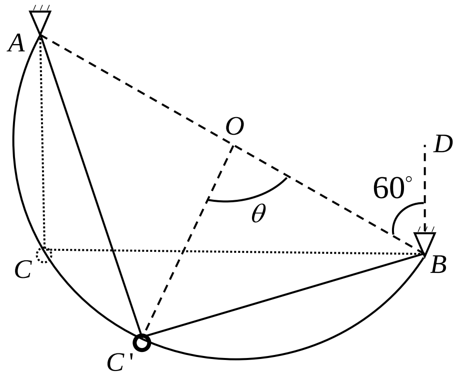
第 28 届全国中学生物理竞赛决赛试题及参考解答

一.（15 分）在竖直面内将一半圆形光滑导轨固定在 A、B 两点，导轨直径 $AB=2R$，AB 与竖直方向间的夹角为$60°$，在导轨上套一质量为 m 的光滑小圆环．一劲度系数为 k 的轻而细的光滑弹性绳穿过圆环，其两端系于 A、B 两点，如图所示．当圆环位于 A 点正下方 C 点时，弹性绳刚好为原长．现将圆环从 C 点无初速度释放，圆环在时刻 t 运动到C'点，$C'O$ 与半径 OB 的夹角为θ．重力加速度为 g．试分别对下述两种情形，求导轨对圆环的作用力的大小：



1． $\theta = 90°$；

2． $\theta = 30°$．

参考解答：

1．设弹性绳在时刻 t 的伸长量为ΔL，弹性绳的张力为T，小圆环下降的高度为H．当$\theta = 90°$时，小圆环受到导轨的正压力 N、竖直向下重力 mg 和弹性绳的沿$C'A$和$C'B$两个方向的张力，见图 1．根据几何关系有

$$\Delta L = 4R\cos 45° - 2R(\cos 30° + \sin 30°)$$
$$= (2\sqrt{2} - \sqrt{3} - 1)R > 0, \qquad (1)$$

这说明绳是张紧的．

$$H = \sqrt{2}R\sin(45° - 30°) \qquad （2）$$

根据牛顿运动定律，这时有

$$N + 2T\cos 45° - mg\cos 30° = \frac{mv^2}{R} \qquad (3)$$

式中，v 是小圆环此刻运动速度的大小．小圆环在下降过程中机械能守恒

$$mgH = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}k\Delta L^2 \qquad （4）$$

根据胡克定律有

$$T = k\Delta L \qquad （5）$$

由以上各式得

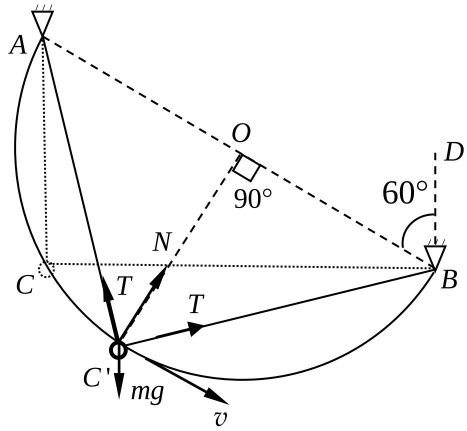


图 1

$$N=\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}-1\right)mg-(16+2\sqrt{3}-5\sqrt{2}-5\sqrt{6})kR$$

$$=1.6mg-0.15kR \qquad (6)$$

2．当$\theta=30°$时，弹性绳的伸长量为

$$\Delta L=2R(\cos15°+\sin15°)-2R(\cos30°+\sin30°)$$

$$=(\sqrt{6}-\sqrt{3}-1)R=-0.28R<0 \qquad (7)$$

弹性绳处于松弛状态，$T=0$，小圆环受力如图 2 所示．根据牛顿运动定律有

$$N-mg\cos30°=\frac{mv^2}{R} \qquad (8)$$

整个过程机械能守恒，有

$$mgH=\frac{1}{2}mv^2 \qquad (9)$$

由几何关系得

$$H=2R\sin15°\sin45° \qquad (10)$$

由（8)、(9)、(10）式得

$$N=\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}-1\right)mg=1.6mg \qquad (11)$$

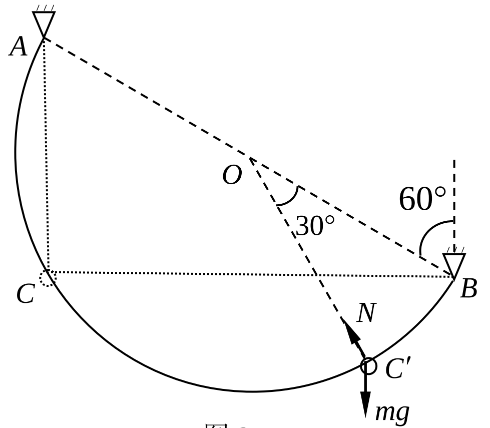


图 2

评分标准：

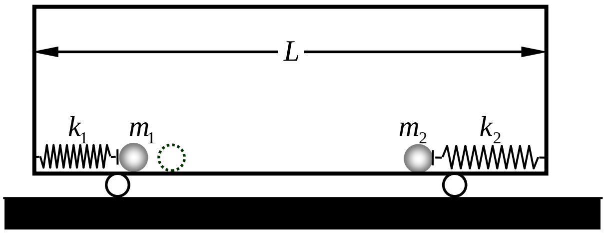
本题 15 分．

第一问 8 分，（1）（2）式各 1 分,（3）式 2 分，（4）（5）式各 1 分，（6）式 2 分；

第二问 7 分，（7）式 1 分，（8）式 2 分，（9）（10）式各 1 分，（11）式 2 分.

二.（15 分）如图，在水平地面上有一质量为M、长度为L的小车．车内两端靠近底部处分别固定两个轻弹簧，两弹簧位于同一直线上，其原长分别为l_1和l_2，劲度系数分别为k_1和k_2；两弹簧的另一端前分别放着一质量为m_1、m_2的小球，弹簧与小球都不相连.

开始时，小球 1 压缩弹簧 1 并保持整个系统处于静止状态，小球 2 被锁定在车底板上，小球 2 与小车右端的距离等于弹簧 2 的原长．现无初速释放小球 1，当弹簧 1 的长度等于其原长时，立即解除对小球 2 的锁定；小球 1 与小球 2 碰撞后合为一体，碰撞时间极短．已知所有接触都是光滑的；从释放小球 1 至弹簧 2 达到最大压缩量时，小车移动了距离l_3．试求开始时弹簧 1 的长度l和后来弹簧 2 所达到的最大压缩量Δl_2.



参考解答：

以地面为参考系，取水平向左为 x 轴正方向．由题意 $l < l_1$．　在小球 1 从释放至运动到与小球 2 刚好接触的过程中，小球 1、2 与小车作为一个整体，总能量与总动量守恒，故

$$-m_1 v_0 + \left(M + m_2\right) V_0 = 0 \qquad （1）$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_0^2 + \frac{1}{2}\left(M + m_2\right) V_0^2 = \frac{1}{2} k_1 (l_1 - l)^2 \qquad （2）$$

式中，v_0 和 V_0 分别表示在小球 1、2 刚好接触时小球 1 和小车的运动速率．

考虑从小球 1 和 2 相碰至两小球合为一体时的碰撞过程．由于碰撞时间极短，弹簧 2 还没有来得及被压缩，可忽略弹簧 2 的弹力．此过程中，小球 1 和 2 作为一个整体动量守恒，故

$$m_2 V_0 - m_1 v_0 = -\left(m_1 + m_2\right) v \qquad （3）$$

式中，v 表示在碰后的瞬间小球 1 和 2 的共同速率．

当弹簧 2 达到最大压缩时，小球 1、2 与小车三者相对静止，由动量守恒与系统总动量为零可知，这时小车相对于地面的速度为零．在从小球 1 和 2 刚合为一体时至弹簧 2 达到最大压缩的过程中，系统能量守恒，故

$$\frac{1}{2} M V_0^2 + \frac{1}{2}\left(m_1 + m_2\right) v^2 = \frac{1}{2} k_2 \Delta l_2^2 \qquad （4）$$

联立（1）至（4）式得

$$\Delta l_2 = \sqrt{\frac{k_1}{k_2}} \sqrt{\frac{M m_1}{(M + m_2)(m_1 + m_2)}} (l_1 - l) \qquad （5）$$

考虑从小球 1 释放至弹簧 2 达到最大压缩的全过程．小球、弹簧及小车作为一个整体，所受到的合外力为零，系统质心的位置在整个过程中应当保持不变，即

$$(M + m_1 + m_2) l_3 - m_1[(l_1 - l) + (L - l_1 - l_2)] - (m_1 + m_2)\Delta l_2 = 0 \qquad （6）$$

联立（5）和（6）式得

$$l = l_1 - \frac{l_1 + l_2 - L + \dfrac{M + m_1 + m_2}{m_1} l_3}{1 + \sqrt{\dfrac{k_1}{k_2}} \sqrt{\dfrac{M(m_1 + m_2)}{(M + m_2) m_1}}} \qquad （7）$$

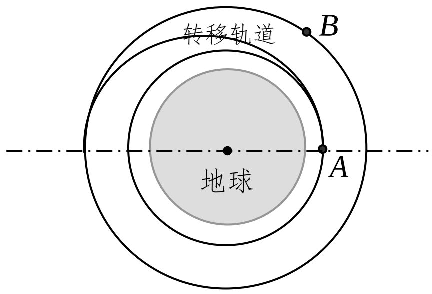
$$\Delta l_2 = \frac{l_1 + l_2 - L + \dfrac{M + m_1 + m_2}{m_1} l_3}{\dfrac{m_1 + m_2}{m_1} + \sqrt{\dfrac{k_2}{k_1}} \sqrt{\dfrac{(M + m_2)(m_1 + m_2)}{M m_1}}} \qquad （8）$$

评分标准：

本题 15 分．

（1）（2）（3）（4）式各 2 分，（6）式 3 分，（7）（8）式各 2 分．

三．（20 分）某空间站 A 绕地球作圆周运动，轨道半径为 $r_{\mathrm{A}}=6.73\times10^{6}\,\mathrm{m}$．一人造地球卫星 B 在同一轨道平面内作圆周运动，轨道半径为 $r_{\mathrm{B}}=\dfrac{3}{2}r_{\mathrm{A}}$，$A$ 和 B 均沿逆时针方向运行．现从空间站上发射一飞船(对空间站无反冲)前去回收该卫星．为了节省燃料，除了短暂的加速或减速变轨过程外，飞船在往返过程中均采用同样形状的逆时针椭圆转移轨道，作无动力飞行．往返两过程的椭圆轨道均位于空间站和卫星的圆轨道平面内，且其近地点和远地点都分别位于空间站和卫星的圆轨道上，如图所示．



已知地球半径 $R_{\mathrm{e}}=6.38\times10^{6}\,\mathrm{m}$，地球表面重力加速度 $g=9.80\mathrm{m/s^{2}}$．

试求：

1．飞船离开空间站 A 进入椭圆转移轨道所必需的速率增量 Δv_{A}，若飞船在远地点恰与卫星 B 相遇，为了实现无相对运动的捕获, 飞船所需的速率增量 Δv_{B}．

2．按上述方式回收卫星，飞船从发射到返回空间站至少需要的时间，空间站 A 至少需绕地球转过的角度．

忽略飞船在变轨过程中所用的短暂时间及在此相应时间内绕地球转过的角度．

参考解答：

1．设空间站 A 和卫星 B 的速度大小分别为 v_{A0} 和 v_{B0}，则由牛顿引力定律得

$$\frac{GmM}{r_{\mathrm{A}}^{2}}=\frac{mv_{\mathrm{A0}}^{2}}{r_{\mathrm{A}}} \qquad (1)$$

$$\frac{Gm'M}{R_{\mathrm{e}}^{2}}=m'g \qquad (2)$$

式中，m 和 M 分别是飞船和地球的质量，m' 和 g 分别是地球表面上的某一物体的质量和重力加速度．由（1）和（2）式得

$$v_{\mathrm{A0}}=R_{\mathrm{e}}\sqrt{\frac{g}{r_{\mathrm{A}}}} \qquad (3)$$

同理有

$$v_{\mathrm{B0}}=R_{\mathrm{e}}\sqrt{\frac{g}{r_{\mathrm{B}}}} \qquad (4)$$

飞船进入椭圆转移轨道后，其机械能为

$$E = -\frac{GmM}{2a} \qquad (5)$$

式中，$2a$ 是椭圆轨道的长轴．由几何关系有

$$2a = r_{\rm A} + r_{\rm B} \qquad (6)$$

设飞船在近地点和远地点处的速度大小分别为 $v_{\rm A}$ 和 $v_{\rm B}$，则

$$\frac{1}{2}mv_{\rm A}^2 - \frac{GmM}{r_{\rm A}} = -\frac{GmM}{2a} \qquad (7)$$

由（1）和（7）式得

$$v_{\rm A} = \sqrt{2GM\left(\frac{1}{r_{\rm A}} - \frac{1}{2a}\right)} = R_{\rm e}\sqrt{2g\left(\frac{1}{r_{\rm A}} - \frac{1}{2a}\right)} \qquad (8)$$

同理，有

$$v_{\rm B} = R_{\rm e}\sqrt{2g\left(\frac{1}{r_{\rm B}} - \frac{1}{2a}\right)} \qquad (9)$$

由(3)、（8）式和题给条件得

$$\Delta v_{\rm A} = v_{\rm A} - v_{\rm A0} = \left(\sqrt{\frac{6}{5}} - 1\right)R_{\rm e}\sqrt{\frac{g}{r_{\rm A}}} = 735\,\text{m/s} \qquad (10)$$

由(4)、（9）式和题给条件得

$$\Delta v_{\rm B} = v_{\rm B0} - v_{\rm B} = \left(\sqrt{\frac{2}{3}} - \sqrt{\frac{8}{15}}\right)R_{\rm e}\sqrt{\frac{g}{r_{\rm A}}} = 664\,\text{m/s} \qquad (11)$$

2．设空间站 A、卫星 B 和飞船的运动周期分别为 $T_{\rm A}$、$T_{\rm B}$ 和 T，根据开普勒第三定律有

$$\frac{T_{\rm A}^2}{r_{\rm A}^3} = \frac{T_{\rm B}^2}{r_{\rm B}^3} = \frac{T^2}{a^3} \qquad (12)$$

式中

$$T_{\rm A} = \frac{2\pi r_{\rm A}}{v_{\rm A0}} \qquad (13)$$

飞船从 A 到 B 过程所用的时间为

$$\Delta t_1 = \frac{T}{2} \qquad (14)$$

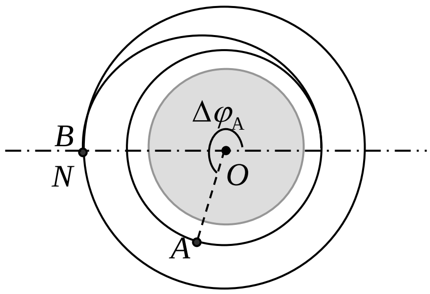


图 1

经 Δt_1 时间和无相对运动的捕获后，飞船和卫星 B 同时到达远地点 N 并开始以相同速率 $v_{\rm B}$ 和半径 $r_{\rm B}$ 作圆周运动，此时空间站 A 绕地球转过角度 $\Delta\varphi_{\rm A}$，位置如图 1 所示，且

$$\Delta\varphi_{\rm A} = 360^\circ\frac{\Delta t_1}{T_{\rm A}} \qquad (15)$$

可见，飞船经历了椭圆轨道半个周期 Δt_1 后，空间站 A 相对于飞船超前了

$$\Delta\varphi_0 \equiv \Delta\varphi_{\mathrm{A}} - 180° \qquad (16)$$

如果想选择一个合适的时刻，开始使捕获了卫星的飞船经短暂减速后，沿同样形状的椭圆轨道在近地点 M 和空间站 A 相遇, 如图 2 所示；则 A 与飞船必须处于这样的相对位置，即空间站 A 须超前飞船

$$\Delta\varphi = 360°\times n - \Delta\varphi_0, \quad n = 1, 2, \cdots \qquad (17)$$

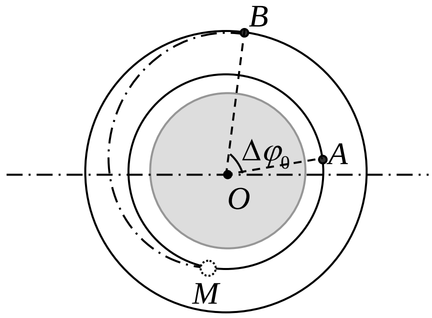


图 2

设从飞船捕获了卫星时刻算起，经 Δt 时间后运动到上述相对位置, 则应满足

$$\left(\frac{360°}{T_{\mathrm{A}}}\Delta t + \Delta\varphi_{\mathrm{A}}\right) - \left(\frac{360°}{T_{\mathrm{B}}}\Delta t + 180°\right) = \Delta\varphi \qquad (18)$$

由(3)、（12）、（13）、（15）、（17）和（18）式得

$$\min\Delta t = \min\left\{\frac{\Delta\varphi + 180° - \Delta\varphi_{\mathrm{A}}}{360°}\frac{T_{\mathrm{A}}T_{\mathrm{B}}}{T_{\mathrm{B}} - T_{\mathrm{A}}}\right\} \qquad (19)$$

由(3)、（12）、（13）、（14）和（19）式得，飞船从发射到返回空间站至少需要的时间为

$$\begin{aligned}\Delta t_{\mathrm{m}} &= 2\Delta t_1 + \min\Delta t \\ &= \left[\left(\frac{1 + r_{\mathrm{B}}/r_{\mathrm{A}}}{2}\right)^{3/2} + \frac{2 - \left(\frac{1 + r_{\mathrm{B}}/r_{\mathrm{A}}}{2}\right)^{3/2}}{1 - \left(r_{\mathrm{A}}/r_{\mathrm{B}}\right)^{3/2}}\right]\frac{2\pi r_{\mathrm{A}}^{3/2}}{R_{\mathrm{e}}\sqrt{g}} = 1.50\times 10^4\,\mathrm{s}\end{aligned} \qquad (20)$$

空间站 A 绕地球转过的相应的角度为

$$\Delta\varphi_{\mathrm{Am}} = \frac{\Delta t_{\mathrm{m}}}{T_{\mathrm{A}}}360° = 981° \qquad (21)$$

评分标准：

本题 20 分．

第一问 10 分，（1）（2）（5）（6）式各 1 分，（7）（10）（11）式各 2 分；

第二问 10 分，（12）（13）（14）式各 1 分，（18）式 3 分，（20）（21）式各 2 分．

四．（15 分）摩尔质量为 μ 的某种理想气体，从左向右流过一内壁光滑的长直水平绝热导管，导管内横截面的面积为 S．1 摩尔绝对温度为 T 的该气体的内能为 $\frac{5}{2}RT$ ，式中 R 为普适气体常量．

1．将一加热装置固定放置在管的中部，以恒定功率 W 给气体加热，如图 1 所示．假设该装置对气流的阻力可忽略．当气流稳定后，管中气体虽然在加热装置附近的状态不均匀，但随着与加热装置距离的增加而逐渐趋于均匀．在加热装置左边均匀稳流区域中，气体的压强为 p_0，温度为 T_0，向右流动的速度为 v_0．已知加热装置右边均匀稳流区域中气体的压强为 p_1，试求该区域气体的温度 T_1．

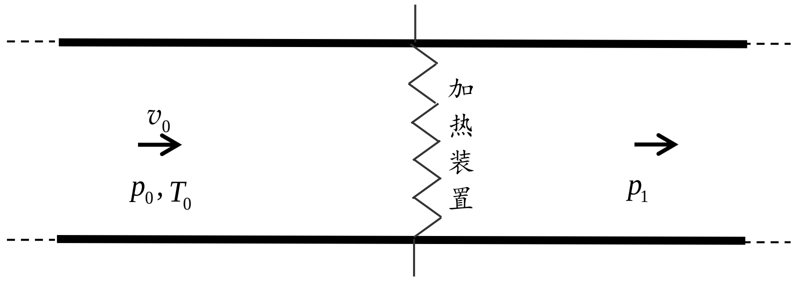


图 1

2．现将管中的加热装置换成一多孔塞，如图 2 所示．在气流稳定后，多孔塞左边气体的温度和压强分别是 T_0 和 p_0，向右流动的速度为 v_0；多孔塞右边气体的压强为 p_2（$p_2 < p_0$）．假设气体在经过多孔塞的过程中与多孔塞没有任何形式的能量交换，求多孔塞右边气体的流速 v_2．

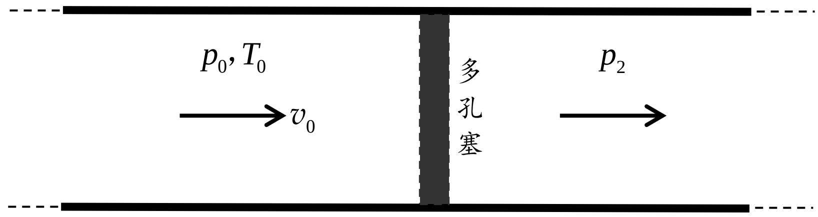


图 2

参考解答：

1. 考虑管的横截面 AB 和 CD 之间的气体，其中横截面 AB 和 CD 都位于气体的均匀稳流区域内；经过 Δt 时间，该气体的左右边界分别运动到管的横截面 $A'B'$ 和 $C'D'$ 处，如图 1 所示．适当选取时间间隔 Δt 的长短，可使得横截面 $A'B'$ 位于气体的均匀稳流区域内．因而，$ABB'A'$ 和 $CDD'C'$ 区域内各点均在气体的均匀稳流区域内．设加热装置右方均匀稳流区域内气体的流速为 v_1．根据功能原理有

$$W\Delta t + [p_0(Sv_0\Delta t) - p_1(Sv_1\Delta t)] = \Delta E \qquad (1)$$

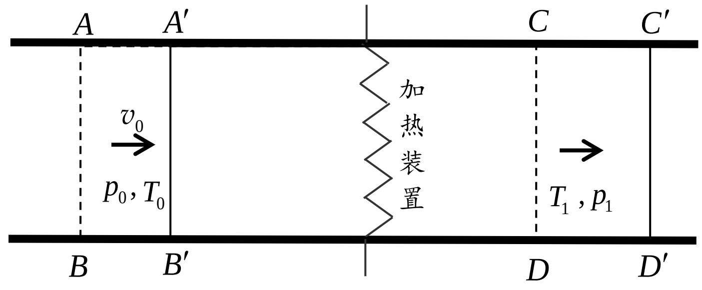


图 1

式中，ΔE 表示气体在 $A'B'D'C'$ 区域内和在区域 $ABDC$ 内两种情形下能量之差．考虑到在稳定状态下，气体在两区域 $ABDC$ 和 $A'B'D'C'$ 的公共区域 $A'B'DC$ 中的能量相同；ΔE 应当等于处于区域 $CDD'C'$ 和 $ABB'A'$ 中的气体的能量之差

$$\Delta E=\left(\frac{1}{2}\Delta m\,v_1^2+\frac{5}{2}\frac{\Delta m}{\mu}RT_1\right)-\left(\frac{1}{2}\Delta m\,v_0^2+\frac{5}{2}\frac{\Delta m}{\mu}RT_0\right) \qquad (2)$$

式中，Δm 为 $ABB'A'$ 范围内气体的质量．由于气体在从区域 $ABDC$ 运动到区域 $A'B'D'C'$ 的过程中，质量不变，在 $CDD'C'$ 范围内气体的质量也等于 Δm．由理想气体状态方程有

$$p_0(Sv_0\Delta t)=\frac{\Delta m}{\mu}RT_0 \qquad (3)$$

$$p_1(Sv_1\Delta t)=\frac{\Delta m}{\mu}RT_1 \qquad (4)$$

联立（1）、（2）、（3）和（4）式得

$$T_1^2+\frac{7RT_0^2}{\mu v_0^2}\left(\frac{p_1}{p_0}\right)^2T_1-\left(1+\frac{7RT_0}{\mu v_0^2}+\frac{2WRT_0}{p_0S\mu v_0^3}\right)\left(\frac{p_1T_0}{p_0}\right)^2=0 \qquad (5)$$

其解为

$$T_1=T_0\frac{p_1}{p_0}\left\{-\frac{7}{2}\frac{RT_0}{\mu v_0^2}\frac{p_1}{p_0}+\frac{1}{2}\sqrt{4+\left(28+\frac{8W}{p_0Sv_0}\right)\frac{RT_0}{\mu v_0^2}+\left(\frac{7RT_0}{\mu v_0^2}\frac{p_1}{p_0}\right)^2}\right\} \qquad (6)$$

负根不合题意，已舍去．

2．考虑管的横截面 AB 和 CD 之间的气体，经过 Δt 时间，该气体的左右边界分别运动到管的横截面 $A'B'$ 和 $C'D'$ 处，如图 2 所示．

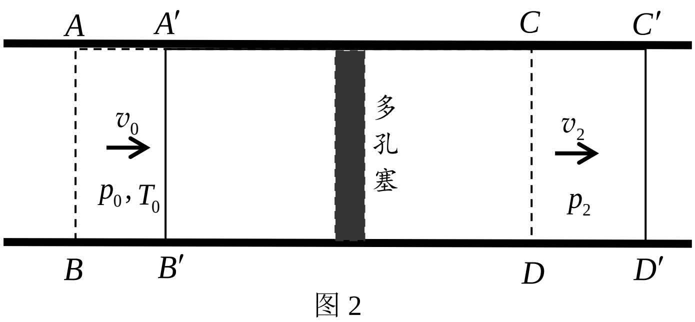


图 2

根据功能原理有

$$p_0(Sv_0\Delta t)-p_2(Sv_2\Delta t)=\left(\frac{1}{2}\Delta m\,v_2^2+\frac{5}{2}\frac{\Delta m}{\mu}RT_2\right)-\left(\frac{1}{2}\Delta m\,v_0^2+\frac{5}{2}\frac{\Delta m}{\mu}RT_0\right) \qquad (7)$$

式中，Δm 为 $ABB'A'$ 范围内气体的质量．由于气体在从区域 $ABDC$ 运动到区域 $A'B'D'C'$ 的过程中，质量不变，在 $CDD'C'$ 范围内气体的质量也等于 Δm．由理想气体状态方程有

$$p_0(Sv_0\Delta t)=\frac{\Delta m}{\mu}RT_0 \tag{8}$$

$$p_2(Sv_2\Delta t)=\frac{\Delta m}{\mu}RT_2 \tag{9}$$

由（7）、（8）和（9）式得

$$v_2^2+7\frac{p_2}{p_0}\frac{RT_0}{\mu v_0}v_2-\left(1+7\frac{RT_0}{\mu v_0^2}\right)v_0^2=0 \tag{10}$$

其解为

$$v_2=v_0\left[-\frac{7}{2}\frac{p_2}{p_0}\frac{RT_0}{\mu v_0^2}+\frac{1}{2}\sqrt{4+28\frac{RT_0}{\mu v_0^2}+\left(\frac{7p_2}{p_0}\frac{RT_0}{\mu v_0^2}\right)^2}\,\right] \tag{11}$$

负根不合题意，已舍去．

评分标准：

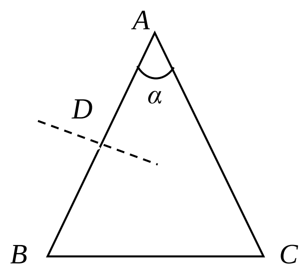
本题 15 分．

第一问 8 分，（1）（2）式各 2 分，（3）（4）（5）（6）式各 1 分；
第二问 7 分，（7）式 3 分，（8）（9）（10）（11）式各 1 分．

五．(15 分)如图，一个三棱镜 ABC 的顶角 α 小于 90º．假设光线在纸面内以任意入射角入射到 AB 面上的 D 点，经一次折射后，又入射到 AC 面上，且都能在 AC 面上发生全反射．已知光线在 AC 面上发生全反射的临界角为 Θ（$\Theta<45°$），AC 边足够长．试在下列两种情形下分别求三棱镜顶角 α 的取值范围：

1．如果光线仅从 AB 面上法线的下方入射；

2．如果光线仅从 AB 面上法线的上方入射．



参考解答（一）：

1．考虑光线仅从 AB 面上法线下方入射，如图 1 所示，在 AB 面上发生折射，根据折射定律有

$$\sin i_0=n\sin r \tag{1}$$

式中，i_0 和 r 分别是光线在 AB 面上的入射角和折射角，n 是棱镜的折射率．在 AC 面上发生全反射应满足

$$n\sin i_1\ge 1 \tag{2}$$

式中，i_1 是光线在 AC 面上的入射角．在 ΔADE 中有

$$\alpha+\left(90^\circ-r\right)+\left(90^\circ-i_1\right)=180^\circ$$

由此可得

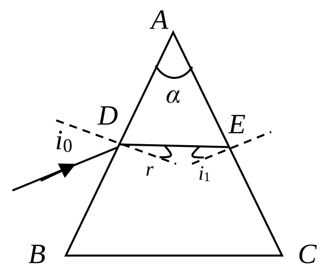


图 1

$$i_1 = \alpha - r > 0 \qquad (3)$$

将（3）式代入（2）式有

$$n\sin i_1 = n\sin(\alpha - r) \ge 1 \qquad (4)$$

因为i_0、α都为锐角，结合（1）式，利用三角函数关系得

$$\sin\alpha\sqrt{n^2 - \sin^2 i_0} \ge 1 + \cos\alpha\sin i_0 \qquad (5)$$

对（5）式两边平方得

$$\sin^2 i_0 + 2\cos\alpha\sin i_0 + (1 - n^2\sin^2\alpha) \le 0 \qquad (6)$$

上式取等号时的解为

$$\sin i_0 = -\cos\alpha \pm \sqrt{n^2 - 1}\sin\alpha$$

或

$$\sin i_0 = n\sin(\pm\alpha - \Theta) \qquad (7)$$

式中，已利用了

$$n\sin\Theta = 1$$

由于$0 \le \sin i_0 \le 1$，（6）式的解$\sin i_0$应满足

$$0 \le \sin i_0 \le \min\{1, n\sin(\alpha - \Theta)\} \qquad (8)$$

从（8）式可看出，当光线仅从 *AB* 面上法线的下方入射时，为了使入射角i_0取任意值时，光线在 *AC* 面上都发生全反射，三棱镜顶角α的取值范围为

$$\alpha \ge 2\Theta \qquad (9)$$

2．考虑光线仅从 *AB* 面上法线的上方入射，如图 2 所示．根据几何关系得

$$i_1 = \alpha + r \qquad (10)$$

在 *AC* 面上发生全反射应满足

$$n\sin(\alpha + r) \ge 1 \qquad (11)$$

采用 1 中相同的方法可得

$$\sin^2 i_0 - 2\cos\alpha\sin i_0 + (1 - n^2\sin^2\alpha) \le 0 \qquad (12)$$

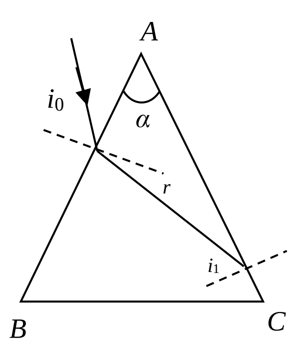


图 2

上式取等号时的解为

$$\sin i_0 = \cos\alpha \pm \sqrt{n^2 - 1}\sin\alpha$$

或

$$\sin i_0 = n\sin(\Theta \pm \alpha) \qquad (13)$$

由于$0\le\sin i_0\le1$，（12）式的解$\sin i_0$应满足

$$\max\{0, n\sin(\Theta-\alpha)\}\le\sin i_0\le1 \qquad （14）$$

从（14）式可看出

$$\alpha\ge\Theta \qquad （15）$$

当光线仅从 AB 面上法线的上方入射时，我们还必须保证光线以任意入射角入射到 AB 面上，经一次折射后，能入射到 AC 面上的条件．为此，让光线沿 AB 面掠入射到 D 点（$i_0=90°$）发生折射，如图 3 所示．容易看出，当且仅当

$$\alpha<90°-\Theta \qquad （16）$$

时，折射光线才能射到 AC 面上．联立条件（15）和（16）式得

$$\Theta<45°$$

这与题设条件一致．

由（15）和（16）式知，当光线仅从 AB 面上法线的上方入射时，为了使入射角i_0取任意值时，光线在 AC 面上都发生全反射，三棱镜顶角α的取值范围为

$$\Theta\le\alpha<90°-\Theta \qquad （17）$$

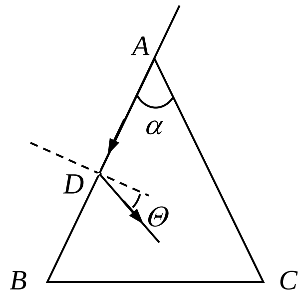


图 3

评分标准：

本题 15 分．

第一问 7 分，（1）（2）（3）（6）（8）式各 1 分，（9）式 2 分；

第二问 8 分，（10）（11）（12）（14）式各 1 分，（15）（16）式各 2 分．

参考解答（二）：

1．考虑光线仅从 AB 面上法线的下方入射．先考虑沿 AB 面掠入射的光线，此时的折射角r即为全反射临界角

$$r=\Theta \qquad （1）$$

如图 1 所示．如果此光线在 AC 面上能发生全反射，则此光线在 AC 面上的入射角i_1应当满足

$$i_1\ge\Theta \qquad （2）$$

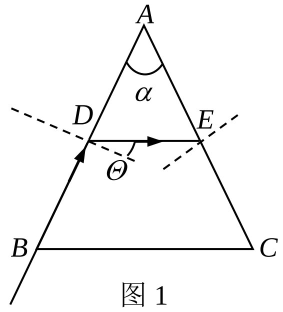


图 1

在ΔADE中有

$$\alpha+(90^\circ-r)+(90^\circ-i_1)=180^\circ$$

由此可得

$$\alpha=r+i_1 \qquad （3）$$

由（1）、（2）和（3）式得

$$\alpha \geq 2\Theta \qquad (4)$$

再考虑垂直于 AB 面入射的光线，如图 2 所示．如果此光线在 AC 面上能发生全反射，则此光线在 AC 面上的入射角 i_1 应当满足

$$i_1 \geq \Theta \qquad (5)$$

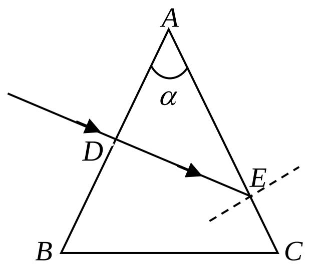


图 2

在 ΔADE 中有

$$\alpha + 90° + (90° - i_1) = 180°$$

由此可得

$$\alpha = i_1 \qquad (6)$$

由（5）和（6）式得

$$\alpha \geq \Theta \qquad (7)$$

由（4）和（7）式可看出，当光线仅从 AB 面上法线的下方入射时，为了使入射角 i_0 取任意值时，光线在 AC 面上都发生全反射，三棱镜顶角 α 的取值范围为

$$\alpha \geq 2\Theta \qquad (8)$$

2．考虑光线仅从 AB 面上法线的上方入射．考虑沿 AB 面掠入射的光线，此时的折射角 r 即为全反射临界角

$$r = \Theta \qquad (9)$$

如图 3 所示．如果此光线能与 AC 面相交，则

$$90° - \Theta > \alpha \qquad (10)$$

由图 3 从几何关系可知

$$i_1 > \alpha \geq \Theta \qquad (11)$$

可见此光线能在 AC 面上发生全反射．

由（7）和（10）式得，当光线仅从 AB 面上法线的上方入射时，为了使入射角 i_0 取任意值时，光线在 AC 面上都发生全反射，三棱镜顶角 α 的取值范围为

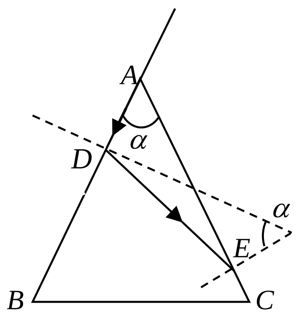


图 3

$$\Theta \leq \alpha < 90° - \Theta \qquad (12)$$

评分标准：

本题 15 分．

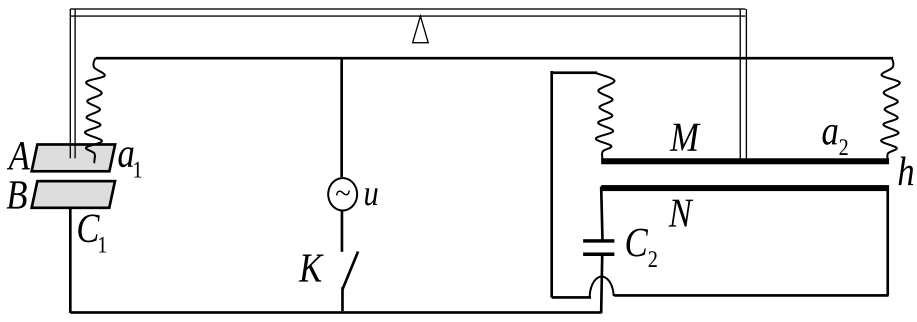
第一问 9 分，（1）（2）（3）式各 1 分，（4）式 2 分，（5）（6）式各 1 分，（7）式 2 分；

第二问 6 分，（9）式 1 分，（10）式 2 分，(11)式 2 分，得出（12）式中下限的再给 1 分．

六．（20 分）一电荷量为 q 的点电荷产生的电场在距离它为 r 处的电场强度的大小为 $E = k_{\mathrm{e}}\dfrac{q}{r^2}$，式中 k_{e} 为常量；一条长直导线中通有电流 i 时，它所产生的磁场在与导线相距为 r(远小于长直导线的长度)处的磁感应强度的大小为 $B = k_{\mathrm{m}}\dfrac{2i}{r}$，式中 k_{m} 也为常量．

上述两常量比值的平方根 $\sqrt{\dfrac{k_{\mathrm{e}}}{k_{\mathrm{m}}}}$ 可用如图所示的实验装置，通过低频（约几百 Hz）的电场和磁场来测定．图中 A、B 表示水平放置的、电容为 C_1 的平行板电容器的极板，极板为正方形，边长为 a_1(极板间距远小于 a_1)．极板 B 固定，极板 A 悬挂在天平臂一端的挂钩上．M、N 为两根水平放置的平行长直金属细杆，长度均为 a_2，两杆间的距离为 h ($h \ll a_2$)． 杆 N 固定，杆 M 悬挂于天平臂的另一端挂钩上．C_2 为一个已知电容器的电容，K 是电键．交流电源的电压 u 与时间 t 的关系为 $u = U_0\cos 2\pi ft$，其中 f 表示交流电的频率．各部分通过导线如图连接．已知在电键 K 打开时，天平已调节至平衡．接通电源后，天平将失去平衡．通过调节交流电源的频率，可使天平重新达到平衡（注意：由于天平具有惯性，实际上是交流电的平均效果使天平平衡）． 试求 $\sqrt{\dfrac{k_{\mathrm{e}}}{k_{\mathrm{m}}}}$ 的表达式．

图中的双线可视为刚性绝缘杆，单实线为导线，曲线表示柔软无质量的导线．不考虑电场、磁场的边缘效应．不考虑导线磁场对 M 和 N 的影响．



参考解答：

根据题意可知，通电后天平失去平衡，是由于电容器 C_1 的极板 B 对极板 A 的静电力与长直金属杆 N 对 M 的磁力不相等的结果．

先考察极板 A 受到的静电力．当电源的电压为 u 时，C_1 极板上的电量为

$$q = C_1 u \qquad (1)$$

不考虑边缘效应，平板电容器的电容为

$$C_1 = \frac{a_1^2}{4\pi k_\mathrm{e} h_1} \tag{2}$$

式中，h_1 是平板电容器的极板间距.

电容器中电场强度的大小为

$$E = \frac{u}{h_1} \tag{3}$$

由(1)、(2)和(3)式得

$$E = 4\pi k_\mathrm{e} \frac{q}{a_1^2} \tag{4}$$

由对称性和场强叠加原理可知，极板 B 上的电荷单独产生的电场强度的大小

$$E_1 = \frac{1}{2}E \tag{5}$$

极板 A 受到的静电力的大小为

$$F_\mathrm{e} = qE_1 \tag{6}$$

方向向下。由(4)、(5)和(6)式得

$$F_\mathrm{e} = 2\pi k_\mathrm{e} \frac{q^2}{a_1^2} \tag{7}$$

利用(1)式，(7)式可表示为

$$F_\mathrm{e} = 2\pi k_\mathrm{e} \frac{C_1^2 u^2}{a_1^2}$$

即

$$F_\mathrm{e} = 2\pi k_\mathrm{e} \frac{C_1^2}{a_1^2} U_0^2 \cos^2(2\pi ft) \tag{8}$$

再考察金属杆 M 受到的磁力. 金属杆 M、N 与电容 C_2 串联后接在交流电源两端，通过杆的电流就是通过 C_2 的电流. 若用 U_0 表示电容两端电压的峰值，则通过电容的电流的峰值

$$I_0 = \frac{U_0}{\dfrac{1}{2\pi fC_2}} = 2\pi fC_2U_0 \tag{9}$$

所谓交流电通过电容，实际上是电容不断充电和放电的过程，当极板上的电量或两极板间的电压最大时，充电结束，此时刻电流为 0；接着放电，极板上的电量或电压由大变小，电流反向，当电量或电压变为 0 时，电流最大. 所以电流和电压的变化不是同步调的，两者

相差四分之一周期．当极板两端电压为

$$u = U_0 \cos 2\pi ft$$

时，通过电容 C_2 的电流应为

$$i_2 = 2\pi f C_2 U_0 \cos(2\pi ft + \frac{\pi}{2}) \tag{10}$$

不考虑边缘效应，杆 N 在杆 M 处产生的磁感应强度的大小为

$$B = 2k_{\mathrm{m}} \frac{i_2}{h} \tag{11}$$

杆 M 受到的磁场力为

$$F_{\mathrm{m}} = B i_2 a_2 \tag{12}$$

方向向下。由(10)、(11)和(12)式有

$$F_{\mathrm{m}} = 2k_{\mathrm{m}} \frac{a_2}{h} 4\pi^2 f^2 C_2^2 U_0^2 \cos^2(2\pi ft + \frac{\pi}{2}) \tag{13}$$

调节交流电频率 f，使得天平两边电力和磁力对时间的平均值相等，即

$$\overline{F_{\mathrm{e}}(t)} = \overline{F_{\mathrm{m}}(t)} \tag{14}$$

从而可得

$$\sqrt{\frac{k_{\mathrm{e}}}{k_{\mathrm{m}}}} = 2f \frac{C_2 a_1}{C_1} \sqrt{\frac{\pi a_2}{h}} \tag{15}$$

评分标准：

本题 20 分．

（1）（2）（3）（5）（6）式各 2 分；

（9）式 2 分，（10）（11）式各 1 分，（12）（14）（15）式各 2 分．

七.（20 分）两个劲度系数均为k的相同的轻质金属弹簧，上端固定在水平绝缘横杆上，竖直下垂，下端与一质量为m的匀质刚性金属杆连接，金属杆的长度为l，杆长与两弹簧的间距相等．将金属杆置于磁感应强度为B的匀强磁场中，磁场方向垂直于纸面向内．杆、弹簧和交流电源u构成一闭合电路，金属杆和弹簧的电阻可忽略；且回路电流的磁场远弱于外磁场B，如图 1 所示．在图 2 中，一自感和一电容并联后接到同样的交流电源u上．若在图 1 和图 2 所示的两回路中，在任何时刻，通过电源的电流都一样．试将图 2 中电容C和自感L用图 1 中的装置的已知参量表示．

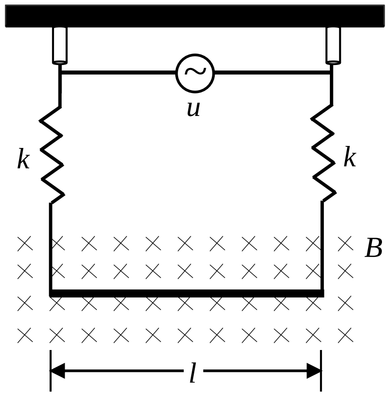


图 1

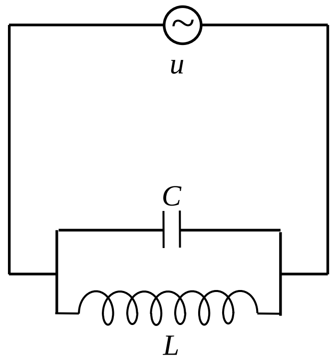


图 2

参考**解答**：

考虑图 1 所示装置。未接电源时，金属杆静止在平衡位置．取此平衡位置为坐标原点，竖直向上为z轴正方向．当回路电流为$i(t)$（取从右流向左通过电源的电流为正）时，金属杆受到弹簧的弹性力和重力的合力以及磁场的安培力的作用，而在竖直方向运动，设杆在时刻t沿Z方向的位移为$z(t)$，速度为$v(t)$，依据牛顿定律，它的动量在经过一个小的时间间隔Δt后的变化率为

$$m\frac{\Delta v}{\Delta t}=-2kz(t)+Bli(t) \tag{1}$$

金属杆因竖直运动而切割磁力线，所产生的感应电动势为

$$\varepsilon(t)=Blv(t) \tag{2}$$

式中，

$$v(t)=\frac{\Delta z}{\Delta t} \tag{3}$$

按照全电路欧姆定律有

$$u(t)=\varepsilon(t) \tag{4}$$

再考虑图 2 所示电路．由题意，回路通过电源的电流仍为$i(t)$，它等于流过自感和电容的电流$i_{\mathrm{L}}(t)$和$i_{\mathrm{C}}(t)$之和

$$i(t)=i_{\mathrm{L}}(t)+i_{\mathrm{C}}(t) \tag{5}$$

自感上的电动势 $\varepsilon_{\mathrm{L}}(t)$ 的大小为

$$\varepsilon_{\mathrm{L}}(t)=L\frac{\Delta i_{\mathrm{L}}}{\Delta t} \tag{6}$$

而电容 C 满足

$$i_{\mathrm{C}}(t)\Delta t=C\Delta\varepsilon_{\mathrm{L}} \tag{7}$$

按照全电路欧姆定律有

$$u(t)=\varepsilon_{\mathrm{L}}(t) \tag{8}$$

由(2)、 (3)、 (4)、(6)和(8)式得

$$Bl\Delta z=L\Delta i_{\mathrm{L}} \tag{9}$$

由于我们选取金属杆在其中电流为零时的平衡位置为 Z 坐标原点，故

$$z(t)=0\text{，当 } i_{\mathrm{L}}(t)=0 \tag{10}$$

由(9)和(10)两式可解得

$$z(t)=\frac{L}{Bl}i_{\mathrm{L}}(t) \tag{11}$$

由(2) 、(4)、(7)和(8)式得

$$\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{1}{BlC}i_{\mathrm{C}}(t) \tag{12}$$

将(5)、(11)和(12)式代入(1)式得

$$\left(\frac{m}{C}-B^2l^2\right)i_{\mathrm{C}}(t)+\left(2kL-B^2l^2\right)i_{\mathrm{L}}(t)=0 \tag{13}$$

此式对任意的 $i_{\mathrm{C}}(t)$ 和 $i_{\mathrm{L}}(t)$ 都成立，故

$$\frac{m}{C}-B^2l^2=0,\qquad 2kL-B^2l^2=0 \tag{14}$$

由此得

$$C=\frac{m}{B^2l^2} \tag{15}$$

$$L=\frac{B^2l^2}{2k} \tag{16}$$

评分标准：

本题 20 分.

（1）（2）式各 2 分，（3）（4）（5）式各 1 分，（6）（7）式各 2 分，（8）（9）（10）（11）（12）式各 1 分，（13）式 2 分，（15）（16）式各 1 分.

八．（20 分）朱棣文等三位科学家因成功实现中性原子的磁光俘获而获得了 1997 年 Nobel 物理学奖．对以下问题的研究有助于理解磁光俘获的机理（注意：本问题所涉及的原子的物理特性参数，实际上都是在对大量原子或同一原子的多次同类过程进行平均的意义上加以理解的）．

1．已知处于基态的某静止原子对频率为ν_0的光子发生共振吸收，并跃迁到它的第一激发态（见图 1）．然而，由于热运动，原子都处于运动中．假设某原子以速率v_0运动，现用一束激光迎头射向该原子，问恰能使该原子发生共振吸收的激光频率ν为多少？经过共振吸收，该原子的速率改变了多少？（$h\nu_0 \ll mc^2$，m 是原子质量，$h = 6.63\times10^{-34}\,\mathrm{J\cdot s}$）

2．原子的共振吸收是瞬时的，但跃迁到激发态的原子一般不会立即回到基态，而会在激发态滞留一段时间，这段时间被称为该能级的平均寿命．已知所考察原子的第一激发态的平均寿命为τ．若该原子能对迎头射来的激光接连发生共振吸收，且原子一旦回到基态，便立即发生共振吸收，如此不断重复，试求该原子在接连两次刚要发生共振吸收时刻之间的平均加速度．注意：原子从激发态回到基态向各个方向发出光子的机会均等，由于碰撞频率极高，因而由此而引起原子动量改变的平均效果为零．

3. 设所考察的原子以初速度v_0沿 Z 轴正向运动，一激光束沿 Z 轴负向迎头射向该原子，使它发生共振吸收．在激光频率保持不变的条件下，为了使该原子能通过一次接着一次的共振吸收而减速至零，必须相应地改变原子能级，为此可让该原子通过一非均匀磁场$B(z)$，实现原子的磁光俘获，如图 3 所示．由于处于磁场中的原子与该磁场会发生相互作用，从而改变原子的激发态能量（见图 2)．当磁感应强度为B时，原来能量为E的能级将变为$E+\Delta E$，其中$\Delta E=\mu B$，μ 是已知常量．试求磁感应强度B随 z 变化的关系式．

4．设质量为$m=1.0\times10^{-26}\,\mathrm{kg}$的锂原子初速度$v_0 = 1.2\times10^{3}\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$，静止时的共振吸收频率为$\nu_0 = 4.5\times10^{14}\,\mathrm{Hz}$，第一激发态的平均寿命$\tau = 5.3\times10^{-8}\,\mathrm{s}$．为使所考察的原子按 3 中所描述的过程速度减至零，原子通过的磁场区域应有多长？

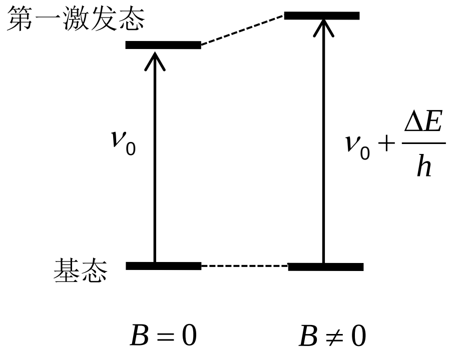


图 1　　　　图 2

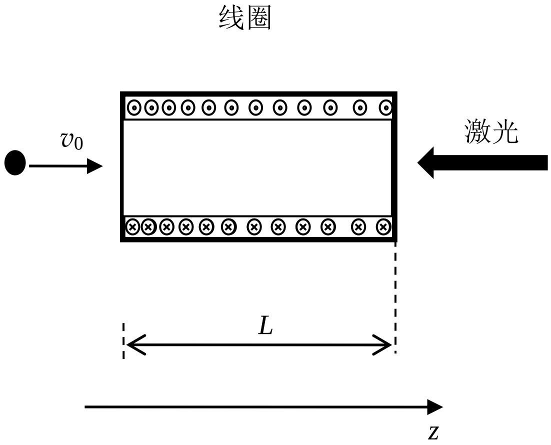


图 3

参考答案：

1．设所考察原子的质量为m，激光束的频率为ν；吸收光子后，原子的速度由v_0变为v_1，从基态激发至第一激发态．由题意，该原子第一激发态与基态的能量差为$h\nu_0$．由原子和光子组成的系统在吸收光子前后能量和动量均守恒，故

$$\frac{1}{2}mv_0^2+h\nu=\frac{1}{2}mv_1^2+h\nu_0 \qquad (1)$$

$$mv_0-\frac{h\nu}{c}=mv_1 \qquad (2)$$

从（1）和（2）式消去v_1得

$$\frac{2v_0}{c}=\frac{2(\nu_0-\nu)}{\nu}+\frac{h\nu}{mc^2} \qquad (3)$$

注意到$h\nu_0 \ll mc^2$，因而恰能使该原子发生共振吸收的激光频率为

$$\nu=\frac{\nu_0}{1+\frac{v_0}{c}} \qquad (4)$$

由（2）和（4）式可得该原子的速率变化，即

$$v_1-v_0=-\frac{h\nu_0}{mc\left(1+\frac{v_0}{c}\right)} \qquad (5)$$

2．由于原子吸收光子后处在激发态上会滞留一段时间τ才回到基态，当原子回到基态后又立即再次发生共振吸收．因此，原子从共振吸收回到基态这段时间内的平均加速度为

$$a=\frac{v_1'-v_0'}{\tau} \tag{6}$$

式中，原子在共振吸收前、后的速率分别为 v_0'、v_1'．利用（5）式，（6）式成为

$$a=-\frac{h\nu_0}{mc\tau\left(1+\frac{v_0'}{c}\right)}\approx-\frac{h\nu_0}{mc\tau} \tag{7}$$

加速度是负的，表示原子在不断发生共振吸收的过程中作减速运动．由于原子速度是热运动的速度，它远小于光速，故可认为原子在不断发生共振吸收的过程中加速度大小恒定，原子作匀减速运动．

3．由于原子在共振吸收后减速，由（4）式可知共振吸收频率要增大，故必须改变磁感应强度的大小，否则共振吸收会终止．若让该原子进入磁感应强度的大小 B 随 z 变化的非均匀磁场，则应让第一激发态相对于基态的能量差从

$$E=h\nu_0 \tag{8}$$

变为

$$E'=E+\mu B \tag{9}$$

于是，磁场中静止原子的共振吸收频率应增加为

$$\nu'=\frac{E'}{h}=\nu_0+\frac{\mu}{h}B \tag{10}$$

当此原子在磁场中以速度 v 运动时，根据共振吸收条件（4），能使此原子发生共振吸收的激光的频率为

$$\nu_{\mathrm{B}}=\frac{\nu'}{1+\frac{v}{c}}=\frac{\nu_0+\frac{\mu}{h}B}{1+\frac{v}{c}} \tag{11}$$

（11）式说明：能使该原子发生共振吸收的激光的频率不仅与原子的运动速度有关，还与原子所在处的磁场有关．原子因共振吸收而作匀减速运动．当原子以初速 v_0 进入磁场后沿 z 轴运动距离 z 时，其速度为

$$v=\sqrt{v_0^2+2az} \tag{12}$$

若 z 处的磁感应强度的大小 $B(z)$ 能恰好使得

$$\nu_{\mathrm{B}}=\nu \tag{13}$$

则该原子将对于迎头射来的频率为ν的激光持续地发生共振吸收，从而不断减速．利用（4）和（11）式，（13）式成为

$$\frac{\nu_0+\frac{\mu}{h}B}{1+\frac{v}{c}}=\frac{\nu_0}{1+\frac{v_0}{c}} \tag{14}$$

将（12）式代入上式得

$$B=\frac{h\nu_0}{\mu}\frac{\sqrt{v_0^2+2az}-v_0}{c+v_0} \tag{15}$$

4．　由（12）式得，当$v=0$时有

$$z=-\frac{v_0^2}{2a} \tag{16}$$

由（7）和（16）式得

$$z=\frac{mv_0^2c\tau}{2h\nu_0} \tag{17}$$

代入题给数据得

$$z=0.38\mathrm{m} \tag{18}$$

评分标准：

本题 20 分．

第一问 6 分，（1）（2）（3）（4）式各 1 分，（5）式 2 分；

第二问 3 分，（6）式 1 分，（7）式 2 分；

第三问 9 分，（8）（9）（10）（11）（12）式各 1 分，（13）（15）式各 2 分；

第四问 2 分，（16）（18）式各 1 分．