第 26 届全国中学生物理竞赛复赛试卷

参考解答与评分标准

一、填空（问答）题. 每小题 5 分，共 25 分. 按各小题的答案和评分标准评分.

1. **答案与评分标准：**

这种分布的静电场不可能存在. 因为静电场是保守场，电荷沿任意闭合路径一周电场力做的功等于 0，但在这种电场中，电荷可以沿某一闭合路径移动一周而电场力做功不为 0.（5 分）

2．**答案与评分标准：**

1.5．（5 分）

3．**答案与评分标准：**

测电笔内阻很大，通过与之串联的人体上的电流（或加在人体上的电压）在安全范围内；（2 分）

市电为交流电，而电工鞋相当于一电容器，串联在电路中仍允许交流电通过.（3 分）

4．**答案与评分标准：**

$2E_0C_0$.（5 分）

5．**答案与评分标准：**

该学生未考虑竖直方向木块所受的支持力和重力的力矩. 仅根据摩擦力的力矩为零便推出木块的角动量应守恒，这样推理本身就不正确. 事实上，此时支持力合力的作用线在重力作用线的右侧，支持力与重力的合力矩不为 0，木块的角动量不守恒，与木块作减速运动不矛盾.（5 分）

二、

参考解答：

设桌面对四条腿的作用力皆为压力，分别为 F_1、F_2、F_3、F_4. 因轻质刚性的桌面处在平衡状态，可推得

$$F_1 + F_2 + F_3 + F_4 = F \ . \tag{1}$$

由于对称性，

$$F_2 = F_4 \, . \tag{2}$$

考察对桌面对角线 BD 的力矩，由力矩平衡条件可得

$$F_3 + cF = F_1 \, . \tag{3}$$

根据题意， $0 \le c \le 1$，c=0 对应于力 F 的作用点在 O 点，c=1 对应于 F 作用点在 A 点.

设桌腿的劲度系数为 k，在力 F 的作用下，腿 1 的形变为 F_1/k，腿 2 和 4 的形变均为 F_2/k，腿 3 的形变为 F_3/k. 依题意，桌面上四个角在同一平面上，因此满足

$\frac{1}{2}\left(\frac{F_1}{k}+\frac{F_3}{k}\right)=\frac{F_2}{k}$，即

$$F_1+F_3=2F_2\,. \tag{4}$$

由(1)、(2)、(3)、(4)式，可得

$$F_1=\frac{2c+1}{4}F\,, \tag{5}$$

$$F_3=\frac{1-2c}{4}F\,, \tag{6}$$

当$c\geq\frac{1}{2}$时，$F_3\leq 0$．$F_3=0$，表示腿 3 无形变；$F_3<0$，表示腿 3 受到桌面的作用力为拉力，这是不可能的，故应视$F_3=0$．此时(2)式(3)式仍成立．由(3)式，可得

$$F_1=cF\,. \tag{7}$$

综合以上讨论得

$$F_1=\frac{2c+1}{4}F\,,\qquad 0\leq c\leq\frac{1}{2}\,. \tag{8}$$

$$F_1=cF\,,\qquad \frac{1}{2}\leq c\leq 1\,. \tag{9}$$

评分标准：本题 20 分.

(1)式 1 分，(2)式 1 分，(3)式 2 分，(4)式 7 分，得到由(8)式表示的结果得 4 分，得到由(9)式表示的结果得 5 分.

三、

参考解答：

1. 否．原因是墙壁对于该体系而言是外界，墙壁对弹簧有作用力，在运动参考系里此力的作用点有位移，因而要对体系做功，从而会改变这一体系的机械能.

2. 因地球受月球的引力作用，月球受地球的引力作用，它们相对惯性系都有加速度，故它们都不是惯性参考系．相对非惯性参考系，牛顿第二定律不成立．如果要在非惯性参考系中应用牛顿第二定律，必须引入相应的惯性力；而这两位学生又都未引入惯性力，所以他们得到的结果原则上都是错误的.

以地心为参考系来求月球的加速度. 地心系是非惯性系，设地球相对惯性系的加速度的大小为a_{e}^*，则由万有引力定律和牛顿第二定律有

$$G\frac{Mm}{R^2}=Ma_{\mathrm{e}}^*\,, \tag{1}$$

加速度的方向指向月球．相对地心参考系，月球受到惯性力作用，其大小

$$f_{\mathrm{m}}^*=ma_{\mathrm{e}}^*\,, \tag{2}$$

方向指向地球，与月球受到的万有引力的方向相同．若月球相对地心系的加速度为 a_{m}，则有

$$G\frac{Mm}{R^2}+f_{\mathrm{m}}^*=ma_{\mathrm{m}}\,. \tag{3}$$

由(1)、(2)、(3)三式，得

$$a_{\mathrm{m}}=G\frac{M+m}{R^2}\,, \tag{4}$$

加速度的方向指向地球．

以月心为参考系来求地球的加速度．月心系也是非惯性系，设月球相对惯性系的加速度的大小为 a_{m}^*，则由万有引力定律和牛顿第二定律有

$$G\frac{Mm}{R^2}=ma_{\mathrm{m}}^*\,, \tag{5}$$

加速度的方向指向地球．相对月心参考系，地球受到惯性力作用，惯性力的大小

$$f_M^*=Ma_{\mathrm{m}}^*\,, \tag{6}$$

方向指向月球，与地球受到的万有引力的方向相同．若地球相对月心系的加速度为 a_{e}，则有

$$G\frac{Mm}{R^2}+f_{\mathrm{e}}^*=Ma_{\mathrm{e}}\,. \tag{7}$$

由(5)、(6)、(7)三式得

$$a_{\mathrm{e}}=G\frac{M+m}{R^2}\,, \tag{8}$$

加速度的方向指向月球． (4)式与(8)式表明，地球相对月心系的加速度 a_{e} 与月球相对地心系的加速度 a_{m} 大小相等(方向相反)，与运动的相对性一致．

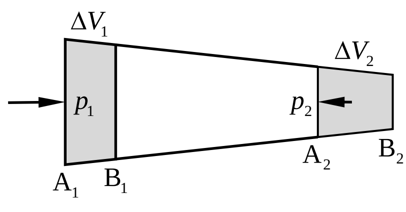
评分标准：本题 15 分．

第 1 小问 5 分．

第 2 小问 10 分．指出不正确并说明理由，占 2 分；(1)至(8)式，每式 1 分．

四、

参考解答：



于火箭燃烧室出口处与喷气口各取截面 A_1 与 A_2，它们的面积分别为 S_1 和 S_2，由题意，$S_1 >> S_2$，以其间管道内的气体为研究对象，如图所示．设经过很短时间 Δt，这部分气体流至截面 B_1 与 B_2 之间，$\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1$ 间、$\mathrm{A}_2\mathrm{B}_2$ 间的微小体积分别为 ΔV_1、ΔV_2，两处气体密度

为ρ_1、ρ_2，流速为v_1、v_2．气流达到稳恒时，内部一切物理量分布只依赖于位置，与时间无关．由此可知，尽管B_1A_2间气体更换，但总的质量与能量不变．

先按绝热近似求喷气口的气体温度T_2．质量守恒给出

$$\rho_1 \Delta V_1 = \rho_2 \Delta V_2 , \tag{1}$$

即A_2B_2气体可视为由A_1B_1气体绝热移动所得．事实上，因气流稳恒，A_1B_1气体流出喷口时将再现A_2B_2气体状态．对质量$\Delta m = \rho_1 \Delta V_1 = \rho_2 \Delta V_2$的气体，利用理想气体的状态方程

$$p\Delta V = \frac{\Delta m}{\mu} RT \tag{2}$$

和绝热过程方程

$$p_1 \left(\Delta V_1\right)^{\frac{c_V + R}{c_V}} = p_2 \left(\Delta V_2\right)^{\frac{c_V + R}{c_V}} , \tag{3}$$

可得

$$T_2 = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{R}{c_V + R}} T_1 . \tag{4}$$

再通过能量守恒求气体的喷射速率v_2．由(1)式及$\Delta V = Sv\Delta t$，可得

$$\rho_1 S_1 v_1 = \rho_2 S_2 v_2 , \tag{5}$$

再利用(1)、(3)式，知$v_1 = \dfrac{\rho_2 S_2}{\rho_1 S_1} v_2 = \dfrac{S_2}{S_1}\left(\dfrac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{c_V}{c_V + R}} v_2$，因$S_2 << S_1$，　$p_2 << p_1$，故

$$v_1 << v_2 . \tag{6}$$

整个体系经Δt时间的总能量（包括宏观流动机械能与微观热运动内能）增量ΔE为A_2B_2部分与A_1B_1部分的能量差．由于重力势能变化可忽略，在理想气体近似下并考虑到(6)式，有

$$\Delta E = \frac{1}{2}\Delta m v_2^2 + \frac{\Delta m}{\mu} c_V \left(T_2 - T_1\right) . \tag{7}$$

体系移动过程中，外界做的总功为

$$W = p_1 \Delta V_1 - p_2 \Delta V_2 . \tag{8}$$

根据能量守恒定律，绝热过程满足

$$\Delta E = W , \tag{9}$$

得

$$v_2 = \sqrt{\frac{2(c_V + R)T_1}{\mu}\left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{R}{c_V + R}}\right]}, \tag{10}$$

其中利用了(2)、(4)两式.

评分标准：本题 20 分.

(2)式 1 分，(3)式 2 分，(4)式 3 分，(6)式 1 分，(7)式 6 分，(8)式 4 分，(9)式 1 分，(10)式 2 分.

五、

参考解答：

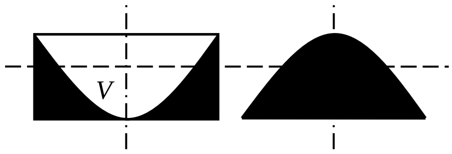
旋转抛物面对平行于对称轴的光线严格聚焦，此抛物凹面镜的焦距为

$$f = \frac{g}{2\omega^2}. \tag{1}$$

由(1)式，旋转抛物面方程可表示为

$$z = \frac{r^2}{4f}. \tag{2}$$

停转后液面水平静止. 由液体不可压缩性，知液面上升. 以下求抛物液面最低点上升的高度.



抛物液面最低点以上的水银，在半径 R 、高 $R^2/4f$ 的圆柱形中占据体积为 M 的部分，即附图中左图阴影部分绕轴线旋转所得的回转体；其余体积为 V 的部分无水银. 体 M 在高度 z 处的水平截面为圆环，利用抛物面方程，得 z 处圆环面积

$$S_M(z) = \pi\left(R^2 - r^2\right) = \pi\left(R^2 - 4fz\right). \tag{3}$$

将体 V 倒置，得附图中右图阴影部分绕轴线旋转所得的回转体 Λ，相应抛物面方程变为

$$z = \frac{R^2 - r^2}{4f}, \tag{4}$$

其高度 z 处的水平截面为圆面，面积为

$$S_\Lambda(z) = \pi r^2 = \pi\left(R^2 - 4fz\right) = S_M(z). \tag{5}$$

由此可知

$$M = \Lambda = V = \frac{1}{2}\pi R^2 \frac{R^2}{4f}, \tag{6}$$

即停转后抛物液面最低点上升

$$h = \frac{M}{\pi R^2} = \frac{R^2}{8f}. \tag{7}$$

因抛物镜在其轴线附近的一块小面积可视为凹球面镜，抛物镜的焦点就是球面镜的焦点，故可用球面镜的公式来处理问题. 两次观察所见到的眼睛的像分别经凹面镜与平面镜反射而成，而先后看到的像的大小、正倒无变化，这就要求两像对眼睛所张的视角相同．设眼长为 y_0．凹面镜成像时，物距 u 即所求距离，像距 v 与像长 y 分别为

$$v=\frac{fu}{u-f}\,, \tag{8}$$

$$y=-\frac{v}{u}y_0=\frac{f}{f-u}y_0\,. \tag{9}$$

平面镜成像时，由于抛物液面最低点上升，物距为

$$u'=u-h=u-\frac{R^2}{8f}\,, \tag{10}$$

像距 v' 与像长 y' 分别为

$$v'=-u'\,, \tag{11}$$

$$y'=-\frac{v'}{u'}y_0=y_0\,. \tag{12}$$

两像视角相同要求

$$\frac{y}{u-v}=\frac{y'}{u'-v'}\,, \tag{13}$$

即

$$\frac{1}{2u-u^2/f}=\frac{1}{2u-R^2/4f}\,, \tag{14}$$

此处利用了(8)—(12)诸式．由(14)式可解得所求距离

$$u=\frac{R}{2}\,. \tag{15}$$

评分标准：本题 20 分.

(1)式 1 分，(7)式 4 分，(8)、(9)式各 2 分，(10) 、(11)、 (12)式各 1 分，(13)式 6 分，(15)式 2 分.

六、

参考解答：

1．先求两惯性系中光子速度方向的变换关系．根据光速不变原理，两系中光速的大小都是 c．以 θ 和 θ' 分别表示光子速度方向在S 和 S′ 系中与 x 和 x' 轴的夹角，则光速的 x 分量为

$$u_x=c\cos\theta\,, \tag{1}$$

$$u'_x=c\cos\theta'\,. \tag{2}$$

再利用相对论速度变换关系，得

$$\cos\theta=\frac{\cos\theta'+v/c}{1+v\cos\theta'/c}\ . \tag{3}$$

S' 系中光源各向同性辐射，表明有一半辐射分布于 $0\le\theta'\le\pi/2$ 的方向角范围内，S 系中，此范围对应 $0\le\theta\le\alpha$．由上式求得

$$\alpha=\arccos\frac{\cos\frac{\pi}{2}+\frac{v}{c}}{1+\frac{v}{c}\cos\frac{\pi}{2}}=\arccos\frac{v}{c}\ . \tag{4}$$

可以看出，光源的速度 v 越大，圆锥的顶角越小.

2．S' 系中，质点静止，在 $\Delta t'$ 时间内辐射光子的能量来自质点静能的减少，即

$$P\Delta t'=\Delta m_0c^2\ , \tag{5}$$

式中 Δm_0 为 $\Delta t'$ 时间内质点减少的质量．S 系中，质点以速度 v 匀速运动，由于辐射，其动质量减少 Δm，故动量与能量亦减少．转化为光子的总动量为 $\Delta p=\Delta mv$，即

$$\Delta p=\frac{\Delta m_0 v}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\ ; \tag{6}$$

转化为光子的总能量为 $\Delta E=\Delta mc^2$，即

$$\Delta E=\frac{\Delta m_0c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\ . \tag{7}$$

S' 系中光源静止，测得的辐射时间 $\Delta t'$ 为本征时，在 S 系中膨胀为

$$\Delta t=\frac{\Delta t'}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\ , \tag{8}$$

由以上各式可得在 S 系中单位时间内辐射的全部光子的总动量与总能量分别为

$$\frac{\Delta p}{\Delta t}=\frac{vP}{c^2}\ , \tag{9}$$

$$\frac{\Delta E}{\Delta t}=P\ . \tag{10}$$

评分标准：本题 20 分.

第 1 小问 7 分. (3)式 4 分，(4)式 3 分.

第 2 小问 13 分. (5)、 (6) 、(7)式各 2 分，(8)式 3 分，(9) 、(10) 式各 2 分.

七、

参考解答：

1．光子与反射镜碰撞过程中的动量和能量守恒定律表现为

$$E/c+MV=-E'/c+MV', \tag{1}$$

$$E+MV^2/2=E'+MV'^2/2\,. \tag{2}$$

其中V'为碰撞后反射镜的速度．从上两式消去V'，得

$$E+E'=\frac{4E}{1+V/c+\sqrt{(1+V/c)^2+4E/Mc^2}}\approx\frac{2E}{1+V/c}\,. \tag{3}$$

$$E'=E\frac{1-V/c}{1+V/c} \tag{4}$$

当$\dfrac{V}{c}<<1$时，$\dfrac{1}{1+V/c}\approx 1-V/c$，可得

$$E'=E(1-2V/c)\,. \tag{5}$$

2.考察时刻t位于垂直于光传播方向的截面 A 左侧的长为光在1s时间内所传播的距离c×1s、底面积为单位面积柱体内的光子，如图 1 所示．经过 1s 时间，它们全部通过所考察的截面．若单位体积中的光子数为n，根据光强的定义，入射光的强度

$$\varPhi=ncE \tag{6}$$

图 1

若 A 处固定一反射镜，则柱体的底面 S_2 处的光子在时刻 t 到达位于 A 处的反射镜便立即被反射，以光速 c 向左移动；当柱体的底面 S_1 在 t+1s 到达 A 处被反射镜反射时，这柱体的底面 S_2 已到达 A 左边距离 A 为 c×1s 处，所有反射光的光子仍分布在长为 c×1s、截面积为单位面积的柱体内，所以反射光的强度与入射光的强度相等．

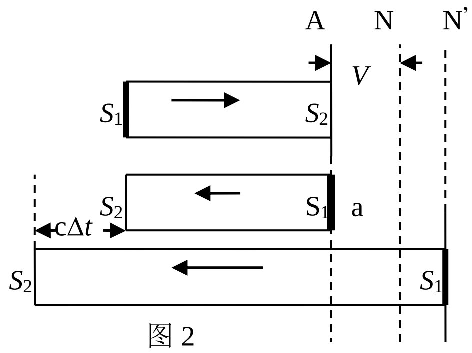


图 2

如果反射镜不固定，而是以恒定的速度 V 向右移动，则在时刻 t+1s 柱体的底面 S_1 到达 A 处时，反射镜已移到 A 右边距离为 V×1s 的 N 处，这时底面 S_2 移到 A 左侧离 A 的距离为 c×1s 处，如图 2 中 a 所示. 设再经过时间Δt，S_1 与镜面相遇，但这时镜面己来到 N$'$ 处，因为在Δt时间内，镜面又移过了一段距离$V\Delta t$，即在时刻$t+1\mathrm{s}+\Delta t$，底面 S_1 才到达反射镜被反射．亦即原在 S_1 处的光子须多行进 $c\Delta t$ 的距离才能被反射．因此

$$c\Delta t=(1\mathrm{s}+\Delta t)V$$

得

$$\Delta t=\frac{V}{c-V} \tag{7}$$

而这时，底面 S_2 又向左移了一段距离$c\Delta t$．这样反射光的光子将分布在长为$c\times 1s+2c\Delta t$ 的柱体内．因反射不改变光子总数，设n'为反射光单位体积中的光子数，有

$$nc = n'\left(c + 2\frac{cV}{c-V}\right) = n'c\frac{c+V}{c-V}$$

故有

$$n' = n\frac{c-V}{c+V}. \tag{8}$$

根据光强度的定义，反射光的强度

$$\Phi' = n'cE'. \tag{9}$$

由(4)、(8)、(9)各式得

$$\Phi' = \Phi\left(\frac{c-V}{c+V}\right)^2. \tag{10}$$

注意到$V << c$有

$$\Phi' = \Phi\left(1 - \frac{4V}{c}\right). \tag{11}$$

评分标准： 本题 20 分.

第 1 小问 9 分. (1)、(2)式各 2 分，(4)或(5)式 5 分.

第 2 小问 11 分. (8)式 5 分，(9)式 3 分，(10) 或(11)式 3 分.

八、

参考解答：

两个相距 R 的惰性气体原子组成体系的能量包括以下几部分：每个原子的负电中心振动的动能，每个原子的负电中心因受各自原子核“弹性力”作用的弹性势能，一个原子的正、负电荷与另一原子的正、负电荷的静电相互作用能. 以 v_1 和 v_2 分别表示两个原子的负电中心振动速度，x_1 和 x_2 分别表示两个原子的负电中心相对各自原子核的位移，则体系的能量

$$E = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}kx_2^2 + U\ , \tag{1}$$

式中 U 为静电相互作用能

$$U = k_C q^2\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R + x_1 - x_2} - \frac{1}{R + x_1} - \frac{1}{R - x_2}\right), \tag{2}$$

k_C 为静电力常量. 因 $R + x_1 - x_2 = R\left(1 + \frac{x_1 - x_2}{R}\right)$，$R + x_1 = R\left(1 + \frac{x_1}{R}\right)$，$R - x_2 = R\left(1 - \frac{x_2}{R}\right)$，利用$(1+x)^{-1} \approx 1 - x + x^2$，可将(2)式化为

$$U = -\frac{2k_C q^2 x_1 x_2}{R^3}, \tag{3}$$

因此体系总能量可近似表为

$$E=\frac{1}{2}mv_1^2+\frac{1}{2}kx_1^2+\frac{1}{2}mv_2^2+\frac{1}{2}kx_2^2-\frac{2k_\mathrm{C}q^2x_1x_2}{R^3}. \tag{4}$$

注意到$a^2+b^2=\dfrac{(a+b)^2+(a-b)^2}{2}$和 $2ab=\dfrac{(a+b)^2-(a-b)^2}{2}$，可将(4)式改写为

$$E=\frac{1}{2}mu_1^2+\frac{1}{2}\left(k-\frac{2k_\mathrm{C}q^2}{R^3}\right)y_1^2+\frac{1}{2}mu_2^2+\frac{1}{2}\left(k+\frac{2k_\mathrm{C}q^2}{R^3}\right)y_2^2. \tag{5}$$

式中，

$$u_1=(v_1+v_2)\big/\sqrt{2}, \tag{6}$$

$$u_2=(v_1-v_2)\big/\sqrt{2}, \tag{7}$$

$$y_1=(x_1+x_2)\big/\sqrt{2}, \tag{8}$$

$$y_2=(x_1-x_2)\big/\sqrt{2}. \tag{9}$$

(5)式表明体系的能量相当于两个独立谐振子的能量和，而这两个振子的固有角频率分别为

$$\omega_1=\sqrt{\frac{k-2k_\mathrm{C}q^2\big/R^3}{m}}, \tag{10}$$

$$\omega_2=\sqrt{\frac{k+2k_\mathrm{C}q^2\big/R^3}{m}}. \tag{11}$$

在绝对零度，零点能为

$$E_0=\frac{1}{2}\hbar(\omega_1+\omega_2), \tag{12}$$

两个孤立惰性气体原子在绝对零度的能量分别表示为E_{10}和E_{20}，有

$$E_{10}=E_{20}=\frac{1}{2}\hbar\omega_0, \tag{13}$$

式中

$$\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}} \tag{14}$$

为孤立振子的固有角频率．由此得绝对零度时，所考察的两个惰性气体原子组成的体系的能量与两个孤立惰性气体原子能量和的差为

$$\Delta E=E_0-(E_{10}+E_{20}). \tag{15}$$

利用$(1+x)^{1/2}\approx 1+x/2-x^2\big/8$，可得

$$\Delta E=-\frac{\hbar}{2}\frac{k_{\mathrm{C}}^{2}q^{4}}{k^{3/2}m^{1/2}R^{6}}\,. \tag{16}$$

$\Delta E<0$，表明范德瓦尔斯相互作用为相互吸引.

评分标准：本题 20 分.

(1)式 1 分，(2)式 3 分，(4)式 3 分，(10)、(11)式各 4 分， (12)式 2 分， (16)式 2 分，末句说明占 1 分.