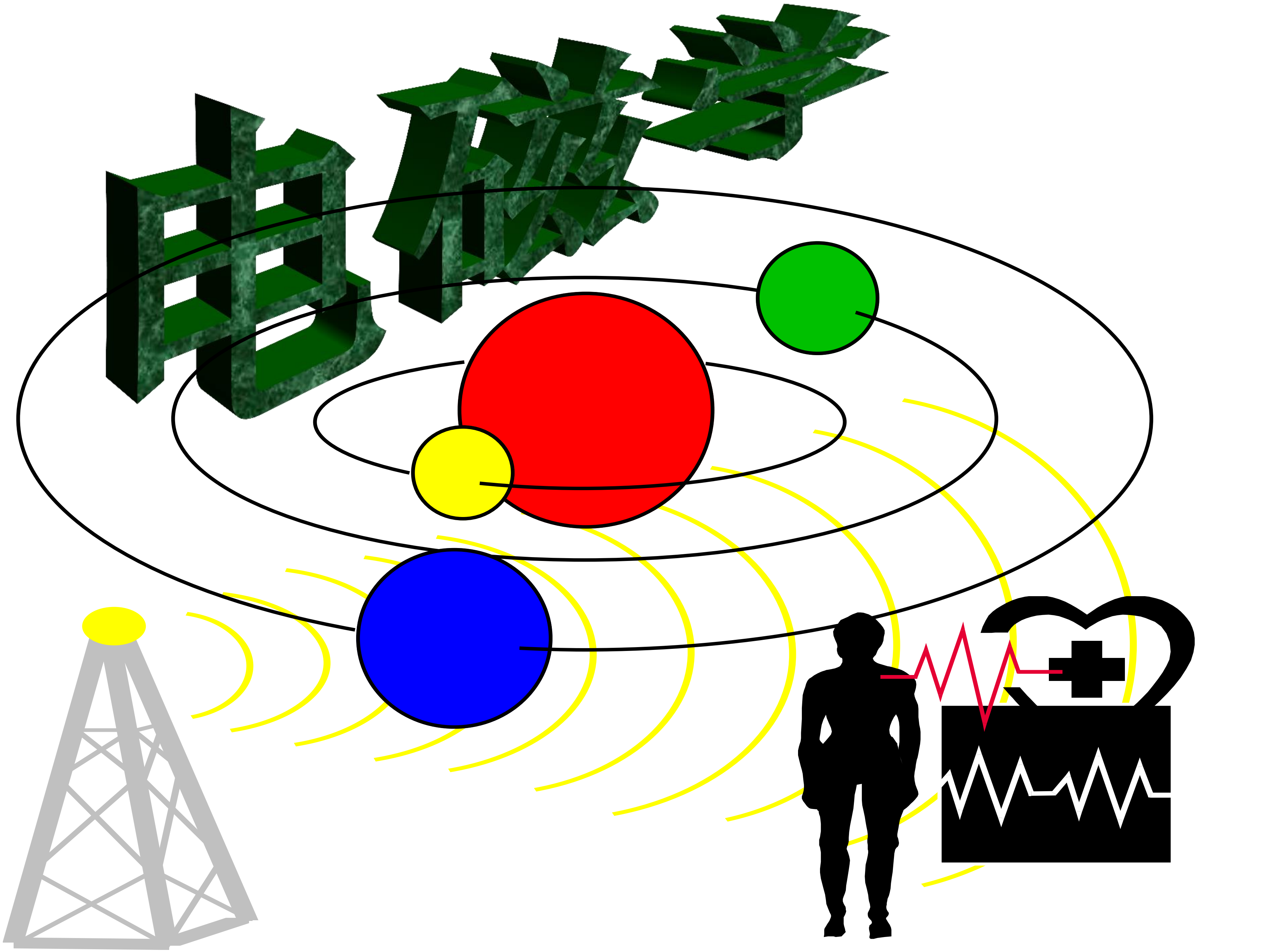

电磁学

电磁学 Electromagnetism

引言

电磁学与力学区别

力学: 粒子的运动 (单个或多个)

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \qquad \vec{p},\ \frac{1}{2}m\upsilon^2,\ \vec{r}\times\vec{p},\ \ldots\ldots$$

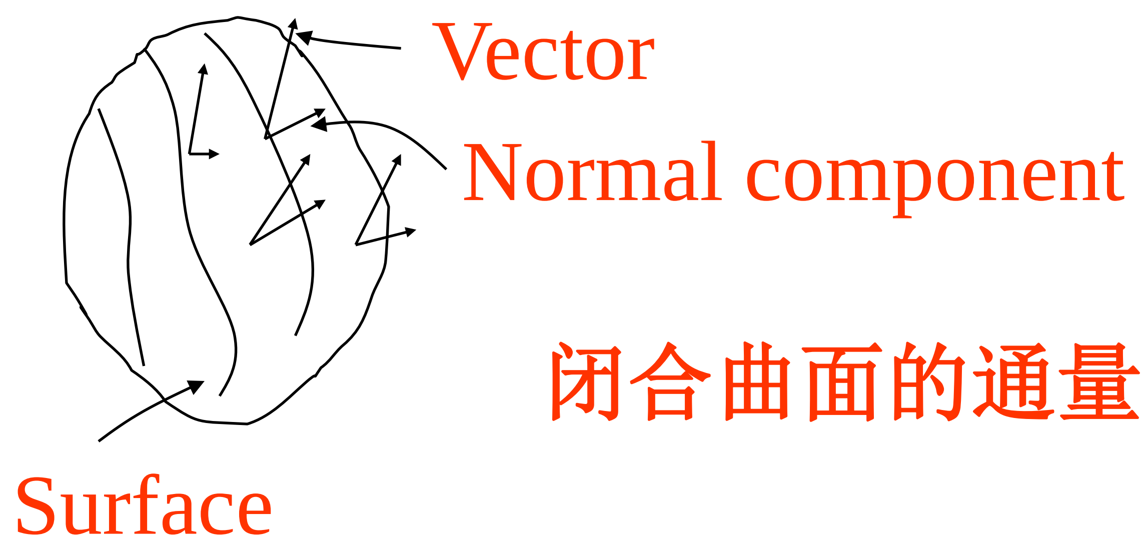
电磁学: 带电粒子? 只是场量的源而已

电磁学：场量的性质

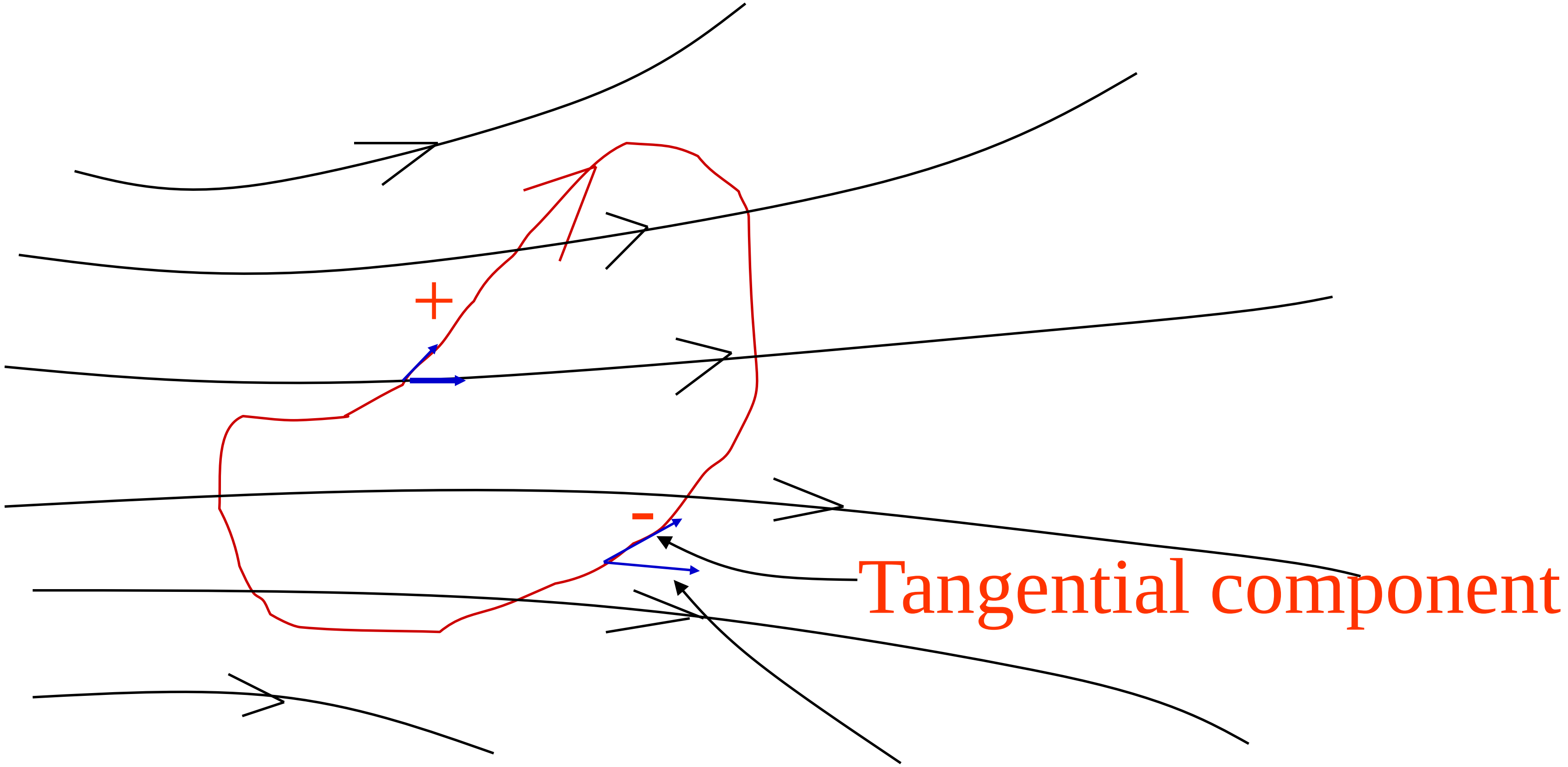
$$\vec{E}(x,y,z,t), \quad \vec{B}(x,y,z,t)$$ 如何描述?

数学描述矢量场的方法

通量（$Flux$）= 平均法线分量·面积



闭合曲面的通量



闭合路径的环量

环量（Circulation）＝平均切线分量·环路径

第一章 真空中的静电场

Electrostatic field

§1 电荷 库仑定律 电场 电场强度

§2 电通量 高斯定理 散度

§3 环路定理 电势 旋度 梯度

§4 类比结论

§1 电荷　库仑定律　　电场　电场强度

一、电荷

- 两种　摩擦生电

- 电荷量子化

　1906-1917年，密立根液滴法实验

- 电量是相对论不变量

- 电荷守恒定律（局域）

二、库仑定律(Coulomb Law)

1785年，库仑通过扭称实验得到。

$$\boxed{\vec{f} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}}$$

1) 基本实验规律

2) 库仑力很强

3) 点电荷　　理想模型

4) 适用范围：微观 – 宏观

5) 电力叠加原理(独立作用原理)

三、电场强度

早期：超距作用

后来：法拉第提出近距作用

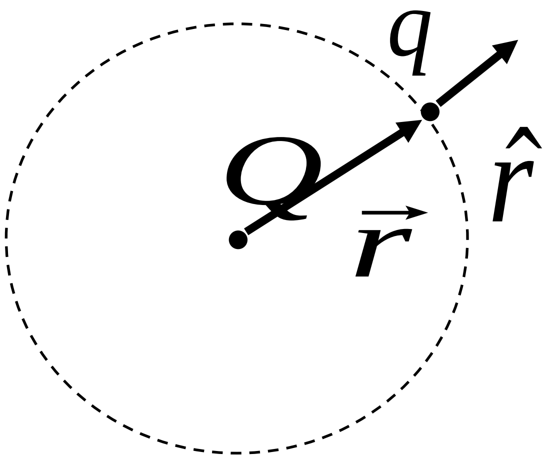
并提出力线和场的概念

试验表明：确定场点　比值 $\vec{f}/q$ 与试验电荷无关

电场强度定义 $$\boxed{\vec{E}=\frac{\vec{f}}{q}}$$

1. 点电荷的场强公式

$$\boxed{\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}}$$

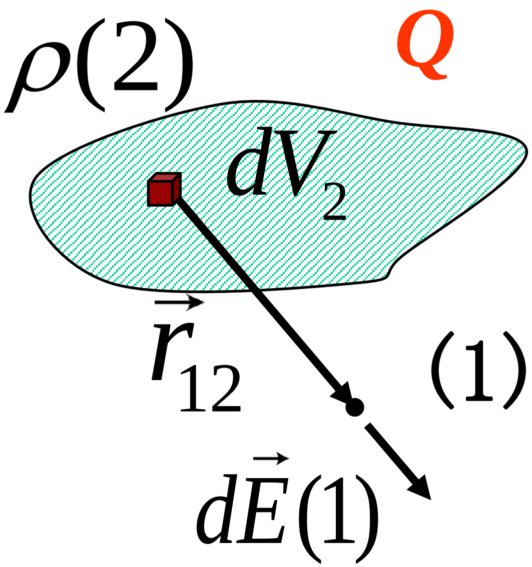


$$\boxed{\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i}$$

- 球对称

或 $$\vec{E} = \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i^2}\hat{r}_i$$

2. 若带电体可看作是电荷连续分布的



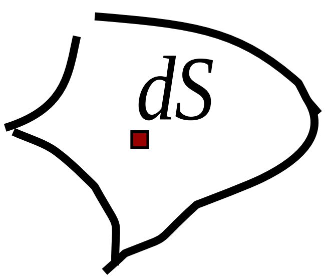
体电荷密度 $\rho = \dfrac{dq}{dV}$

场强叠加原理

$$\boxed{\vec{E}(1) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{(Q)}\frac{\rho(2)dV_2}{r_{12}^2}\hat{r}_{12}}$$

矢量求和！

面电荷密度



$$\boxed{\sigma = \frac{dq}{dS}}$$

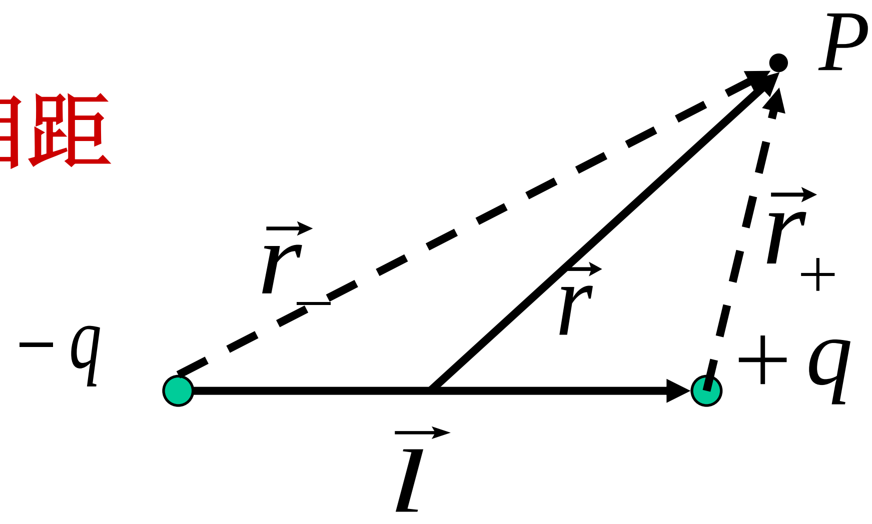
线电荷密度

$$\boxed{\lambda = \frac{dq}{dl}}$$

3. 电偶极子的场

一对等量异号电荷相距

若 $r \gg l$

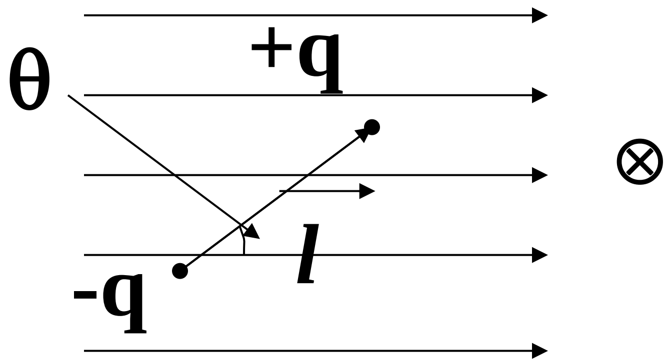


电偶极子(electric dipole)

电偶极矩 (electric moment) $\boxed{\vec{p} = q\vec{l}}$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left[-\vec{p} + 3(\hat{r}\cdot\vec{p})\hat{r}\right]}$$

电偶极矩受力



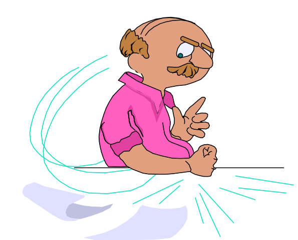
均匀电场中总电场力为零

电场力矩

$$\vec{M}=\vec{r}_{+}\times q\vec{E}-\vec{r}_{-}\times q\vec{E}=q(\vec{r}_{+}-\vec{r}_{-})\times\vec{E}=\vec{p}\times\vec{E}$$

力矩垂直屏面，电偶极子只在屏面转动

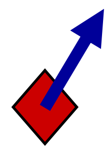
$$\boxed{\vec{M}=\vec{p}\times\vec{E}}$$



§ 2 电通量 高斯定理 散度

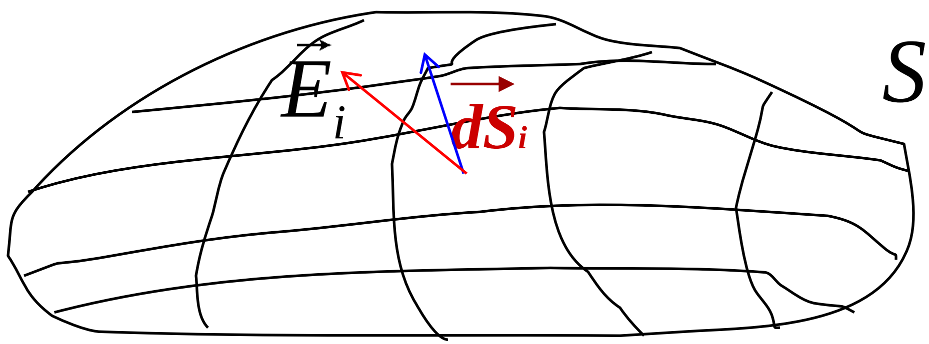
一. 电通量 （electric flux）

面元



$$d\vec{S} = \hat{n} dS$$

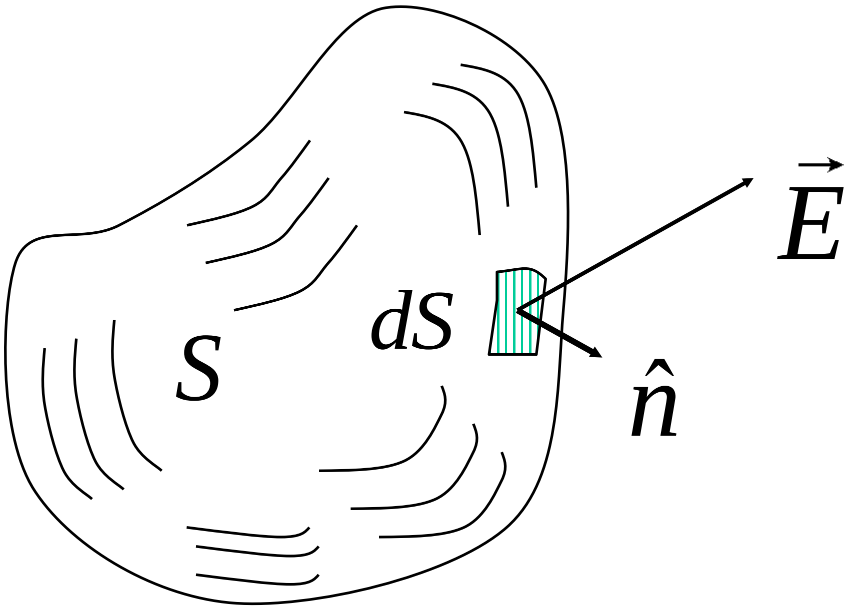
$$\boxed{d\phi = \vec{E} \cdot d\vec{S}}$$



求和

$$\boxed{\phi = \sum_i \vec{E}_i \cdot d\vec{S}_i \equiv \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}}$$

● 通过闭合面的电通量



面元方向:
闭合面内指
向面外

$$\sum_i \vec{E}_i \cdot d\vec{S}_i$$

通过闭合面*S*的*E*通量 = $\oiint_S \vec{E} \cdot \hat{n} dS$

二. 静电场的高斯定理　Gauss theorem

1. 表述

在真空中的静电场内，任一闭合面的电通量等于这闭合面所包围的电量的代数和除以 ε_0

$$\boxed{\oint\!\!\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}=\frac{\sum\limits_i q_{i内}}{\varepsilon_0}}$$

1. 闭合面内、外电荷的贡献

对 $\vec{E}$ 都有贡献

对电通量 $\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$ 的贡献有差别

只有闭合面内的电量对电通量有贡献

2. 静电场性质的基本方程

有源场

三. 高斯定理在解场方面的应用

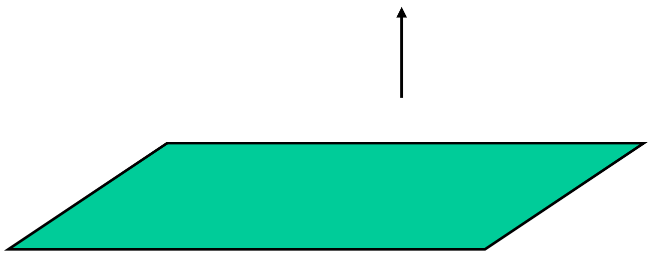
对 Q 的分布具有某种对称性的情况下

利用高斯定理解 $\vec{E}$ 较为方便

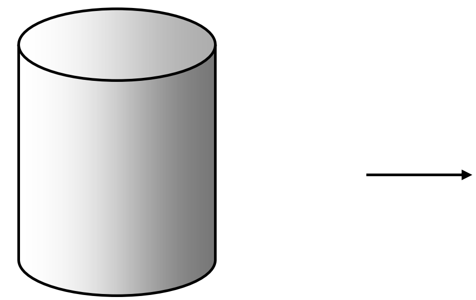
常见的电量分布的对称性：

均匀带电的	球对称	柱对称	面对称
		无限长	无限大
	球体	柱体	平板
	球面	柱面	平面
	(点电荷)	带电线	

电荷分布对称性导致电场分布的对称性

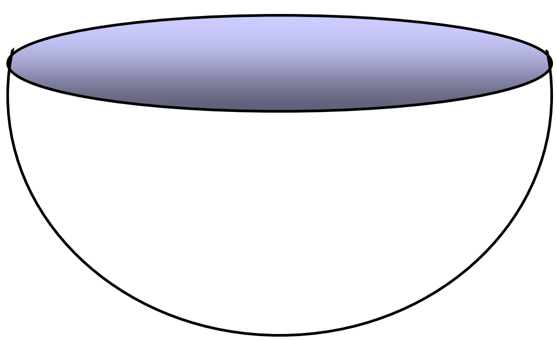


无限大



无限长

均匀带电



思考题

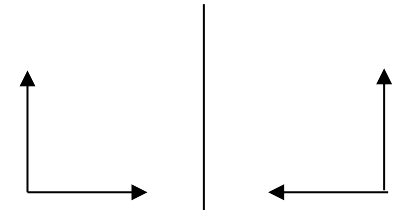
半球面上均匀带电，
大圆面上的电场方向？

镜像对称性

对称性: 对某种操作或变换保持不变

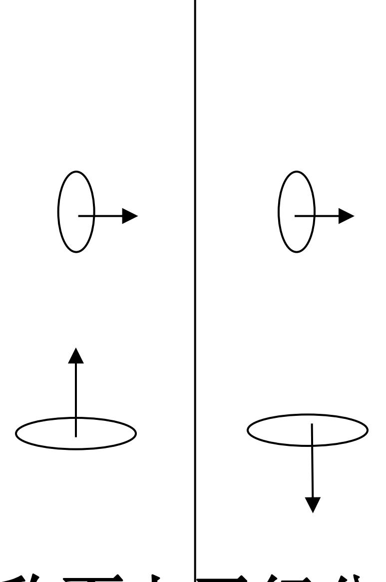
极矢量

(速度、加速度、电场）



对称面上垂直分量 0

镜像变换对称性

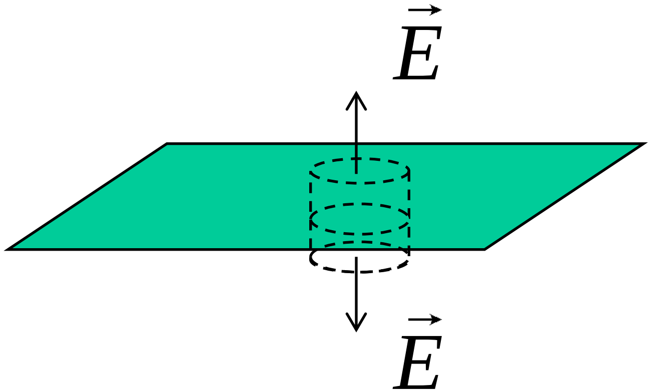


赝(轴)矢量

(角速度、角动量、磁场）

对称面上平行分量 0

无限大 均匀带电平板

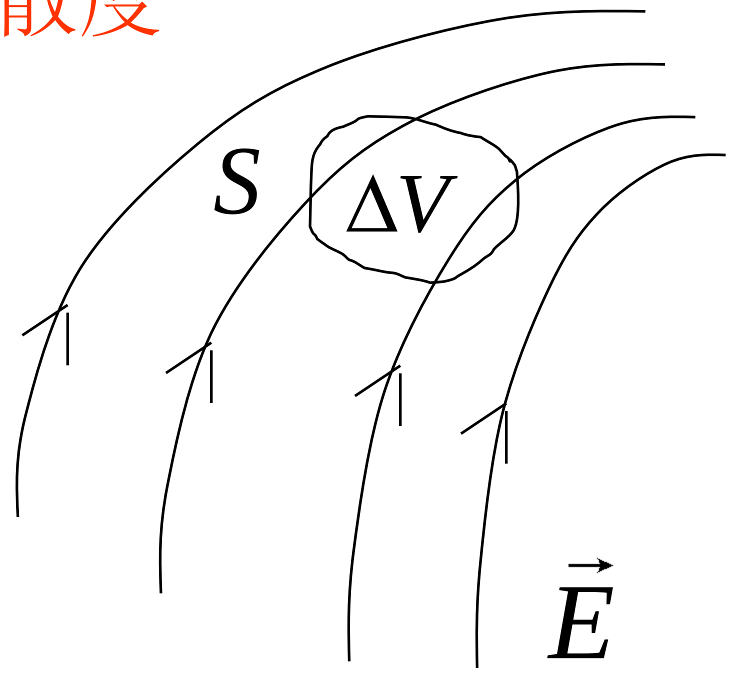


1. 根据对称性判断电场分布特性

2. 找到高斯面求出电场大小

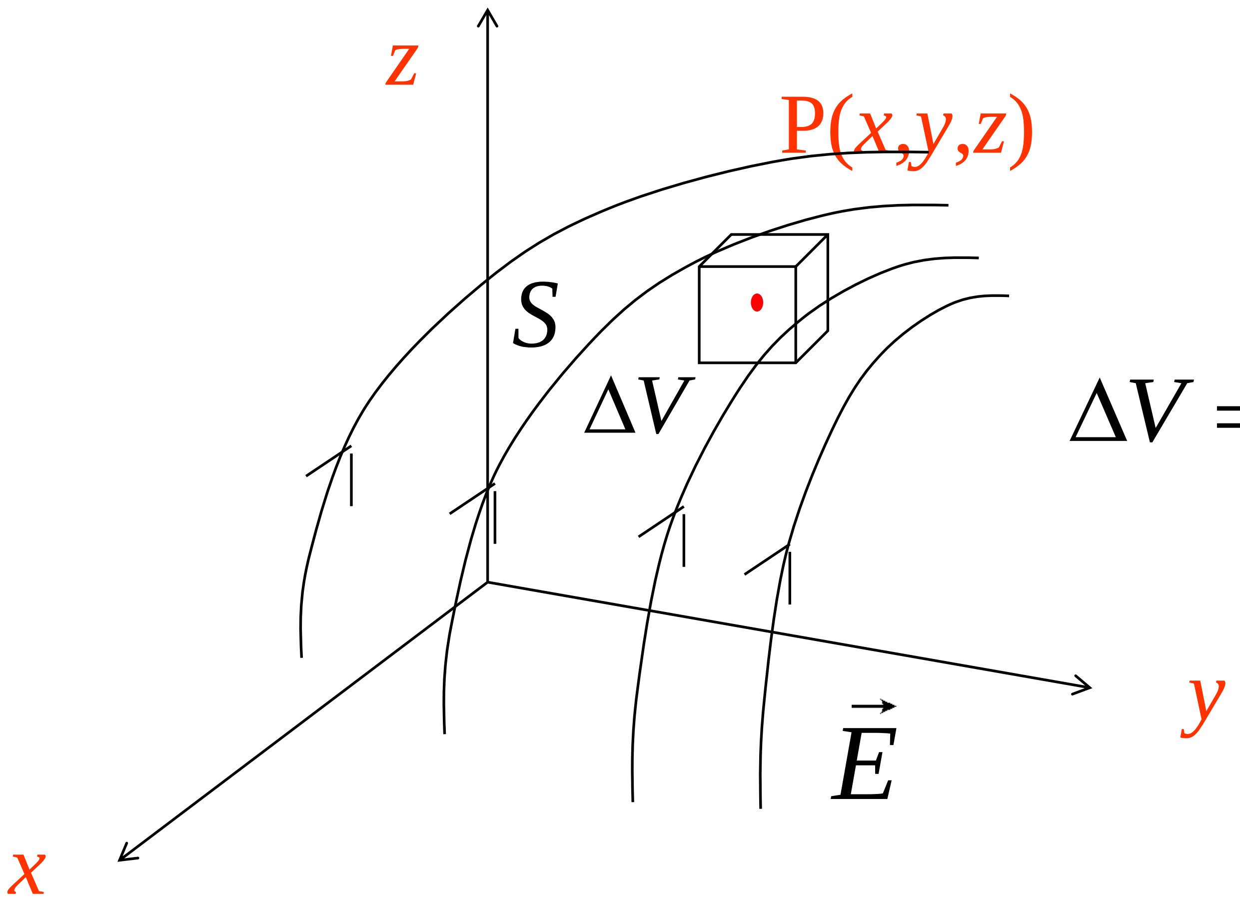
$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_o}$$

*六. 散度



局域通量特性？

$$
\boxed{\mathrm{div}\vec{E} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\oint\!\!\!\oint_{\Delta S} \vec{E} \cdot d\vec{S}}{\Delta V}}
$$

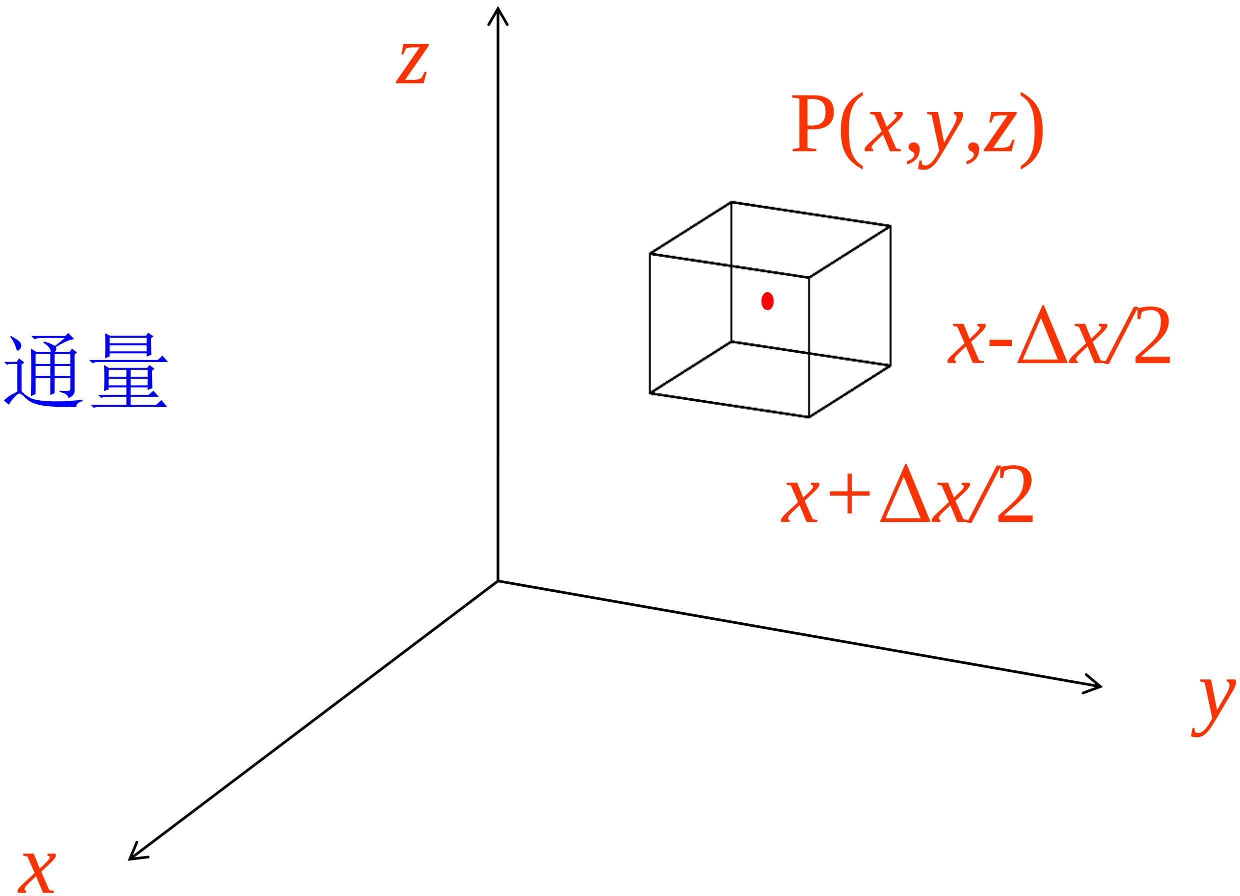


$$\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$$

在直角坐标系

为简单选择长方形

计算小盒子的通量



x方向通量

$$E_x(x+\frac{\Delta x}{2})\Delta y\Delta z - E_x(x-\frac{\Delta x}{2})\Delta y\Delta z \approx \frac{\partial E_x}{\partial x}\Delta x\Delta y\Delta z$$

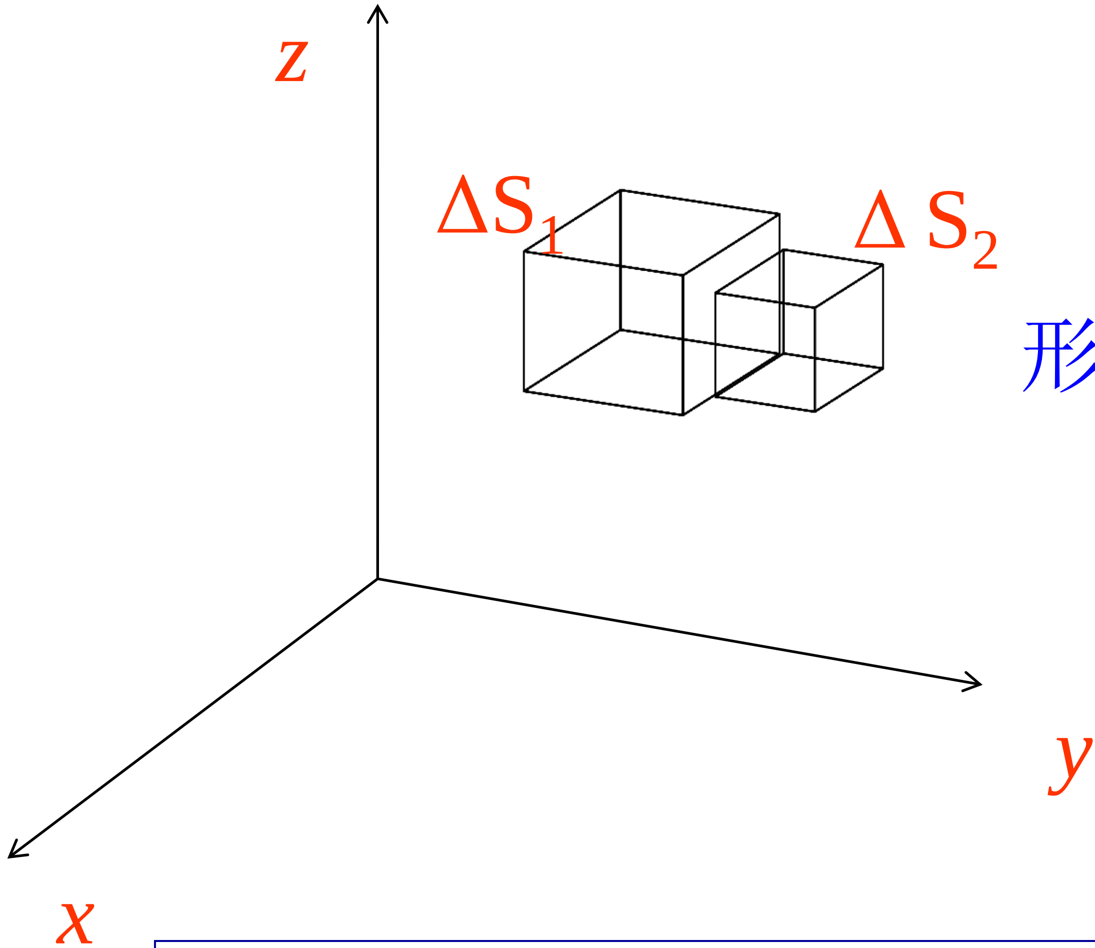
同理对y、z方向

$$\oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} \approx \left(\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}\right)\Delta V$$

$$\boxed{\mathrm{div}\vec{E}=\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}=\vec{\nabla}\cdot\vec{E}}$$

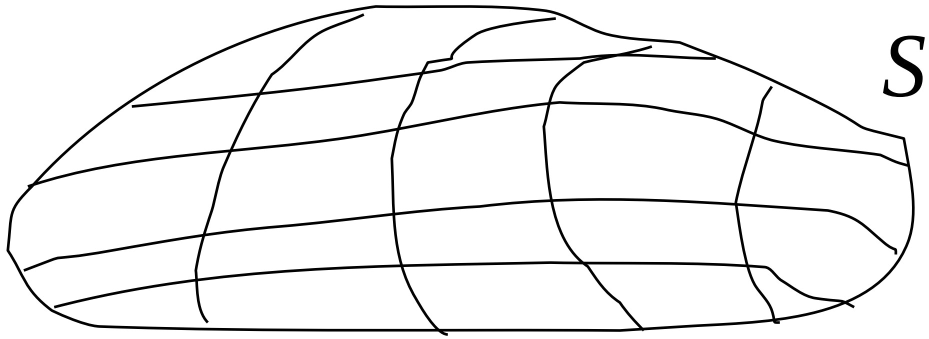
梯度算符

$$\boxed{\nabla=\vec{i}\,\frac{\partial}{\partial x}+\vec{j}\,\frac{\partial}{\partial y}+\vec{k}\,\frac{\partial}{\partial z}}$$



形状无关

$$\boxed{\iint\limits_{\Delta S} \vec{E}\cdot d\vec{S} = \iint\limits_{\Delta S_1} \vec{E}\cdot d\vec{S} + \iint\limits_{\Delta S_1} \vec{E}\cdot d\vec{S}}$$



分无数小块

$$\oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \sum_i \oiint_{\Delta S_i} \vec{E}\cdot d\vec{S} = \sum_i \mathrm{div}\vec{E}\,\Delta V_i$$

$$= \iiint_V \mathrm{div}\vec{E}\, dV$$

数学上的高斯定理

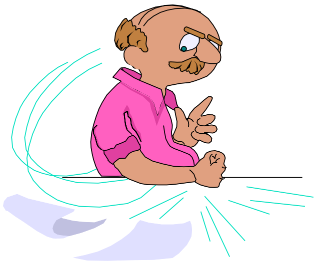
$$\mathrm{div}\vec{E} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\oiint_{\Delta S} \vec{E} \cdot d\vec{S}}{\Delta V}$$

$$\mathrm{div}\vec{E}\Delta V \approx \oiint_{\Delta S} \vec{E} \cdot d\vec{S} \approx \frac{\rho \Delta V}{\varepsilon_0}$$

无穷小极限下严格等式

$$\boxed{\mathrm{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$



§3 环路定理　电势　旋度　梯度

1. 静电场的环路定理

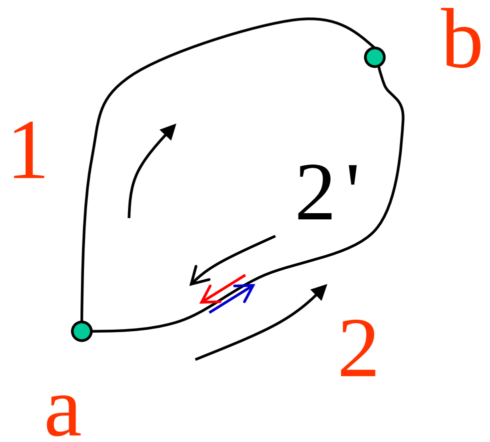
与万有引力相似

单个电荷电场

$$-\int_{(a)}^{(b)} \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

只和初末位置有关, 路径无关

多个点电荷场, 利用场强叠加原理知, 结论相同



$$-\int_{(1)} \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\int_{(2)} \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

$$-\int_{(1)} \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_{(2')} \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

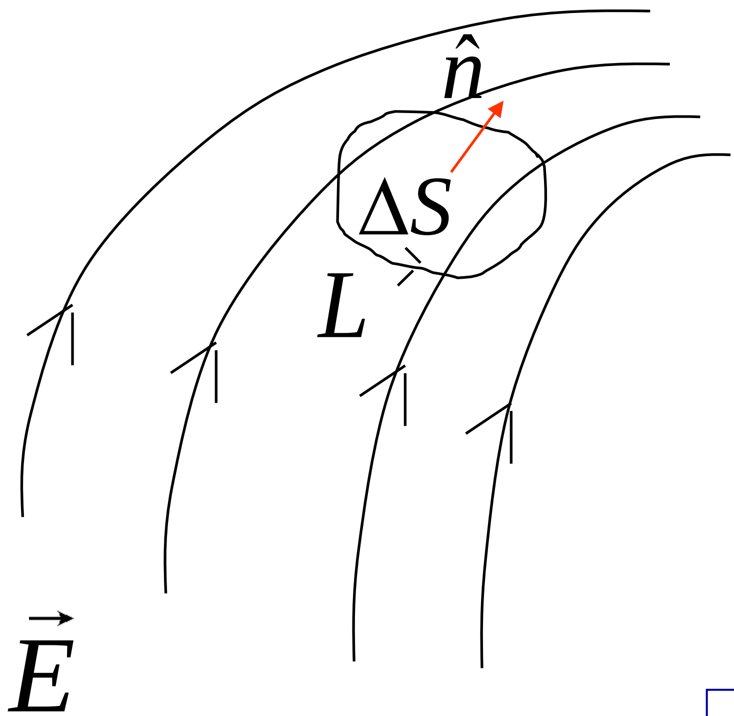
$$\int_{(1)} \vec{E}\cdot d\vec{l} + \int_{(2')} \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0$$

$$\boxed{\oint_{L} \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0}$$

静电场环路定理
静电场的保守性

静电场线不能闭合

*2. 旋度



局域环流特性？

$\mathrm{curl}\,\vec{E}$ 矢量

为简单先考虑平面环路

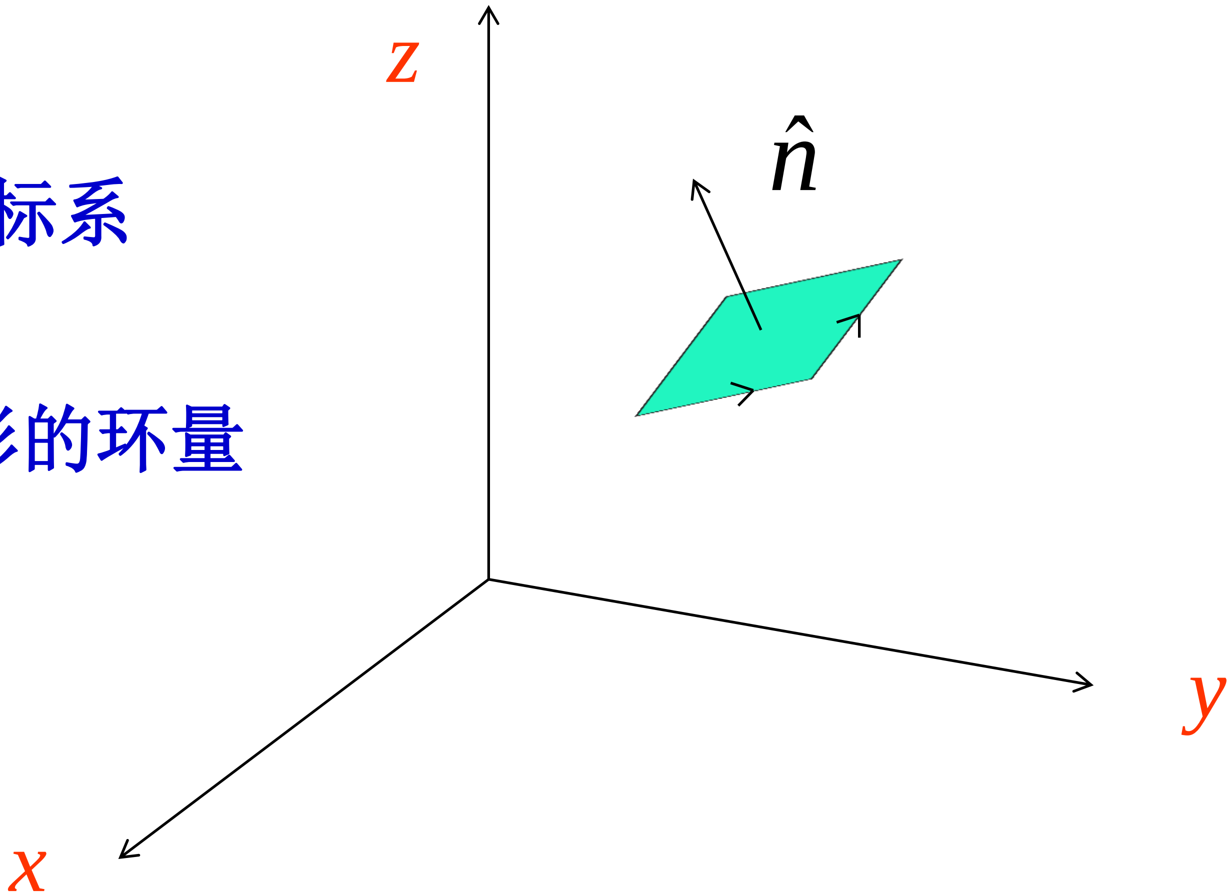
小环路右手螺旋法向

大小

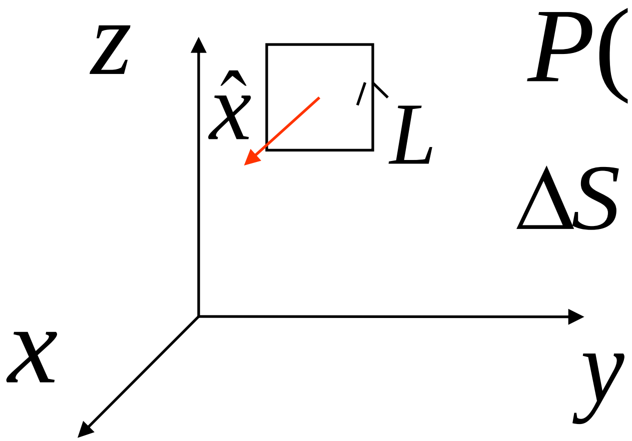
$$\boxed{\hat{n}\cdot\mathrm{curl}\vec{E}=\lim_{\Delta S\to 0}\frac{\oint_{\Delta S}\vec{E}\cdot d\vec{l}}{\Delta S}}$$

在直角坐标系

计算小矩形的环量



$$\hat{n}\cdot\mathrm{curl}\vec{E}=\lim_{\Delta S\to 0}\frac{\oint_{\Delta S}\vec{E}\cdot d\vec{l}}{\Delta S}$$



$$P(x, y, z)$$

$$\Delta S = \Delta y \Delta z$$

$$\left(\text{curl } \vec{E}\right)_x = \frac{\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l}}{\Delta y \Delta z}$$

$$E_y\left(z - \frac{\Delta z}{2}\right)\Delta y - E_y\left(z + \frac{\Delta z}{2}\right)\Delta y \longrightarrow -\frac{\partial E_y}{\partial z}\Delta z \Delta y$$

$$+E_z\left(y + \frac{\Delta y}{2}\right)\Delta z - E_z\left(y - \frac{\Delta y}{2}\right)\Delta z \longrightarrow \frac{\partial E_z}{\partial y}\Delta y \Delta z$$

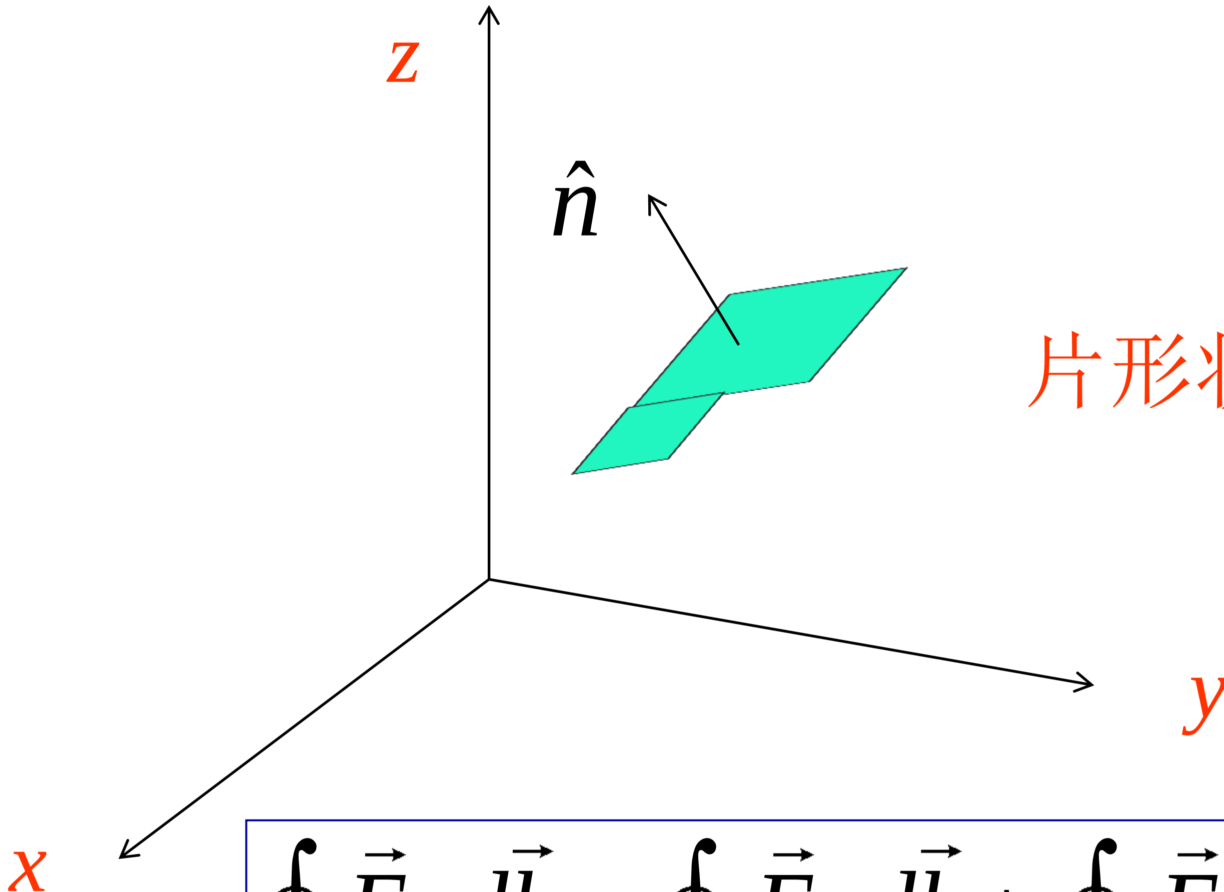
$$\boxed{\left(\text{curl } \vec{E}\right)_x = \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}}$$

同理对y、z方向

$$\boxed{\left(\text{curl}\,\vec{E}\right)_y=\frac{\partial E_x}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial x}}\qquad\boxed{\left(\text{curl}\,\vec{E}\right)_z=\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}}$$

直角坐标系下 $\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)_x=A_yB_z-A_zB_y$

$$\boxed{\text{curl}\,\vec{E}=\vec{\nabla}\times\vec{E}}\qquad\nabla\times\vec{A}=\begin{vmatrix}\hat{x} & \hat{y} & \hat{z}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ A_x & A_y & A_z\end{vmatrix}$$



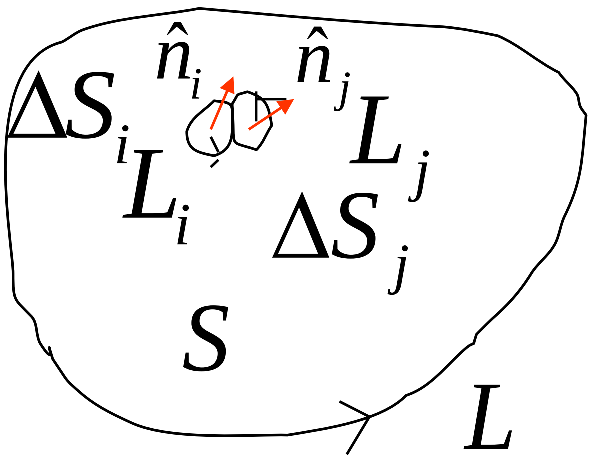
片形状无关

$$\oint_{\Delta S}\vec{E}\cdot d\vec{l}=\oint_{\Delta S_1}\vec{E}\cdot d\vec{l}+\oint_{\Delta S_2}\vec{E}\cdot d\vec{l}$$

两片不在一个面上也成立

斯托克斯Stokes定理

$$\left(\text{curl } \vec{E}\right)_n = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l}}{\Delta S}$$

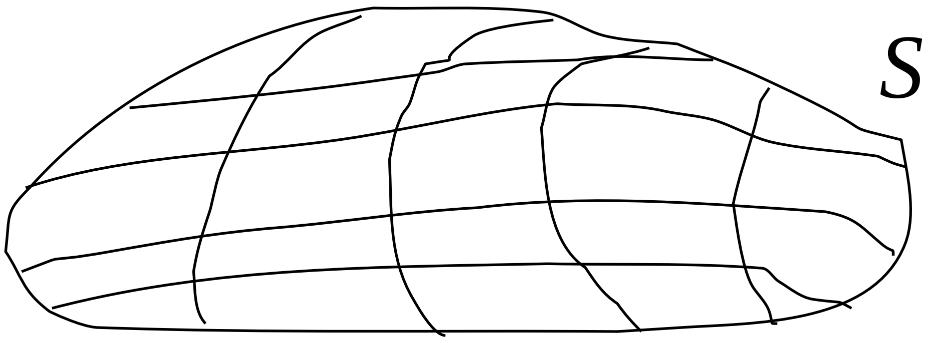


$$\oint_{L_i} \vec{E} \cdot d\vec{l} \approx \left(\text{curl } \vec{E}\right)_{n_i} \Delta S_i$$

$$= \text{curl } \vec{E} \cdot \hat{n}_i \Delta S_i$$

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = \sum_i \oint_{L_i} \vec{E} \cdot d\vec{l} \approx \sum_i \text{curl } \vec{E} \cdot \hat{n}_i \Delta S_i = \iint_S \text{curl } \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

$$\boxed{\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = \iint_S \text{curl } \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_S \vec{\nabla} \times \vec{E} \cdot d\vec{S}}$$



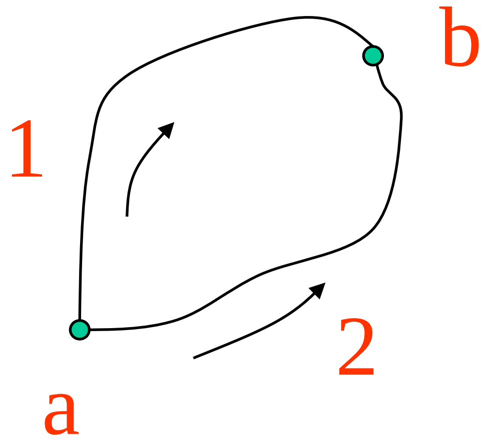
$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{l} = \iint_S curl\vec{E}\cdot d\vec{S}$$

$$||$$

0 对于静电场

$$\boxed{\mathrm{curl}\vec{E}=0} \qquad \boxed{\nabla\times\vec{E}=0}$$

3. 电势和叠加原理

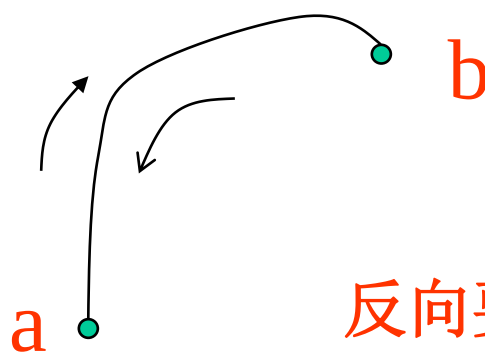


$$U(b)-U(a)=-\int_{(a)}^{(b)}\vec{E}\cdot d\vec{l}$$

只和初末位置有关, 路径无关

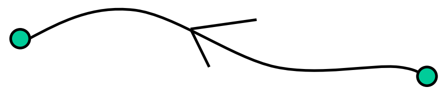
利用这个积分定义函数差 — 电势差

为什么是函数差?



反向要变号

设参考点 $\mathbf{P_0}$ $U(P_0)=0$

P  P_0

电势

$$\boxed{U(P)=-\int_{P_0}^{P}\vec{E}\cdot d\vec{l}}$$

- 沿电场线电势下降

点电荷电势

$$-\int_{(a)}^{(b)}\vec{E}\cdot d\vec{l}=-\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_a}-\frac{1}{r_b}\right)$$

P_0 选在无限远处

$$U(x,y,z) = -\int_{\infty}^{P} \vec{E}\cdot d\vec{l} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}$$

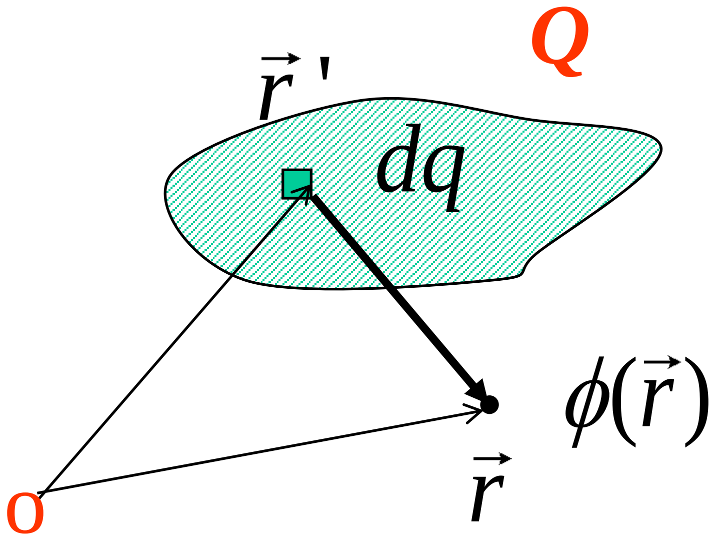
电势叠加原理

$$U = -\int_{P_0}^{P} \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\int_{P_0}^{P} \sum_i \vec{E}_i \cdot d\vec{l}_i = \sum_i \left(-\int_{P_0}^{P} \vec{E}_i \cdot d\vec{l}_i \right) = \sum_i U_i$$

点电荷系 $$U = \sum_i \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i}{r_i}$$

点电荷系在 $\vec{r}$ 处的电势

$$U=\sum_i \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|}$$



电荷连续分布

$$U(\vec{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{(Q)}\frac{dq}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$

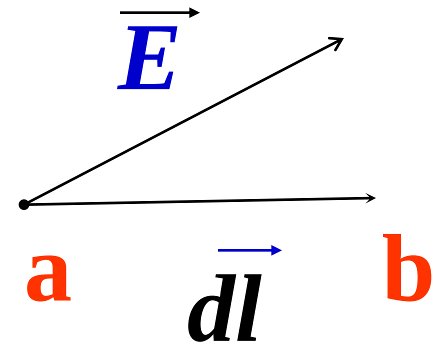
$$dq=\rho(\vec{r}\,')dV'$$

$$dq=\sigma(\vec{r}\,')dS'$$

$$dq=\lambda(\vec{r}\,')dl'$$

4. 电势梯度

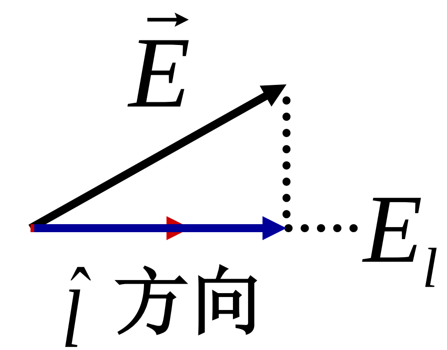
$$-\int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{l} = U_b - U_a$$



$$-E_l dl = dU$$

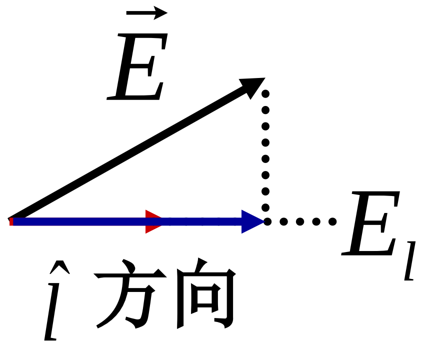
$$E_l = -\frac{dU}{dl}$$

$$\boxed{E_l = -\frac{\partial U}{\partial l}}$$



即电场强度在 l 方向的分量值

等于电势在 l方向的方向导数的负值



$$E_l = -\frac{\partial U}{\partial l}$$

哪个方向导数最大?

沿电场方向

数学上最大的方向导数叫梯度 **grad**

结合起来

$$\boxed{\vec{E} = -\mathrm{grad}U}$$

$$\boxed{\vec{E} = E_x\vec{i} + E_y\vec{j} + E_z\vec{k}}$$

$$E_x = -\frac{\partial U}{\partial x} \qquad E_y = -\frac{\partial U}{\partial y} \qquad E_z = -\frac{\partial U}{\partial z}$$

$$\vec{E} = -\mathrm{grad}U = -\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} - \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}$$

$$\boxed{\vec{E} = -\nabla U}$$

$$E_l = -\frac{\partial U}{\partial l} = -(\nabla U)\cdot\hat{l}$$

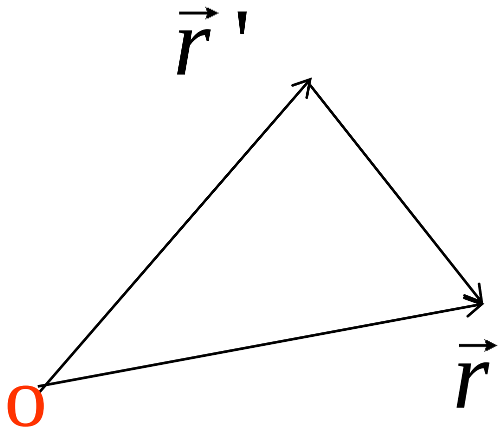
1. 梯度与坐标系的选择无关

2. 计算某点电场，须知该点电势的邻域性质

例 利用电势梯度求电场强度

$$U(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{(Q)} \frac{\rho(\vec{r}\,')dV'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$

$$\vec{E} = -\nabla U(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\nabla\int_{(Q)} \frac{\rho(\vec{r}\,')dV'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$



$$= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{(Q)} \nabla\frac{\rho(\vec{r}\,')dV'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{(Q)} \frac{\rho(\vec{r}\,')dV'}{(\vec{r}-\vec{r}\,')^2}\frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$

*5. 微分角度定义电势

静电场是保守场

$$\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0 \quad \to \quad \boxed{\mathrm{curl}\,\vec{E} = 0} \longrightarrow \quad \vec{\nabla}\times\vec{E} = 0$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{\nabla} = 0$$

可以定义一个函数 U

$$\vec{E} = -\nabla U$$

静电场可以定义电势

静电场高斯定律 $$\nabla\cdot\vec{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

静电场方程 $$\boxed{\nabla^2 U=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$

偏微分方程需要边界条件，比如 $\boxed{U|_S=f}$

Earnshaw’s theorem:

带电粒子只靠静电场不能达到稳定平衡

$$\vec{E}=-\nabla U=0 \qquad \nabla^2 U=0$$

6. 等势面

由电势相等的点组成的面叫等势面

满足方程 $U(x,y,z)=C$

$$-E_l dl = dU = 0$$

电力线处处垂直等势面

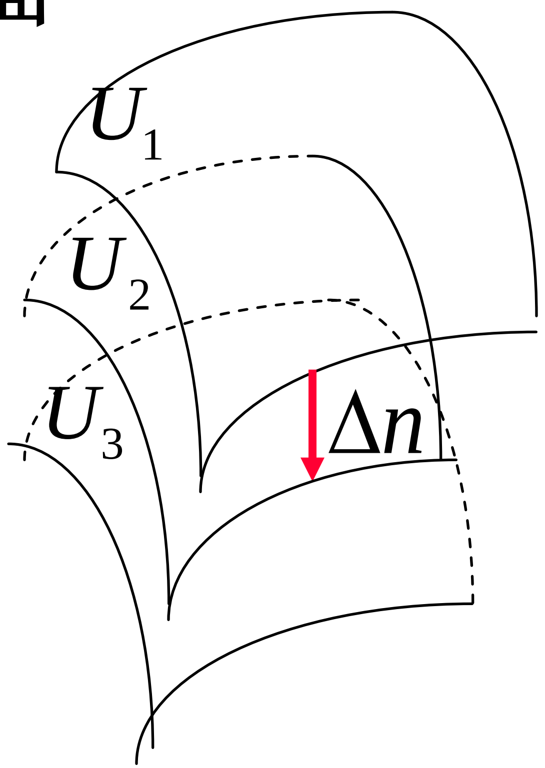
当常量 C 取等间隔数值时

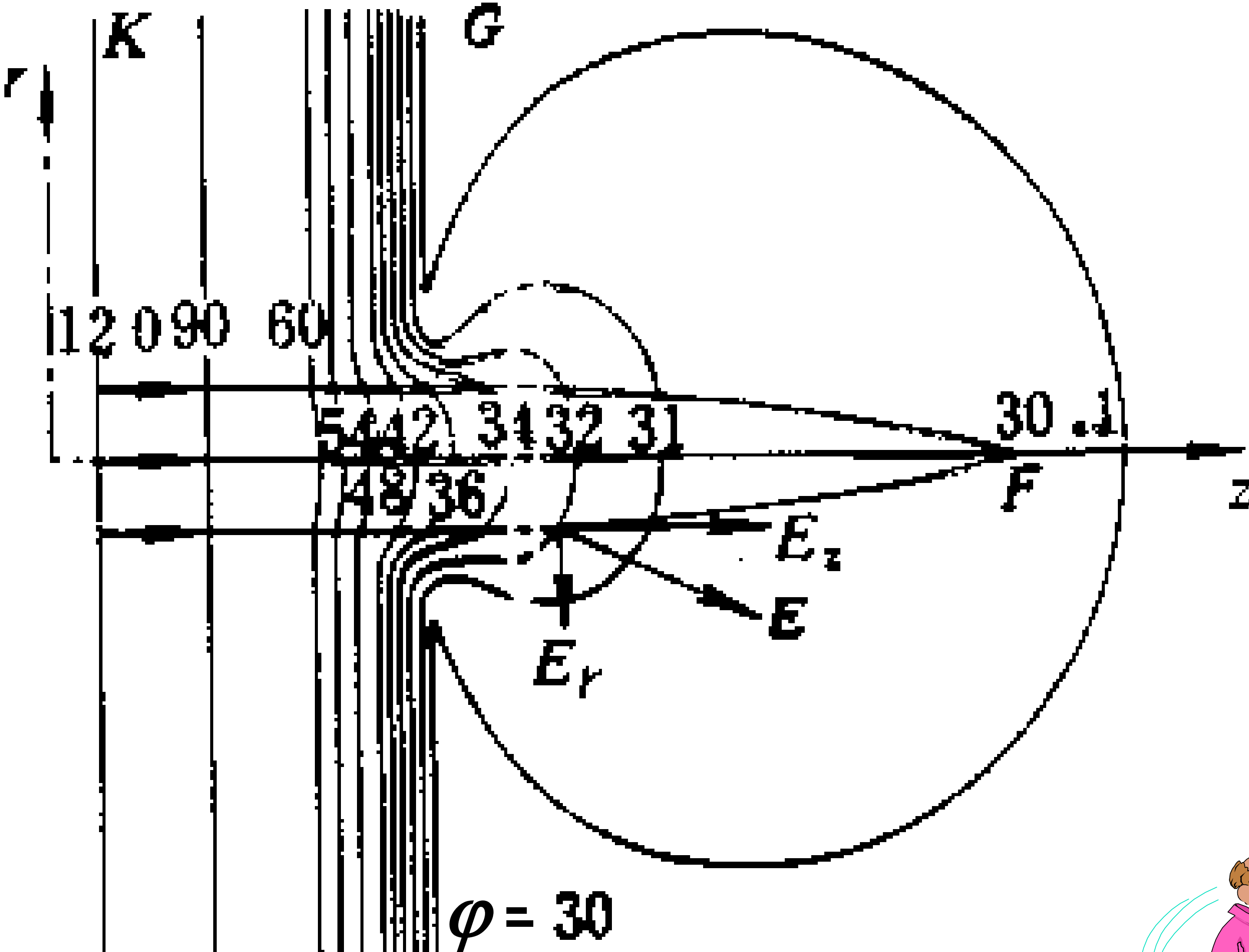
一系列的等势面 $\Delta U_{12}=\Delta U_{23}$

$U_1 < U_2 < U_3$

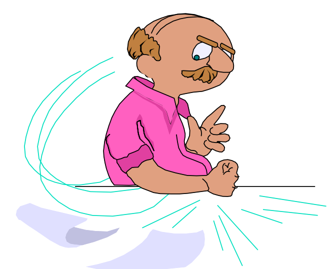
$$\Delta U \approx -E\Delta n$$

等势面的疏密
反映了场的强弱





静电透镜的等势面

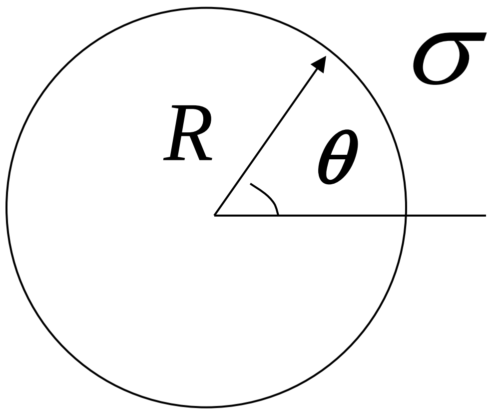


§4 类比结论

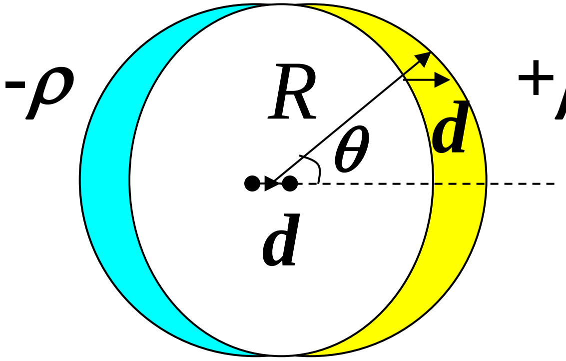
一球壳表面电荷密度

$$\sigma=\sigma_0\cos\theta$$

求 球内外电场



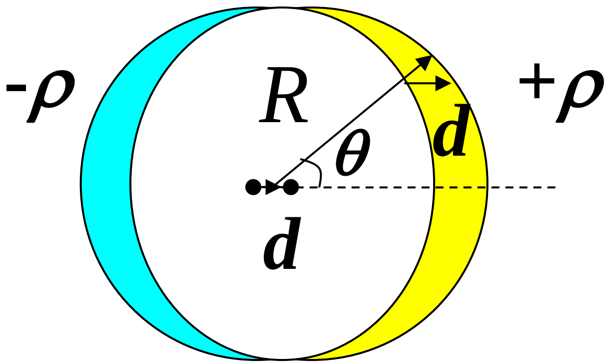
解：考虑两个相同的均匀带电球，但带相反电荷球心错开 d



厚度 $d\cos\theta$

面密度 $\rho d\cos\theta$

$$\rho d=\sigma_0$$

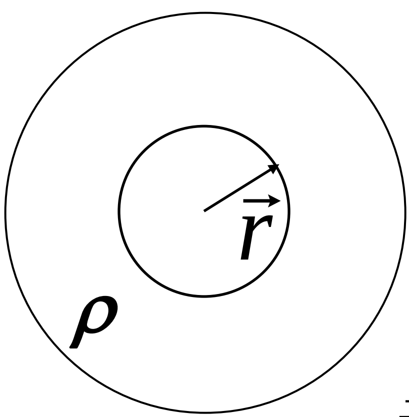


球外电场是相反电荷在球心错开*d*的场

电偶极矩场

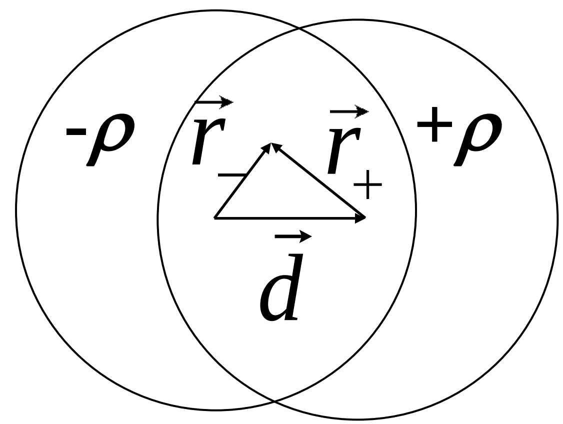
$$p=\frac{4\pi R^3\rho}{3}d=\frac{4\pi R^3}{3}\sigma_0$$

球内电场



$$\vec{E}_+=\frac{\rho\vec{r}_+}{3\varepsilon_0}$$

$$\vec{E}_-=-\frac{\rho\vec{r}_-}{3\varepsilon_0}$$

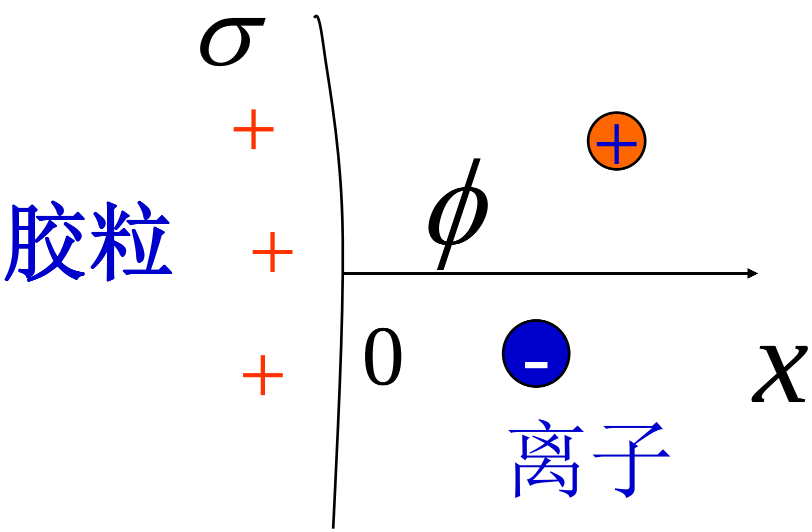


$$\vec{E}=\vec{E}_++\vec{E}_+=\frac{\rho}{3\varepsilon_0}(\vec{r}_+-\vec{r}_-)=-\frac{\rho\vec{d}}{3\varepsilon_0}=-\frac{\sigma_0}{3\varepsilon_0}\hat{d}$$

Colloidal particles in an electrolyte

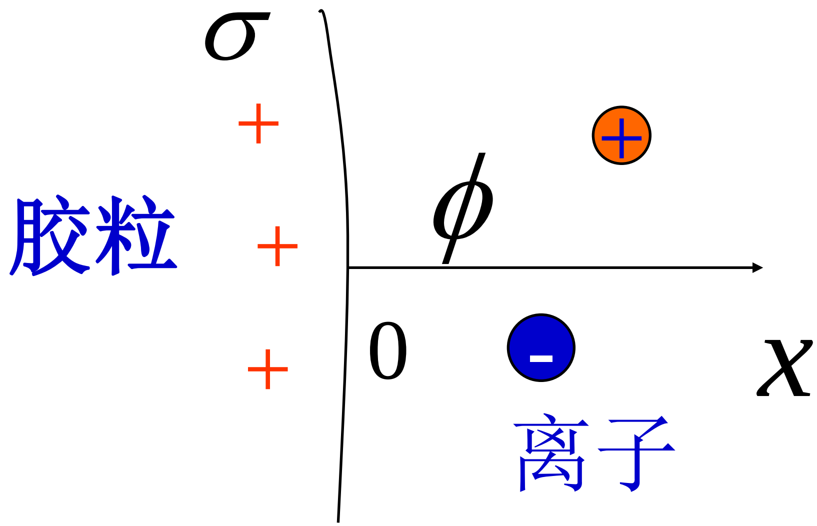
溶液中的胶体颗粒(透明), 既不溶解也不沉淀, 大小 1nm-100nm, 带电, 所以互相排斥. 加入电解质, 胶粒则发生凝聚, 形成大颗粒沉淀.

多数胶粒比电解质离子大很多



一维方程

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$



Boltzmann分布
决定粒子数密度

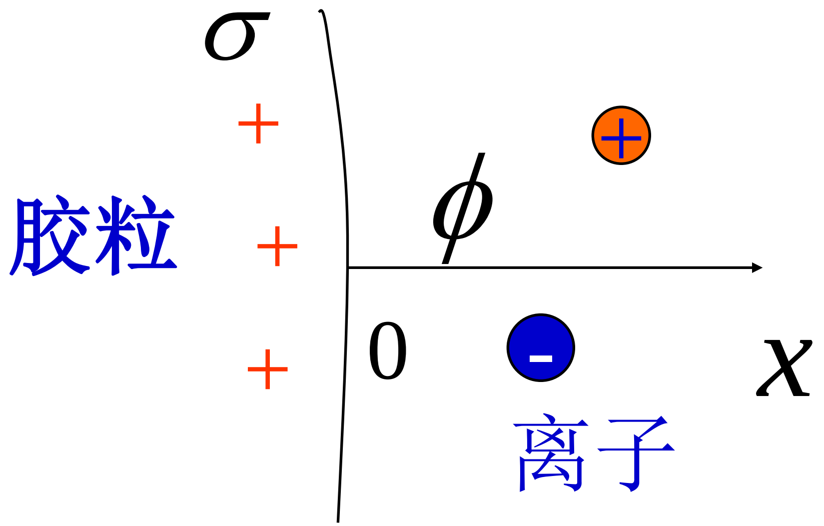
$$n = n_0 e^{-q\phi/kT}$$

$$\rho = e(n_+ - n_-) = en_0(e^{-e\phi/kT} - e^{e\phi/kT})$$

$$\boxed{\frac{d^2\phi}{dx^2} = -\frac{en_0}{\varepsilon_0}(e^{-e\phi/kT} - e^{e\phi/kT})}$$

低能或高温极限 $\dfrac{e\phi}{kT} << 1$

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = \frac{2e^2 n_0}{\varepsilon_0 kT}\phi$$



$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = D^{-2}\phi$$

$$D^{-2} = \frac{2e^2 n_0}{\varepsilon_0 kT}$$

$$\boxed{\phi = \phi_0 e^{-x/D}}$$

$$E_x(0) = -\left.\frac{\partial\phi}{\partial x}\right|_{x=0} = \frac{\phi_0}{D}$$

无限大平面近似 (胶粒内部电场为零)

$$E_x(0) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{\phi = \frac{\sigma D}{\varepsilon_0} e^{-x/D}}$$

$$\boxed{\phi = \frac{\sigma D}{\varepsilon_0} e^{-x/D}}$$

指数下降很快

周围离子屏蔽了胶粒间电斥力

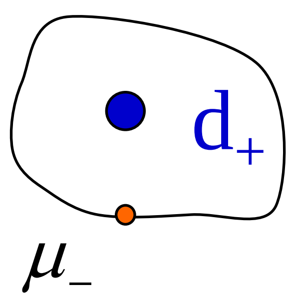
聚变

$$^{1}\mathrm{H} + {}^{1}\mathrm{H} \rightarrow {}^{2}\mathrm{H} + \mathrm{e}^{+} + \nu_{\mathrm{e}} + 0.42\mathrm{MeV}$$

$$^{1}\mathrm{H} + {}^{2}\mathrm{H} \rightarrow {}^{3}\mathrm{He} + \gamma + 5.49\mathrm{MeV}$$

需要阈能 ~ keV 克服库仑斥力

Muon catalyzed d-d or d-t fusion



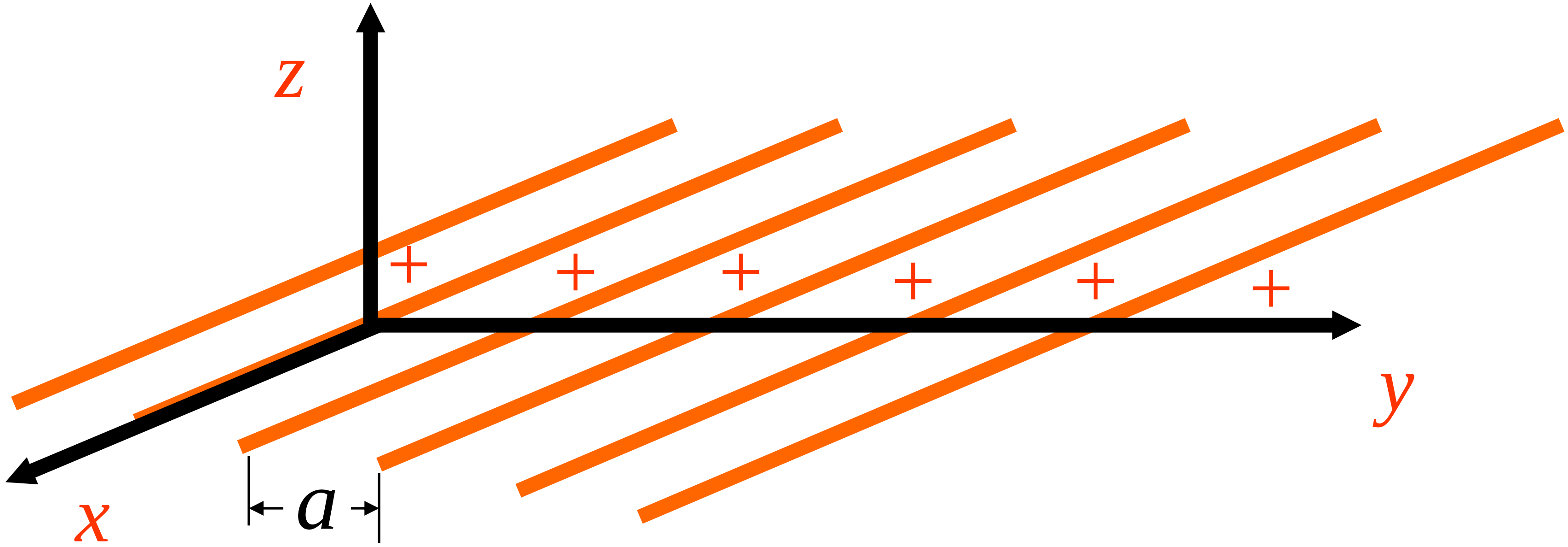
半径比氢原子小200倍

The electrostatic field of a grid

若要在远处得到均匀场, 不需要平板, 线栅即可

x 方向无限长

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0$$



y 方向周期排列，ϕ 应该是 y 的周期函数

试探解 $$\phi(y,z)=F_n(z)\cos\left(\frac{2\pi n}{a}y+\varphi_n\right)$$

$$n=1,2,3,\ldots\ldots$$

$$-\left(\frac{2\pi n}{a}\right)^2 F_n(z)\cos\left(\frac{2\pi n}{a}y+\varphi_n\right)+\frac{d^2F_n(z)}{dz^2}\cos\left(\frac{2\pi n}{a}y+\varphi_n\right)=0$$

$$\frac{d^2F_n(z)}{dz^2}=\left(\frac{2\pi n}{a}\right)^2 F_n(z)$$

$$F_n(z)=A_n e^{-z/z_n} \qquad z_n=\frac{a}{2\pi n}$$

周期解还应包括“零频率”解，即 y 的常数解

$$\phi(y,z) \to F_0(z)$$

$$\frac{d^2F_0(z)}{dz^2} = 0 \qquad F_0(z) = -E_0 z + const.$$

线性组合解

$$\phi(y,z) = -E_0 z + \sum_{n=1} A_n e^{-z/z_n} \cos\left(\frac{y}{z_n} + \varphi_n\right) + const.$$

$n \neq 0$ **的周期解很快衰减，远处只剩下匀强解**

$$E_z = -\frac{\partial \phi}{\partial z} = E_0$$