

第五章 真空中的静磁场

magnetic field

§ 5.1 磁场

§ 5.2 毕—萨—拉定律及应用

§ 5.3 磁场的高斯定理及安培环路定理

§ 5.4 磁力

§ 5.1 磁场

1. 基本磁现象

-1820年 奥斯特 磁针

- 电流有磁效应

2. 磁感应强度

运动电荷在电磁场中受力:

$$\vec{f} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}$$

洛伦兹力公式

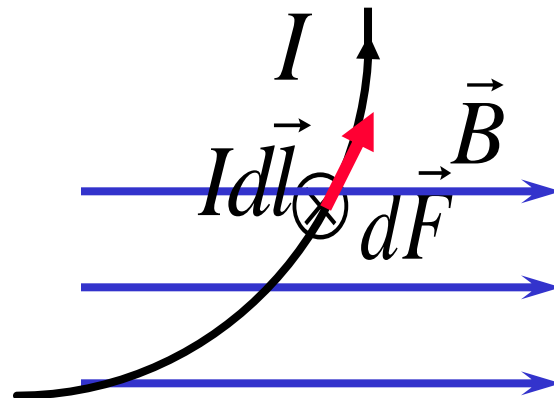
单位: 特斯拉(T)

磁感应强度

3. 安培公式

电流受到的磁场力？

安培发现 任意**电流元**受力为



$$d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B}$$

安培力公式

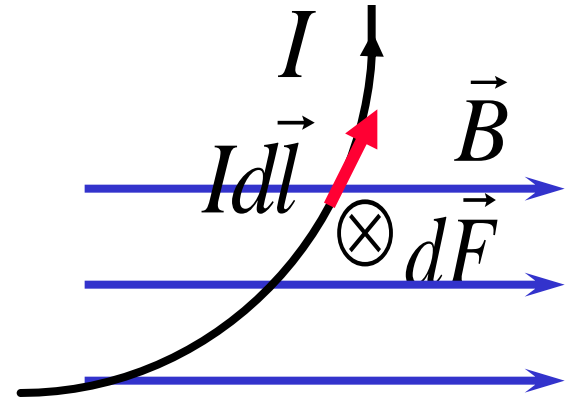
整个电流受力

$$\vec{F} = \int_{(l)} I d\vec{l} \times \vec{B}$$

电流元以外的磁场

安培力与洛伦兹力是统一的

$$\begin{aligned}d\vec{F} &= I d\vec{l} \times \vec{B} \\&= nq\vec{v}\Delta S dl \times \vec{B} \\&= \underline{\vec{j}} \times \vec{B} dV \\&= dNq\vec{v} \times \vec{B}\end{aligned}$$



单位体积受力

单个电荷的电流元

$$I d\vec{l} = q\vec{v}$$

§ 5.2 毕—萨—拉定律及应用

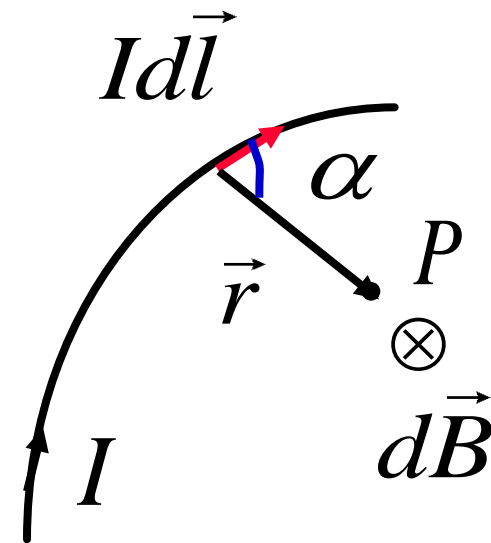
1. 毕萨拉定律

电流元 current element $I d\vec{l}$

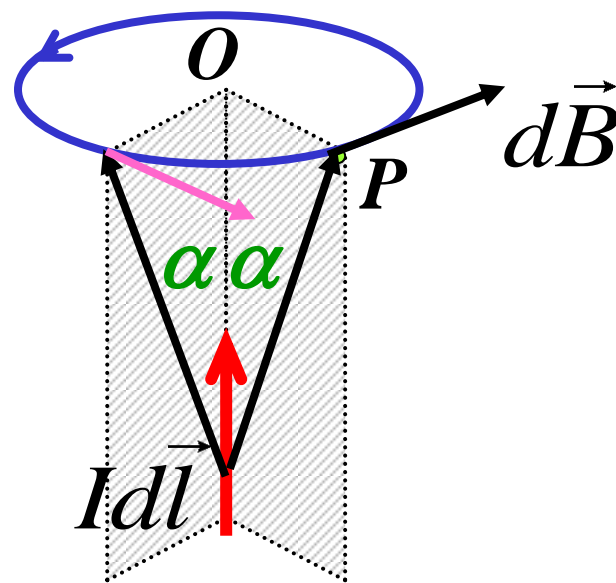
$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I d\vec{l} \times \hat{r}}{4\pi r^2}$$

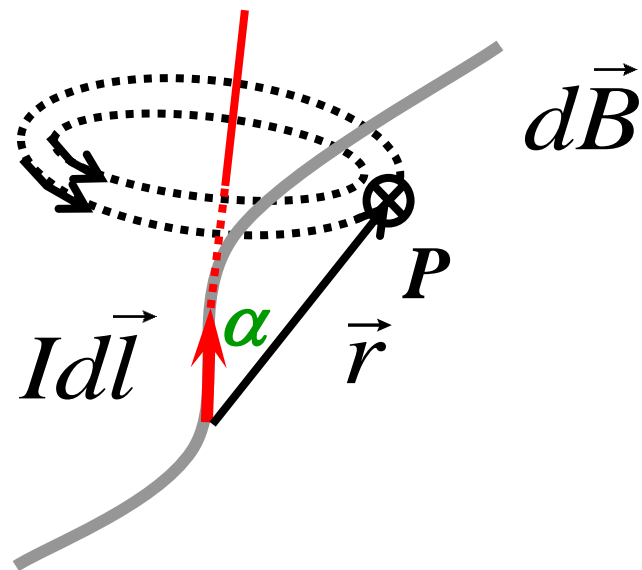
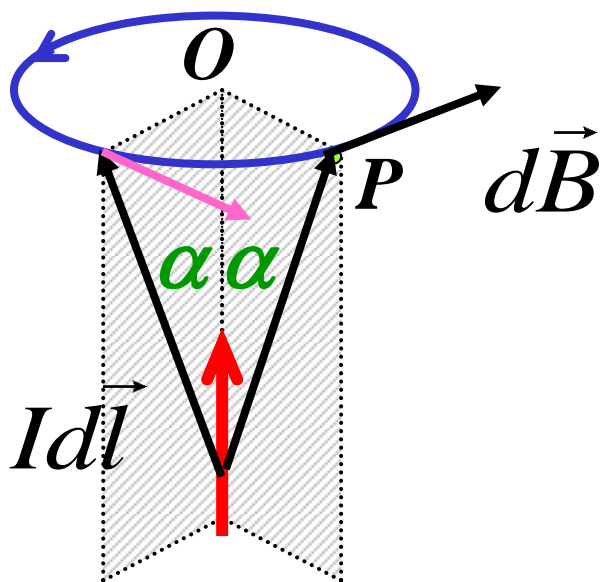
$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$$

$$dB = \frac{\mu_0 I dl \sin \alpha}{4\pi r^2}$$



μ_0 真空中的磁导率





电流元的磁感应线在垂直于电流元的平面内，
是圆心在电流元轴线上的一系列的同心圆。
磁感应线绕向与电流流向成右手螺旋关系。

2. 叠加原理

$$\vec{B} = \sum_i \vec{B}_i \quad , \quad \vec{B} = \int d\vec{B}$$

§ 5.3 磁场的高斯定理及安培环路定理

1. 磁场的高斯定理

- 磁通量

$$\phi_m = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad \text{单位: 韦伯 (Wb)}$$

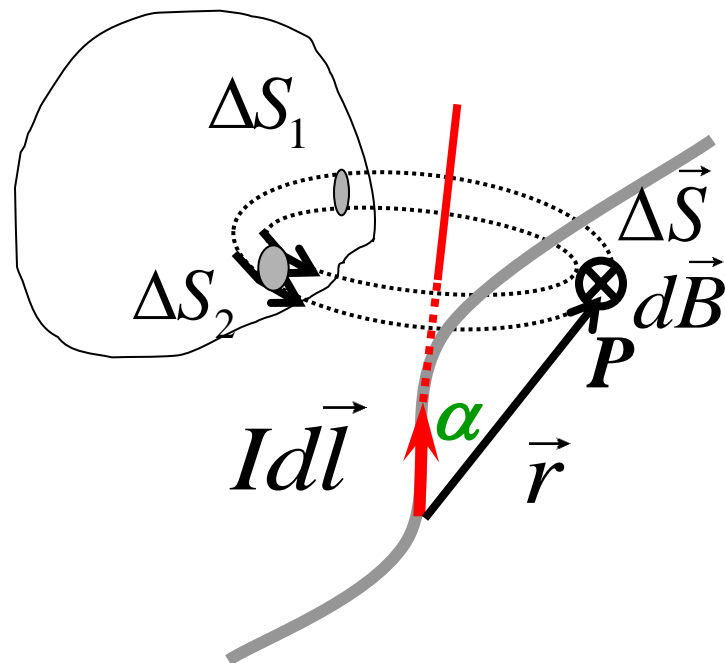
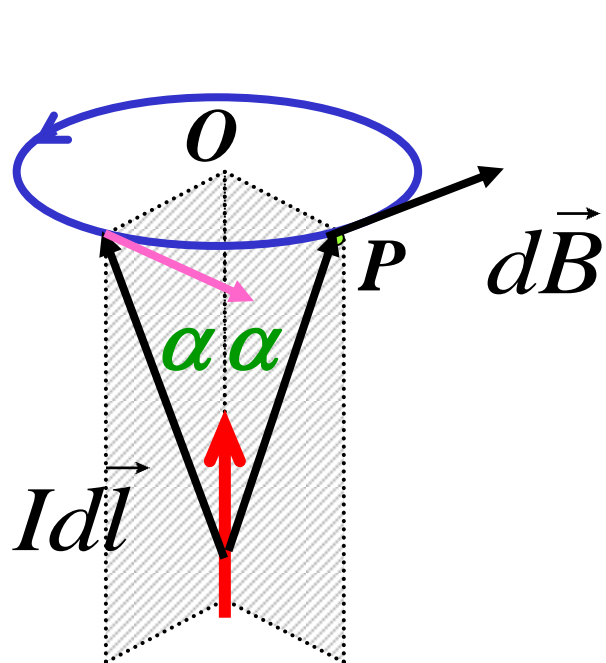
- 高斯定理

$$\oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

微分形式

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

无源场



$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I dl \sin \alpha}{4\pi r^2} \hat{\phi}$$

$$d\vec{B} \cdot \Delta\vec{S} = -d\vec{B}_1 \cdot \Delta\vec{S}_1 = d\vec{B}_2 \cdot \Delta\vec{S}_2$$

利用叠加原理可证得

$$\oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

*磁单极 (magnetic monopole) :

根据电和磁的对称性:

$$\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = q_0 \longrightarrow \oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = q_m \quad q_m \text{ — 磁荷}$$

1931 , **Dirac**预言了磁单极子的存在。

量子理论给出电荷 q 和磁荷 q_m 存在关系:

$$q \cdot q_m = nh, (n = 1, 2, 3 \cdots), \quad h \text{ 是普朗克常量}$$

\therefore 只要存在磁单极子就能证明电荷的量子化。

目前仍然不能在实验中确认磁单极子存在。

2. 安培环路定理

- 定理表述

在恒定磁场中，磁感强度 \vec{B} 沿任一闭合环路的线积分，等于穿过该环路的所有电流的代数和的 μ_0 倍.

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_i I_{i\text{内}}$$

微分形式 $\text{curl} \vec{B} = \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$

$\vec{B} \dots$ 空间所有电流共同产生的

$L \dots$ 在场中任取的一闭合线
任意规定一个绕行方向

$d\vec{l} \dots$ L 上的任一线元

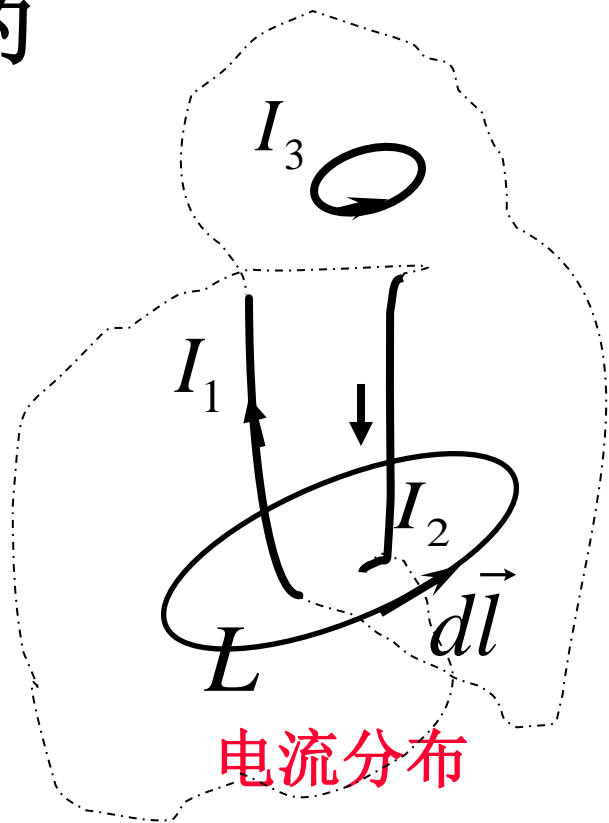
$I_{\text{内}} \dots$ 与 L 套连的电流

如图示的 I_1 I_2

$\sum_i I_{i\text{内}} \dots$ 代数和

与 L 绕行方向成右螺电流取正

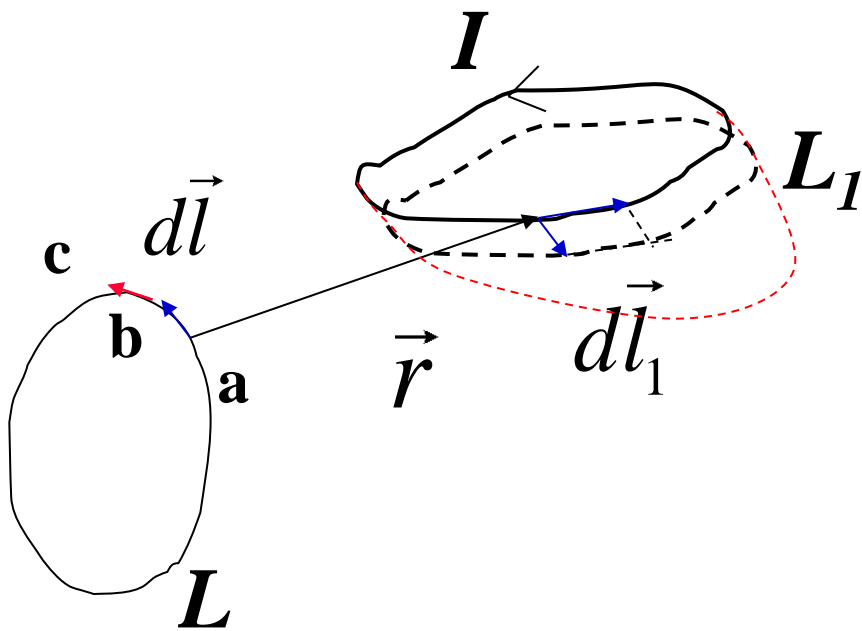
如图示的电流 I_1 取正 I_2 取负



证明

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_L \oint_{L_1} \frac{\mu_0 I d\vec{l}_1 \times (-\hat{r})}{4\pi r^2} \cdot d\vec{l}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_L \oint_{L_1} \frac{(-d\vec{l}) \times d\vec{l}_1}{r^2} \cdot \hat{r} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_L d\Omega$$



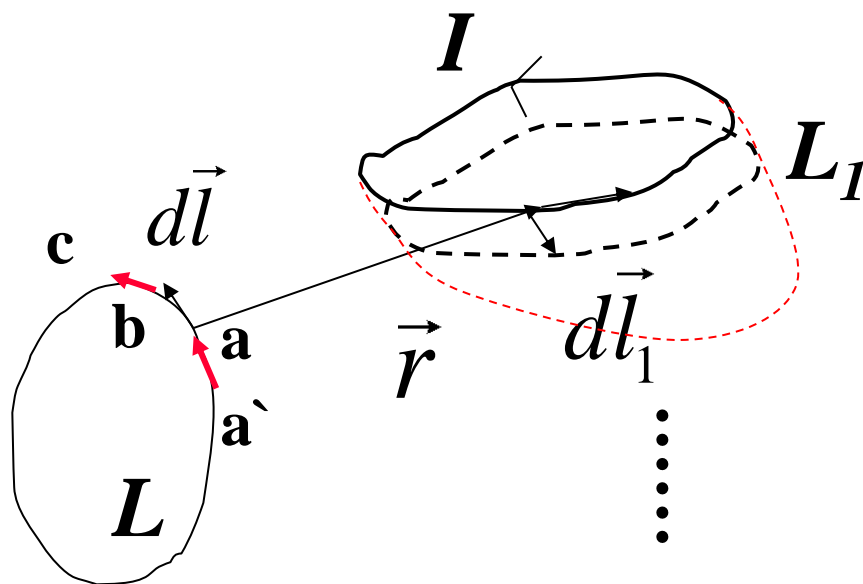
$$d\Omega_a = \Omega_{a\text{实}} - \Omega_{a\text{虚}}$$

$$d\Omega_b = \Omega_{b\text{实}} - \Omega_{b\text{虚}}$$

$$d\Omega_c = \Omega_{c\text{实}} - \Omega_{c\text{虚}}$$

⋮

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_L d\Omega$$



$$d\Omega_a = \Omega_{a\text{实}} - \cancel{\Omega_{a\text{虚}}}$$

$$d\Omega_b = \cancel{\Omega_{b\text{实}}} - \cancel{\Omega_{b\text{虚}}}$$

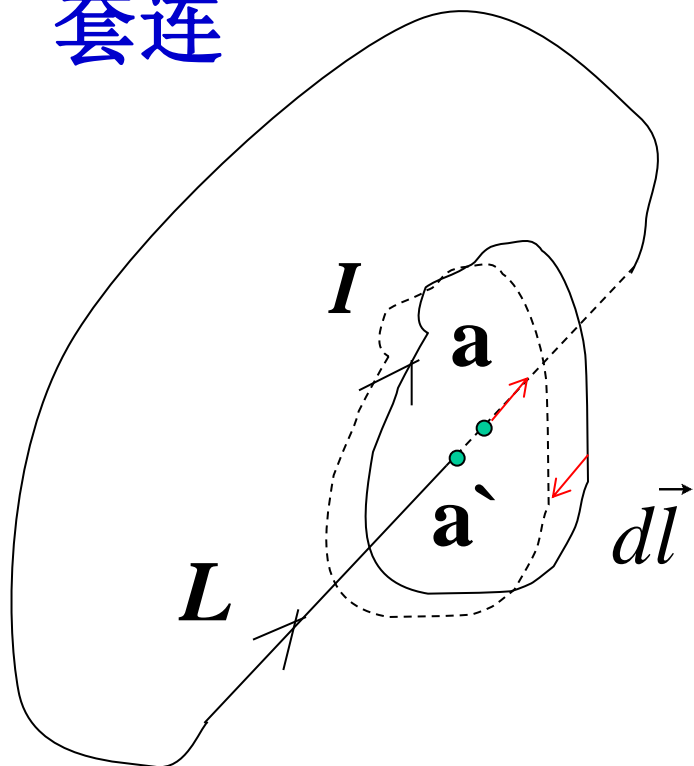
$$d\Omega_c = \cancel{\Omega_{c\text{实}}} - \cancel{\Omega_{c\text{虚}}}$$

⋮

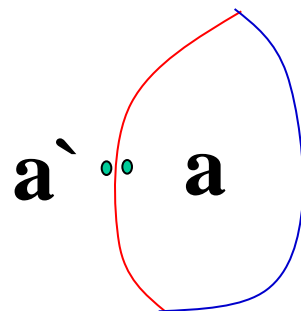
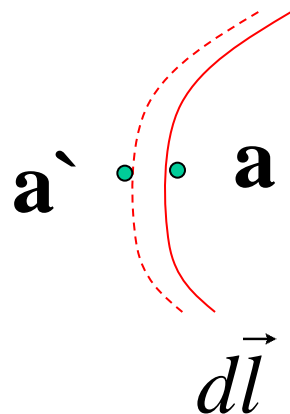
不套连

$$\oint_L d\Omega = \sum_i d\Omega_i = \Omega_{a\text{实}} - \Omega_{a'\text{虚}} = 0$$

套连



$$\oint_L d\Omega = \Omega_{a\text{实}} - \Omega_{a'\text{虚}} = 4\pi$$



$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_L d\Omega = \mu_0 I$$

积分路径反向出负号

多个电流环
叠加原理

根据磁场的高斯定理和安培环路定理

- 磁力线 磁力线的性质

- ★无头无尾闭合曲线

- ★不能相交

- ★与电流套连

- ★与电流成右手螺旋关系

静电场有源无旋， 静磁场有旋无源

3. 安培环路定理在解场方面的应用

对于一些**对称分布**的电流，可以通过取合适的环路 L ，利用磁场的环路定理比较方便地求解场量。（具体实施，类似于电场强度的高斯定理的解题。）

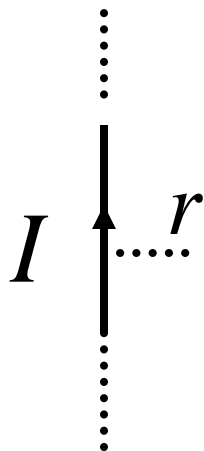
磁场由电流产生, 电流分布有对称性,
相应的磁场亦有对称性

对称性：不变性

由安培环路定理可解一些典型的场

无限长载流直导线

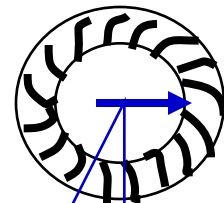
$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$



密绕螺绕环

$$B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}$$

匝数

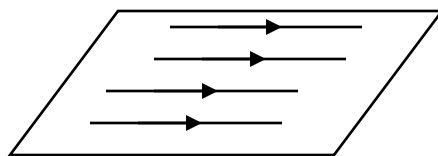


场点距中心的距离 r

无限大均匀载流平面

$$B = \frac{\mu_0 j}{2}$$

(面)电流的(线)密度



矢势

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_i I_{i\text{内}}$$

|| ||

$$\iint_S \text{curl} \vec{B} \cdot d\vec{S} \qquad \mu_0 \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

$$\text{curl} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \qquad \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

静磁场不是保守场

不能定义标量势

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

可以定义一个矢量

$$\vec{A}(x, y, z)$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = (\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}) \cdot \vec{A} = 0$$

$$\vec{A}(x, y, z)$$

叫做矢势

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \mu_0 \vec{j}$$



$$\vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} = \mu_0 \vec{j}$$

库仑规范

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$$

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}$$

$$\nabla^2 A_x = -\mu_0 j_x$$

$$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

与静电场电势方程完全相同

相同方程具有相同解

$$\phi(1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\rho(2)dV_2}{r_{12}}$$

$$A_x(1) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{j_x(2)dV_2}{r_{12}}$$

$$\vec{A}(1) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\vec{j}(2)dV_2}{r_{12}}$$

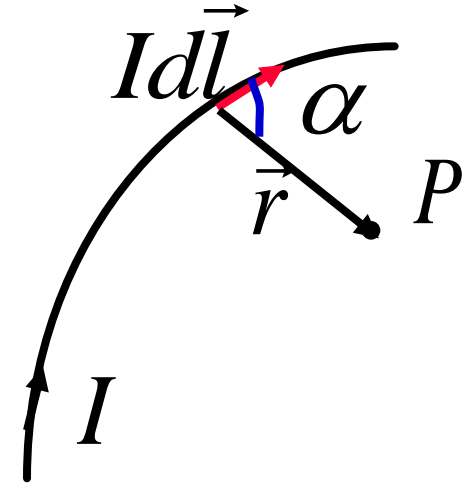
通过A 计算 B

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0 \longrightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$$

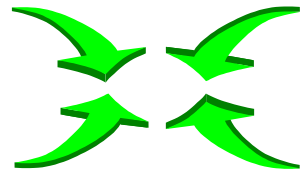
库仑规范适用于稳恒电流场—静磁场

$$d\vec{A} = \frac{\mu_0 I d\vec{l}}{4\pi r}$$

$$\vec{A} = \oint \frac{\mu_0 I d\vec{l}}{4\pi r}$$



$$\begin{aligned} \nabla \times d\vec{A} &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \nabla \times \frac{d\vec{l}}{r} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \nabla \frac{1}{r} \times d\vec{l} \\ &= \frac{\mu_0 I d\vec{l} \times \hat{r}}{4\pi r^2} \end{aligned}$$



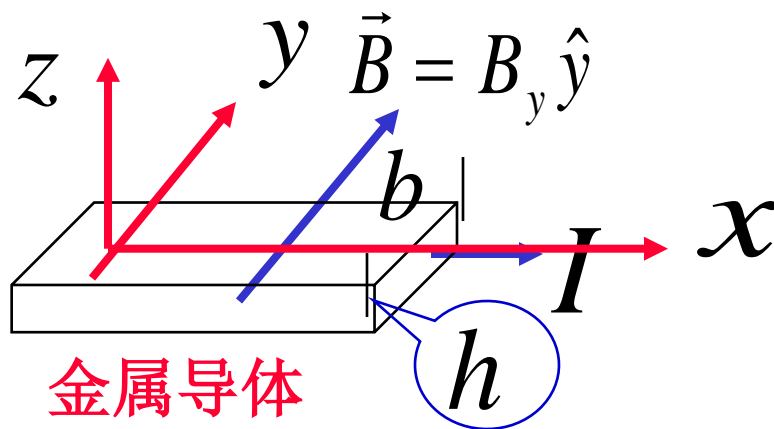
§ 5.4 磁力

1. 带电粒子在磁场中受力

洛仑兹力

$$\vec{f}_m = q\vec{v} \times \vec{B}$$

2. 霍耳效应

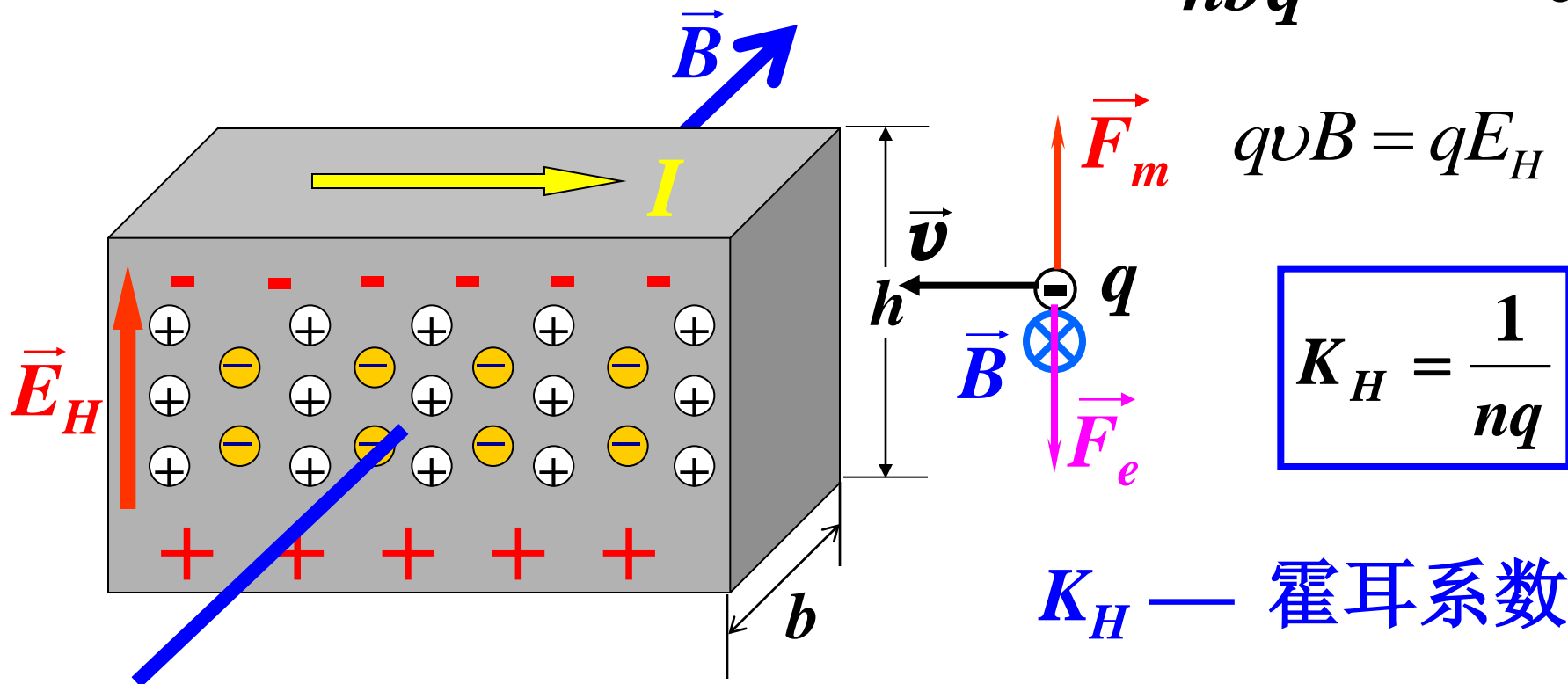


1879年美国物理学家霍耳发现：

对应图中沿 z 方向有电势差

霍耳电势差:

$$U_H = \frac{IB}{nbq} = K_H \frac{IB}{b}$$

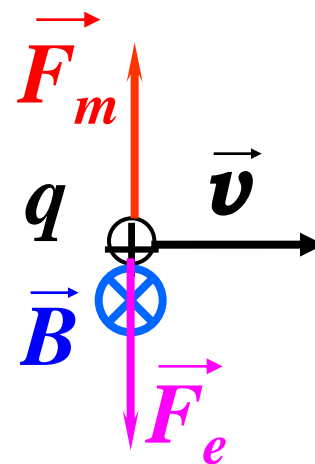
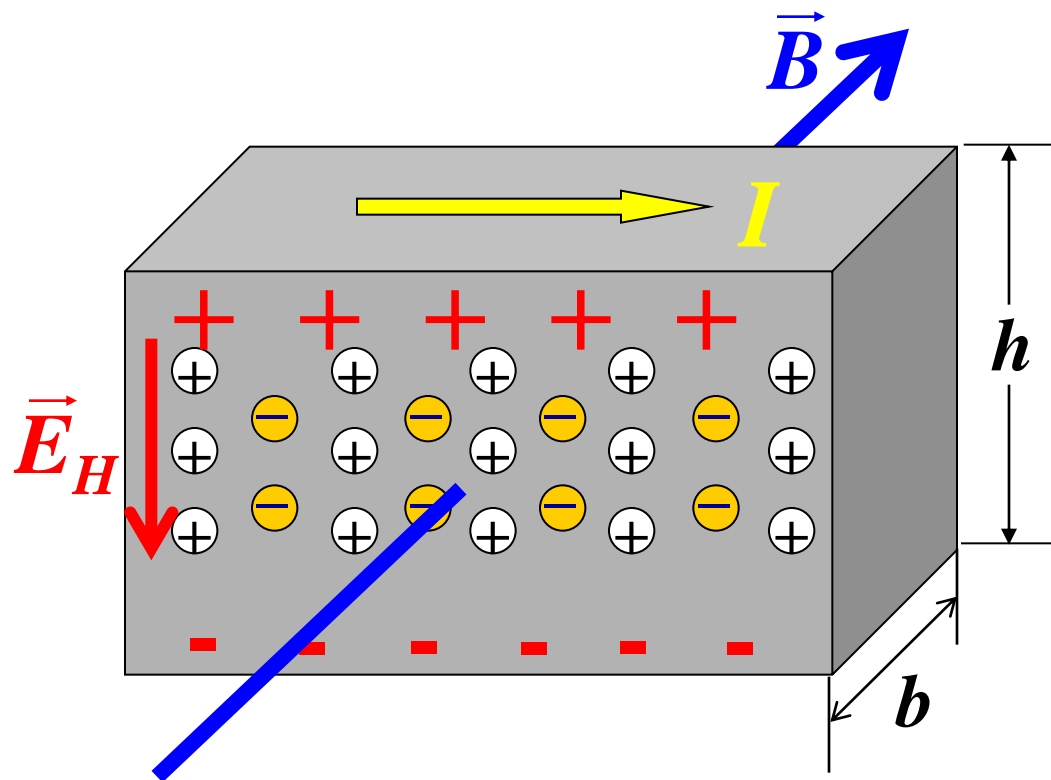


判断载流子种类, 测量载流子浓度, 测磁场等。

霍耳电阻

$$R_H = \frac{U_H}{I} = \frac{B}{nqb} \propto B$$

K_H — 霍耳系数



判断载流子种类

测量载流子浓度

$$U_H = \frac{IB}{nbq} = K_H \frac{IB}{b}$$

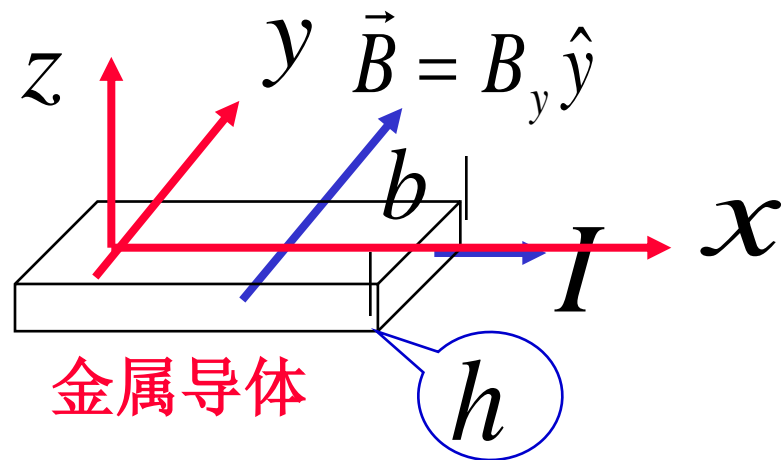
测磁场等

霍耳电阻

$$R_H = \frac{U_H}{I} = \frac{B}{nqb} \propto B$$

霍耳效应

精确的解释只能用电子的量子理论
(包括反常情形)

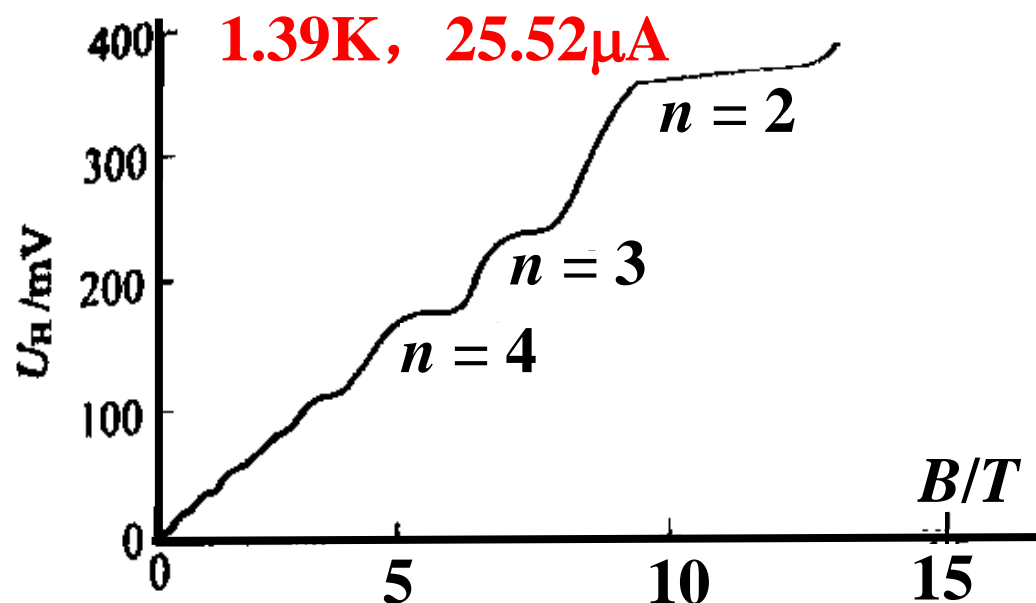


*量子霍尔效应:

1980年克里青发现,
在极低温、强磁场下

$$R_H \propto B$$

$$R_H = \frac{R_K}{n}, \quad n = 1, 2, 3,$$



克里青 (Klitzing) 常量 $R_K = \frac{h}{e^2} = 2581280\Omega$

R_K 的测量准确到 10^{-10}

1990年定义 $1\Omega = \frac{R_K}{2581280}$

*分数量子霍耳效应:

崔琦和施特默 (Störmer) 发现在更强的磁场下, n 可以是分数, 如: $1/3$ 、 $1/5$ 、 $1/2$ 、 $1/4$ 等, 这称为分数量子霍耳效应。

劳克林 (Laughlin): 携带分数电荷的准粒子

克里青 1985年诺贝尔物理学奖

劳克林、施特默和崔琦

1998年诺贝尔物理学奖

反常霍耳效应:

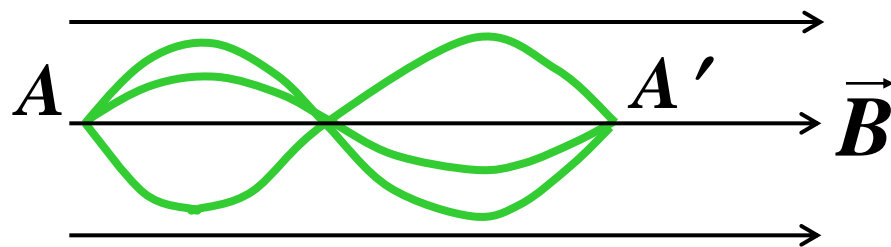
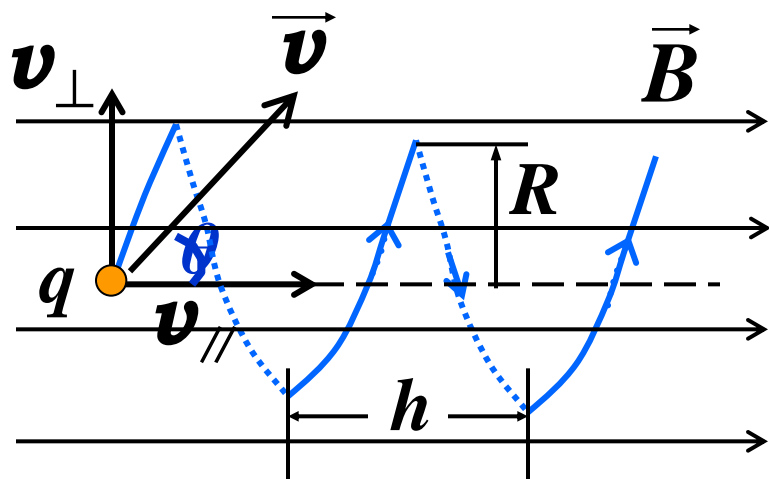
1880年霍耳发现, 不需要外加磁场, 某些材料靠自发磁化产生霍耳效应.

量子反常霍耳效应:

2013年3月15日, 《科学》(Science) 杂志在线发文, 清华大学物理系薛其坤和王亚愚等与科学院物理所及斯坦福大学物理学家合作, 观察到量子反常霍耳效应.

诺奖级别的研究成果

3. 磁聚焦

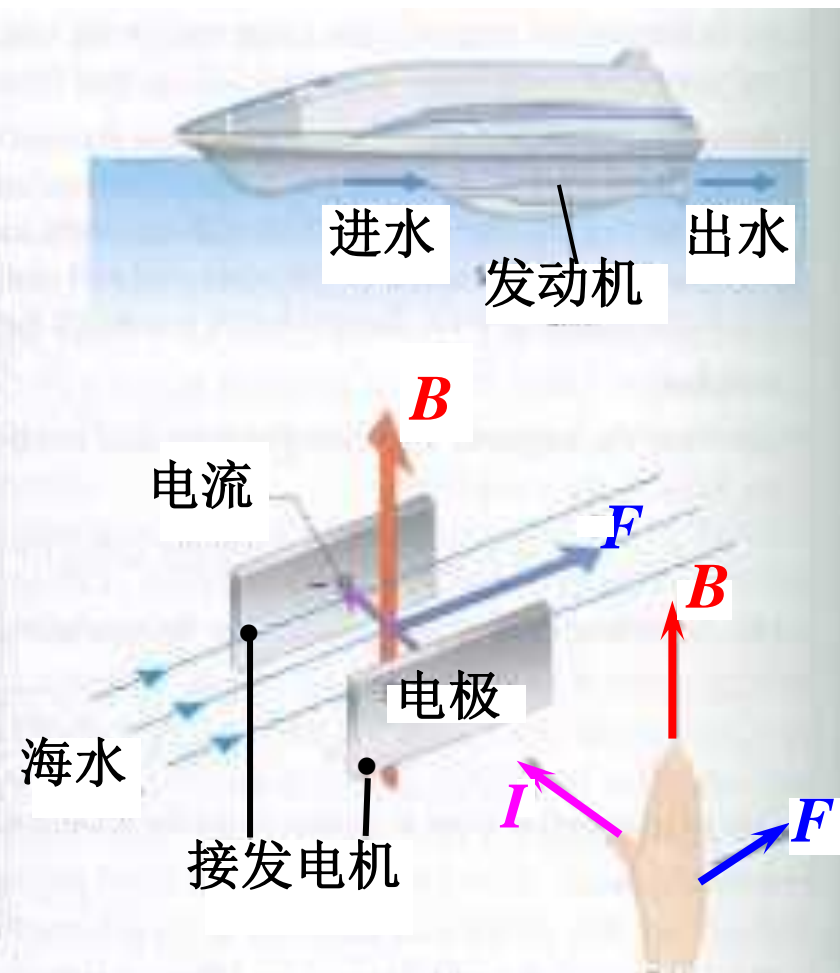


在 θ 不大、 \vec{v} 几乎相同的条件下，形成**磁聚焦**

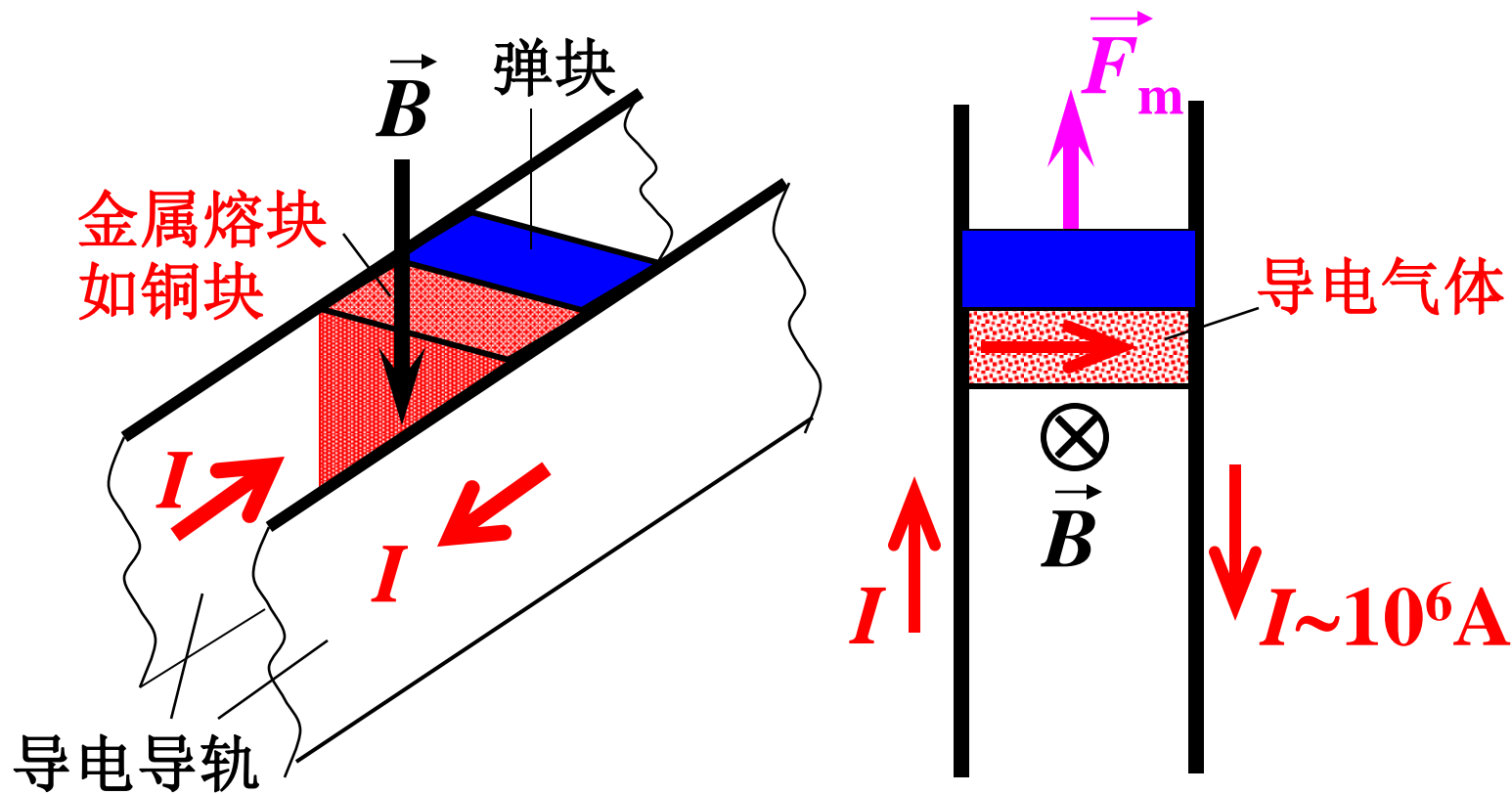
$$R = \frac{m \vec{v}_\perp}{qB}, \quad T = \frac{2\pi m}{qB},$$

$$h = \vec{v}_\parallel T = \frac{2\pi m}{qB} \vec{v} \cos \theta$$

4. 磁流体船



5. 电磁轨道炮

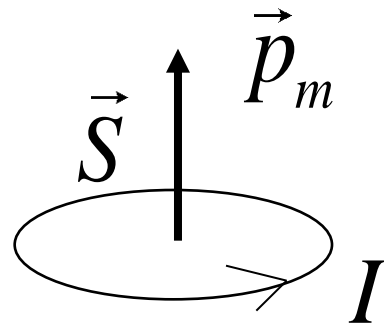


弹块 $\bar{a} \sim 10^6 g$, 在1ms内, 速度可达10km/s

6. 平面载流线圈的磁矩

定义平面载流线圈的磁矩

[magnetic (dipole) moment]



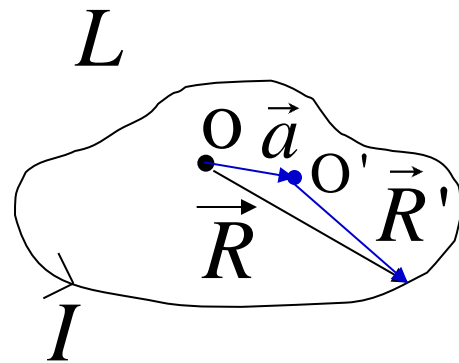
平面载流线圈

$$\vec{p}_m = I\vec{S} \quad \text{或} \quad \vec{m} = I\vec{S}$$

非平面载流线圈的磁矩

$$\vec{S} = \frac{1}{2} \oint_L \vec{R} \times d\vec{R}$$

$$\oint_L \vec{R} \times d\vec{R} = \oint_L \vec{R}' \times d\vec{R}'$$



与原点选择无关

通常场点距平面线圈的距离 $r \gg \bar{d}$

磁矩 \vec{p}_m 或 \vec{m}

平面线圈的
平均线度

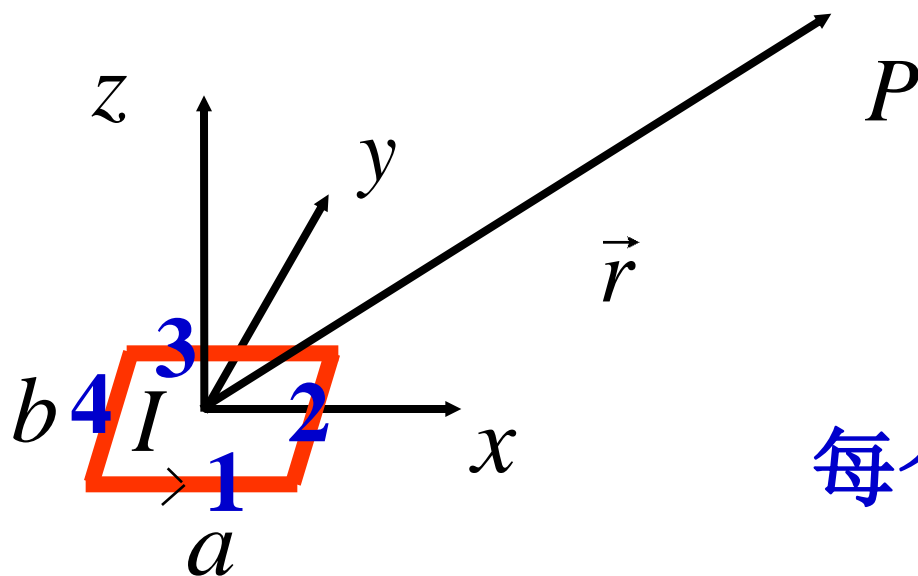
电偶极子 电偶极矩 \vec{p}_e $- \longrightarrow +$

磁矩 $\vec{p}_m I \odot \longrightarrow$

场量的表达形式相同

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left[-\vec{p}_e + 3(\vec{p}_e \cdot \hat{r})\hat{r} \right]$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \left[-\vec{p}_m + 3(\vec{p}_m \cdot \hat{r})\hat{r} \right]$$



磁矩

$$\vec{p}_m = Iab\hat{z}$$

每个边当作一个电流元

小矩形电流在 $z = 0$

$$r \gg a, \quad r \gg b$$

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I (\vec{a} \times \vec{r}_1)}{4\pi r_1^3}$$

$$\vec{r}_1 = \vec{r} + \frac{\vec{b}}{2}$$

$$\vec{B} = \sum_{n=1}^4 \vec{B}_n$$

简化后结果与磁矩的具体几何形状无关

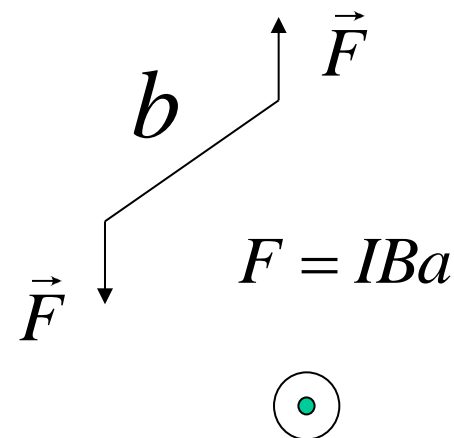
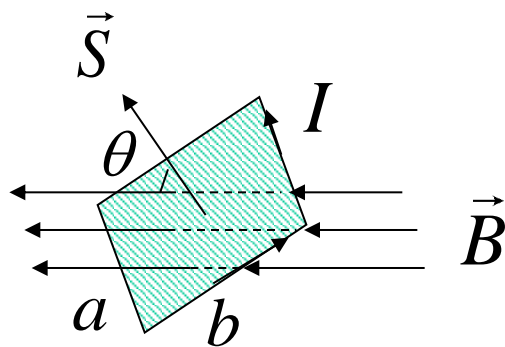
载流线圈在均匀磁场中

★合力

$$\vec{F}_{\text{合}} = 0$$

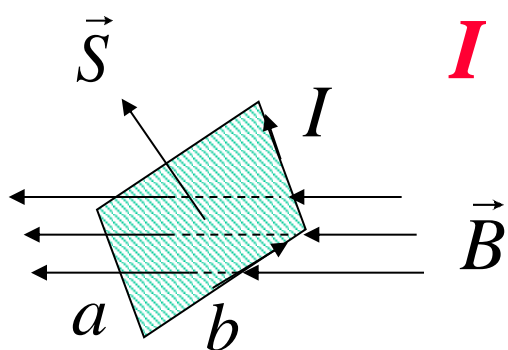
★力矩

$$\vec{M} = \vec{p}_m \times \vec{B}$$



$$M = Fb \sin \theta = IBab \sin \theta$$

载流线圈在均匀磁场中的能量



I 不变

$$W_m(\theta) - W_m(0) = \int_0^\theta M d\theta$$

$$= \int_0^\theta ISB \sin \theta d\theta$$

$$= -ISB(\cos \theta - \cos 0^\circ)$$

$$W_m = \pm \vec{p}_m \cdot \vec{B}$$

$$W_m = -\vec{p}_m \cdot \vec{B}$$

与静电场对比

$$\vec{M} = \vec{p}_m \times \vec{B}$$

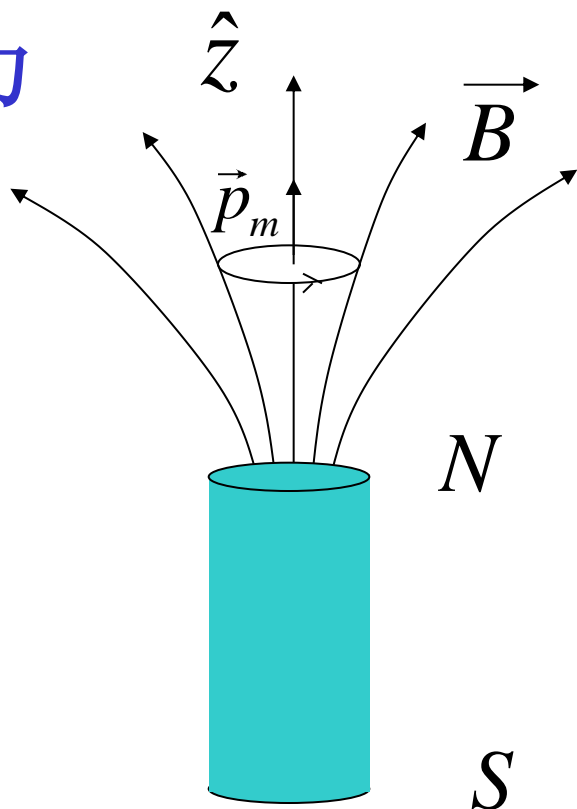
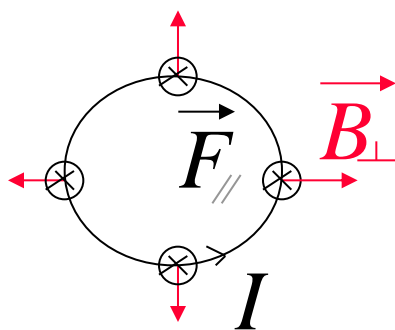
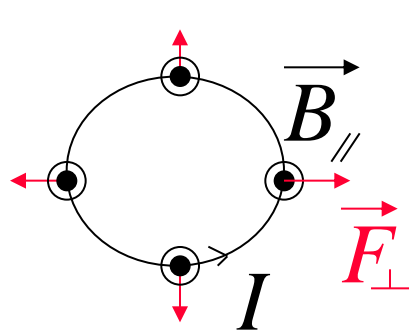
$$W_m = \pm \vec{p}_m \cdot \vec{B}$$

$$\vec{M} = \vec{p}_e \times \vec{E}$$

$$W_e = -\vec{p}_e \cdot \vec{E}$$

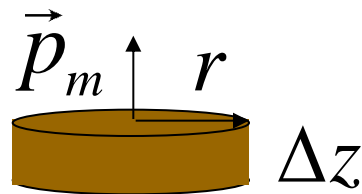
载流线圈在非均匀磁场中受力

$$\vec{B} = \vec{B}_{//} + \vec{B}_{\perp} \quad \vec{p}_m = I \Delta S \hat{z}$$



$$\vec{F}_{\perp} = 0$$

$$\vec{F}_{//} = -2\pi r I B_{\perp} \hat{z}$$



$$\oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad \Rightarrow \quad [B_{//}(z + \Delta z) - B_{//}(z)]\Delta S + B_{\perp} 2\pi r \Delta z = 0$$

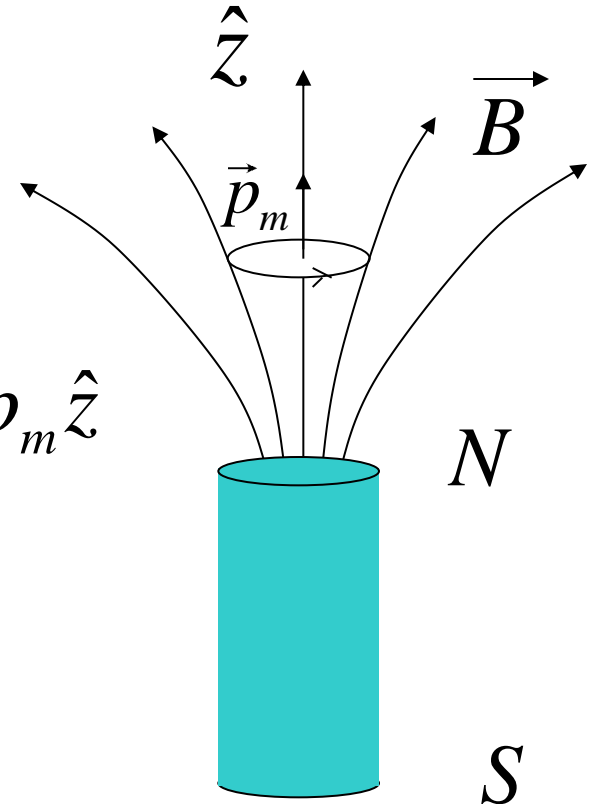
$$[B_{//}(z + \Delta z) - B_{//}(z)]\Delta S + B_{\perp} 2\pi r \Delta z = 0$$

$$2\pi r B_{\perp} = -\frac{\partial B_{//}}{\partial z} \Delta S$$

$$\vec{F}_{//} = -2\pi r I B_{\perp} \hat{z} = \frac{\partial B_{//}}{\partial z} I \Delta S \hat{z} = \frac{\partial B_{//}}{\partial z} p_m \hat{z}$$

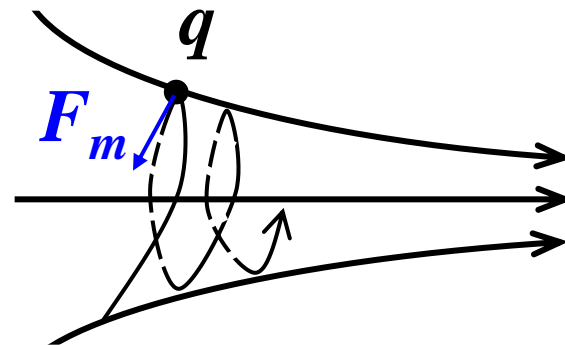
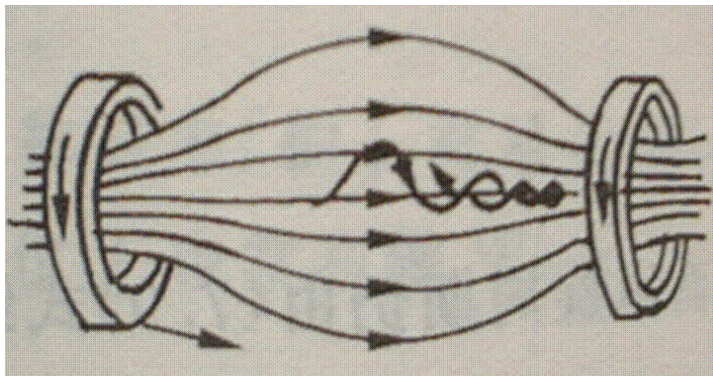
$$F_z \hat{z} = p_m \frac{\partial B_{//}}{\partial z} \hat{z} = \vec{p}_m \cdot \vec{\nabla} B_z \hat{z}$$

$$\boxed{\vec{F} = \vec{p}_m \cdot \vec{\nabla} \vec{B}}$$

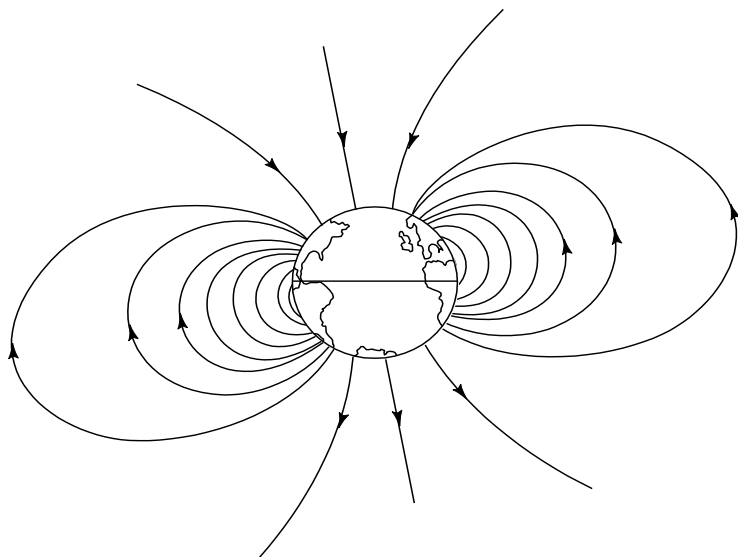


▲ 磁约束

磁瓶



速率不变



范阿仑带

本章结束

安宇编