第一章

向量空间与对偶向量空间

我们在此假定读者已具有朴素集合论的知识.

§ 1　代数结构

设 X 是任意集合. 从笛卡尔平方 $X^2 = X \times X$ 到 X 的一个任意 (确定) 的映射 $\tau: X \times X \to X$ 叫做 X 上的*二元代数运算* (或合成律), 并且引入特殊的记号: $*, \circ, \cdot$ 或 $+$, 等等来表示 X 上的二元运算. 一般来说, 在集合 X 上可以定义多种不同的运算. 从中选定一种后, 比如使用记号: $(X,*)$, 则称运算 $*$ 定义了 X 上的一种*代数结构*, 或 $(X,*)$ 是一个*代数结构* (亦称*代数系统*).

定义在集合 X 上的二元运算 $*$ 称为*结合的*, 若任取 $a,b,c \in X$,

$$(a*b)*c = a*(b*c);$$

$*$ 称为交换的, 若

$$a*b = b*a.$$

同样的称谓亦适用于相应的代数结构 $(X,*)$.

元素 $e \in X$ 叫作关于二元运算 $*$ 的*单位元* (或*中性元*), 若任取 $x \in X, e*x = x*e = x$.

集合 X 连同其上给定满足结合律的二元运算称为一个*半群*. 带有单位元的半群通常称为 *幺半群* (或*有单位元的半群*).

一般来说, 称 $(M,\cdot,e)$ 为*乘法幺半群*. 而称 $(M,+,0)$ 为*加法幺半群*. 在大多数情况下, 只有当幺半群交换时采用加法记号.

幺半群 $(M,\cdot,e)$ 的一个元素 a 称为*可逆的*, 若存在元素 $b \in M$, 使得 $ab = e = ba$. 易知可逆元素 a 的逆元是唯一的. 定义元素 $a \in M$ 的逆元 a^{-1}: $a^{-1}a = e = aa^{-1}$.

所有元素都可逆的幺半群叫作群. 换言之, 下列公理必须满足.

G0) 在集合 G 上定义了一个二元运算 $(x,y \to xy)$.

G1) 运算是结合的: 任取 $x,y,z \in G, (xy)z = x(yz)$.

G2) G 有单位元 e: 任取 $x \in G, xe = ex = x$.

G3) G 的任意元素 x 有逆元 $x^{-1} : xx^{-1} = x^{-1}x = e$.

带有交换二元运算的群称为交换群, 也叫作阿贝尔群.

设 R 是一个非空集合, 在 R 上定义了两种运算 $+$ 和 $\cdot$, 满足下述条件:

R1) $(R,+)$ 是阿贝尔群;

R2) $(R,\cdot)$ 是半群;

R3) 加法和乘法运算以分配律相联系 (换言之, 乘法对加法的分配律), 即

$$(a+b)c = ac+bc,\ c(a+b) = ca+cb$$

对任意的 $a,b,c \in R$ 成立.

则称 $(R,+,\cdot)$ 是一个环.

$(R,+)$ 叫作环的加法群, 而 $(R,\cdot)$ 叫作它的乘法群. 如果 $(R,\cdot)$ 是一个幺半群, 则称 $(R,+,\cdot)$ 是有单位元的环.

环的单位元通常简记作 1.

如果任取 $x,y \in R$, 有 $xy = yx$, 则环 R 叫作交换的.

如果将换的定义中的公理 R2) 换成更强的条件, 我们可以得到一类非常有趣的环称为除环或斜域.

R2′) $R^* = R \backslash \{0\}$ 关于乘法运算构成一个群.

注意除环中每一个非零元素都可逆.

设 P 是一个有单位元 $1 \neq 0$ 的交换环, 如果 P 的每一个非零元素都可逆, 则称 P 为一个域.

在域中, 加法和乘法运算几乎是完全对称的.