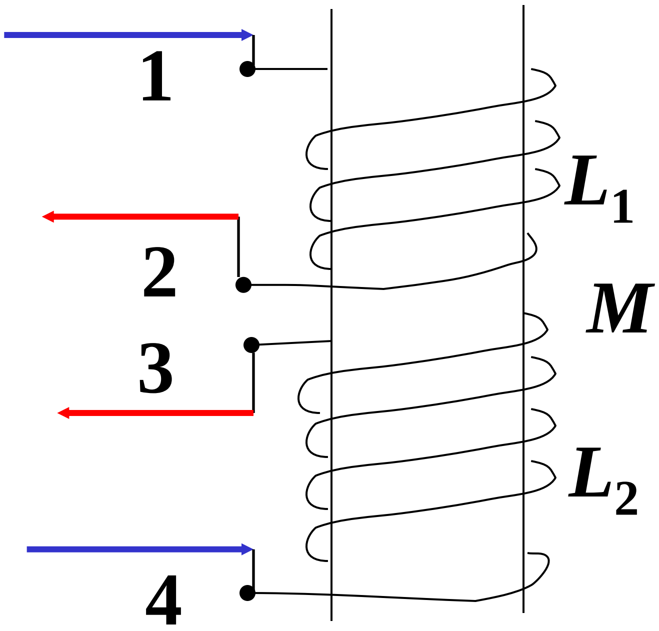
$$\psi_2 = L_2 I_2 + M I_1$$

$$\varepsilon = -(L_1 \frac{dI_1}{dt} + M \frac{dI_2}{dt}) = -L \frac{dI}{dt} \qquad I = I_1 + I_2$$

$$= -(L_2 \frac{dI_2}{dt} + M \frac{dI_1}{dt}) \qquad L = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2M}$$

并联

（2）异名端流入



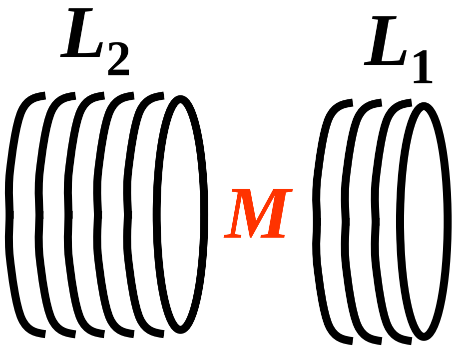
$$L=\frac{L_1L_2-M^2}{L_1+L_2-2M}$$

$$M<0$$

也可以规定互感系数M只有大小

$$L=\frac{L_1L_2-M^2}{L_1+L_2\pm 2M}$$

四.自感与互感的关系



$$M \le (L_1 + L_2)/2$$

$$M \le \sqrt{L_1 L_2}$$

$$\boxed{M = k\sqrt{L_1 L_2}}$$

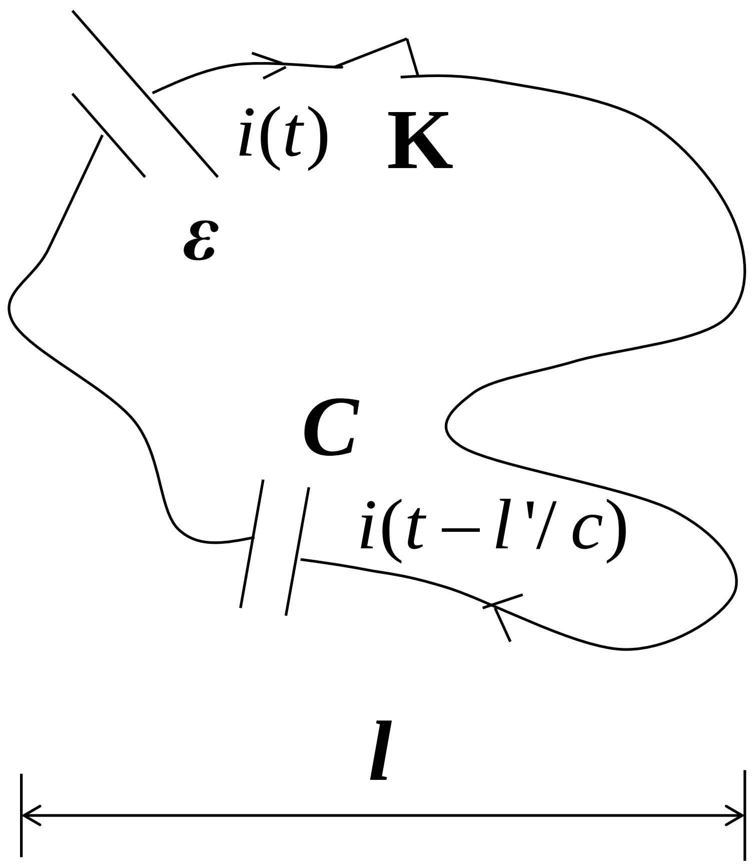
$$0 \le k \le 1$$

k ——耦合系数（coupling coefficient）

k 由介质情况和线圈1、2的相对位形决定。

§7.5 似稳电路和暂态过程

一、似稳电路条件



电路特征时间 **τ**， **$\tau \gg l/c$**

可采用似稳电路近似。

$$i(t-l'/c)\approx i(t) \qquad l'/c \ll \tau$$

即使近似成立，
电容处基尔霍夫
第一定律不能用

交流电似稳近似：

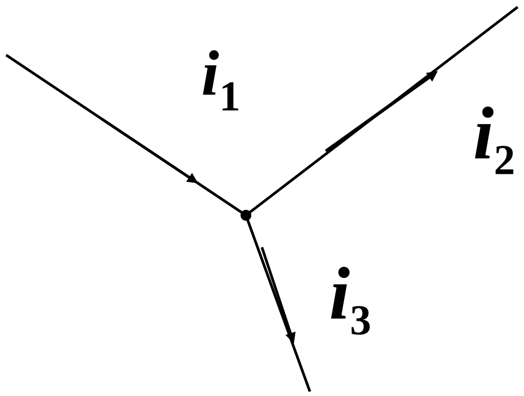
$$c/f \gg l$$

二、似稳电路方程

电路: 电源　电阻(+线路)　电容　电感

$$\oiint_s \vec{j}\cdot d\vec{S} = -\frac{dq_{内}}{dt} \xrightarrow{\text{非电容区}} \boxed{\oiint_s \vec{j}\cdot d\vec{S} = 0}$$

（1）节点电流定律(基尔霍夫第一定律)



$$i_1 = i_2 + i_3$$

(2) $$\oint_L \vec{E}_p \cdot d\vec{l} = 0$$

回路电压定律(基尔霍夫第二定律)

$$\oint_{\mathrm{L}} \vec{E}_p \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_{\mathrm{R}} \frac{\vec{j}}{\sigma} \cdot \mathrm{d}\vec{l} + \int_{\mathrm{I}} \vec{E}_p \cdot \mathrm{d}\vec{l} + \int_{\mathrm{C}} \vec{E}_p \cdot \mathrm{d}\vec{l} + \int_{\mathrm{K}} \vec{E}_p \cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0$$

电源: $\vec{E}_p = -\vec{E}_K$, $\quad u_{p(+-)} = -\int_{-}^{+} \vec{E}_p \cdot d\vec{l} = \int_{-}^{+} \vec{E}_K \cdot d\vec{l} = \varepsilon$

电阻: $\vec{E}_p = \vec{j}/\sigma$, $\quad u_R = \int \vec{E}_p \cdot d\vec{l} = \int \vec{j}/\sigma \cdot d\vec{l} = iR$

电容: $u_C = \int \vec{E}_p \cdot d\vec{l} = q/C$

电感: $\vec{E}_p = -\vec{E}_i, \quad u_L = \int \vec{E}_p \cdot d\vec{l} = -\int \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = -\varepsilon_i$

$$\varepsilon_i = -L\frac{di}{dt} \pm M\frac{di'}{dt} \qquad u_L = L\frac{di}{dt} \mp M\frac{di'}{dt}$$

互感系数总是正，其前符号，同名端流入电流取正

$$\boxed{\sum(\pm)\varepsilon + \sum(\pm)iR + \sum(\pm)q/C + \sum(\pm)(L\frac{di}{dt} \pm M\frac{di'}{dt}) = 0}$$

符号:正极到负极正，沿电流取正

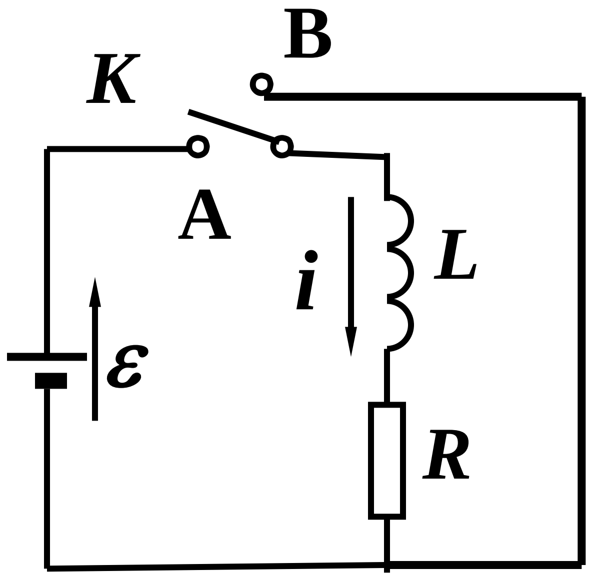
三、暂态过程

(1) R-L

自感线圈中 $\varepsilon_L \neq \infty \rightarrow \dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \neq \infty \rightarrow i$不能突变

由楞次定律得知，i 的变化受到 ε_L 的阻碍，

∴L对变化电流有感抗，但对直流电流畅通。

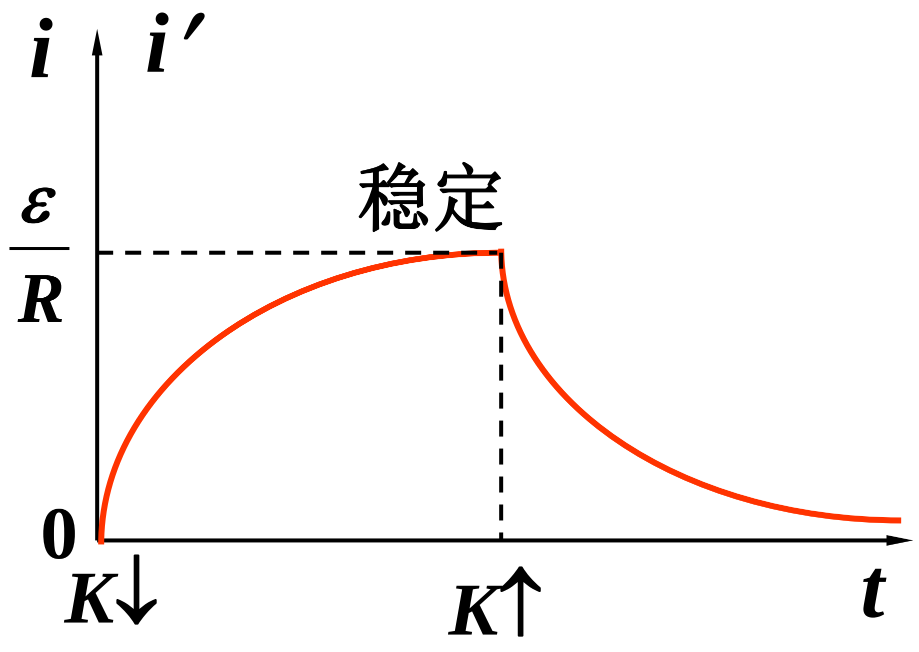


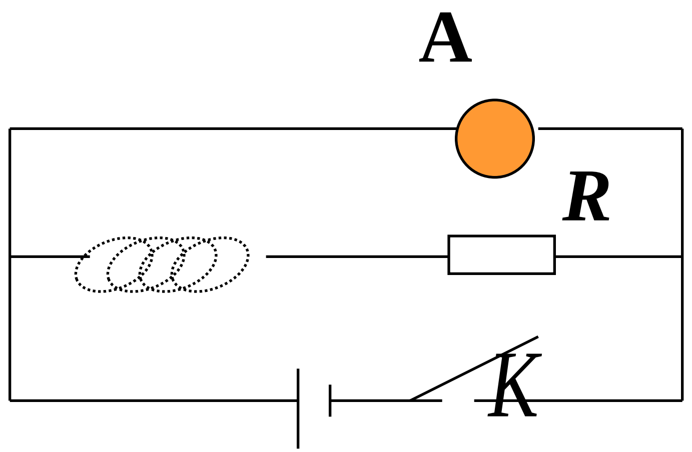
(K-A) $\varepsilon = iR + L\dfrac{di}{dt}$

(K-B) $0 = iR + L\dfrac{di}{dt}$

$$K\downarrow：\quad i=\frac{\varepsilon}{R}\left(1-e^{-t/\tau}\right),\qquad K\uparrow：\quad i'=\frac{\varepsilon}{R}\,e^{-t/\tau}$$

$$\boldsymbol{\tau=\frac{L}{R}}$$ — 时间常数





***K*合上 灯泡 A亮, *K* 断开, A闪亮**

稳定 $i_A = \dfrac{\varepsilon}{R_A}$ $i_L = \dfrac{\varepsilon}{R}$

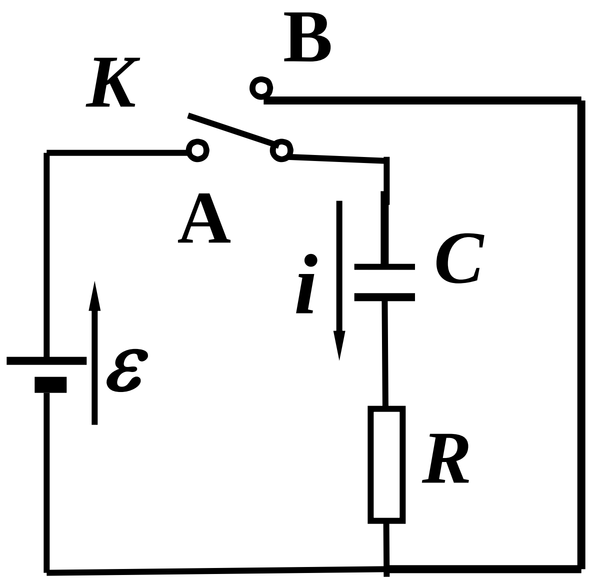
断开瞬间电流不能突变 $i_A = i_L = \dfrac{\varepsilon}{R}$

只要 $R_A > R$ **A闪亮**

(2) R-C

(K-A) $$\varepsilon = iR + q/C \quad \rightarrow \quad \varepsilon = \frac{dq}{dt}R + \frac{q}{C}$$

(K-B) $$0 = \frac{dq}{dt}R + \frac{q}{C}$$

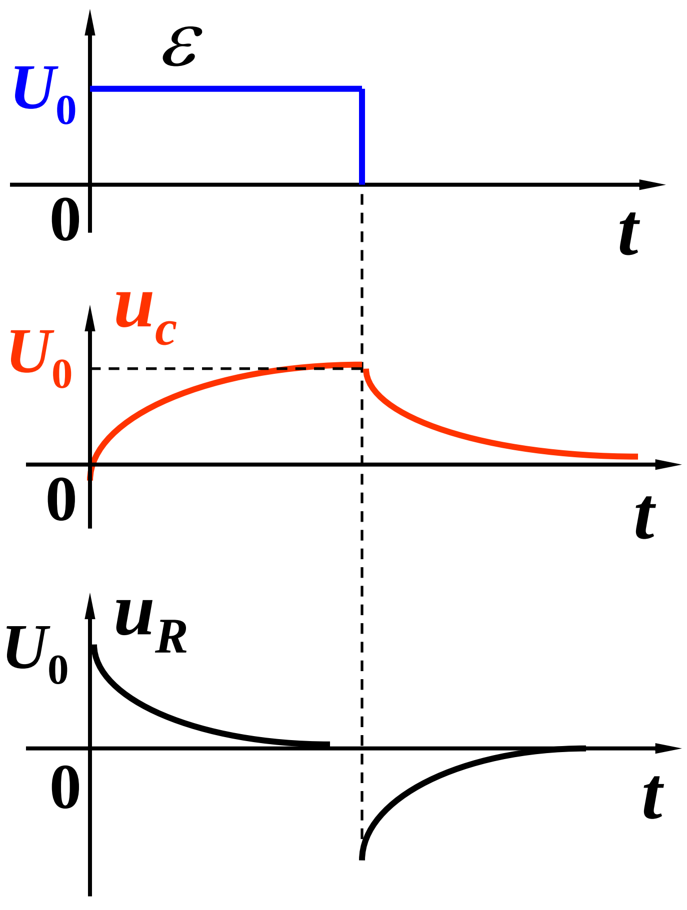


时间常数（time constant）

$$\boxed{\tau = RC}$$

充电: $u_c = U_0(1 - e^{-t/\tau})$

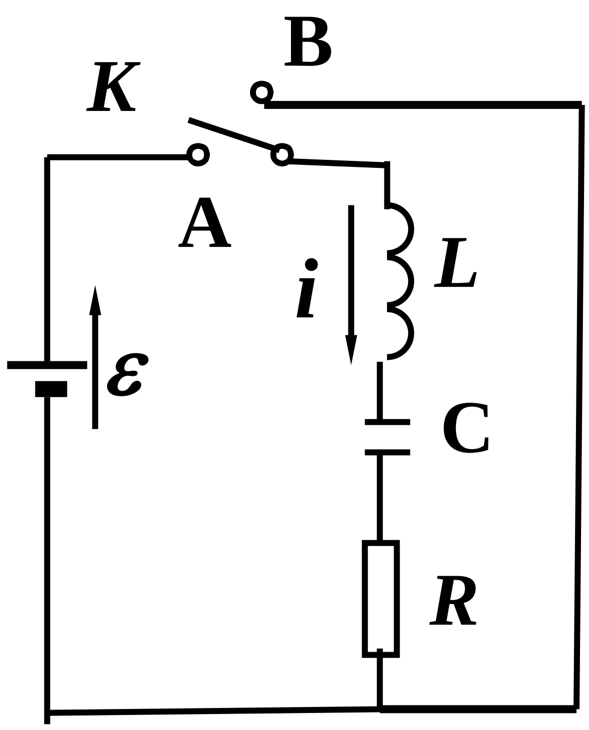
$$i = \frac{U_0}{R} e^{-t/\tau}$$



放电: $u_c = U_0\ e^{-t/\tau}$

$$i = \frac{U_0}{R} e^{-t/\tau}$$

(3) R-L-C



(K-A)

$$\varepsilon = L\frac{di}{dt} + \frac{dq}{dt}R + \frac{q}{C}$$

$$\downarrow$$

$$L\frac{d^2q}{dt} + \frac{dq}{dt}R + \frac{q}{C} = \varepsilon$$

(K-B)

$$L\frac{d^2q}{dt} + \frac{dq}{dt}R + \frac{q}{C} = 0$$

(K-B)

$$\ddot{q}+\frac{1}{\tau}\dot{q}+\omega^2 q=0 \qquad \boldsymbol{\tau=\frac{L}{R}} \qquad \omega^2=\frac{1}{LC}$$

$$q\sim e^{\lambda t} \qquad \lambda=\frac{-1\pm\sqrt{1-4\tau^2\omega^2}}{2\tau}$$

1. 过阻尼 $1-4\tau^2\omega^2>0 \qquad q=Ae^{-|\lambda_1|t}+Be^{-|\lambda_2|t}$

2. 临界阻尼 $1-4\tau^2\omega^2=0 \qquad q=(A+Bt)e^{-\frac{t}{2\tau}}$

3. 欠阻尼 $1-4\tau^2\omega^2<0 \qquad \omega'=\sqrt{\omega^2-\frac{1}{4\tau^2}}$

$$q=Ae^{-\frac{t}{2\tau}}\cos(\omega' t+\varphi)$$

(K-A)

$$\ddot{q}+\frac{1}{\tau}\dot{q}+\omega^2 q=\frac{\varepsilon}{L} \qquad \boldsymbol{\tau}=\frac{\boldsymbol{L}}{\boldsymbol{R}} \qquad \omega^2=\frac{1}{LC}$$

1. 过阻尼

$$q=Ae^{-|\lambda_1|t}+Be^{-|\lambda_2|t}+C\varepsilon$$

2. 临界阻尼

$$q=(A+Bt)e^{-\frac{t}{2\tau}}+C\varepsilon$$

3. 欠阻尼

$$q=Ae^{-\frac{t}{2\tau}}\cos(\omega' t+\varphi)+C\varepsilon$$