,,

NÁBOJ junior

Zbierka úloh 2013

1. úloha

Dušan a Mišo behajú okolo MatFyzu po uzavretej dráhe s dĺžkou 1 km. Mišo beží rýchlosťou 1 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ a Dušan 2 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Keď obaja začnú bežať v rovnaký čas pred matematickým vchodom, ako dlho potrvá, kým prvýkrát Dušan obehne Miša?

Riešenie

Najprv sa pozrime na to ako sa hýbe Ďušan a Mišo. Po prvej sekunde prebehol Mišo 1 m a Dušan 2 m, v druhej sekunde Mišo prebehol 2 m a Dušan 4 m, už tu si každý rozumný človek všimne, že Dušan je vždy dvakrát tak ďaleko ako Mišo a teda ak Mišo prebehne jeden okruh Dušan prebehne dva a obíde Miša. Dalo by sa to predstaviť aj tak že Mišo sa nehýbe vôbec a Dušan iba rýchlosťou 2 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ - 1 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, a už len vypočítať ako dlho by trvalo obehnuť jedno kolečko pri tejto rýchlosti. Teraz nám stačí už len vypočítať čas, ktorý trvá pri rýchlosti 1 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ prebehnúť 1000 m a to je $\frac{1000\,\mathrm{m}}{1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \equiv 1000\,\mathrm{s}}$. A teda Dušanovi to potrvá 1000 s než obehne Miša.

---

2. úloha

Aďušik má dvakrát viac kačiek ako FtáKopySkov, jeho brat má trikrát viac kačiek ako FtáKopySkov. Obaja majú rovnkaký počet kačiek. Koľkokrát viac kačiek ako FtáKopySkov majú spolu?

Riešenie

Nech obaja majú K kačiek. Potom Andrej má $2K$ vtákopyskov a jeho brat má $3K$ vtákopyskov. Spolu teda majú $2K$ kačiek a $5K$ vtákopyskov. Preto majú $\frac{5}{2} = 2{,}5$-krát viac vtákopyskov ako kačiek.

---

3. úloha

Čistá voda má hustotu 1000 $\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$, morská voda (čistá voda spolu so soľou) má hustotu 1025 $\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$. Minimálne koľko litrov morskej vody potrebujeme nechať odpariť na posolenie polievky, ak v nej chcem mať 50 g soli?

Riešenie

Ak má čistá voda hustotu ρ_v a voda so soľou hustotu ρ_s, tak nám ich rozdiel povie o tom, koľko kg soli sa nachádza v slanej vode na m^3. V našom prípade je $\rho_s - \rho_v = 1025\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} - 1000\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} = 25\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$. Teda v $1000\,\ell$ slanej vody sa nachádza 25 kg soli a v $1\,\ell$ to je 25 g. Ak potrebujeme 50 g soli potrebujeme minimálne $2\,\ell$ vody.

---

4. úloha

Žaba si našetril za 6 dní 8 dukátov. Koľko dní ešte potrebuje, ak chce našetriť ďalších 12 dukátov a bude šetriť rovnako rýchlo?

Riešenie

Keďže šetrí rovnako rýchlo za 1 deň našetrí $\frac{8}{6}$ dukátu. Preto k naštereniu 12 bude potrebovať ešte $\frac{12}{\frac{8}{6}} = 9$ dní.

---

5. úloha

Lukaf obľubuje piť horúcu vodu, nedávno si pripravil $3/4\,\ell$ vriacej vody. 100 C voda je však príliš horúca aj pre Lukafa, a tak ju teda dolial do $1\,\ell$ vodou s teplotou t tak, aby mala výsledná voda teplotu 75 C? Aká bola teplota priliatej vody?

Riešenie

Všetci snáď už vieme, že teplo v uzavretom systéme sa uchováva. Ak by sme zmiešali $1\,\ell$ 100 C s $1\,\ell$ 0 C, výsledná teplota by bola vážený aritmetický priemer teplôt, kde váha by bol objem. (Vážený aritmetický priemer je podobný známemu aritmetickému, rozdiel je v tom, že niektoré hodnoty si získavajú väčšiu váhu tým, že sa vynásobia číslom, tzv. váhou.) V tomto prípade na to pôjdeme rovnako. Váhou bude objem, pričom priemerované hodnoty budú teploty. To celé ešte bude, ako v obyčajnom aritmetickmom priemere vydelené súčtom všetkých váh. Viac však asi napovie rovnica.

$$\frac{\frac{3}{4}\,\ell \cdot 100\,\mathrm{C} + \frac{1}{4}\,\ell \cdot \mathrm{t}}{\frac{3}{4}\,\ell + \frac{1}{4}\,\ell} = 75\,\mathrm{C},$$

na splnenie tejto rovnice musí nutne platiť, že $t = 0\,\mathrm{C}$.

6. úloha

Mišo pozná iba kladné celé čísla, ktoré sú násobkami čísla 182. Jeho malý brat pozná iba celé čísla, ktoré sú násobkami čísla 143. Aké je najmenšie číslo, ktoré poznajú obaja?

Riešenie

Hľadáme vlastne najmenší spoločný násobok čísel 182 a 143. Preto si ich rozložíme na súčin prvočísel – $182 = 2 \cdot 7 \cdot 13$ a $143 = 11 \cdot 13$ – a následne nájdeme najmenší spoločný násobok tak, že všetky získané prvočísla navzájom vynásobíme s tým, že tie čísla, ktoré sú v obidvoch rozkladoch na prvočísla (v tomto prípade to je len 13) budeme násobiť iba raz

$$2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 = 2\,002\,.$$

---

7. úloha

Homogénny kváder má hmotnosť 12 kg. Aká by bola tiaž menšieho kvádra z rovnakého materiálu, ak by mal dĺžky všetkých hrán polovičné ako pôvodný?

Riešenie

Keďže je v tomto kvádri hmotnosť rozložená homogénne, tak sa hmotnosť zmení presne tak ako objem. Objem kvádra je na začiatku $V_1 = a \cdot b \cdot c$. Ak však zmenšíme každú stranu o polovicu, tak je objem už len

$$V_2 = \frac{1}{2}a \cdot \frac{1}{2}b \cdot \frac{1}{2}c = \frac{1}{8}a \cdot b \cdot c = \frac{V}{8}.$$

Výsledná hmotnosť je teda tiež $\frac{1}{8}$-násobok pôvodnej a to je 1,5 kg.

---

8. úloha

Mojo potrebuje 200 vedierok na naplnenie malého bazéna. Jeho otec má dvaapolkrát väčšie vedro. Koľko vedier potrebuje jeho otec na naplnenie bazéna?

Riešenie
Mojov otec bude jasne potrebovať 2,5-krát menej vedierok a to je $\frac{200}{2{,}5} = 80$.

---

9. úloha

Na palube lodi, ktorá sa pohybuje vzhľadom na breh rýchlosťou $12\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ sa pohybuje Baklažán rýchlosťou $5\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ kolmo na smer plavby. Aká je rýchlosť Baklažána vzhľadom na breh?

Riešenie
Pri sčítavaní rýchlostí, ktoré majú na seba kolmý smer použijeme Pytagorovu vetu. Odvesny trojuholníka budú mať velkosti $12\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ a $5\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$. Pytagorovou vetou získame preponu pomysleného trojuholníka, čo je zároveň aj hľadaná výslednica rýchlostí.
Zostáva nám už len samotný výpočet

$$v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = \sqrt{169}\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = 13\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$$

---

10. úloha

Achilles a korytnačka sa rozhodli si dať preteky na trati dlhej $3000\,\mathrm{cm}$. Korytnačka sa hýbala rýchlosťou $2\,\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}}$. Achilles nechal náskok korytnačke, a tak vyrazil o $22\,\mathrm{min}$ neskôr s rýchlosťou $2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Kto dorazil do cieľa prvý? O koľko skôr dorazil?

Riešenie
Korytnačka dorazila do cieľa za $\frac{3000\,\mathrm{cm}}{2\,\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}}} = 1500\,\mathrm{s}$. Achilles vyrazil za $22\,\mathrm{min} = 22 \cdot 60\,\mathrm{s} = 1320\,\mathrm{s}$, a preto do cieľa došiel za $1320\,\mathrm{s} + \frac{30\,\mathrm{m}}{2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} =$

1335 s. Preto sa Achillovi podarilo nemožné a predbehol korytnačku, a to o 1500 s − 1335 s = 165 s.

---

11. úloha

Akú kinetickú energiu mala guľôčka s hmotnosťou 20 g pri dopade na podlahu, ak padla zo stola ktorý mal výšku 1 m?

Riešenie

Riešenie tejto úlohy spočíva v správnom využití zákona zachovania energie, ktorý nám hovorí, že $E_{k1} + E_{p1} = E_{k2} + E_{p2}$ (súčet kinetickej a potenciálnej energie je konštantný – teda má vždy rovnakú veľkosť).
Na začiatku (keď ešte gulička nepadá) nemá gulička žiadnu kinetickú energiu, iba potenciálnu. Keď sa gulička dotýka zeme naopak už nemá žiadnu potenciálnu ale iba kinetickú energiu. Zo zákona zachovania energie vieme, že celková energia sa v systéme nemení, a keďže nazačiatku je kinetická energia nulová a na konci je potenciálna energia nulová, tvar zákona zachovania energie sa zmení na $E_p = E_k$. Teraz môžeme podla vzorca $E_p = mgh$ zistiť akú potenciálnu energiu mala loptička na začiatku a táto energia sa bude rovnať kinetickej energií ktorú bude mať loptička tesne pred dopadom. $E_p = 0.02\,\mathrm{kg} \cdot 1\,\mathrm{m} \cdot 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 0.2\,\mathrm{J}$ a teda podla $E_p = E_k$ buďe aj finálna kinetická energia $E_k = 0.2\,\mathrm{J}$.

---

12. úloha

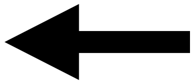
CD-čko rozrezal tyčku na 3 rôzne dlhé časti. Druhá najdlhšia časť bola o tretinu dlhšia ako najktratšia časť. Celá tyč bola o dve tretiny dlhšia ako najdlhšia časť.
Akú časť celej tyče predstavuje najkratšia časť?

Riešenie

Ak dĺžka najdlhšej časti je x, tak dĺžka tyče je $\frac{5}{3}x$. Súčet dĺžok zvyšných častí je preto $\frac{2}{3}x$. Ak je dĺžka najkratšej časti y, stredná časť má $\frac{4}{3}y$. Spolu majú $\frac{7}{3}y = \frac{2}{3}x$. Preto $y = \frac{2}{7}x$. Teraz už len zistíme akú časť tej tyče tvorí najkratšia časť - to je $\frac{\frac{2}{7}x}{\frac{5}{3}x} = \frac{6}{35}$.

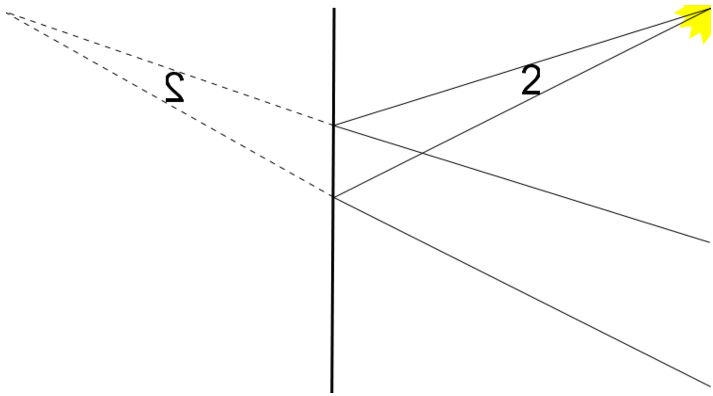
13. úloha

Nakresli, ako by vyzeral odraz tohoto príkladu v rovinnom zrkadle. Nezabudni aj na text zadania!

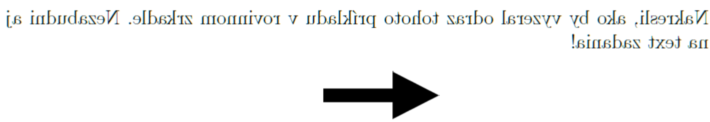


Riešenie

Keď do zrkadla zasvietime laserom (alebo bodovým lúčom) pod uhlom α tak jeho odraz bude s zrkadlom zvierať uhol $180 - \alpha$. Keď však tento odrazený lúč príde k našemu oku mozog ho vyhodnotí, ako keby išiel stále rovno (mozog nepredpokladá že bolo v ceste lúča zrkadlo), a teda my vidíme obraz horizontálne prevrátený.



Výsledok by mal vyzerať nejako takto, ale je to celkom drsná práca prepísať to.



14. úloha

Maťo sa rozhodol spočítať všetky trojciferné čísla, ktoré neobsahujú číslicu 2 ani číslicu 3. Koľko ich napočítal?

Riešenie

Na mieste stoviek v tom čísle môžu byť cifry $1, 4, 5, 6, 7, 8$ alebo 9. To je 7 možností. Na ostatných máme 8 možností (aj 0). Môžeme ich ľubovoľne pokombinovať, a preto máme spolu $7 \cdot 8 \cdot 8 = 448$ možností. Maťo napísal 448 čísel.

---

15. úloha

Termnín série UFa už je za nami a Čajka už zúri na opravovateľov, aby napísali vzoráky. Termín na poslanie vzorákov je dnes. Pred 5 dňami jeden vzorák odovzdal Paťo a jeden Žaba, včera jeden vzorák odovzdala Jarka a jeden aj Baklažán. Ešte musí odovzdať Maťo jeden vzorák a Jerguš tiež jeden vzorák. Ako neskoro môžu odovzdať svoj vzorák tak, aby bol priemer časov poslania vzorákov dnes? Uveď všetky možnosti.
Počítajte iba s celými dňami, hodinami ani minútami sa nezaoberajte.

Riešenie

Najprv si treba uvedomiť, že táto úloha je založená na úplnej skutočnosti a Jerguš a Maťo sú pod tyrániou Čajky. Potom treba zistiť koľko dní Jergušovi a Maťovi "našporili" oduševnelí opravovatelia, Paťo a Žaba poslali vzorák 5 dní pred termínom a teda celkovo dali možnosť Jergušovi a Maťovi meškať spolu 10 dní, Baklažán a Jarka poslali vzoráky deň predom a teda pripočítali ďalšie 2 dni lenivému kolégiu. Teraz máme niekoľko možností, v každej z nich musí byť súčet omeškaných dní Jergušom a Maťom 12. Ak sa Maťo zachová svedomito a urobí svoj vzorák ešte dnes Jerguš musí meškať 12 dní. Ak vzorák urobí o jeden deň neskôr Jerguš musí o 11 dní neskôr.
Ak vypíšeme všetky dvojice, dostaneme

$$[0, 12], [1, 11], [2, 10], [3, 9], [4, 8], [5, 7], [6, 6]$$

, tu sa stáva svedomitým Jerguš!

$$[7,5],[8,4],[9,3],[10,2],[11,1],[12,0]$$

---

16. úloha

Enka sa rozhodola ísť pešo do najbližšej dediny. Keď prešla tri pätiny cesty už nevládala a jej rýchlosť sa zmenšila o polovicu.
Celkovo jej trvala cesta 50 minút. Koľko by mu cesta trvala keby nespomalila?

Riešenie

Nech celá cesta do školy má dĺžku s a na začiatku šla Enka rýchlosťou v. Potom prvé tri pätiny cesty prešla za

$$\frac{\frac{3}{5}s}{v} = \frac{3}{5}\frac{s}{v}$$

a zvyšok za

$$\frac{\frac{2}{s5}}{\frac{v}{2}} = \frac{4}{5}\frac{s}{v}.$$

Teda $(\frac{3}{5}+\frac{4}{5})\frac{s}{v} = \frac{7}{5}\frac{s}{v} = 50\,\mathrm{min}$ a z toho $\frac{s}{v} = \frac{250}{7}$ min. Keby nepomalila trvala by jej cesta práve $\frac{s}{v}$, čo je $\frac{250}{7}$ min.

---

17. úloha

Dve plastelínové guličky sa kotúlajú s rovnakou rýchlosťou a navzájom opačným smerom proti sebe, pri zrazení sa z nich stane jedna gulička, akou rýchlosťou a ktorým smerom pôjde táto gulička?

Riešenie

Zákon zachovania hybnosti hovorí o nepružných zrážkach telies s hmotnosťami m_1 a m_2 a rýchlosťami v_1 a v_2 to, že

$$m_1v_1 + m_2v_2 = (m_1+m_2)v_3.$$

V našom prípade však majú guličky opačné rýchlosti, a teda ľavá strana rovnice bude vyzerať takto $m_1v_1 - m_2v_2 = \ldots$. V tejto časti by vám už malo byť všetko jasné, nie je? Tak sa pozrite na tú ľavú stranu rovnice znova a viete, že tie loptičky majú úplne presne rovnakú hmotnosť a veľkosť rýchlosti? Však výsledok je nula! Ono sa to po tej zrážke už nehýbe!

---

18. úloha

Čajka má štvorcovú záhradu. Jej susedia majú obdĺžnikovú záhradu, ktorej jedna strana je o pätinu vačsia ako strana Čajkinej záhrady.
Obvod záhrady majú obidve rodiny rovnaký. Veľkosť susedovej záhrady je $120\,\mathrm{m}^2$. Aká je veľkosť Čajkinej zahrady?

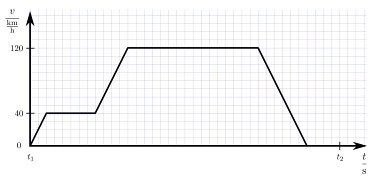
Riešenie

Nech strana Čajkinej záhrady je a. Jej obvod je $4a$. Jedna strana susedovej záhrady má $\frac{6}{5}a$. Aby mala rovnaký obvod druhá strana musí mať $\frac{4}{5}a$. Jej veľkosť, teda obsah obdĺžnika je $\frac{4}{5}a \cdot \frac{6}{5}a = \frac{24}{25}a^2 = 120\,\mathrm{m}^2$
Plocha Čajkinej záhrady je a^2 a ľahko vypočítame, že $a^2 = \frac{120}{\frac{24}{25}} = 125\,\mathrm{m}^2$.

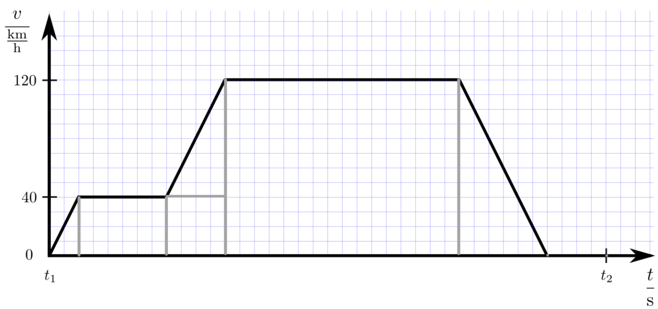
---

19. úloha

Mišo má rád vlaky a naposledy keď sa v jednom viezol ho zaujímalo, či je vlak správne klasifikovaný ako vlak Eurocity. Pre túto kategóriu vlakov platí, že priemerná rýchlosť musí byť väčšia ako 90 $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$. Zapol teda GPS, zobral si notes a zapisoval do neho akú rýchlosť mal v nakom čase jazdy. Aká je priemerná rýchlosť vlaku? Môže byť značený ako vlak Eurocity? Priemernú rýchlosť počítajte medzi časmi t_1 a t_2, teda aj vtedy, keď vlak stojí v stanici.



Riešenie
Priemerná rýchlosť počas jazdy je rovná celkovej dráhe prejdenej za celkový čas. V tomto príklade si bolo potrebné všimnúť, že celkový čas sa počíta až do zastavenia v stanici (upozorňovalo na to dokonca aj zadanie). To, že čas nie je zadaný v konkrétnych jednotkách nám neprekáža, keďže pri počítaní priemernej rýchlosti nám ide len o pomer času, ktorý vlak išiel rôznymi rýchlostami a celkového času (nezáleží nám na tom, či vlak išiel 50 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ jednu hodinu z dvoch, alebo dve zo štyroch, keďže je to stále polovica celkového času). Ďalšia potrebná znalosť je, že dráha je plocha pod grafom závislosti rýchlosti od času (takého grafu, ako máme zadaný). A to bolo pomerne jednoduché – stačilo si ho „rozsekať“ na obdĺžniky a trojuholníky (napríklad tak, ako na obrázku) a zrátať ich obsah. Ten predelíme celkovým časom a máme výsledok.



Obsahy jednotlivých útvarov (sú uvedené v jednotkách $\frac{\text{km}\cdot\text{tvorekt}}{\text{h}}$ a ich súčet je: $\frac{2\cdot 40}{2} + 6\cdot 40 + 4\cdot 40 + \frac{4\cdot 80}{2} + 16\cdot 120 + \frac{6\cdot 120}{2} + 0 = 2880$
Čas je 38 štvorčekov t (št) a teda výsledná rýchlosť je $\frac{2880\,\text{km}\cdot\text{tvorekt}}{38\,\text{tvorekt}} = 75{,}8\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$

---

20. úloha

Na začiatku je jeden replikátor. O minútu tento replikator vytvorí ďalšie dva replikátory. O ďalšiu minútu každý replikátor vytvorí nové dva replikátory a tak ďalej. O koľko minút sa vytvorí viac ako 2000 replikátorov?

Riešenie

Je vidieť, že každú minútu sa počet replikátorov ztrojnásobí. (Z každého vzniknú 2 nové a zostane pôvodný je spolu 3). Keďže $3^7 = 2187$, tak po 7 minútach ich bude viac ako 2000.

---

21. úloha

Spojené nádoby jsou uzavřeny písty o obsahu $S_1 = 100\,\mathrm{cm}^2$ a $S_2 = 600\,\mathrm{cm}^2$. Jak velkou silou F budeme muset působit na větší píst, aby zůstala soustava v klidu, jestliže má menší píst hmotnost $m_1 = 5\,\mathrm{kg}$ a větší píst $m_2 = 15\,\mathrm{kg}$?

Riešenie

Sila pôsobiaca na prvý piest je priamo úmerná sile pôsobiacej na druhý piest a pomeru obsahov piestov. Aby sa sily vyrovnali a sústava ostala v ekvilibriu musí platiť rovnosť $\frac{S_1}{S_2}(F+m_2g) = m_1g$ z ktorej sa dá vyjadriť nami hladaná sila ako $F = \frac{S_2}{S_1}m_1g - m_2g = 150\,\mathrm{N}$

---

22. úloha

Marek Šebo miluje, keď môže dať nevinným ľudom prácu, minule ich až tak vyčerpal, že si musel kúpiť 2 čerpadlá, a keď už kúpil tie čerpadlá, prečo nie aj bazén, v ktorom by mohli nevinné obete načerpať energiu? Hlavné čerpadlo naplní bazén za 9 hodín. Pomocné čerpadlo naplní za rovnaký čas polovicu z toho, čo hlavné čerpadlo. Koľko hodín musia nevinné obete počkať, kým hlavné a pomocné čerpadlo naplnia ich bazén?

Riešenie

Za 1 hodinu naplní hlavné čerpadlo $\frac{1}{9}$ bazénu. Pomocné naplní len polovicu teda $\frac{1}{18}$ bazénu. Spolu za 1 hodinu naplnia $\frac{1}{9} + \frac{1}{18} = \frac{3}{18} = \frac{1}{6}$ bazénu. Preto im naplnenie celého bazénu bude trvať 6 h.

---

23. úloha

Vtákopysk hral na gitaru, keď tu zrazu vo vzdialenosti 640 m započula krásne rozladené tóny gitary kačička, ktorá sa okamžite rozbehla za vtákopyskom rýchlosťou $5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Keď bola kačička v polovici, všimol si ju vtákopysk a rozbehol sa jej naproti rovnakou rýchlosťou. Koľko času prejde od momentu keď začne kačička behať po moment keď sa stretne s FtáKopySkom?

Riešenie

Poďme spočítať čas za ktorý sa stretne kačička s ftákopyskom. Prvú polovicu dráhy prejde kačička podla bežného vzorca $t = \frac{s}{t}$, na druhú polovicu riešenia si musíme všimnúť že ak by sa ftákopysk nehýbal a kačička by sa hýbala svojou rýchlosťou + rýchlosťou ftákopyska, tak by sa stretli v rovnaký čas ako keby bežal každý svojou rýchlosťou, takže na druhú polovicu použijeme rovnaký vzorec iba spočítame rýchlosť kačičky s ftákopysčiou. $\frac{1/2 \cdot s}{v_k} + \frac{1/2 \cdot s}{v_k + v_f} = \frac{320}{5}\,\mathrm{s} + \frac{320}{10}\,\mathrm{s} = 96\,\mathrm{s}$.

---

24. úloha

Na kalkulačke je číslo 10. Okrem toho je tam 6 tlačidiel: $\boxed{+2}$ $\boxed{-4}$ $\boxed{+5}$ $\boxed{\times 0}$ $\boxed{\times 6}$ $\boxed{\div 2}$. Tlačidlá po stlačení urobia z číslom na kalkulačke príslušnú operáciu.

Jarka použije každé tlačidlo práve raz. Aké najväčšie číslo môže dostať na konci?

Riešenie

Určite musíme použiť niekde $\cdot 0$. A vtedy sa číslo na kalkulačke vynuluje. Potom budeme už chcieť používať len operácie, ktoré číslo zväčšia a to sú $+2, +5, \cdot 6$. Zvyšné dve použijeme pred násobením nulou. Najväčší výsledok dostaneme, ak vynásobíme až nakoniec, lebo potom sa aj obe z čísel 2 a 5, ktoré pripočítame vynásobia 6.

Celý postup vyzerá nasledovne: 10 - 4 = 6 ,

6/2 = 3 ,

$3 \cdot 0 = 0$,

$0 + 2 = 2$,

$2 + 5 = 7$,

$7 \cdot 6 = 42$.

Výsledkom je teda odpoveď na zmysel života, vesmíru a vôbec: 42.

---

25. úloha

Aké množstvo vody by sa dalo uviesť do varu a záronen aj premeniť na vodnú paru pomocou jednej zápalky, pri ktorej zhorení sa uvoľní teplo 200 J? Pôvodná teplota vody je 25 C. Tepelná kapacita vody je 4000 $\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kgC}}$ a merné skupenské teplo vody je 300 $\frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{C}}$. Výsledok uveďte v gramoch.

Riešenie

Voda sa bude variť pri teplote 100 C,takže sa najprv musí zohriať o 75 C. K tomu je potrebné teplo $Q_1 = cm\Delta t$. Prv než začneme niečo vyjadrovať, pozrime sa rovno aj na var vody. Tu sa spotrebuje teplo $L = ml_v$. Súčet týchto dvoch tepiel pri rovnakej hmotnosti sa v našom prípade bude rovnať celkovému teplu dodanému zápalkou. Rovnicou

$$cm\Delta t + ml_v = Q,$$

$$m = \frac{Q}{c\Delta t + l_v} = \frac{1}{3}\ \mathrm{g}.$$

---

26. úloha

Vodka si nakreslil štvoruholník $ABCD$. Platí v ňom toto: $|AB| = 6$ cm, $|AC| = 11$ cm, $|BC| = 8$ cm, $|CD| = 11$ cm, $|BD| = 14$ cm. Potom chce dovnútra nakresliť bod P . Vodku zaujíma, že aká je najmenšia možná hodnota $|AP| + |BP| + |CP| + |DP|$. Pomôžte mu a zistite to.

Riešenie

Jasne $|AP| + |CP| \geq |AC|$ (z trojuholníkovej nerovnosti), pričom rovnosť nastáva pre body na uhlopriečke. Obdobne $|BP| + |DP| \geq |BD|$. Preto $|AP| + |BP| + |CP| + |DP| \geq |AC| + |BD| = 25$ cm. A túto hodnotu to nadobudne pre P ležiace na obocho uhlopriečkach - teda na priesečníku uhlopriečok. Je to 25 cm.

---

27. úloha

Z vane pretieklo $5\,\mathrm{m}^3$ vody. Naštastie bol však pri vani bazén, do ktorého sa naliala všetká vytečená voda. Bazén je kváder s podstavou obdĺžnikového tvaru s rozmermi $2\,\mathrm{m}$ a $5\,\mathrm{m}$. Ako vysoko siaha voda v bazéne?

Riešenie

Vieme že objem kvádru sa počíta ako $A * B * C$, keďže voda ktorá sa preleje do bazénu ihneď naberie tvar podstavy bazénu a celkový objem ostane $5\,\mathrm{m}^3$ tak si môžeme napísať rovnicu $A*B*C = 5\,\mathrm{m}^3$ pričom vieme, že A = $2\,\mathrm{m}$ a B = $5\,\mathrm{m}$ takže $2*5*C = 5$ a teda $C = 5/10 = 1/2$. Výška ktorú dosiahne preliata voda je teda presne $0,5\,\mathrm{m}$

---

28. úloha

Ketrin sčítala 800 čísel za sebou, pričom začala číslom 15. Adam sčítal 801 čísel za sebou, pričom začal číslom 25. O koľko je Adamov súčet väčší? (Sčítavali od najmenšieho po najväčšie.)

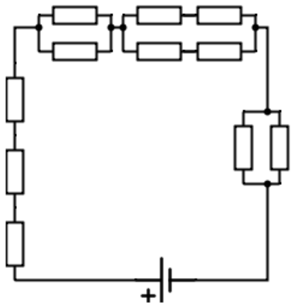
Riešenie

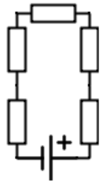
Každé Adamovo číslo bolo o 10 väčšie, teda na 800 číslach nasčítal o $800 \cdot 10 = 8000$ viac. A potom ešte pripočítal 801. číslo, čo je 25+800=825 (801. číslo je o 800 väčšie ako prvé). Teda jeho súčet bol o $8000 + 825 = 8825$ väčší.

---

29. úloha

Maťo má veľký odpor k práci a chcel to všetkým ukázať. Zašiel teda do najbližšieho obchodu a kúpil si dve predom zapojené sady rezistorov, ktoré si chcel pripnúť ku košeli na TMF. Naneštastie zistil, že na košeľu sa mu zmestí iba jeden obvod. Ktorý z týchto obvodov je odpornejší (teda má väčší odpor)? Aký odpor má odpornejšie zapojenie? Každý rezistor má odpor 1.





Riešenie
Na vyriešenie tejto úlohy nám stačí poznať dva základné zákony platiace pre zapojenia rezistorov:
Pre sériové zapojenie (za sebou) platí, že $R = R_1 + R_2 + R_3 \ldots$.
Pre paralelné zapojenie (vedľa seba) platí, že $1/R = 1/R_1 + 1/R_2 + 1/R_3 \ldots$.
Odpor jedného rezistora budeme označovať $R_1 = 1$.
Najprv teda vyriešme jednoduchšie zapojenie, a tým je druhé, pretože je to iba 5 rezistorov zapojených v serií a teda celkový odpor tohoto zapojenia je

$$1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5.$$

Celkový odpor prvého zapojenia sčítame pekne postupne od kladného pólu zdroju po záporný, naprv máme 3 za sebou sériovo idúce rezistory, takže ich celkový odpor je 3, potom nasleduje jeden paralelný, ktorého odpor je $1/R = 1/R_1 + 1/R_1$, takže jeho odpor je $0{,}5R$. A po nom ďalší paralelný s odporom $1/R = 1/R_1 + 1/R_1 + 1/R_1 + 1/R_1$, čo vychádza pre R 1. Posledný rezistor je taký istý ako ten pred-predošlý a teda $0{,}5R$. Keď už vieme hodnoty všetkých odporov stačí nám ich zrátať a teda celkový odpor zapojenia je $3 + 0{,}5 + 1 + 0{,}5 = 5$. Napodiv sú obidve zapojenia rovnako odporné! No myslíte si to aj vy?

---

30. úloha

Vo vrecúšku máme 20 bielych, 25 modrých a 30 červených guľôčok. Marienka si chce spraviť náhrdelník, na ktorom budú 2 modré a 6 červených guľôčok. Kolko najmenej guľôčok má vytiahnuť, aby si bola istá, že vytiahne dosť guľôčok na svoj náhrdelník?

Riešenie
Zistime koľko najviac guľôčok môže vytiahnuť tak, aby nemala na náhrdelník. To môže byť z 2 dôvodov - buď chýbajú modré alebo červené guľôčky. Ak chýbajú Amodré môže vytiahnuť 1 modrú a kľudne všetky ostatné. To je spolu $20 + 1 + 30 = 51$ guľôčok. Ak chýbajú červené môže vytiahnuť najviac 5 červených a opäť všetky ostatné, čo je $20+25+5 = 50$ guľôčok. Vidno,že pri 51 guľôčkach môže mať smolu a pri väčšom počte určite nebudú ani modré, ani červené chýbať - bude mať na náhrdelník. Musí vytiahnuť aspoň 52 guľôčok.

---

31. úloha

Martin a Marek sa radi pretláčajú, naposledy vyhral Martin. Marek však takúto potupu nezniesol a rozhodol sa že Martina porazí rozumom. Vypočítal, že maximálna sila, ktorou dokáže Martin tlačiť je 700 N a on sám dokáže zatlačiť iba silou 500 N. Taktiež zistil, že keď cvičí večer, na ďalší deň dokáže zatlačiť silou o 5 N väčšou ako deň predtým. Predpokladajte že Martin a Marek pôsobia silou v navzájom opačných smeroch. Ak bude Marek každý deň cvičiť, o koľko najmenej dní môže vyzvať Martina pretláčať sa tak, aby Marek vyhral?

Riešenie
Keď pôsobia sily proti sebe, tak ich výsledná sila je rovná ich rozdielu. To znamená, že aby marek vyhral, sila ktorou pôsobí Marek musí byť väčšia ako tá, ktorou pôsobí Martin. Ak bude Marek cvičiť každý deň tak po n dňoch bude jeho sila $500\,\mathrm{N} + \mathrm{n} \cdot 5\,\mathrm{N}$. Pomocou tohoto vzťahu môžeme zistiť ta koľko dní bude Marek rovnako silný ako Martin

$$500\,\mathrm{N} + \mathrm{n} \cdot 5\,\mathrm{N} = 700\,\mathrm{N}$$

a teda

$$x = 200/5 = 40.$$

Sily budú mať vyrovnané už po 40 dňoch. Martina však ešte neporazií – bola by to len remíza, preto musí cvičiť o jeden deň dlhšie – 41 dní.

32. úloha

Každý deň v týždni prší alebo svieti slnko. Ak niekedy prší, ďalší deň svieti Slnko.
Koľko je rôznych predpovedí počasia na 1 týždeň (ktoré môžu nastať)?

Riešenie

Na 1 deň sú 2 rôzne predpovede počasia. Na 2 dni sú 3 (prší,slnko; slnko,slnko; a slnko,prší). Keď rátame predpoveď počasia na viac dní, tak sa pozrieme na prvý deň. Ak svieti slnko, tak už môžeme zobrať za tým ľubovoľnú predpoveď na počet dní zmenšený o 1. Ak prvý deň prší, druhý deň nutne svieti slnko. A za tým opäť nasleduje ľubovoľná predpoveď na počet dní zmenšený o 2. Teda počet predpovedí na 3 dní, je súčet počtov predpovedí na 1 a 2 dni atď. Keď postupujeme podľa tohto pravidla, ľahko vypočítame, že na $3, 4, 5, 6$ a 7 dní je postupne $5, 8, 13, 21$ a 34 predpovedí. Preto počet predpovedí na týždeň je 34.

---

33. úloha

Kamila sa cestou zo Šturákov pri čakaní na autobus zahľadela do hviezd a všimla si, že vždy vidí iba jednu stranu Mesiaca. Akonáhle prišla domov, rýchlo hľadala v literatúre a hľa! Skutočne môžeme zo Zeme vidieť iba jednu polovicu Mesiaca! Ďalej našla, že jeden obeh Mesiaca okolo Zeme trvá mesiac (29.5 dňa), vzdialenosť medzi Zemou a Mesiacom je 384400 km a pomer hmotností je $1 : 0,000000037$. Ako dlho trvá Mesiacu jedno otočenie okolo vlastnej osi?

Riešenie

V tejto úlohe boli všetky tie čísla iba na popletenie nepriate… riešitela. V skutočnosti sa stačilo zamyslieť, ak by trvalo jedno otočenie mesiaca okolo jeho vlastnej osi dlhšie alebo kratšie ako 29,5 dňa tak by sme ho mohli vidieť aj z iných strán pretože by sa buď otočil okolo svojej osi moc rýchlo a teda by sme ho videli, alebo by nebol schopný otáčať sa dosť rýchlo na to aby vykompenzoval to, že by ho bolo vidno z iného uhlu keď obieha Zem.

34. úloha

K dispozícii máme $8, 6, 3$ a 1 kilogramové závažia (z každého koľko chceme). Koľko minimálne kusov závaží treba postaviť na váhu, aby na nej bolo presne 61 kg?

Riešenie

Vidno, že na váhu môžme dať najviac 7 8-kilogramvých závaží. Ak ich dáme 7, tak chýba ešte 5 kg a to sa dá nakombinovať len ako $3 + 1 + 1$ (alebo 5 1-kilogramvých no to je nevýhodnejšie). To je spolu 10 závaží. Keby sme dali len 6 8-kilogramových, chýba ešte 13 kilogramov a to ide ako $6 + 6 + 1$. (Ak by sme nepoužili 2 6-kilogramvé budeme potrebovať viac závaží.) Teraz sme použili len 9 závaží. A keby sme použili menej ako 6 8-kilogramvých, tak sa nám to na menej ako 9 závaží nepodarí, lebo dosteneme najviac $8 \cdot 5 + 3 \cdot 6 = 58$ kilogramov. (Najviac to bude keď zvyšné budú 6-kilogramové). To znamená, že sa to nedá na menej ako 9 a na 9 sa to dá. Treba aspoň 9 závaží.

---

35. úloha

Aká je hmotnosť jedného molu čistého molekulárneho chlóru? Odpoveď chceme s presnosťou na dve platné cifry. Počet častíc v jednom mole je

$$N_A \doteq 602\,214\,000\,000\,000\,000\,000\,000 = 6.02214 \cdot 10^{23}$$

(jedná se o tzv. Avogadrovu konštantu). Objem jedného molu chlóru je za štandardných podmienok $V_{\mathrm{Cl}} = 22{,}1\,\ell$. Relatívna atómová hmotnosť chlóru je $A_r = 35{,}5$. Hustota molekulárneho chlóru za normálnych podmienok je $\rho_{\mathrm{Cl}} = 3{,}2\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$.

Riešenie

Najdôležitejším ponaučením z tohto príkladu je, že nie vždy potrebujeme všetky informácie, ktoré máme zadané. V tomto príklade je viac možností riešenia.

Ak vieme, že molekulárny chlór má vzorec Cl_2, čiže obsahuje dva atómy chlóru, tak môžeme dvakrát vynásobiť relatívnu atómovú hmotnosť chlóru a zistiť z nej molekulárnu

$$M(Cl_2) = 2 \cdot Ar(Cl) = 2 \cdot 35{,}5\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{mol}} = 71\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{mol}}$$

Iné riešenie, pri ktorom nepotrebuje znalosť o tom, že chlór sa ako čistá plynná látka viaže do molekúl Cl_2 využíva známu hustotu chlóru a objem, ktorý zaberie jeden mol tejto látky

$$M(Cl_2) = \rho_{Cl} \cdot V_{Cl} = 3{,}2\,\frac{\mathrm{g}}{\ell} \cdot 22{,}1\,\frac{\ell}{\mathrm{mol}} \doteq 71\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{mol}}.$$

---

36. úloha

Čokoláda mala rozmery $50\,\mathrm{cm} \times 100\,\mathrm{cm}$. Viktor si ulomil z ľavého horného rohu obdĺžniček veľký $5\,\mathrm{cm} \times 8\,\mathrm{cm}$. Filipko si z pravého horného rohu ulomil obdĺžniček $6\,\mathrm{cm} \times 10\,\mathrm{cm}$. Jerguš si zľavého dolného rohu ulomil obdĺžniček $7\,\mathrm{cm} \times 4\,\mathrm{cm}$. Maťko si z pravého dolného rohu ulomil obdĺžniček $12\,\mathrm{cm} \times 23\,\mathrm{cm}$. Potom sa Viktor naštval a vyznačil cez čokoládu úsečku a rozrezal ju pozdĺž nej na dva kusy. Súčet obvodov tých dvoch častí bol $428\,\mathrm{cm}$. Aká bola dĺžka úsečky podľa ktorej to Viktor rezal?

Riešenie

Všimneme si, že obvod čokolády sa ulomením obdĺžničkov z rohov nezmení. Teda obvod čokolády, keď do nej Viktor značil úsečku bol stále $2 \cdot (50 + 100) = 300\,\mathrm{cm}$. Po prerezaní sa súčet obvodov zväčšil o dvojnásobok dĺžky tej úsečky, lebo keď ich zložíme dokopy tvoria obvod tej čokolády a naviac je v každej tá úsečka. Preto je dĺžka tej úsečky $(428\,\mathrm{cm} - 300\,\mathrm{cm})/2 = 64\,\mathrm{cm}$.

---

37. úloha

Jarka minulý rok na fyziklálnej olympiáde zavešiavala závažia na pružinku. Keď bola na pružinke zavesená hmotnosť $1\,\mathrm{kg}$ pružinka mala dĺžku

2 cm, keď pridala druhé 1 kg závažie, dĺžka sa zmenila na 4 cm. Nakonci bola dĺžka pružinky 10 cm, koľko 500 g závaží ešte zavesila?

Riešenie
Videli ste niekedy silomer? Ak ano, mohli ste si všimnuť že ak je 1 N ukázaný v diaľke 1 cm od začiatku silomeru tak 2 N bude dvakrát tak ďaleko, a 3 N trikrát, a tak ďalej... Takéto pružinky popisuje Hookov zákon ktorý hovorí že $F = k\Delta x$ kde k je konštanta použitej pružiny a Δx je predĺženie. Keďže však vieme, že pružinka sa naťahuje so silou lineárne, tak nám stačí zistiť, o koľko sa pružinka natiahne, keď pridáme jedno 500 g závažie. My však vieme, že keď Jarka na pružinku zavesila 1 kg závažie pružinka sa natiahla o 2 cm, takže ak sa má natiahnuť ešte o 6 cm, tak musí pridať presne 3 jednokilogramové závažia a to je 6 500 g závažií.

---

38. úloha

Aké je najväčšie číslo zložené zo samých rôznych cifier také, že nie je deliteľné ani 3 ani 2?

Riešenie
Keby bolo 10-ciferné obsahovalo by všetky cifry 0-9, a preto jeho ciferný súčet by bol $9 + 8 + ... + 0 = 45$. No to je deliteľné 3, a preto by celé číslo bolo deliteľné 3. Preto je najviac 9-ciferné. Keďže chceme aby bolo čo najväčšie chceme aby na začiatku boli čo najväčšie cifry. Nech začína 9876543xy. Na mieste jednotiek je nutne 1 - aby bolo nepárne. A potom zostáva len cifra 0 na miesto desiatok (aby nebolo deliteľné 3). Dostávame číslo 987654301. A každé iné je menšie, lebo nezačína 9876543 ale niečím menším - a je celé menšie. Je to číslo 987654301.

---

39. úloha

Keď išiel Andrej domov, všimol si, že prvú polovicu cesty vlakom do Liptovského Mikuláša išiel priemernou rýchlosťou iba 60 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Andrej by však chcel ísť domov tak, aby bola jeho priemerná rýchlosť aspoň 130 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Akou minimálnou rýchlosťou musí prejsť druhú polovicu vzdialenosti, aby bola jeho priemerná rýchlosť aspoň 130 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Riešenie
Do riešenia príkladu sa pustíme pekne po hlave. Dĺžku cesty do Liptovského Mikuláša označme D, rýchlosť v prvej polovici u, hľadanú rýchlosť v druhej polovici v. Prvá polovica cesty Andrejovi trvala $\frac{d}{2u}$, druhá bude trvať $\frac{d}{2v}$. Pre priemernú rýchlosť potom dostávame $v_p = \frac{2d}{\frac{d}{u}+\frac{d}{v}} = \frac{2u \cdot v}{u+v}$. Po troche úprav dostaneme

$$v = \frac{v_p \cdot u}{2u - v_p}.$$

Avšak v našom prípade vychádza po dosadení v záporné, to znamená, že druhú polovicu by sme museli prejsť za záporný čas, čo ako sami iste uznáte, nie je možné. Toto sa dalo vidieť aj skôr a bez výpočtov. Keby sme sa z polovice cesty dostali na koniec v okamiku (za nulový čas) naša priemerná rýchlosť by bola dvojnásobkom rýchlosti na prvej polovici, čo je $120\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$. Preto už túto hodnotu priemernej rýchlosti neprekročíme.

---

40. úloha

Trojuholník ABC má obsah 27. Body X, Y a Z sú na stranách AB, BC a AC tak, že $|AX| : |BX| = |BY| : |CY| = |CZ| : |AZ| = 2$ Aký obsah má trojuholník XYZ?

Riešenie
Pozrime sa na trojuholník XBY. Vieme, že $S_{ABC} = \frac{|AB| v_{AB}}{2}$. No tiež $S_{XBY} = \frac{|XB| v_{XB}}{2}$. ($v_{AB}, v_{AB}$ sú výšky na prislušné strany v trojuholníkoch ABC a XBY). My vieme, že $|XB| = \frac{1}{3}|AB|$. Tiež $v_{XB} = \frac{2}{3} v_{AB}$, lebo ak si označíme P, Q päty týchto výšok (postupne v XBY a ABC), tak trojuholníky BQC a BPY budú podobné podľa vety uu. A z toho jasne $\frac{v_{XB}}{v_{AB}} = \frac{|BY|}{|BC|} \frac{2}{3}|BC| = \frac{2}{3}$. Z toho dostávame, že $S_{XBY} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot S_{ABC} = \frac{2}{9} \cdot 27 = 6$. Úplne rovnako vieme dostať, že $S_{YCZ} = S_{ZAX} = 6$. Potom ľahko dorátame $S_{XYZ} = S_{ABC} - S_{XBY} - S_{YCZ} - S_{ZAX} = 9\,\mathrm{cm}^2$.

---

41. úloha

Keď naposledy Lukáša hnevali Okná na Náryho notebooku, všimol si, ako lezie po notebooku mravec od jedného rohu k protiľahlému (po uhlopriečke). Notebook má rozmery 20 cm × 21 cm. Aká bola priemerná rýchlosť mravca, ak príslušnú dráhu prešiel za 20 s?

Riešenie

Veľkosť uhlopriečky vypočítame cez Pytagorovu vetu a následne priemernú rýchlosť získame jednoducho dosadením do vzorca $b = \frac{s}{t}$. Počítať môžeme v centimetroch a sekundách s tým, že nám výsledok vyjde v $\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}}$. Priemerná rýchlosť je potom

$$v = \frac{e}{t} = \frac{\sqrt{20^2 + 21^2}}{20}\,\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}} = \frac{29}{20}\,\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}} = 1{,}45\,\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}}$$

---

42. úloha

Arthur má štvorčekovú sieť 3×5. Koľko vie na nej nájsť obdĺžnikov (aj štvorec je obdĺžnik) takých, že neobsahujú prostredný štvorček jeho štvorčekovej siete?

Riešenie

Najprv spočítame koľko tam je všetkých obdĺžnikov. Obdĺžnik určí jednoznačne dvojica riadkov a dvojica stĺpcov (môžu byť aj 2 rovnaké). Potom je to je totiž obdĺžnik medzi tými 2 riadkami a stĺpcami Vrátane tých stĺpcov a riadkov. Dvojíc riadkov je jasne 6 (3 keď berieme rôzne a 3 keď rovnaké). Dvojíc stĺpcov je 5, ak berieme rovnaké, a $5 \cdot 4/2 = 10$, ak berieme rôzne,lebo na prvý stĺpec máme ť možnosti, na druhý len 4 a vydelíme 2, lebo sme každý zaráteli dvakrát. To je spolu 15. Teda keď skombinujeme každú možnosť s každou je to $15 \cdot 6 = 90$ obdĺžnikov. Tie, čo obsahujú stred sú definované 2 štvorčekmi - ľavým horným a pravým dolným rohom. Aby obsahovali prostedný štvorček, ľavý horný musí byť v ľavom hornom obdĺžniku 2x3, pravý dolný v pravom dolnom 2x3. Teda máme 6 možností na oba rohy, spolu $6 \cdot 6 = 36$ obdĺžnikov. Teda tých, čo neobsahujú stred je $90 - 36 = 54$.

---

43. úloha

Hmotnosť detského mozgu sa zväčšuje rýchlosťou 1,5 mg za minútu. O koľko sa zväčší detský mozog za jeden deň? Odpoveď uveďte v kg.

Riešenie
Detský mozog sa zväčšuje 1.5 mg za minutu, takže za hodinu sa zväčší o $1{,}5\,\frac{\mathrm{mg}}{\mathrm{s}} \cdot 60\,\mathrm{s} = 90\,\mathrm{mg}$, za deň o $90\,\frac{\mathrm{mg}}{\mathrm{h}} \cdot 24\,\mathrm{h} = 2\,160\,\mathrm{mg}$. Teraz nám ostáva už len zmeniť miligramy na kilogramy – $1\,\mathrm{mg} = 0{,}001\,\mathrm{g} = 0{,}000\,001\,\mathrm{kg}$, takže za jeden deň se detský mozog zväčší o $0{,}002\,160\,\mathrm{kg}$.

---

44. úloha

Uprostred obdĺžnika $ABCD$ je bod P. Obsahy trojuholníkov ABP, BCP a CDP sú postupne $42\,\mathrm{m}^2$, $47\,\mathrm{m}^2$ a $1000\,\mathrm{m}^2$. Aký je obsah trojuholníka ADP?

Riešenie
Všimneme, si že $S_{ABP} + S_{CDP} = \frac{|AB|v_{AB}}{2} + \frac{|CD|v_{CD}}{2} = \frac{|AB|}{2}(v_{AB} + v_{CD}) = \frac{|AB||CD|}{2} = \frac{S_{ABCD}}{2}$. Obdobne $S_{BCP} + S_{ADP} = \frac{S_{ABCD}}{2}$. Teda $S_{BCP} + S_{ADP} = S_{ABP} + S_{CDP}$. Z toho už ľahko dorátame $S_{ADP} = 42\,\mathrm{m}^2 + 1000\,\mathrm{m}^2 - 47\,\mathrm{m}^2 = 995\,\mathrm{m}^2$.

---

45. úloha

Cez stanicu prechádza rýchlik rýchlosťou $108\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$, v ktorom sedí Bebe a Enka, vezúc sa do Ďačova. V opačnom smere ide po susednej koľaji nákladný vlak rýchlosťou $54\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$. Enka a Bebe sa pozerali von oknom z rýchlika a zistili, že nákladný vlak prešiel popri nich za čas 5 s. Aká je dĺžka nákladného vlaku?

Riešenie
Skôr ako začneme si všimnime jednotky v zadaní. Zisťujeme, že nie sú rovnaké (rýchlosti máme v kilometroch za hodinu a čas máme v sekundách) a preto si ich zmeníme na rovnaké, napríklad základné. Rýchlosť zmeníme nasledovne: keďže $1\,\mathrm{h} = 60\,\mathrm{min} = 3600\,\mathrm{s}$ a $1\,\mathrm{km} = 1000\,\mathrm{m}$, rýchlosť $1\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = \frac{1}{3.6}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Podľa tohto si zmeníme jednotky rýchlostí na základné,

takže $54\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = 15\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ a $108\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = 30\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ a smelo sa môžeme pustiť do samotného počítania.
Vlaky idú oproti sebe, takže sa rýchlosti sčítajú. Dráhu vypočítame vynásobením sčítanej rýchlosti a času, čo bude

$$s = (v_1 + v_2) \cdot t = 225\,\mathrm{m}.$$

---

46. úloha

Myslím si číslo. Väčšie ako 14, menšie ako 30. Keby som vám povedal jeho ciferný súčin nevedeli by ste ho zistiť.
Čože? Ešte niečo o ňom chcete vedieť? Tak keby som vám povedal, či je párne alebo nie… no to by vám už stačilo.
Aké číslo si myslím?

Riešenie

To, že by ste ho nevedeli zistiť môže znamenať len jedno (Nie, nie je to preto, že nie ste dosť chytrí, pretože vy samozrejme ste!) - je viac čísel z tým istým ciferným súčinom. Keď si vypíšeme ciferné súčiny čísel 15 až 29 budú to: $5, 6, 7, 8, 9, 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16$ a 18. Opakujú sa len čísla 6 a 8, ciferný súčímn toho čísla, čo si myslím je 6 alebo 8 - inak by ste ho už vedeli po prezradení ciferného súčinu. Preto si myslím $16, 18, 23$ alebo 24. Keby som vám povedal, že je párne nepomôže vám to. Teda ja by som vám v skutočnosti povedal, že je nepárne - a už by ste ho fakt vedeli, a teda ho viete aj teraz. Je to číslo 23.

---

47. úloha

Keď sa vedúci tradične kúpali v bazéne na konci sústredenia, všimli si kameň s hustotou $5000\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$ a s hmotnosťou $5\,\mathrm{kg}$ leží na dne bazéna. Akou najmenšou silou ho zdvihnú vo vode?

Riešenie

Aby sme zdvihli kameň musíme naňo pôsobiť aspoň takou silou, aby bola výslednica síl pôsobiacich na kameň nulová. Takže budeme sa pozerať na to, že aké veľké sily a ktorým smerom pôsobia na kameň, keď je vo vode. Jednou z síl je tiažová. Táto nám bude pôsobiť na kameň tak isto ako aj na každé iné teleso na povrchu Zeme. Jej veľkosť poznáme, je to $F_g = m \cdot g$ a jej smer smeruje do stredu Zeme, čiže v našom prípade zvislo dole ku dnu.
Ďalej nás zaujíma ešte jedna sila, a tou je vztlaková, lebo kameň sa nachádza v bazéne plnom vody. Vztlaková sila pôsobí na teleso vždy nahor a jej veľkosť vypočítame ako $F_{vz} = \rho_k V_t g$, kde ρ_k je hustota kvapaliny, V_t je objem ponoreného telesa (čiže kameňa).
Na kameň ešte síce pôsobí jedna sila, a to reakcia od podložky, ktorá má vždy takú veľkosť a smer, aby bola výslednica síl počas dotýkania sa Zeme nulová, a teda aby sa kameň nepreboril do Zeme. Tá nás však teraz momentálne nezaujíma, lebo táto sila ihneď zanikne, keď sa kameň prestane dotýkať podložky, čo znamená, že počas zdvíhania kameňa nepôsobí.
Skúsme to dať teraz celé dohoromady! V prvom rade si uvedomíme, že ako máme sčítať sily. Tiažová má opačný smer ako vztlaková, a keďže kameň ostáva ponorený vo vode, má vztlaková menšiu veľkosť. Ak teda chceme zdvihnúť teleso nahor, musíme ho potiahnuť silou nahor, aby sa nám sily vyrušili. Hľadanú silu označíme F

$$F + F_{vz} - F_g = 0,$$

$$F = mg - V_t \rho_k g,$$

objem vyjadríme za pomoci hustoty materiálu

$$F = mg\left(1 - \frac{\rho_k}{\rho_t}\right) = 40\,\mathrm{N}$$

---

48. úloha

Majme tabuľku 5×5. Cheme ju vyplniť číslami $0, 1$ a 2 tak, že sú tam najviac dve čísla 0. A tiež, že žiadne dve políčka označené 1 nesusedia stranou, ani označené 2 nesusedia stranou. Koľkými spôsobmi to vieme urobiť?

Riešenie

Ak tam nedáme žiadnu 0, tak ak je v ľavom hornom rohu 1 je jednoznačne dané, čo je všade inde – vedľa sú 2, potom zase vedľa 1... To isté ak tam je 2 – sú len 2 možnosti. Ak tám dáme jednu 0 (máme 25 možností kam ju dať), tak na zvyšok tabuľky máme opäť len 2 možnosti, lebo si vyberieme jedno políčko dáme tam 1 alebo 2 a je opäť celá tabuľka jednoznačne určená. Teda teraz máme 50 možností.
Ak tam sú dve 0, tak ak nesusedia obidve s jedným rohom, tak opäť je sú z rovnakého dôvodu len 2 možnosti, ako vyplniť zvyšok číslami 1 a 2. Na výber 2 políčok pre 0 je $25 \cdot 24/2 = 300$ možností. Keď odrátame tie 4, je ich len 296. To máme ďalších $296 \cdot 2 = 592$ možností. Ak sú 0 tie 2 vedľa rohu, tak na ten roh sú 2 možnosti (1 alebo 2) a na zvyšok tiež 2 – spolu 4. Keďže máme 4 dvojice núl vedľa rohu, je to ďalších $4 \cdot 4 = 16$ možností. Keď to sčítame, je to $2 + 50 + 592 + 16 = 660$ možností.

---

49. úloha

Trúbkou tečie voda s prietokom $0{,}001\ \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}}$ do vane s objemom $1000\,\ell$, koľko vody pretečie z vane, ak necháme vodu tiecť jednu hodinu?

Riešenie

Za $1\,\mathrm{h} = 3600\,\mathrm{s}$ pretečie trúbkou $3{,}6\,\mathrm{m}^3$ vody, keďže však má naša vaňa objem iba $1000\,\ell = 1\,\mathrm{m}^3$, tak z nej pretečie $3{,}6\,\mathrm{m}^3 - 1\,\mathrm{m}^3 = 2{,}6\,\mathrm{m}^3$ vody.

---

50. úloha

Anino napísal veľa cifier za sebou. A to tak, že pre každé dvojciferné číslo, vedel nájsť 2 po sebe napísané cifry, ktoré ho tvoria (teda ak napísal 4 2 4 7 vedel to pre 42, 24 a 47). Koľko najmenej cifier mohol napísať?

Riešenie

Prvé, čo si uvedomíme je, že n cifier za sebou tvorí $n-1$ dvojíc cifier za sebou. A preto v nich vieme prečítať maximálne $n-1$ dvojciferných čísel. Ďalej vieme, že tam budú čísla $10, 20, \ldots, 90$ a za každá cifra 0 s cifrou za ňou nebude tvoriť dvojciferné číslo. Teda ešte 9 dvojíc netvorí dvojciferné čísla. Tento počet sa dá znížiť na 8 ak jedna cifra 0 bude na konci. Teda potrebujeme 90 dvojciferných čísel a ešte k tomu tam bude aspoň 8 dvojíc difier za sebou, čo netvoria dvojciferné číslo. Preto potrebujeme aspoň 98 dvojíc cifier za sebou - aspoň 99 cifier. A naozaj 99 cifier stačí. Stačí ich napísať nejako takto: 112213314415516617718819910, a potom medzi dve dvojky vsunieme 3242528272829202, a to isté medzi ostatné čísla, len vždy začneme najbližším vyšším číslom, no skončíme 0. (Teda napríklad medzi dve cifry 5 vsunieme 6575859505, medzi cifry 9 vložíme len 09). Vidno, že naozaj sa tam vyskytne každé dvojciferné číslo a je napísaných 99 cifier.

---

51. úloha

Na začiatku bola tma, naštastie sa však potom v strede vesmíru zapla pouličná lampa, ktorá svietila do všetkých smerov rovako a osvietila vesmír. Aký objem vesmíru bol osvietený po 1 s? Rýchlosť svetla je $300\,000\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$. Počítajte so zaokrúhlenou hodnotou $\pi = 3$.

Riešenie
Najprv sa treba zamyslieť, aký tvar takéto svetlo vyrobí? No, keď svieti do všetkých smerov rovnako, tak bude tento tvar vždy vyzerať ako guľa. Polomer tejto gule je určený vzdialenosťou akú dokáže svetlo prejsť za čas, ktorý svieti, v tomto prípade 300 000 m. Vzorček na objem gule je $4/3 \cdot \pi r^3$ a keď vieme že polomer je 300 000 m tak nám to stačí spojiť a zistíme, že objem osvieteného vesmíru je rovný $4/3 \cdot \pi \cdot 300\,000^3 km^3 \doteq 4/3 \cdot 3 \cdot 300\,000^3 km^3 = 108\,000\,000\,000\,000\,000\,\mathrm{km}^3 = 1{,}08 \cdot 10^{17}\,\mathrm{km}^3$.

---

52. úloha

Jerguš sa rozhodol, že si uvarí puding. Keďže však nie je žiaden kuchár, zavolal Tinke, aby mu pomohla. Tá však nenechala nič na náhodu a po vlastných skúsenostiach mu poradila ísť si kúpiť do obchodu práškový puding a pripraviť ho podľa receptu, ktorý je na zadnej strane obalu. Jerguš teda najprv nalial do hrnca $0,5\,\ell$ vody, potom pridal 200 g pudingového prášku s objemom $300\,\mathrm{m}\ell$, následne ideálne zamiešal puding a varil ho dokým sa z neho nevyparilo $325\,\mathrm{m}\ell$ vody. Keď bol puding hotový, Jerguš do neho pridal 50 g vanilkového cukru s objemom $25\,\mathrm{m}\ell$ a veselo sa pustil do jedla. Aký hustý bol puding ktorý Jerguš pripravil? Predpokladajte že hustota vody je 1000 $\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$ a že pri zmiešavaní nedochádza ku kontrakcii objemu - objemy sa jednoducho sčítajú.

Riešenie

Na zrátanie hustoty si potrebujeme zrátať celkovú hmotnosť a objem finálneho produktu. To môžeme spraviť postupne tak, že pozorne sledujeme všetky zmeny, ktoré sa udiali s pudingom a snažíme sa na žiadnu nezabudnúť.
Hmotnosti vody si pre prehľadnosť predrátame.

$$\rho_{voda} = 1000\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} = 1\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3} = 1\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{m}\ell} = 1000\,\frac{\mathrm{g}}{\ell}$$

$$m_1 = 0{,}5\ell \cdot 1000\,\frac{\mathrm{g}}{\ell} = 500\,\mathrm{g}$$

$$m_2 = 325\,\mathrm{m}\ell \cdot 1\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{m}\ell} = 325\,\mathrm{g}$$

Najprv máme $500ml$ vody s hmotnosťou 500 g, potom pridáme 200 g pudingového prášku s objemom 300 mℓ. Z 700 g a $800ml$ ktoré zatiaľ máme sa nasledovne vyparilo $325ml$ vody, a teda aj 325 g, po odpočítaní má puding 375 g a $475ml$. Ako posledný krok sme pridali 50 g cukru s objemom 20 mℓ, takže puding má na záver 425 g a $500ml$. Výsledná hustota je teda $850/1000 = 0{,}85\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{m}\ell}$.

---

53. úloha

Tatranka má energetickú hodnotu 1000 kJ. Kolko tatraniek musí zjesť horolezec s hmotnosťou 80 kg aby mal dosť energie na to aby vyliezol na vrchol vo výške $1000m\,n.m.$, predpokladajte že sedlo je vo výške 500 m n.m.

Riešenie

Pri príklade samozrejme počítame s dokonalým horolezcom, ktorý všetku energiu z Horaliek použije iba na posunutie svojho ťažiska na vrchol hory. Takto získa polohovú energiu

$$E_p = m{\cdot}g{\cdot}h = m{\cdot}g{\cdot}(h(vrchol){-}h(sedlo)) = 80\,\mathrm{kg}{\cdot}10\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}}{\cdot}(1000\,\mathrm{m}{-}500\,\mathrm{m}) = 400\,000\,\mathrm{J} = 40$$

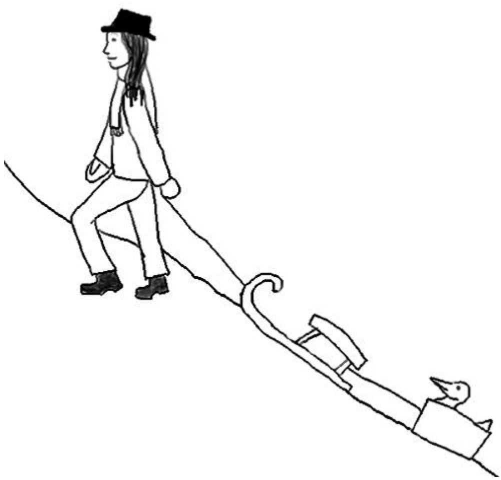
teraz nám už len stačí zistiť kolko horalkám zodpovedá energia 400 kJ, a to zistíme tak že vydelíme potrebnú energiu na vyšplhanie hory energiou jednej horalky.

$$E/(horalka) = 400kJ/1000kJ = 0{,}4$$

---

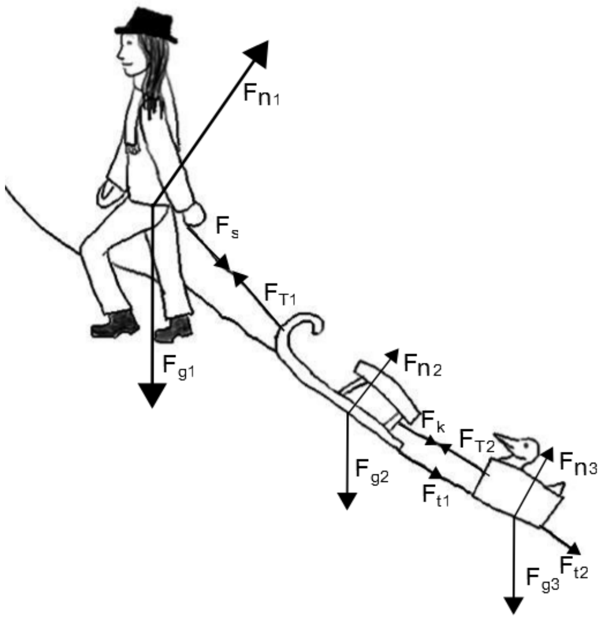
54. úloha

Čajka sa išla v zime sánkovať, keď tu zrazu pri jej okne pristála kačička, ktorá sa jej spýtala, či sa nemôže pridať. Čajka samozrejme neodolala a kačičku so sebou vzala. A tak Čajka priviazala ideálnym lanom drevenú krabicu o jej sánky, usadila do nej kačičku a začala sánky ťahať hore kopcom. Nakreslite do obrázku vektory všetkých síl, ktoré pôsobia medzi Čajkou, kačičkou, sánkami a snehom.



Riešenie

Najprv si musíme všimnúť aké sily budú hrať v tejto úlohe rolu. Gravitačná sila určite nebude zanedbateľná, preto k každému hmotnému objektu nakreslíme silu ktorou je priťahovaný k zemi, a to F_{g1}, F_{g2} a F_{g3}. Ďalšia dôležitá sila je sila ktorou ťahá Čajka sánky (teda sila ktorou čajka napína lano), F_{t1}, a sila ktorou ťahajú sánky krabicu s kačkou, F_{t2}. Keďže sme nepovedali, že lano je nehmotné ďalšia sila ktorá sa nám v obrázku objavuje je F_s a F_k, to sú sily ktorými v dôsledku gravitácie laná ťahajú čajku a sánky dole kopcom. Posledná sila, no určite nie najmenej dôležitá, je trenie, táto sila pôsobí proti smeru celkovej sily ostatných zložiek a je aj dôvodom prečo sa vôbec Čajka môže hýbať (pre zjednodušenie úlohy nieje potrebné nakresliť vektor sily trenia pre Čajku). Pre sánky a krabicu sú vektory trenia F_{t1} a F_{t2}.



---

55. úloha

Máme krásnu gumovú loptičku (skákalku) o hmotnosti m, ktorú volne pustíme z pôvodnej výšky h. Pri každom odraze loptička stratí 10% svojej aktuálnej kinetickej energie. Po koľko odrazoch už loptička nebude schopná vyskočiť ani do výšky $h/2$?

Riešenie

Na začiatku má loptička 100% potenciálnej energie, pred pádom je všetka táto energie prekonvertovaná na kinetickú. Loptička narazí a stratí 10% kinetickej energie, táto energia sa prekonvertuje na potenciálnu ktorej už bude tiež iba 90% a teda loptička dosiahne už len $0,9h$. Tento proces musíme zopakovať dostatočne veľa krát kým sa celková energia dostane pod 50%. Po druhom páde dosiahne už len $0,81h$, po treťom páde dosiahne už len $0.729h$, po štvrtom páde dosiahne už len $0.6561h$, po piatom páde dosiahne už len $0,59049h$, po šiestom páde dosiahne už len $0.531441h$, po siedmom páde už len $0.4782969h$. Hurá! Hurá! Hurá! Loptička nie je schopná vyskočiť do výšky $h/2$ už po 7 odrazoch.