

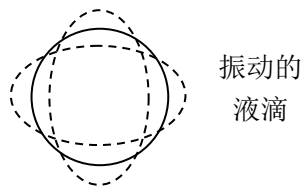
第 31 届全国中学生物理竞赛复赛理论考试试题

2014 年 9 月 20 日

说明：所有答案（包括填空）必须写在答题纸上，写在试题纸上无效。

一、（12分）2013年6月20日，“神舟十号”女航天员王亚平在“天宫一号”目标飞行器里成功进行了我国首次太空授课。授课中的一个实验展示了失重状态下液滴的表面张力引起的效应。视频中可发现漂浮的液滴处于周期性的“脉动”中

（平时在地球表面附近，重力的存在会导致液滴下降太快，以至于很难观察到液滴的这种“脉动”现象）。假设液滴处于完全失重状态，液滴的上述“脉动”可视为液滴形状的周期性的微小变化（振动），如图所示。



（1）该液滴处于平衡状态时的形状是_____；

（2）决定该液滴振动频率 f 的主要物理量是_____；

（3）按后面括号中提示的方法导出液滴振动频率与上述物理量的关系式。（提示：例如，若认为 a, b, c 是决定该液滴振动频率的相互独立的主要物理量，可将液滴振动频率 f 与 a, b, c 的关系式表示为 $f \propto a^\alpha b^\beta c^\gamma$ ，其中指数 α, β, γ 是相应的待定常数。）

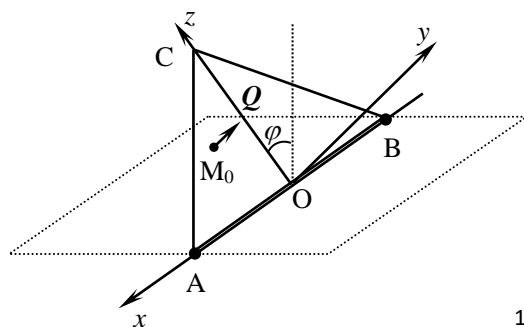
二、（16 分）一种测量理想气体的摩尔热容比 $\gamma \equiv C_p / C_v$ 的方法

（Clement-Desormes 方法）如图所示：大瓶 G 内装满某种理想气体，瓶盖上通有一个灌气（放气）开关 H，另接出一根 U 形管作为压强计 M。瓶内外的压强差通过 U 形管右、左两管液面的高度差来确定。初始时，瓶内外的温度相等，瓶内气体的压强比外面的大气压强稍高，记录此时 U 形管液面的高度差 h_i 。然后打开 H，放出少量气体，当瓶内外压强相等时，即刻关闭 H。等待瓶内外温度又相等时，记录此时 U 形管液面的高度差 h_f 。试由这两次记录的实验数据 h_i 和 h_f ，导出瓶内



气体的摩尔热容比 γ 的表达式。（提示：放气过程时间很短，可视为无热量交换；且 U 形管很细，可忽略由高差变化引起的瓶内气体在状态变化前后的体积变化）

三、（20 分）如图所示，一质量为 m 、底边 AB 长为 b 、等腰边长为 a 、质量均匀分布的等腰三角形平板，可绕过光滑铰链支点 A 和 B 的水平轴 x 自由转动；图中原点 O 位于 AB 的中点， y 轴垂直于板面斜向上，



z 轴在板面上从原点 O 指向三角形顶点 C . 今在平板上任一给定点 $M_0(x_0, 0, z_0)$ 加一垂直于板面的拉力 Q .

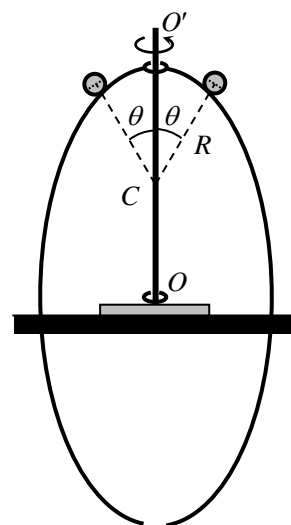
(1) 若平衡时平板与竖直方向成的角度为 φ , 求拉力 Q 以及铰链支点对三角形板的作用力 N_A 和 N_B ;

(2) 若在三角形平板上缓慢改变拉力 Q 的作用点 M 的位置, 使平衡时平板与竖直方向成的角度仍保持为 φ , 则改变的作用点 M 形成的轨迹满足什么条件时, 可使铰链支点 A 或 B 对板作用力的垂直平板的分量在 M 变动中保持不变?

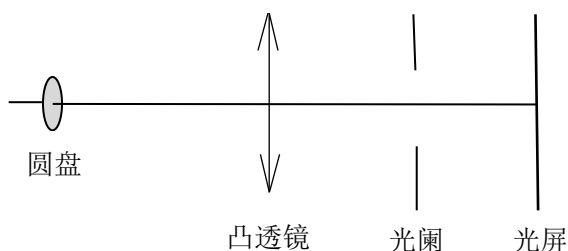
四、(24 分) 如图所示, 半径为 R 、质量为 m_0 的光滑均匀圆环, 套在光滑竖直细轴 OO' 上, 可沿 OO' 轴滑动或绕 OO' 轴旋转. 圆环上串着两个质量均为 m 的小球. 开始时让圆环以某一角速度绕 OO' 轴转动, 两小球自圆环顶端同时从静止开始释放.

(1) 设开始时圆环绕 OO' 轴转动的角速度为 ω_0 , 在两小球从环顶下滑过程中, 应满足什么条件, 圆环才有可能沿 OO' 轴上滑?

(2) 若小球下滑至 $\theta = 30^\circ$ (θ 是过小球的圆环半径与 OO' 轴的夹角) 时, 圆环就开始沿 OO' 轴上滑, 求开始时圆环绕 OO' 轴转动的角速度 ω_0 、在 $\theta = 30^\circ$ 时圆环绕 OO' 轴转动的角速度 ω 和小球相对于圆环滑动的速率 v .



五、(20 分) 如图所示, 现有一圆盘状发光体, 其半径为 5cm, 放置在一焦距为 10cm、半径为 15cm 的凸透镜前, 圆盘与凸透镜的距离为 20cm, 透镜后放置一半径大小可调的圆形光阑和一个接收圆盘像的光屏. 图中所有光学元件相对于光轴对称放置. 请在几何光学近轴范围内考虑下列问题, 并忽略像差和衍射效应.



(1) 未放置圆形光阑时, 给出圆盘像的位置、大小、形状;

(2) 若将圆形光阑放置于凸透镜后方 6cm 处. 当圆形光阑的半径逐渐减小时, 圆盘的像会有什么变化? 是否存在某一光阑半径 r_a , 会使得此时圆盘像的半径变为 (1) 中圆盘像的半径的一半? 若存在, 请给出 r_a 的数值.

(3) 若将圆形光阑移至凸透镜后方 18cm 处, 回答 (2) 中的问题;

(4) 圆形光阑放置在哪些位置时，圆盘像的大小将与圆形光阑的半径有关？

(5) 若将图中的圆形光阑移至凸透镜前方 6cm 处，回答 (2) 中的问题。

六、(22 分) 如图所示，一电容器由固定在共同导电底座上的 $N+1$ 片对顶双扇形薄金属板和固定在可旋转的导电对称轴上的 N 片对顶双扇形薄金属板组成，所有顶点共轴，轴线与所有板面垂直，两组板面各自在垂直于轴线的平面上的投影重合，板面扇形半径均为 R ，圆心角均为 θ_0

($\frac{\pi}{2} \leq \theta_0 < \pi$)；固定金属板和可

旋转的金属板相间排列，两相邻

金属板之间距离均为 s 。此电容器的电容 C 值与可旋转金属板的转角 θ 有关。已知静电力常量为 k 。

(1) 开始时两组金属板在垂直于轴线的平面上的投影重合，忽略边缘效应，求可旋转金属板的转角为 θ ($-\theta_0 \leq \theta \leq \theta_0$) 时电容器的电容 $C(\theta)$ ；

(2) 当电容器电容接近最大时，与电动势为 E 的电源接通充电（充电过程中保持可旋转金属板的转角不变），稳定后断开电源，求此时电容器极板所带电荷量和驱动可旋转金属板的力矩的大小；

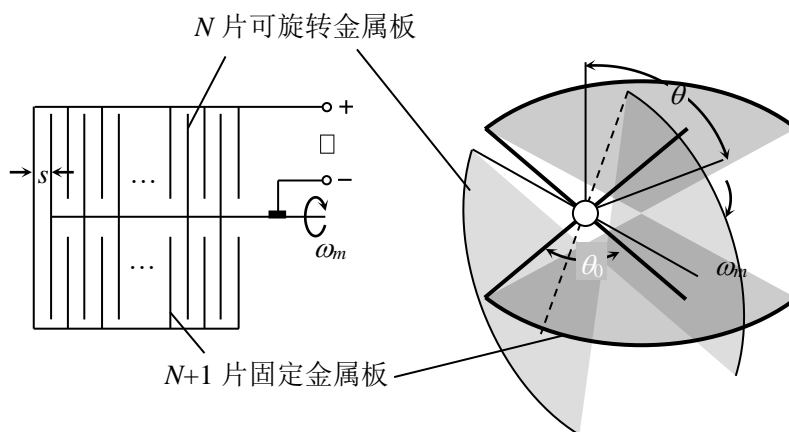
(3) 假设 $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ ，考虑边缘效应后，第 (1) 问中的 $C(\theta)$ 可视为在其最大值和最小值之间光滑变化的函数

$$C(\theta) = \frac{1}{2}(C_{\max} + C_{\min}) + \frac{1}{2}(C_{\max} - C_{\min})\cos 2\theta$$

式中， C_{\max} 可由第 (1) 问的结果估算，而 C_{\min} 是因边缘效应计入的，它与 C_{\max} 的比值 λ 是已知的。若转轴以角速度 ω_m 匀速转动，且 $\theta = \omega_m t$ ，在极板间加一交流电压 $V = V_0 \cos \omega t$ 。试计算电容器在交流电压作用下能量在一个变化周期内的平均值，并给出该平均值取最大值时所对应的 ω_m 。

七、(26 分) Z-箍缩作为惯性约束核聚变的一种可能方式，近年来受到特别重视，其原理如图所示。图中，长 20 mm、直径为 $5 \mu\text{m}$ 的钨丝组成的两个共轴的圆柱面阵列，瞬间通以超强电流，钨丝阵列在安培力的作用下以极大的加速度向内运动，即所谓自箍缩效应；钨丝的巨大动量转移到处于阵列中心的直径为毫米量级的氘氚靶球上，可以使靶球压缩后达到高温高密度状态，实现核聚变。设内圈有 N 根钨丝（可视为长直导线）均匀地分布在半径为 r 的圆周上，通有总电流 $I_{\text{内}} = 2 \times 10^7 \text{ A}$ ；外圈有 M 根钨丝，均匀地分布在半径为 R 的圆周上，每根钨丝所通过的电流同内圈钨丝。已知通有电流 i 的长直导线在距其 r 处产生的磁感应强度大小为 $k_m \frac{i}{r}$ ，式中比例常量 $k_m = 2 \times 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m/A} = 2 \times 10^{-7} \text{ N/A}^2$ 。

(1) 若不考虑外圈钨丝，计算内圈某一根通电钨丝中间长为 ΔL 的一小段钨丝所受到的安培力；



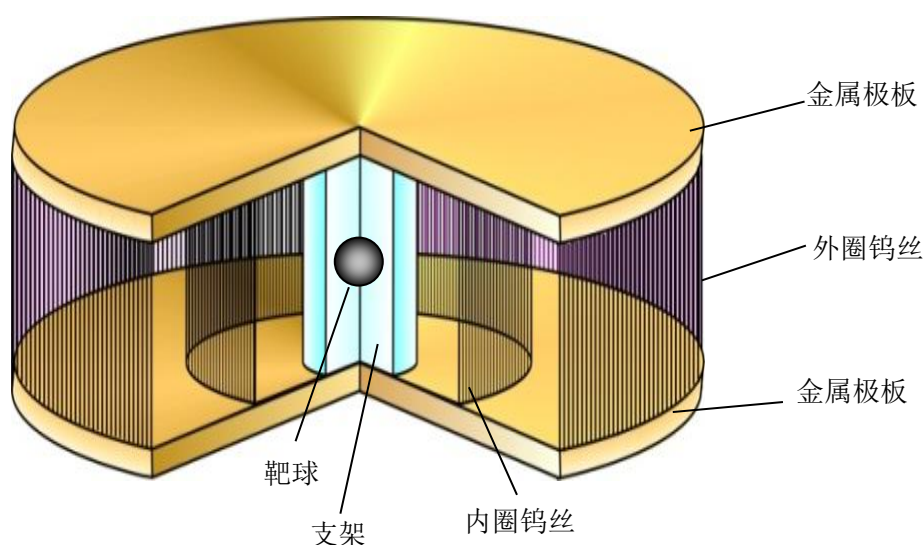
(2) 若不考虑外圈钨丝，内圈钨丝阵列熔化后形成了圆柱面，且箍缩为半径 $r = 0.25\text{cm}$ 的圆柱面时，求柱面上单位面积所受到的安培力，这相当于多少个大气压？

(3) 证明沿柱轴方向通有均匀电流的长圆柱面，圆柱面内磁场为零，即通有均匀电流外圈钨丝的存在不改变前述两小题的结果；

(4) 当 $N \gg 1$ 时，则通有均匀电流的内圈钨丝在外圈钨丝处的磁感应强度大小为 $k_m \frac{I_{\text{内}}}{R}$ ，若要求外圈钨丝柱面每单位面积所受到的安培力大于内圈钨丝柱面每单位面积所受到的安培力，求外圈钨丝圆柱面的半径 R 应满足的条件；

(5) 由安培环路定理可得沿柱轴方向通有均匀电流的长圆柱面外的磁场等于该圆柱面上所有电流移至圆柱轴后产生的磁场，请用其他方法证明此结论。

(计算中可不考虑图中支架的影响)



八、(20 分) 天文观测表明，远处的星系均离我们而去。著名的哈勃定律指出，星系离开我们的速度大小 $v = HD$ ，其中 D 为星系与我们之间的距离，该距离通常以百万秒差距 (Mpc) 为单位； H 为哈勃常数，最新的测量结果为 $H = 67.80\text{km}/(\text{s} \cdot \text{Mpc})$ 。当星系离我们远去时，它发出的光谱线的波长会变长 (称为红移)。红移量 z 被定义为 $z = \frac{\lambda' - \lambda}{\lambda}$ ，其中 λ' 是我们观测到的星系中某恒星

发出的谱线的波长，而 λ 是实验室中测得的同种原子发出的相应的谱线的波长，该红移可用多普勒效应解释。绝大部分星系的红移量 z 远小于 1，即星系退行的速度远小于光速。在一次天文观测中发现从天鹰座的一个星系中射来的氢原子光谱中有两条谱线，它们的频率 ν' 分别为 $4.549 \times 10^{14}\text{Hz}$ 和 $6.141 \times 10^{14}\text{Hz}$ 。由于这两条谱线处于可见光频率区间，可假设它们属于氢原子的巴尔末系，即为由 $n > 2$ 的能级向 $k=2$ 的能级跃迁而产生的光谱。(已知氢原子的基态能量 $E_0 = -13.60\text{eV}$ ，真空中光速 $c = 2.998 \times 10^8\text{m/s}$ ，普朗克常量 $h = 6.626 \times 10^{-34}\text{J} \cdot \text{s}$ ，电子电荷量 $e = 1.602 \times 10^{-19}\text{C}$)

(1) 该星系发出的光谱线对应于实验室中测出的氢原子的哪两条谱线？它们在实验室中的波长分别是多少？

(2) 求该星系发出的光谱线的红移量 z 和该星系远离我们的速度大小 v ；

(3) 求该星系与我们的距离 D 。