

## 第 28 届全国中学生物理竞赛复赛试题参考解答及评分标准

### 一、参考解答：

解法一

取直角坐标系  $Oxy$ ，原点  $O$  位于椭圆的中心，则哈雷彗星的椭圆轨道方程为

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (1)$$

$a$ 、 $b$  分别为椭圆的半长轴和半短轴，太阳  $S$  位于椭圆的一个焦点处，如图 1 所示。

以  $T_e$  表示地球绕太阳运动的周期，则  $T_e = 1.00$  年；以  $a_e$  表示地球到太阳的距离（认为地球绕太阳作圆周运动），则  $a_e = 1.00 \text{ AU}$ ，根据开普勒第三定律，有

$$\frac{a^3}{a_e^3} = \frac{T^2}{T_e^2} \quad (2)$$

设  $c$  为椭圆中心到焦点的距离，由几何关系得

$$c = a - r_0 \quad (3)$$

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} \quad (4)$$

由图 1 可知， $P$  点的坐标

$$x = c + r_p \cos \theta_p \quad (5)$$

$$y = r_p \sin \theta_p \quad (6)$$

把 (5)、(6) 式代入 (1) 式化简得

$$(a^2 \sin^2 \theta_p + b^2 \cos^2 \theta_p) r_p^2 + 2b^2 c r_p \cos \theta_p + b^2 c^2 - a^2 b^2 = 0 \quad (7)$$

根据求根公式可得

$$r_p = \frac{b^2 (a - c \cos \theta_p)}{a^2 \sin^2 \theta_p + b^2 \cos^2 \theta_p} \quad (8)$$

由 (2)、(3)、(4)、(8) 各式并代入有关数据得

$$r_p = 0.896 \text{ AU} \quad (9)$$

可以证明，彗星绕太阳作椭圆运动的机械能为

$$E = -\frac{Gmm_s}{2a} \quad (10)$$

式中  $m$  为彗星的质量。以  $v_p$  表示彗星在  $P$  点时速度的大小，根据机械能守恒定律有

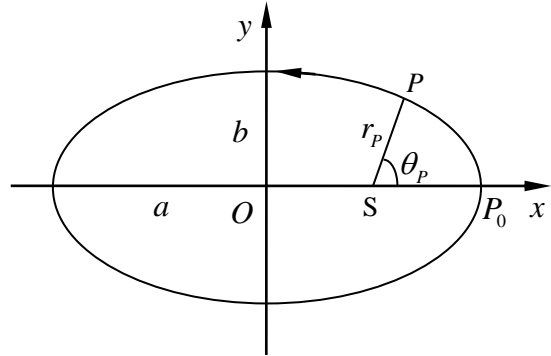


图 1

$$\frac{1}{2}mv_P^2 + \left(-\frac{Gmm_s}{r_P}\right) = -\frac{Gmm_s}{2a} \quad (11)$$

得

$$v_P = \sqrt{Gm_s} \cdot \sqrt{\frac{2}{r_P} - \frac{1}{a}} \quad (12)$$

代入有关数据得

$$v_P = 4.39 \times 10^4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \quad (13)$$

设  $P$  点速度方向与  $SP_0$  的夹角为  $\varphi$  (见图 2)，根据开普勒第二定律

$$r_P v_P \sin[\varphi - \theta_P] = 2\sigma \quad (14)$$

其中  $\sigma$  为面积速度，并有

$$\sigma = \frac{\pi ab}{T} \quad (15)$$

由 (9)、(13)、(14)、(15) 式并代入有关数据可得

$$\varphi = 127^\circ \quad (16)$$

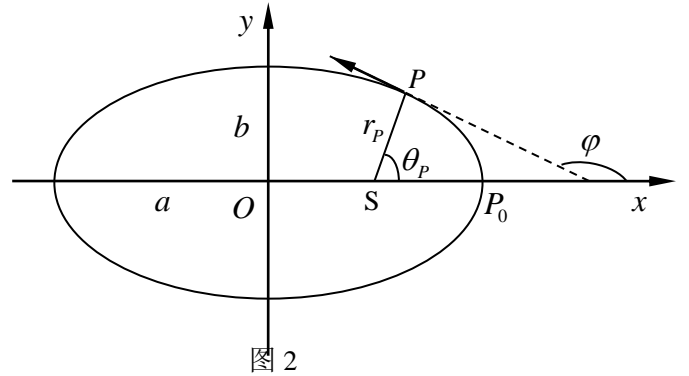


图 2

解法二

取极坐标，极点位于太阳  $S$  所在的焦点处，由  $S$  引向近日点的射线为极轴，极角为  $\theta$ ，取逆时针为正向，用  $r$ 、 $\theta$  表示彗星的椭圆轨道方程为

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta} \quad (1)$$

其中， $e$  为椭圆偏心率， $p$  是过焦点的半正焦距，若椭圆的半长轴为  $a$ ，根据解析几何可知

$$p = a(1 - e^2) \quad (2)$$

将 (2) 式代入 (1) 式可得

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \theta} \quad (3)$$

以  $T_e$  表示地球绕太阳运动的周期，则  $T_e = 1.00$  年；以  $a_e$  表示地球到太阳的距离（认为地球绕太阳作圆周运动），则  $a_e = 1.00 \text{ AU}$ ，根据开普勒第三定律，有

$$\frac{a^3}{a_e^3} = \frac{T^2}{T_e^2} \quad (4)$$

在近日点  $\theta = 0$ ，由 (3) 式可得

$$e = 1 - \frac{r_0}{a} \quad (5)$$

将  $\theta_p$ 、 $a$ 、 $e$  的数据代入 (3) 式即得

$$r_p = 0.895 \text{ AU} \quad (6)$$

可以证明，彗星绕太阳作椭圆运动的机械能

$$E = -\frac{Gmm_s}{2a} \quad (7)$$

式中  $m$  为彗星的质量，以  $v_p$  表示彗星在  $P$  点时速度的大小，根据机械能守恒定律有

$$\frac{1}{2}mv_p^2 + \left(-\frac{Gmm_s}{r_p}\right) = -\frac{Gmm_s}{2a} \quad (8)$$

可得

$$v_p = \sqrt{Gm_s} \cdot \sqrt{\frac{2}{r_p} - \frac{1}{a}} \quad (9)$$

代入有关数据得

$$v_p = 4.39 \times 10^4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \quad (10)$$

设  $P$  点速度方向与极轴的夹角为  $\varphi$ ，彗星在近日点的速度为  $v_0$ ，再根据角动量守恒定律，有

$$r_p v_p \sin(\varphi - \theta_p) = r_0 v_0 \quad (11)$$

根据 (8) 式，同理可得

$$v_0 = \sqrt{Gm_s} \cdot \sqrt{\frac{2}{r_0} - \frac{1}{a}} \quad (12)$$

由 (6)、(10)、(11)、(12) 式并代入其它有关数据

$$\varphi = 127^\circ \quad (13)$$

**评分标准：**

本题 20 分

解法一

(2) 式 3 分，(8) 式 4 分，(9) 式 2 分，(11) 式 3 分，(13) 式 2 分，(14) 式 3 分，(15) 式 1 分，(16) 式 2 分。

解法二

(3) 式 2 分，(4) 式 3 分，(5) 式 2 分，(6) 式 2 分，(8) 式 3 分，(10) 式 2 分，(11) 式 3 分，(12) 式 1 分，(13) 式 2 分。

## 二、参考解答：

1. 建立如图所示坐标系  $Oxy$ . 两杆的受力情况如图：

$f_1$  为地面作用于杆  $AB$  的摩擦力， $N_1$  为地面对杆  $AB$  的支持力， $f_2$ 、 $N_2$  为杆  $AB$  作用于杆  $CD$  的摩擦力和支持力， $N_3$ 、 $N_4$  分别为墙对杆  $AB$  和  $CD$  的作用力， $mg$  为重力。取杆  $AB$  和  $CD$  构成的系统为研究对象，系统平衡时，由平衡条件有

$$N_4 + N_3 - f_1 = 0 \quad (1)$$

$$N_1 - 2mg = 0 \quad (2)$$

以及对  $A$  点的力矩

$$\frac{1}{2}mgl \sin \theta + mg \left( l \sin \theta - \frac{1}{2}l \sin \alpha \right) - N_3 l \cos \theta - N_4 (l \cos \theta + l \cos \alpha - CF) = 0$$

即

$$\frac{3}{2}mgl \sin \theta - \frac{1}{2}mgl \sin \alpha - N_3 l \cos \theta - N_4 (l \cos \theta + l \cos \alpha - CF) = 0 \quad (3)$$

式中  $CF$  待求。  $F$  是过  $C$  的竖直线与过  $B$  的水平线的交点， $E$  为  $BF$  与  $CD$  的交点。由几何关系有

$$CF = l \sin \alpha \cot \theta \quad (4)$$

取杆  $CD$  为研究对象，由平衡条件有

$$N_4 + N_2 \cos \theta - f_2 \sin \theta = 0 \quad (5)$$

$$N_2 \sin \theta + f_2 \cos \theta - mg = 0 \quad (6)$$

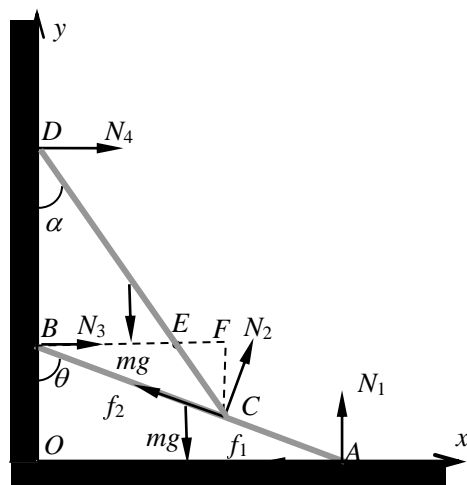
以及对  $C$  点的力矩

$$N_4 l \cos \alpha - \frac{1}{2}mgl \sin \alpha = 0 \quad (7)$$

解以上各式可得

$$N_4 = \frac{1}{2}mg \tan \alpha \quad (8)$$

$$N_3 = \left( \frac{3}{2} \tan \theta - \frac{1}{2} \tan \alpha - \frac{\sin \alpha}{\cos \theta} + \frac{1}{2} \frac{\tan \alpha \sin \alpha}{\sin \theta} \right) mg \quad (9)$$



$$f_1 = \left( \frac{3 \tan \theta}{2} - \frac{\sin \alpha}{\cos \theta} + \frac{1}{2} \frac{\tan \alpha \sin \alpha}{\sin \theta} \right) mg \quad (10)$$

$$N_1 = 2mg \quad (11)$$

$$N_2 = \left( \sin \theta - \frac{1}{2} \tan \alpha \cos \theta \right) mg \quad (12)$$

$$f_2 = \left( \cos \theta + \frac{1}{2} \tan \alpha \sin \theta \right) mg \quad (13)$$

CD 杆平衡的必要条件为

$$f_2 \leq \mu_c N_2 \quad (14)$$

由 (12)、(13)、(14) 式得

$$\tan \alpha \leq \frac{2(\mu_c \sin \theta - \cos \theta)}{\mu_c \cos \theta + \sin \theta} \quad (15)$$

AB 杆平衡的必要条件为

$$f_1 \leq \mu_A N_1 \quad (16)$$

由 (10)、(11)、(16) 式得

$$\frac{\tan \alpha \sin \alpha}{\sin \theta} - \frac{2 \sin \alpha}{\cos \theta} \leq 4\mu_A - 3 \tan \theta \quad (17)$$

因此, 使系统平衡,  $\alpha$  应满足的条件为 (15) 式和 (17) 式.

2. 将题给的数据代入 (15) 式可得

$$\alpha \leq \arctan 0.385 = 21.1^\circ \quad (18)$$

将题给的数据代入 (17) 式, 经数值计算可得

$$\alpha \geq 19.5^\circ \quad (19)$$

因此,  $\alpha$  的取值范围为

$$19.5^\circ \leq \alpha \leq 21.1^\circ \quad (20)$$

**评分标准:**

本题 20 分

第 1 问 15 分

(1)、(2)、(3) 式共 3 分, (4) 式 1 分, (5)、(6)、(7) 式共 3 分, (10) 式到 (17) 式各 1 分.

第 2 问 5 分

(18) 式 1 分, (19) 式 3 分, (20) 式 1 分.

### 三、参考解答:

解法一

1. 设在时刻  $t$ ，小球和圆筒的运动状态如图 1 所示，小球位于  $P$  点，绳与圆筒的切点为  $T$ ， $P$  到  $T$  的距离即绳的拉直部分的长度为  $l$ ，圆筒的角速度为  $\omega$ ，小球的速度为  $v$ 。小球的速度可以分解成沿着绳子方向的速度  $v_1$  和垂直于绳子方向的速度  $v_2$  两个分量。根据

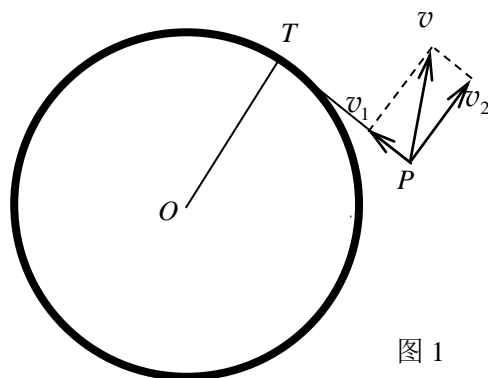


图 1

机械能守恒定律和角动量守恒定律有

$$\frac{1}{2}M(R\omega_0)^2 + \frac{1}{2}m(R\omega_0)^2 = \frac{1}{2}M(R\omega)^2 + \frac{1}{2}m(v_1^2 + v_2^2) \quad (1)$$

$$MR^2\omega_0 + mR^2\omega_0 = MR^2\omega + mRv_1 + mlv_2 \quad (2)$$

因为绳子不可伸长， $v_1$  与切点  $T$  的速度相等，即

$$v_1 = R\omega \quad (3)$$

解(1)、(2)、(3)式得

$$\omega = \frac{(M+m)R^2 - ml^2}{(M+m)R^2 + ml^2} \omega_0 \quad (4)$$

$$v_2 = \frac{2(M+m)R^2 l}{(M+m)R^2 + ml^2} \omega_0 \quad (5)$$

由(4)式可得

$$l = R \sqrt{\frac{M+m}{m} \frac{\omega_0 - \omega}{\omega_0 + \omega}} \quad (6)$$

这便是在卫星角速度减至  $\omega$  时绳的拉直部分的长度  $l$ 。

2. 由(6)式，当  $\omega = 0$  得

$$L = R \sqrt{\frac{M+m}{m}} \quad (7)$$

这便是绳的总长度  $L$ 。

3. 如图 2 所示，从时刻  $t$  到  $t + \Delta t$ ，切点  $T$  跟随圆筒转过一角度  $\Delta\theta_1 = \omega\Delta t$ ，由于绳子的拉直部分的长度增加了

$\Delta l$ ，切点相对圆筒又转过一角度  $\Delta\theta_2 = \frac{\Delta l}{R}$ ，到达  $T'$  处，

所以在  $\Delta t$  时间内，切点转过的角度

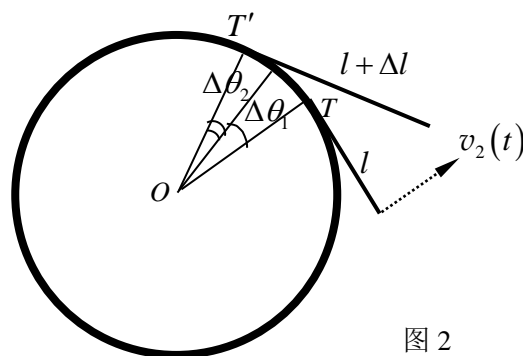


图 2

$$\Delta\theta = \Delta\theta_1 + \Delta\theta_2 = \omega\Delta t + \frac{\Delta l}{R} \quad (8)$$

切点从  $T$  变到  $T'$  也使切线方向改变了一个同样的角度  $\Delta\theta$ ，而切线方向的改变是小球具有垂直于绳子方向的速度  $v_2$  引起的，故有

$$\Delta\theta = \frac{v_2\Delta t}{l} \quad (9)$$

由(1)、(2)、(3)式可得

$$v_2 = l(\omega_0 + \omega) \quad (10)$$

由(8)、(9)、(10)三式得

$$\Delta l = R\omega_0\Delta t \quad (11)$$

(11) 式表示  $l$  随  $t$  均匀增加，故  $l$  由 0 增加到  $L$  所需的时间为

$$t_s = \frac{L}{\omega_0 R} = \frac{1}{\omega_0} \sqrt{\frac{M+m}{m}} \quad (12)$$

解法二

1. 撤去插销后两个小球的运动情况相同，故可取一个小球作为对象进行研究，先研究任何时刻小球的速度。

在  $t$  时刻，相对卫星系统质心参考系小球运动状态如图 1 所示，绳子的拉直部分与圆筒面的切点为  $T$ ，小球到切点  $T$  的距离即绳的拉直部分的长度为  $l$ ，小球到转轴  $O$  的距离为  $r$ ，圆筒的角速度为  $\omega$ 。由于圆筒的转动和小球相对圆筒的运动，绳将展开，切点位置和绳的拉直部分的长度都要改变。

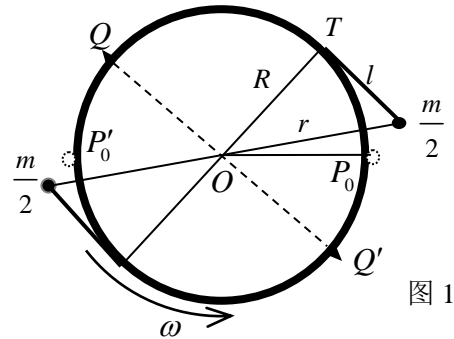


图 1

首先考察小球相对于圆筒的运动。在  $t$  时刻， $OT$  与固定在圆筒上的半径  $OP_0$  的夹角为  $\phi$ ，如图 2 所示。由于小球相对圆筒的运动，经过时间  $\Delta t$ ，切点从圆筒上的  $T$  点移到  $T'$  点， $OT'$  与  $OP_0$  的夹角变为  $\phi + \Delta\phi$ ，绳的拉直部分的长度由  $l$  变为  $l'$ ，小球由  $P$  运动到  $P'$ ， $\overline{PP'}$  便是小球相对圆筒的位移。当  $\Delta t$  很小时  $l \approx l'$ ，故

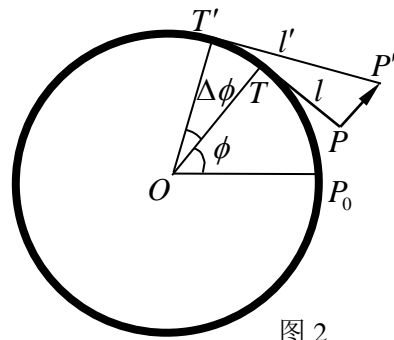


图 2

$$|\overline{PP'}| = l'\Delta\phi \approx l\Delta\phi$$

于是小球相对圆筒的速度大小为

$$v_{\phi} = l \frac{\Delta\phi}{\Delta t} = l\omega_{\phi} \quad (1)$$

方向垂直于  $TP$  .  $\omega_{\phi}$  是切点相对圆筒转动的角速度.

再考察圆筒相对质心参考系的转动, 即与圆筒固连在一起的转动参考系相对质心参考系的运动. 当圆筒的角速度为  $\omega$  时, 位于转动参考系中的  $P$  点(小球所在处)相对质心系的速度

$$v_{\omega} = r\omega \quad (2)$$

方向垂直于  $OP$  . 可以把  $v_{\omega}$  分解成沿着  $TP$  方

向的分量  $v_{\omega 1}$  和垂直  $TP$  方向的分量  $v_{\omega 2}$ , 如图 3

所示, 即

$$v_{\omega 1} = R\omega \quad (3)$$

$$v_{\omega 2} = l\omega \quad (4)$$

小球相对质心系的速度  $\vec{v}$  是小球相对圆筒的速度和圆筒参考系中的  $P$  点相对质心系速度的合成, 由图 3 可得  $\vec{v}$  的大小

$$v = \sqrt{v_{\omega 1}^2 + (v_{\omega 2} + v_{\phi})^2} \quad (5)$$

因

$$l = R\phi \quad (6)$$

故有

$$v = R\sqrt{\omega^2 + (\omega + \omega_{\phi})^2 \phi^2} \quad (7)$$

因为系统不受外力作用, 故系统的动能和角动量守恒, 故有

$$\frac{1}{2}M(R\omega_0)^2 + \frac{1}{2}mR^2\omega_0^2 = \frac{1}{2}M(R\omega)^2 + \frac{1}{2}mv^2 \quad (8)$$

$$MR^2\omega_0 + mR^2\omega_0 = MR^2\omega + mRv_{\omega 1} + ml(v_{\omega 2} + v_{\phi}) \quad (9)$$

由(7)、(8)两式有

$$\omega_0^2 = \omega^2 + \frac{m}{M+m}(\omega + \omega_{\phi})^2 \phi^2 \quad (10)$$

由(1)、(3)、(4)、(6)、(9)各式得

$$\omega_0 = \omega + \frac{m}{M+m}\phi^2(\omega + \omega_{\phi}) \quad (11)$$

由(10)、(11)两式得

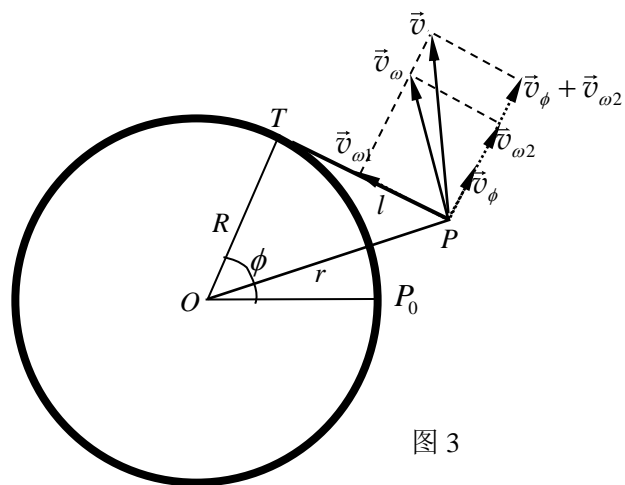


图 3



$$\omega_0 + \omega = \omega + \omega_\phi$$

故有

$$\omega_\phi = \omega_0 \quad (12)$$

上式说明绳子与圆筒的切点相对圆筒转动的角速度等于卫星的初始角速度，是一个恒量，将(12)式代入(11)式得

$$\phi = \sqrt{\frac{M+m}{m} \left( \frac{\omega_0 - \omega}{\omega_0 + \omega} \right)} \quad (13)$$

由(6)、(13)两式得

$$l = R \sqrt{\frac{M+m}{m} \left( \frac{\omega_0 - \omega}{\omega_0 + \omega} \right)} \quad (14)$$

这便是在卫星角速度减至 $\omega$ 时绳的拉直部分的长度 $l$ 。

2. 由(14)式，当 $\omega=0$ 得绳总长度，即

$$L = R \sqrt{\frac{M+m}{m}} \quad (15)$$

3. 因 $\omega_\phi$ 是一个恒量， $\phi$ 随时间的 $t$ 的变化规律为

$$\phi = \omega_0 t \quad (16)$$

当 $\omega=0$ 时，由(13)式可得卫星停旋时的 $\phi$

$$\phi_s = \sqrt{\frac{M+m}{m}} \quad (17)$$

设卫星停转所用的时间为 $t_s$ ，由(16)、(17)式得

$$t_s = \frac{\phi_s}{\omega_0} = \frac{1}{\omega_0} \sqrt{\frac{M+m}{m}} \quad (18)$$

**评分标准：**

本题 25 分。

解法一

第 1 问 12 分。(1)、(2) 式各 3 分，(3) 式 2 分，(6) 式 4 分。

第 2 问 3 分。(7) 式 3 分。

第 3 问 10 分。(8)、(9) 式各 3 分，(10) 式 2 分，(11)、(12) 式各 1 分。

解法二

第 1 问 18 分。(1) 式 3 分，(2) 式 2 分，(7) 式 2 分，(8) 式 3 分，(9) 式 3 分，(12) 式 2 分，(14) 式 3 分，

第2问3分。(15)式3分.

第3问4分。(16)式2分,(17)式1分,(18)式1分.

#### 四、参考解答:

1. 根据题意,粒子的初速度只有  $y$  方向和  $z$  方向的分量,设它们为  $v_{0y}$  和  $v_{0z}$ . 因为粒子在  $z$  方向不受电场力和磁场力作用,故粒子在  $z$  方向以初速度  $v_{0z}$  作匀速运动.

粒子在  $Oxy$  面内的运动可以看作由以下两部分运动的合成:可把粒子在  $y$  方向的初速度表示为

$$v_{0y} = -v_{0y1} + v_{0y} + v_{0y1} \quad (1)$$

其中

$$v_{0y1} = -\frac{E_0}{B_0} \quad (2)$$

沿  $y$  负方向. 与  $v_{0y1}$  相关的磁场力

$$f_{Bx} = -qv_{0y1}B_0 \quad (3)$$

沿  $x$  负方向. 粒子受到的电场力

$$f_E = f_{Ex} = qE_0 \quad (4)$$

沿  $x$  正方向. 由(2)、(3)、(4)式可知,粒子在  $x$  方向受到的电场力和磁场力正好抵消,故粒子以大小为  $\frac{E_0}{B_0}$  的速度沿  $y$  负方向运动. 除此之外,由(1)式可知,粒子还具有初速度

$$v_{0y2} = v_{0y} + \frac{E_0}{B_0} \quad (5)$$

沿  $y$  正方向,与  $v_{0y2}$  相关的磁场力使粒子以速率  $v_{0y2}$  在  $Oxy$  面内作匀速圆周运动,以  $r$  表示圆周运动的半径,有

$$qv_{0y2}B_0 = m\frac{v_{0y2}^2}{r} \quad (6)$$

可得

$$r = \frac{mv_{0y2}}{qB_0} \quad (7)$$

由周期的定义和(7)式可得圆周运动的周期

$$T = \frac{2\pi m}{qB_0} \quad (8)$$

(8)式表明,粒子运动的周期与粒子在  $y$  方向的初速度无关. 经过时间  $T$  或  $T$  的整数倍所考察的粒

子就能同时回到  $Oyz$  平面.

2. 增加的电场  $E_z$  对粒子在  $Oxy$  平面内的运动无影响, 但粒子在  $z$  方向要受到此电场力作用.

以  $a_z$  表示在此电场力作用下的加速度, 有

$$ma_z = qE_z \quad (9)$$

或

$$a_z = \frac{qE_z}{m} \quad (10)$$

因未增加电场时, 粒子在  $z$  方向作初速度为  $v_{0z}$  的匀速运动, 增加电场后, 粒子在  $z$  方向的运动是初速度不为 0 的匀加速直线运动, 即有

$$z = v_{0z}t + \frac{1}{2}at^2 \quad (11)$$

由(10)、(11)式得

$$z = v_{0z}t + \frac{1}{2} \frac{qE_z}{m} t^2 \quad (12)$$

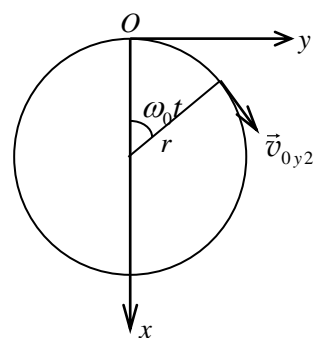
粒子在  $Oxy$  平面内的运动不受电场  $E_z$  的影响. 设  $\omega_0$  为粒子在  $Oxy$  平面内作圆周运动的角速度, 则有

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{qB_0}{m} \quad (13)$$

由图示可得与圆周运动相联系的粒子坐标随时间  $t$  的变化关系

$$x' = r(1 - \cos \omega_0 t) \quad (14)$$

$$y' = r \sin \omega_0 t \quad (15)$$



考虑到粒子在  $y$  方向还具有速度为  $v_{0y1}$  的匀速运动, 并利用(2)、(5)、(7)、(13)以及已知条件, 可得带电粒子的运动规律:

$$x = \frac{m}{qB_0} \left( v_{0y} + \frac{E_0}{B_0} \right) \left( 1 - \cos \frac{qB_0}{m} t \right) \quad (16)$$

$$y = -\frac{E_0}{B_0} t + \frac{m}{qB_0} \left( v_{0y} + \frac{E_0}{B_0} \right) \sin \frac{qB_0}{m} t \quad (17)$$

$$z = v_{0z}t + \frac{1}{2} \frac{qE_z}{m} t^2 \quad (18)$$

评分标准:

本题 20 分.

第 1 问 12 分. (2)、(3)、(4) 式共 5 分, (5)、(6)、(7) 式共 4 分, (8) 式及相关说明共 3 分.

第 2 问 8 分. (12) 式 2 分, (14) 式到 (19) 式各 1 分.

## 五、答案与评分标准

本题 15 分.

$$1. I_L - I_0 \left( e^{\frac{V}{V_T}} - 1 \right) \quad (2 \text{ 分}), I_L \quad (2 \text{ 分}), V_T \ln \left( 1 + \frac{I_L}{I_0} \right) \quad (2 \text{ 分}),$$

$$VI_L - VI_0 \left( e^{\frac{V}{V_T}} - 1 \right) \quad (1 \text{ 分}).$$

$$2. 0.62\text{V} \quad (2 \text{ 分}); 0.54\text{V} \quad (2 \text{ 分}); 49\text{mW} \quad (2 \text{ 分}); 6.0\Omega \quad (2 \text{ 分}).$$

## 六、参考解答:

在电加热器对  $A$  室中气体加热的过程中, 由于隔板  $N$  是导热的,  $B$  室中气体的温度要升高, 活塞  $M$  将向右移动. 当加热停止时, 活塞  $M$  有可能刚移到气缸最右端, 亦可能尚未移到气缸最右端. 当然亦可能活塞已移到气缸最右端但加热过程尚未停止.

1. 设加热恰好能使活塞  $M$  移到气缸的最右端, 则  $B$  室气体末态的体积

$$V_B = 2V_0 \quad (1)$$

根据题意, 活塞  $M$  向右移动过程中,  $B$  中气体压强不变, 用  $T_B$  表示  $B$  室中气体末态的温度, 有

$$\frac{V_0}{T_0} = \frac{V_B}{T_B} \quad (2)$$

由(1)、(2)式得

$$T_B = 2T_0 \quad (3)$$

由于隔板  $N$  是导热的, 故  $A$  室中气体末态的温度

$$T_A = 2T_0 \quad (4)$$

下面计算此过程中的热量  $Q_m$ .

在加热过程中,  $A$  室中气体经历的是等容过程, 根据热力学第一定律, 气体吸收的热量等于其内能的增加量, 即

$$Q_A = \frac{5}{2} R(T_A - T_0) \quad (5)$$

由(4)、(5)两式得

$$Q_A = \frac{5}{2} RT_0 \quad (6)$$

$B$  室中气体经历的是等压过程, 在过程中  $B$  室气体对外做功为

$$W_B = p_0(V_B - V_0) \quad (7)$$

由(1)、(7)式及理想气体状态方程得

$$W_B = RT_0 \quad (8)$$

内能改变为

$$\Delta U_B = \frac{5}{2} R(T_B - T_0) \quad (9)$$

由(4)、(9)两式得

$$\Delta U_B = \frac{5}{2} RT_0 \quad (10)$$

根据热力学第一定律和(8)、(10)两式,  $B$  室气体吸收的热量为

$$Q_B = \Delta U_B + W_B = \frac{7}{2} RT_0 \quad (11)$$

由(6)、(11) 两式可知电加热器提供的热量为

$$Q_m = Q_A + Q_B = 6RT_0 \quad (12)$$

若  $Q_0 = Q_m$ ,  $B$  室中气体末态体积为  $2V_0$ ,  $A$  室中气体的末态温度  $2T_0$ .

2. 若  $Q_0 > Q_m$ , 则当加热器供应的热量达到  $Q_m$  时, 活塞刚好到达气缸最右端, 但这时加热尚未停止, 只是在以后的加热过程中气体的体积保持不变, 故热量  $Q_0 - Q_m$  是  $A$ 、 $B$  中气体在等容升温过程中吸收的热量. 由于等容过程中气体不做功, 根据热力学第一定律, 若  $A$  室中气体末态的温度为  $T'_A$ , 有

$$Q_0 - Q_m = \frac{5}{2} R(T'_A - 2T_0) + \frac{5}{2} R(T'_A - 2T_0) \quad (13)$$

由(12)、(13)两式可求得

$$T'_A = \frac{Q_0}{5R} + \frac{4}{5} T_0 \quad (14)$$

$B$  中气体的末态的体积

$$V'_B = 2V_0 \quad (15)$$

3. 若  $Q_0 < Q_m$ , 则隔板尚未移到气缸最右端, 加热停止, 故  $B$  室中气体末态的体积  $V''_B$  小于  $2V_0$ , 即  $V''_B < 2V_0$ . 设  $A$ 、 $B$  两室中气体末态的温度为  $T''_A$ , 根据热力学第一定律, 注意到  $A$  室中气体经历的是等容过程, 其吸收的热量

$$Q_A = \frac{5}{2} R(T''_A - T_0) \quad (16)$$

$B$  室中气体经历的是等压过程, 吸收热量

$$Q_B = \frac{5}{2} R(T''_A - T_0) + p_0(V''_B - V_0) \quad (17)$$

利用理想气体状态方程, 上式变为

$$Q_B = \frac{7}{2} R(T''_A - T_0) \quad (18)$$

由上可知

$$Q_0 = Q_A + Q_B = 6R(T_A'' - T_0) \quad (19)$$

所以 A 室中气体的末态温度

$$T_A'' = \frac{Q_0}{6R} + T_0 \quad (20)$$

B 室中气体的末态体积

$$V_B'' = \frac{V_0}{T_0} T_A'' = \left( \frac{Q_0}{6RT_0} + 1 \right) V_0 \quad (21)$$

**评分标准：**

本题 20 分.

(12) 式 6 分, 得到  $Q_0 = Q_m$  的条件下 (1)、(4) 式各 1 分; 得到  $Q_0 > Q_m$  的条件下的 (14)

式 4 分, (15) 式 2 分; 得到  $Q_0 < Q_m$  的条件下的 (20) 式 4 分, (21) 式 2 分.

七、

**答案与评分标准：**

本题 20 分.

1.  $3R$  (3 分)

2.  $6R$  (3 分)

3.

$I_2$ 与 L 的距离	$I_2$ 在 L 左方还是右方	$I_2$ 的大小	$I_2$ 是正立还是倒立	$I_2$ 是实像还是虚像
$6R$	右方	$2h$	倒立	虚像

第 1 第 3 空格各 2 分; 其余 3 个空格全对 3 分, 有一个错则不给这 3 分.

4.

$I_3$ 与 L 的距离	$I_3$ 在 L 左方还是右方	$I_3$ 的大小	$I_3$ 是正立还是倒立	$I_3$ 是实像还是虚像
$18R$	左方	$2h$	倒立	实像

第 1 第 3 空格各 2 分; 其余 3 个空格全对 3 分, 有一个错则不给这 3 分.

## 八、参考解答:

### 1. 反应能

$$Q = \left[ (m_p + m_{^3\text{H}}) - (m_{^3\text{He}} + m_n) \right] c^2 \quad (1)$$

式中  $c$  为光速. 代入数据得

$$Q = -0.764 \text{ MeV} \quad (2)$$

上式表明这是一吸能核反应.

2. 为了求入射质子阈能, 反应前后各粒子都应沿同一直线运动. 设质子的入射速度大小为  $v_p$ ,

反应后  $^3\text{He}$  的速度大小为  $v_{^3\text{He}}$ , 中子的速度大小为  $v_n$ , 根据动量守恒和能量守恒有

$$m_p v_p = m_{^3\text{He}} v_{^3\text{He}} + m_n v_n \quad (3)$$

$$\frac{1}{2} m_p v_p^2 = \frac{1}{2} m_{^3\text{He}} v_{^3\text{He}}^2 + \frac{1}{2} m_n v_n^2 + |Q| \quad (4)$$

由 (3)、(4) 式可得

$$\left( \frac{m_n^2 + m_n m_{^3\text{He}}}{m_{^3\text{He}}} \right) v_n^2 - 2 \frac{m_p m_n}{m_{^3\text{He}}} v_p v_n + \left( \frac{m_p^2 - m_p m_{^3\text{He}}}{m_{^3\text{He}}} \right) v_p^2 + 2|Q| = 0 \quad (5)$$

令

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{m_n^2 + m_n m_{^3\text{He}}}{m_{^3\text{He}}} \\ b &= -2 \frac{m_p m_n}{m_{^3\text{He}}} v_p \\ c &= \frac{m_p^2 - m_p m_{^3\text{He}}}{m_{^3\text{He}}} v_p^2 + 2|Q| \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

把(6)式代入(5)式得

$$a v_n^2 + b v_n + c = 0 \quad (7)$$

(7)式有解的条件是

$$b^2 - 4ac \geq 0 \quad (8)$$

由(6)式可知,  $c$  可能大于零, 亦可能小于零. 若  $c < 0$ , 则(8)总成立, 中子速度一定有解, 反应一定能发生; 若  $c > 0$ , 则由 (6)、(8)两式得

$$\frac{1}{2} m_p v_p^2 \geq \frac{m_n + m_{^3\text{He}}}{m_n + m_{^3\text{He}} - m_p} |Q| \quad (9)$$

即只有当入射质子的动能满足(9)式时, 中子速度才有解, 反应才能发生, 所以入射质子的阈能为

$$T_{th} = \left( 1 + \frac{m_p}{m_n + m_{^3\text{He}} - m_p} \right) |Q| \quad (10)$$

利用(1)式，在忽略 $|Q|^2$ 项的情况下，(10)式可简化为

$$T_{th} = \left( 1 + \frac{m_p}{m_{^3\text{H}}} \right) |Q| \quad (11)$$

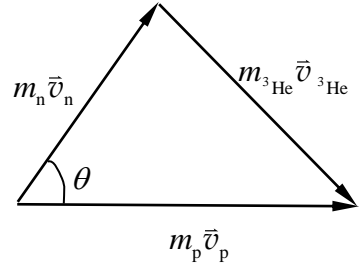
代入有关数据得

$$T_{th} = 1.02 \text{ MeV} \quad (12)$$

3. 由动量守恒和能量守恒有

$$m_p \vec{v}_p = m_{^3\text{He}} \vec{v}_{^3\text{He}} + m_n \vec{v}_n \quad (12)$$

$$\frac{1}{2} m_p v_p^2 = \frac{1}{2} m_{^3\text{He}} v_{^3\text{He}}^2 + \frac{1}{2} m_n v_n^2 + |Q| \quad (13)$$



以 $\theta$ 表示反应中产生的中子速度方向与入射质子速度方向的夹角，如图所示，根据余弦定律有

$$(m_{^3\text{He}} v_{^3\text{He}})^2 = (m_n v_n)^2 + (m_p v_p)^2 - 2m_n m_p v_n v_p \cos \theta \quad (14)$$

令

$$T_p = \frac{1}{2} m_p v_p^2 \quad (15)$$

$$T_n = \frac{1}{2} m_n v_n^2 \quad (16)$$

$$T_{^3\text{He}} = \frac{1}{2} m_{^3\text{He}} v_{^3\text{He}}^2 \quad (17)$$

把(15)、(16)、(17)式代入(13)、(14)两式得

$$|Q| = T_p - T_{^3\text{He}} - T_n \quad (18)$$

$$2m_{^3\text{He}} T_{^3\text{He}} = 2m_n T_n + 2m_p T_p - 2\sqrt{2m_n T_n} \cdot \sqrt{2m_p T_p} \cos \theta \quad (19)$$

由(18)、(19)式，消去 $T_{^3\text{He}}$ 后，得

$$T_n - 2 \frac{\sqrt{m_n m_p T_p}}{m_{^3\text{He}} + m_n} \cos \theta \cdot \sqrt{T_n} - \frac{(m_{^3\text{He}} - m_p) T_p - |Q| m_{^3\text{He}}}{m_{^3\text{He}} + m_n} = 0 \quad (20)$$

令

$$S = \frac{\sqrt{m_n m_p T_p}}{m_{^3\text{He}} + m_n} \cos \theta, \quad R = \frac{(m_{^3\text{He}} - m_p) T_p - |Q| m_{^3\text{He}}}{m_{^3\text{He}} + m_n} \quad (21)$$

得

$$T_n - 2S\sqrt{T_n} - R = 0 \quad (22)$$



根据题给的入射质子的动能和第 1 问求得反应能 $|Q|$ 的值, 由(21)式可知 $R > 0$ , 故(22)式的符合物理意义的解为

$$\sqrt{T_n} = S + \sqrt{S^2 + R} \quad (23)$$

将具体数据代入(21)、(23)式中, 有

$$T_n = 0.132 \text{ MeV} \quad (24)$$

**评分标准: 本题 20 分**

**第 1 问 4 分**

(2) 式 3 分, 结论 1 分.

**第 2 问 8 分**

(3)、(4) 式各 2 分, (9) 式 2 分, (10)、(11) 式各 1 分.

**第 3 问 8 分**

(12) (13) 式各 2 分, (23) 式 3 分, (24) 式 1 分.

第 2 问的其他解法

解法一

为了研究阈能, 只考虑碰撞前后各粒子都沿同一直线运动的情况. 若碰撞后 ${}^3_2\text{He}$ 和中子的速度相同, 即粘在一起运动(完全非弹性碰撞), 则在碰撞过程中损失的机械能最多, 若所损失的机械能正好等于反应能, 则入射质子的动能最小, 这最小动能便是阈能. 设质子的入射速度大小为 $v_p$ , 反应后 ${}^3_2\text{He}$ 和中子的速度大小为 $v$ , 根据动量守恒和能量守恒有

$$m_p v_p = (m_{{}^3\text{He}} + m_n) v \quad (1)$$

$$\frac{1}{2} m_p v_p^2 = \frac{1}{2} (m_{{}^3\text{He}} + m_n) v^2 + |Q| \quad (2)$$

由(1)、(2)式可得

$$\frac{1}{2} m_p v_p^2 = \frac{m_n + m_{{}^3\text{He}}}{m_n + m_{{}^3\text{He}} - m_p} |Q| \quad (3)$$

所以阈能为

$$T_{th} = \left( 1 + \frac{m_p}{m_n + m_{{}^3\text{He}} - m_p} \right) |Q| \quad (4)$$

利用第 1 问中的(1)式, 并注意到

$$\frac{|Q|}{m_{{}^3\text{H}} c^2} \ll 1$$

有

$$\frac{1}{m_n + m_{^3\text{He}} - m_p} = \frac{1}{m_{^3\text{H}} \left( 1 + \frac{|Q|}{m_{^3\text{H}} c^2} \right)} = \frac{1}{m_{^3\text{H}}} \left( 1 - \frac{|Q|}{m_{^3\text{H}} c^2} \right)$$

在忽略 $|Q|^2$ 项的情况下, (4)式可简化为

$$T_{th} = \left( 1 + \frac{m_p}{m_{^3\text{H}}} \right) |Q| \quad (5)$$

代入有关数据得

$$T_{th} = 1.02 \text{ MeV} \quad (6)$$

第2问8分

(1)、(2)式各3分, (4)式或(5)式1分, (6)式1分.

解法二

在牛顿时力学中可以证明, 质点系的总动能可以表示为质点系的总质量以质心速度运动的动能即所谓质心动能与各质点相对质心运动的动能之和. 若质点系不受外力作用, 则质点系的动量守恒, 质心速度不变, 故质心动能亦恒定不变; 如果质点系内部的相互作用导致质点系机械能的变化, 则可变化的机械能只能是各质点相对质心运动的动能. 在本题中, 如果质子 $p$ 与氦 $^3_1\text{H}$ 发生反应后, 生成的中子 $n$ 和氦 $^3_2\text{He}$ 相对质心都静止, 则质子 $p$ 与氦 $^3_1\text{H}$ 相对质心运动的动能之和全部转化成反应能, 反应后系统的动能只有质心的动能, 在这情况下, 转化成其他形式能量的机械能最多, 入射质子的动能最小, 这最小动能便是阈能. 所以入射质子的阈能等于系统质心的动能与反应能之和.

以 $v'_p$ 和 $v'_{^3\text{H}}$ 分别表示质子 $p$ 和氦 $^3_1\text{H}$ 相对质心的速度, 有

$$|Q| = \frac{1}{2} m_p v_p'^2 + \frac{1}{2} m_{^3\text{H}} v_{^3\text{H}}'^2 \quad (1)$$

因系统质心的速度

$$v_c = \frac{m_p v_p}{m_p + m_{^3\text{H}}} \quad (2)$$

而

$$v'_p = v_p - v_c = \frac{m_{^3\text{H}} v_p}{m_p + m_{^3\text{H}}} \quad (3)$$

$$v'_{^3\text{H}} = 0 - v_c = -\frac{m_p v_p}{m_p + m_{^3\text{H}}} \quad (4)$$

由(1)、(3)、(4)式得

$$|Q| = \frac{m_{3H}}{m_p + m_{3H}} \frac{1}{2} m_p v_p^2 \quad (5)$$

在牛顿力学中，系统的总质量是恒定不变的，这就导致系统质心的动能在反应前后恒定不变的结论，但在本题中，损失掉的机械能导致系统总质量的变化，使反应前系统的总质量与反应后系统的总质量不相等，即  $m_p + m_{3H} \neq m_n + m_{3He}$ 。如果仍沿用牛顿力学的结论，对一个孤立系统，其质心速度是不会改变的，故反应后质心的动能应为

$$E_c = \frac{1}{2} (m_n + m_{3He}) v_c^2 = \frac{1}{2} (m_p + m_{3H}) v_c^2 + \frac{1}{2} \frac{|Q|}{c^2} v_c^2$$

而

$$\frac{1}{2} \frac{|Q|}{c^2} v_c^2 = \frac{1}{2} \frac{|Q|}{c^2} \cdot \frac{m_p^2 v_p^2}{(m_p + m_{3H})^2} = \frac{|Q|}{c^2} \cdot \frac{m_p}{m_p + m_{3H}} \cdot \frac{|Q|}{m_{3H}}$$

由此可见，在忽略  $|Q|^2$  的条件下

$$\frac{1}{2} (m_n + m_{3He}) v_c^2 = \frac{1}{2} (m_p + m_{3H}) v_c^2$$

而入射质子的动能

$$T_{th} = \frac{1}{2} (m_p + m_{3H}) v_c^2 + |Q| \quad (6)$$

由(2)、(5)、(6)式得

$$T_{th} = \left( 1 + \frac{m_p}{m_{3H}} \right) |Q| \quad (7)$$

代入有关数据得

$$T_{th} = 1.02 \text{ MeV} \quad (8)$$

第 2 问 8 分

(1)、(5)、(6)式各 2 分，(7)式 1 分、(8)式 1 分。

解法三

考虑反应前后各粒子都沿同一直线运动的情况，若入射质子与静止的  ${}^3_1\text{H}$  发生完全非弹性碰撞，即反应后产生的中子和  ${}^3_2\text{He}$  以相同的速度运动，则入射质子的动能就是阈能。以  $m_{10}$  表示质子的静止质量， $m_{20}$  表示  ${}^3_1\text{H}$  的静止质量， $m_{30}$  表示中子的静止质量， $m_{40}$  表示  ${}^3_1\text{He}$  的静止质量，设质子的入射速度大小为  $v_p$ ，反应后  ${}^3_2\text{He}$  和中子的速度大小都为  $v$ ，根据动量守恒和能量守恒有

$$m_1 v_p = \frac{(m_{30} + m_{40})v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (1)$$

$$m_1 c^2 + m_{20} c^2 = \frac{(m_{30} + m_{40})c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (2)$$

式中  $m_1$  是质子的动质量.由(1)、(2)两式得

$$v = \frac{m_1 v_p}{m_1 + m_{20}} \quad (3)$$

把(3)式代入(1)式, 经整理得

$$(m_1 + m_{20})^2 c^2 - m_1^2 v_p^2 = (m_{30} + m_{40})^2 c^2 \quad (4)$$

由

$$m_1 = \frac{m_{10}}{\sqrt{1 - \frac{v_p^2}{c^2}}} \quad (5)$$

可得

$$m_1^2 - m_{10}^2 = \frac{m_{10}^2 v_p^2}{c^2} \quad (6)$$

若入射质子的阈能为  $E_{th}$ , 有

$$m_1 c^2 = m_{10} c^2 + E_{th} \quad (7)$$

由(4)、(6)、(7)式可得

$$E_{th} = \frac{(m_{30} + m_{40})^2 - (m_{10} + m_{20})^2}{2m_{20}} \quad (8)$$

利用题给条件并引入反应能, 得

$$E_{th} = \frac{m_p + m_{^3\text{H}} + m_n + m_{^3\text{He}}}{2m_{^3\text{H}}} |Q| \quad (9)$$

或有

$$E_{th} = \frac{\frac{|Q|^2}{c^2} + 2(m_p + m_{^3\text{H}})}{2m_{^3\text{H}}} |Q| \approx \frac{m_p + m_{^3\text{H}}}{m_{^3\text{H}}} |Q| \quad (10)$$

代入有关数据得

$$T_{th} = 1.02 \text{ MeV} \quad (11)$$

---

第 2 问 8 分

(1)、(2)、(8)式各 2 分， (9)或(10)式 1 分， (11)式 1 分.