第三章　静电场的能量

一. 带电体系的静电能
二. 外场中静电能

三. 场能密度

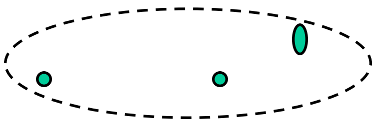
四. 有介质时静电能

五. 利用静电能求静电力

一. 带电体系的静电能

electrostatic energy

带电体系处于状态a

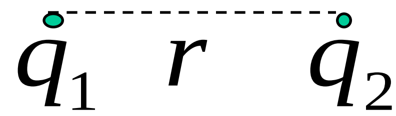


把这些带电体从无限远离的状态聚合到状态a的过程中，外力克服静电力作的功。

相互作用能

点电荷之间的相互作用能

状态a



以两个点电荷系统为例

想象 q_1 q_2初始时相距无限远

第一步 先把q_1 摆在某处 外力不作功

第二步 再把q_2 从无限远移过来 使系统处于状态a 外力克服 q_1 的场作功

$$W = -A_{q_1} = -\int_{\infty}^{r} q_2 \vec{E}_1 \cdot d\vec{l} = q_2 \int_{r}^{\infty} \vec{E}_1 \cdot d\vec{l}$$

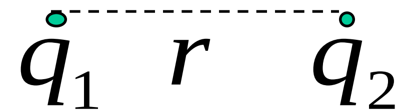
$$= q_2 \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r} = q_2 U_{21}$$

q_1在q_2所在处的电势

也可以先移动q_2

q_2在 q_1所在处的电势

状态a



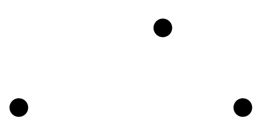
$$W = q_1 \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r} = q_1 U_{12}$$

$$= q_2 U_{21}$$

作功与路径无关
表达式相同

单个 q_i 点电荷与其它电荷相互作用

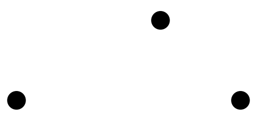
点电荷系



$$\boxed{W_i = q_i \sum_{j \neq i} U_{ij}}$$

所有电荷相互作用能

点电荷系



$$\boxed{W=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N>1}\left(q_i\sum_{j\neq i}U_{ij}\right)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N>1}q_iU_i}$$

$\frac{1}{2}$ 因子源于两粒子相互作用

U_i — 除 q_i 以外的电荷在q_i处的电势

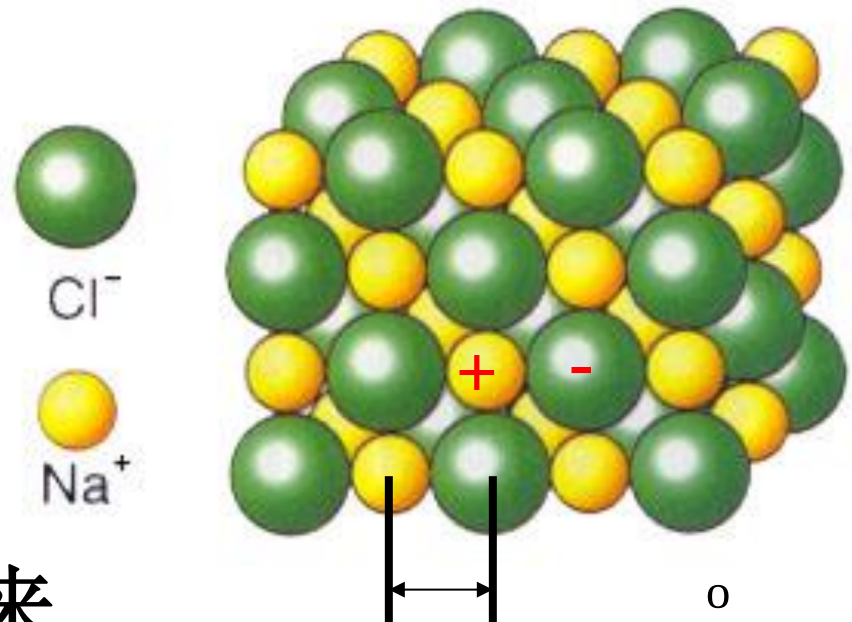
$$\boxed{U_i=\sum_{j\neq i}U_{ij}}$$

离子晶体静电能

NaCl

全部变成单个离子需要能量 ***W***

$$W = 7.64\times10^{5}\,\mathrm{J/mol}$$



$$a = 2.81\,\mathrm{\mathring{A}}$$

把单个离子分离出来

~7.92eV

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{a} = 5.12\mathrm{eV}$$

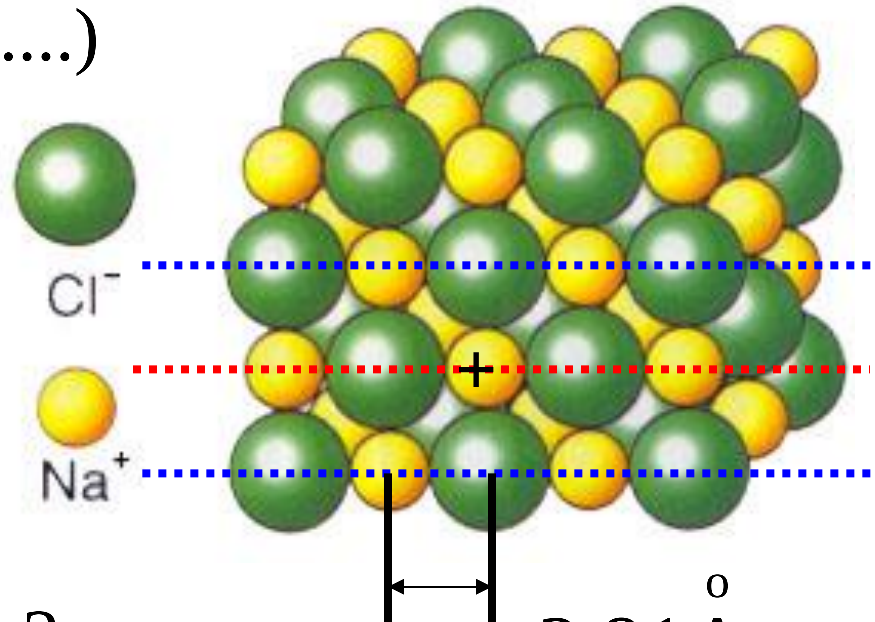
$$U_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{a}\left(\frac{-2}{1}+\frac{2}{2}-\frac{2}{3}+\frac{2}{4}......\right)$$

$$= -\frac{2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{a}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+......\right)$$

$$= -\frac{2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{a}\ln 2$$

$$= -7.096\text{eV}$$

NaCl



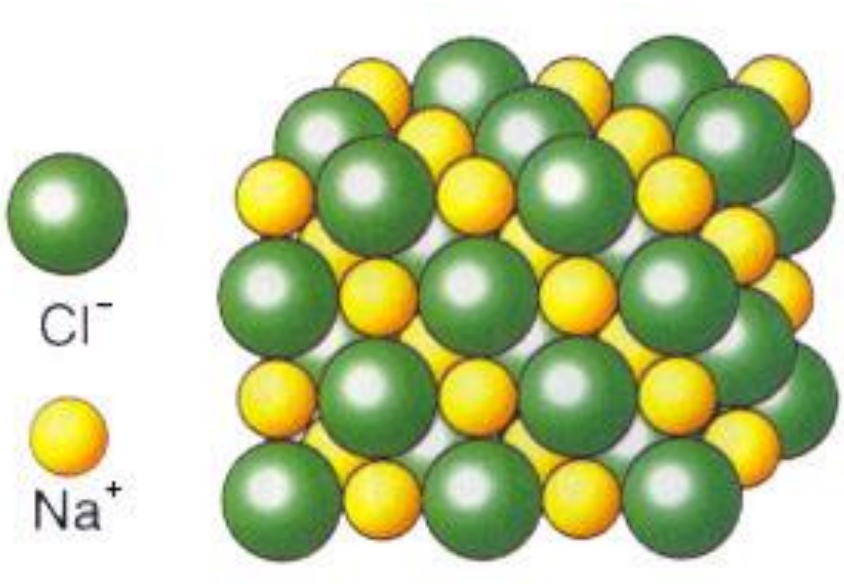
$$a = 2.81\mathring{A}$$

$$U_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{a}\left(\frac{-1}{1}+\frac{2}{\sqrt{2}}-\frac{2}{\sqrt{5}}+\frac{2}{\sqrt{10}}......\right)\times 4$$

$$U = U_1 + U_2 + ... = -8.94\text{eV}$$

10%误差

NaCl ~ 7.92eV



10%误差

原子斥力(变形)

$$\sim \frac{1}{9.4}$$

$$U = -7.99\text{eV}$$

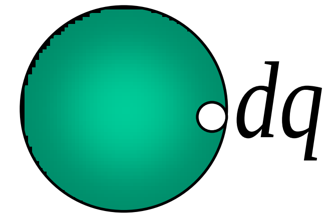
没有考虑离子热运动动能

$$3kT \sim \frac{3}{40}\text{eV} = 0.075\text{eV}$$

离子晶体的结合能主要是静电能

若带电体连续分布

$$\boxed{W=\frac{1}{2}\int_{(Q)} dqU}$$



U：所有电荷在dq 处的电势

如　带电导体球　　带电量Q半径 R

$$W=\frac{1}{2}\int_{(Q)} dq\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} \quad =\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}$$

?

静电能 = 相互作用能

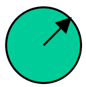
$$\boxed{W = \frac{1}{2}\int_{(Q)} dqU}$$

所有电荷在dq 处的电势

包括**dq** 自己产生的？

体分布

r



dq

面分布

$$U_{dq} \sim \frac{\rho dV}{r} \sim r^2 \to 0$$

$$\frac{\sigma dS}{r} \sim r \to 0$$

静电能 = 相互作用能

自能没有考虑!!!

线分布

$$\frac{\lambda dl}{r} \sim \ln r$$

包含自能，发散

二. 外场中静电能

$$\boxed{W = qU(\vec{r})}$$

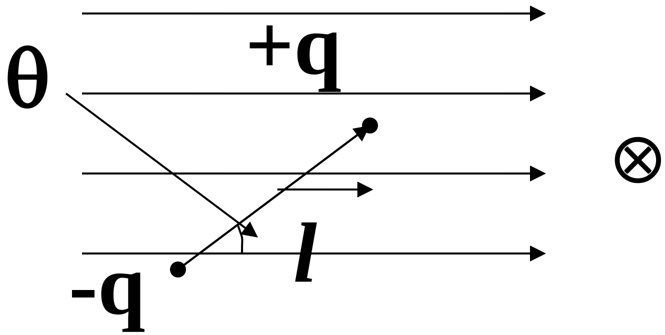
N个带电粒子在外场中静电能

(不包含N个带电粒子之间相互作用能和自能)

$$\boxed{W = \sum_i q_i U(\vec{r}_i)}$$

$$\boxed{W = \int_{(Q)} dq U(\vec{r})}$$

$U(\vec{r})$ 是所有考虑在求和或积分内的电荷之外的场



均匀电场中，偶极子电势能

$$W = qU_{+} - qU_{-} = q(U_{+} - U_{-})$$

$$= -q\int_{-}^{+} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$= -q\vec{E} \cdot \vec{l} = -\vec{p} \cdot \vec{E}$$

$$\boxed{W = -\vec{p} \cdot \vec{E}}$$

三. 场能密度

导体组的静电能

$$W=\frac{1}{2}\int_{(Q_A)}dq_AU_A+\frac{1}{2}\int_{(Q_B)}dq_BU_B+\cdots \;=\!=\!= \boxed{\sum_i\frac{1}{2}Q_iU_i}$$

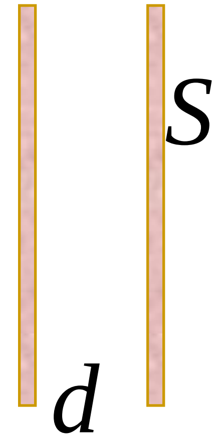
导体是等势体

电容器储能

带等量异号的电荷 $\boxed{Q_A=-Q_B}$

$$W=\frac{1}{2}Q_AU_A-\frac{1}{2}Q_AU_B \boxed{=\frac{1}{2}Q(\Delta U)}$$

$$W=\frac{1}{2}C\Delta U^{2}=\frac{1}{2}\frac{Q^{2}}{C}$$



平行板电容器

$$W=\frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0 S}{d}\Delta U^{2}$$

$$=\frac{1}{2}\varepsilon_0 Sd\frac{\Delta U^{2}}{d^{2}}$$

$$=\frac{1}{2}\varepsilon_0 VE^{2}$$

$$\vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}$$

$$W=\frac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E}V$$

$$w_e=\frac{W}{V}=\frac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E}$$

能量储存于场中

单位体积内的电能

$$\boxed{w_e = \frac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E}}$$

以平行板电容器的场为特例导出，但普遍成立

如:单独点电荷场能

静电场能 = 点电荷自能+相互作用能

发散

电荷连续分布时的严格推导

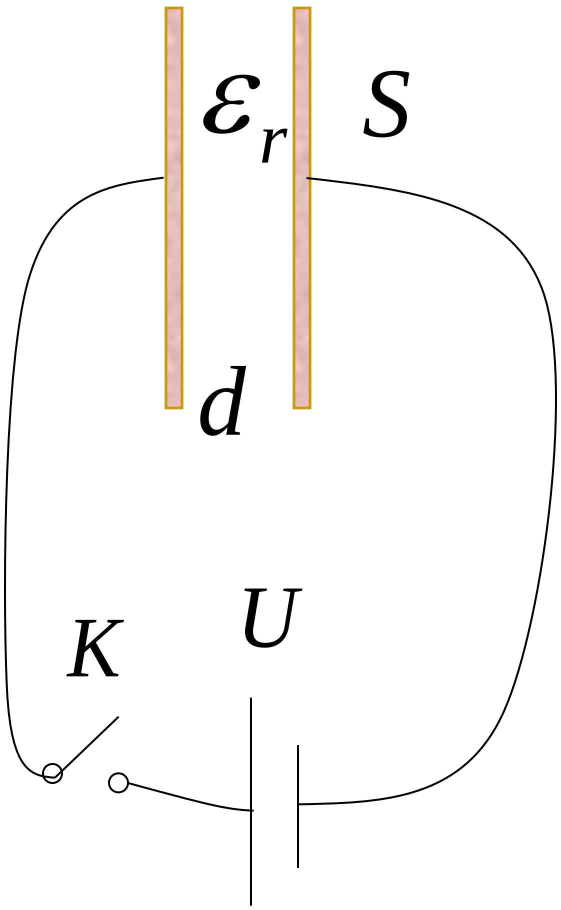
$$W=\frac{1}{2}\int_{(Q_0)}dq_0U=\frac{1}{2}\iiint\rho_0UdV=\frac{1}{2}\iiint\nabla\cdot\vec{D}UdV$$

$$=\frac{1}{2}\iiint[\nabla\cdot(\vec{D}U)-\vec{D}\cdot\nabla U]dV$$

$$=\frac{1}{2}\iiint\nabla\cdot(\vec{D}U)dV+\frac{1}{2}\iiint\vec{D}\cdot\vec{E}dV$$

$$=\frac{1}{2}\oiint_{S\to\infty}(\vec{D}U)\cdot d\vec{S}\ \propto\frac{1}{r}\to 0$$

四. 有介质时静电能



电容器充电：

电池做功转换为电容器储能

$$W=\int_0^{\infty} IUdt=\int_0^{Q} Udq=\frac{Q^2}{2C}$$

$$=\frac{1}{2}CU^2=\frac{1}{2}QU$$

与没有介质时的公式相同

$$W=\frac{1}{2}\int_{(Q_0)} dq_0 U$$

有介质情形

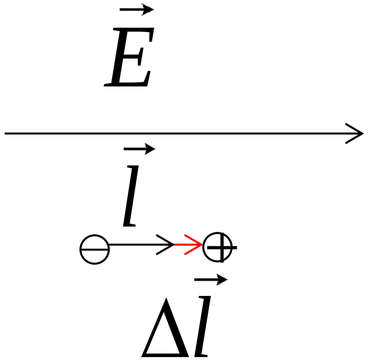
有介质情形

$$W=\frac{1}{2}\int_{(Q_0)}dq_0U+\frac{1}{2}\int_{(Q')}dq'U+W_{极化}$$

$$\int_{(Q')}dq'U=\sum q_i'U_i=\sum q_i'(U_{i+}-U_{i-})=\sum -q_i'\vec{E}_i\cdot\vec{l}_i$$

$$=\iiint(-\vec{P}\cdot\vec{E})dV$$

$$W_{极化}=?$$



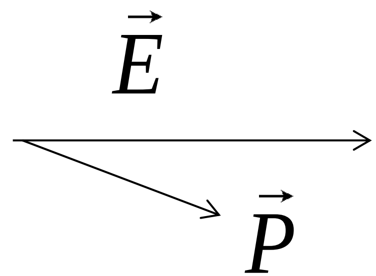
$$q\vec{E}\cdot\Delta\vec{l}=\vec{E}\cdot\Delta\vec{p}$$

对于单位体积极化功 $=\vec{E}\cdot d\vec{P}$

线性介质情形

$$\vec{P} = \chi\varepsilon_0\vec{E}$$ 各向同性

各向异性



$$P_i = \varepsilon_0 \sum \alpha_{ij} E_j$$

α_{ij} 二阶张量

$\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$ 二阶对称张量

$$\vec{E}\cdot d\vec{P} = \sum_i E_i dP_i = \varepsilon_0 \sum_{ij} \alpha_{ij} E_i dE_j = \sum_j P_j dE_j = \vec{P}\cdot d\vec{E}$$

$$\vec{E}\cdot d\vec{P}=\frac{1}{2}d(\vec{E}\cdot\vec{P})$$

$$W_{极化}=\frac{1}{2}\iiint\vec{P}\cdot\vec{E}dV$$

线性介质无损耗

$$W=\frac{1}{2}\int_{(Q_0)}dq_0U+\underbrace{\frac{1}{2}\int_{(Q')}dq'U+W_{极化}}_{\to 0}$$

$$\boxed{W=\frac{1}{2}\int_{(Q_0)}dq_0U}$$

二阶对称张量证明

$$P_x = \alpha_{xx}E_x + \alpha_{xy}E_y$$

$$P_y = \alpha_{yx}E_x + \alpha_{yy}E_y$$

加一电场 $\vec{E} = E_x\vec{e}_x + E_y\vec{e}_y$ 得到极化能

先 x 方向电场从 0 加到 E_x,
再 y 方向电场从 0 加到 E_y

$$\int \vec{E}\cdot d\vec{P} = \int_0^{E_x} E_x dP_x = \int_0^{E_x} E_x \alpha_{xx} dE_x = \frac{1}{2}\alpha_{xx}E_x{}^2$$

$$\int \vec{E}\cdot d\vec{P} = \int_0^{E_y} E_x dP_x + E_y dP_y = \int_0^{E_y} E_x\alpha_{xy}dE_y + E_y\alpha_{yy}dE_y$$

$$= \alpha_{xy}E_xE_y + \frac{1}{2}\alpha_{yy}E_y{}^2$$

$$P_x = \alpha_{xx} E_x + \alpha_{xy} E_y$$

$$P_y = \alpha_{yx} E_x + \alpha_{yy} E_y$$

加同样的电场, 但先 y 方向

电场从 0 加到 E_y 再 x 方向电场从 0 加到 E_x

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{P} = \int_0^{E_y} E_y dP_y = \int_0^{E_y} E_y \alpha_{yy} dE_y = \frac{1}{2} \alpha_{yy} E_y{}^2$$

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{P} = \int_0^{E_x} E_x dP_x + E_y dP_y \quad = \int_0^{E_x} E_x \alpha_{xx} dE_x + E_y \alpha_{yx} dE_x$$

$$= \frac{1}{2} \alpha_{xx} E_x{}^2 + \alpha_{yx} E_x E_y$$

末态一样

$$\alpha_{xy} = \alpha_{yx}$$

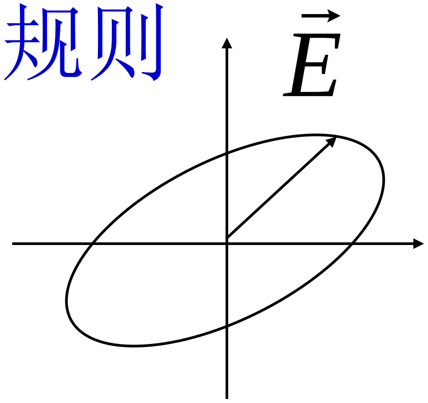
α_{ij} 是对称张量

$$u_P = \int \vec{E} \cdot d\vec{P} = \int E_i dP_i = \int E_i \alpha_{ij} dE_j$$

$$= \frac{1}{2} \int \alpha_{ij} E_i dE_j + \alpha_{ji} E_j dE_i = \frac{1}{2} \alpha_{ij} E_i E_j$$

$$= \frac{1}{2} E_i P_i = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{P}$$

Einstein 规则



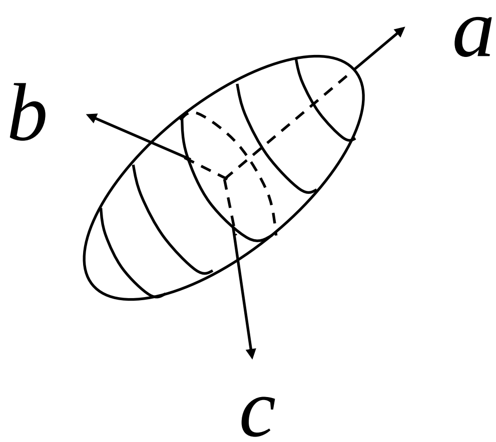
为简单只考虑 $x\,y$ 分量

$$u_P = \frac{1}{2} \alpha_{xx} E_x^2 + \alpha_{xy} E_x E_y + \frac{1}{2} \alpha_{yy} E_y^2$$

对于给定极化能, 这是中心在原点的椭圆

3维就是极化椭球

$$u = \frac{1}{2}\alpha_{ij}E_i E_j$$



$$u = \frac{1}{2}\alpha_{aa}E_a^2 + \frac{1}{2}\alpha_{bb}E_b^2 + \frac{1}{2}\alpha_{cc}E_c^2$$

a, b, c Principal axes

$$\alpha_{ab} = \alpha_{ac} = \alpha_{bc} = 0$$

$$P_a = \alpha_{aa}E_a,$$
$$P_b = \alpha_{bb}E_b,$$
$$P_c = \alpha_{cc}E_c.$$

$$\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_{aa} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{bb} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{cc} \end{bmatrix}$$

五. 利用静电能求静电力

系统中某一带电体, 假想发生虚位移 $\delta\vec{r}$ (约束允许的)

静电力做功 $\delta A = \vec{F}\cdot\delta\vec{r} = F_x\delta x + F_y\delta y + F_z\delta z$

一. 孤立系统 (没有电源, 无外力)

每个带电体电荷恒定，由能量守恒

$$\boxed{\left(\delta W_e\right)_Q = -\delta A}$$

$$F_x = -\frac{\delta W_e}{\delta x} = -\left(\frac{\partial W_e}{\partial x}\right)_Q \qquad \boxed{\vec{F} = -\left(\nabla W_e\right)_Q}$$

二. 非孤立系统

$$\boxed{\delta W_e = -\delta A + \delta A'}$$

特例: 系统中导体与电源相连 (无外力)

电源做功 $\delta A' = \sum U_i \delta Q_i$

静电能变化 $\left(\delta W_e\right)_U = \frac{1}{2}\sum U_i \delta Q_i$

$$\boxed{\left(\delta W_e\right)_U = \delta A}$$

$$F_x = \frac{\left(\delta W_e\right)_U}{\delta x} = \left(\frac{\partial W_e}{\partial x}\right)_U \qquad \boxed{\vec{F} = \left(\nabla W_e\right)_U}$$

固定电偶极矩在外电场中受力

虚位移过程电偶极矩大小不变

$$\boxed{\delta A = -\left(\delta W_e\right)_p = \delta\left(\vec{p}\cdot\vec{E}\right)_p}$$

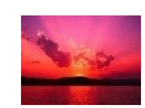
$$F_x = \left(\frac{\partial(\vec{p}\cdot\vec{E})}{\partial x}\right)_p \qquad \vec{F} = \nabla\left(\vec{p}\cdot\vec{E}\right) = \left(\vec{p}\cdot\nabla\right)\vec{E}$$

电偶极矩只在非均匀电场中受力

角位移

$$L_\theta = \frac{\partial(\vec{p}\cdot\vec{E})}{\partial\theta} = -pE\sin\theta$$

$$\vec{L} = \vec{p}\times\vec{E}$$



本章结束

安宇编