《数学分析 I》2017 学年秋季学期期中考试试题答案

一、用定义证明（每小题 8 分，共16分）

1、$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+n}{2n^2-1}=\dfrac{3}{2}$;

证明：对于$\forall n$ 都有$\left|\dfrac{3n^2+n}{2n^2-1}-\dfrac{3}{2}\right|=\left|\dfrac{3n^2+n-3n^2+\dfrac{3}{2}}{2n^2-1}\right|=\left|\dfrac{n+\dfrac{3}{2}}{2n^2-1}\right|\le\left|\dfrac{n+2n}{2n^2-n^2}\right|=\dfrac{3}{n}$,

那么对于$\forall\varepsilon>0$,取$N=[\dfrac{3}{\varepsilon}]+1$,对于$\forall n>N$,总有$\left|\dfrac{3n^2+n}{2n^2-1}-\dfrac{3}{2}\right|\le\dfrac{3}{n}<\dfrac{3}{\frac{3}{\varepsilon}}=\varepsilon.$

因此可知$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+n}{2n^2-1}=\dfrac{3}{2}.$

2、$y=x^2$在定义域内连续 。

证明：对于定义域内的$\forall a$,当$|x-a|<1$时，

都有$\left|x^2-a^2\right|=|x-a||x+a|\le|x-a|(|x|+|a|)\le(1+2|a|)|x-a|$,

那么对于$\forall\varepsilon>0$,取$\delta=\min\left\{\dfrac{\varepsilon}{1+2|a|},1\right\}$,对于任意满足$|x-a|<\delta$的$x$,总有$\left|x^2-a^2\right|<\varepsilon.$

因此可知$\lim\limits_{x\to a}x^2=a^2$,所以$x^2$在定义域内连续.

二、（每小题 8 分，共 40 分）

1、$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\cos^2 1+\cdots+\cos^2 n}$

2、$\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{1}{1-x^3}\right)$　　　3、$\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{2x}}$

4、$\lim\limits_{x\to+\infty}x\left[\ln(x+1)-\ln x\right]$　　　5、$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}\right)$

解：

1. $\cos^2 1<=\cos^2 1+\cdots+\cos^2 n<=n$

$\therefore\sqrt[n]{\cos^2 1}\le\sqrt[n]{\cos^2 1+\cdots+\cos^2 n}\le\sqrt[n]{1+1+\cdots+1}=\sqrt[n]{n}$,

又$\because\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\cos^2 1}=1$,

$\therefore\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\cos^2 1+\cdots+\cos^2 n}=1$

2.

原式$=\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{1}{(1-x)(1+x+x^2)}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{(1+x+x^2)-1}{(1-x)(1+x+x^2)}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x+x^2}{(1-x)(1+x+x^2)}\right)$

注意分子极限为2，分母极限为0，所以

原式=∞。

3.

$$原式=\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}\cdot\frac{\sin x}{2x}}=\lim_{x\to 0}e^{\frac{\sin x}{2x}\ln(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}}=e^{\frac{1}{2}\cdot\ln e}=\sqrt{e}$$

4.

$$原式=\lim_{x\to\infty}\ln(1+\tfrac{1}{x})^{x}=\lim_{x\to\infty}\ln e=1$$

5.

$$原式=\lim_{x\to+\infty}2\cos\left(\tfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\right)\sin\left(\tfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}\right)=2\lim_{x\to+\infty}\cos\left(\tfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\right)\sin\left(\tfrac{1}{2\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}\right)$$

由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{2\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}=0$，$\sin x$ 是连续函数，所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin\left(\frac{1}{2\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}\right)=\sin 0=0$，

又由于 $\left|\cos\left(\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\right)\right|\le 1$，所以

原式=0.

三、（10 分）设函数 $f(x),g(x)$ 在 (a,b) 上严格单调上升，求证：函数

$$\varphi(x)=\max\{f(x),g(x)\}，\ \phi(x)=\min\{f(x),g(x)\}$$

也在 (a,b) 上严格单调上升.

证明：设 $\forall s,t\in(a,b)$，且 $s<t$，要证 $\varphi(s)<\varphi(t),\phi(s)<\phi(t)$，

其中 $\varphi(x)=\max\{f(x),g(x)\},\phi(x)=\min\{f(x),g(x)\}$.

$\because$ $f(x)$ 和 $g(x)$ 的严格单调上升

$\therefore f(s)<f(t),g(s)<g(t)$

$\therefore f(s)<\max\{f(t),g(t)\},g(s)<\max\{f(t),g(t)\},\quad \min\{f(s),g(s)\}<f(t),\min\{f(s),g(s)\}<g(t)$

即 $f(s)<\varphi(t),g(s)<\varphi(t),\quad \phi(s)<f(t),\phi(s)<g(t)$

$\therefore \max\{f(s),g(s)\}<\varphi(t),\quad \phi(s)<\min\{f(t),g(t)\}$

于是 $\varphi(s)<\varphi(t),\quad \phi(s)<\phi(t)$，证毕。

四、（每小题 6 分，共 18 分）完成下列各题：

1.证明 $y=\dfrac{1}{x}\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ 在其定义域内无界。

证明：取 $x_n=\dfrac{1}{2n\pi}$，那么，$\dfrac{1}{x_n}\cos\left(\dfrac{1}{x_n}\right)=2n\pi\to\infty(n\to\infty)$，

所以 $y=\dfrac{1}{x}\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ 在 $(0,1)$ 和 $(-1,0)$ 内无界。

2.设 $g(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的连续函数，那么在什么情况下，函数

$$f(x)=\begin{cases}g(x)\sin\frac{1}{x}, & x\ne 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

是 $(-\infty,+\infty)$ 上的连续函数。

解：当 $x \neq 0$ 时函数 f 是连续的。因此，当 $x=0$ 时函数 f 连续时，则 f 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的连续函数。

即要求 $\lim\limits_{x\to 0} g(x)\sin\frac{1}{x}=f(0)=0$。

因为 $g(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的连续函数，$\sin\frac{1}{x}$ 有界并且 $\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ 不存在，

如果 $g(0)\neq 0$，此时可取 $x_n=\dfrac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}\to 0(n\to\infty)$ 可得 $\lim\limits_{n\to\infty} g(x_n)\sin\dfrac{1}{x_n}=g(0)\neq 0$，由海涅定理知

那么如果 $\lim\limits_{x\to 0} g(x)\sin\frac{1}{x}$ 存在也一定不为 0，那么函数 f 在 0 点不连续。当 g(0)=0 时 $\lim\limits_{x\to 0} g(x)\sin\frac{1}{x}=0$，函数 f 在 0 点连续，进而 f 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的连续函数。

3. 讨论 $f(x) = 1/ln|x|$ 间断点并说明其类型.

答：函数为初等函数，在其定义域内连续。当 $x=0$ 时函数没有定义，故为间断点。$f(x)=1/ln|x|\to 0$（$x\to 0$），定义 $f(0)=0$，函数在 0 点连续，故唯一的间断点 0 为可去间断.

五、(8 分) 设 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上单调上升，$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=+\infty$，若 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A$，求证：$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$。

证明：由 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=+\infty$ 知，对于 $\forall X>0,\exists N_1$，当 $n>N_1$ 时，$x_n>X$；由 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A$ 知，对于 $\forall\varepsilon_0>0$，$\exists N_2$，当 $n>N_2$ 时，$|f(x_n)-A|<\varepsilon_0$.如果 A 是一个确定的实数：

我们假设存在 $(a,+\infty)$ 上的数列 $\{x_k\}$ 满足 $\lim\limits_{k\to\infty} x_k=+\infty$，$\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k)\neq A$，那么 $\exists\varepsilon_0>0$，对于 $\forall K_1$，总 $\exists k>K_1$，满足 $|f(x_k)-A|>\varepsilon_0$，即 $f(x_k)>A+\varepsilon_0$ 或 $f(x_k)<A-\varepsilon_0$.对于数列 $\{x_k\}$ 我们总可以找见 K_2，当 $k>K_2$ 时，$x_k>x_{N_2+1}$，而此时有 $|f(x_{N_2+1})-A|<\varepsilon_0$，即 $A-\varepsilon_0<f(x_{N_2+1})<A+\varepsilon_0$.

取 $K=\max(K_1,K_2)$ 如果此时有 $f(x_{K+1})<A-\varepsilon_0$，则与 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上单调上升矛盾。如果此时 $f(x_{K+1})>A+\varepsilon_0$，那么对于数列 $\{x_n\}$，我们总可以找见 N_3，当 $n>N_3$ 时 $x_n>x_{K+1}$.

取 $N=\max(N_3,N_2)$，此时有 $A-\varepsilon_0<f(x_{N+1})<A+\varepsilon_0$，$f(x_K)>A+\varepsilon_0$，这与 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上单调上升矛盾。故必有当数列 $\{x_k\}$ 满足 $\lim\limits_{k\to\infty} x_k=+\infty$ 时 $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k)=A$.

六、(8 分) 设定义在R上的函数 $f(x)$ 在0点连续，且对 $\forall x\in\mathrm{R}$ 有 $f(2x)=f(x)$，证明 $f(x)$ 为常值函数.

证明：由假设对 $\forall t=2x\in\mathrm{R}$ 有 $f(t)=f(2x)=f(x)=f(t/2)$，

于是 $f(t)=f\left(\dfrac{t}{2}\right)=f\left(\dfrac{t}{2^2}\right)=\cdots=f\left(\dfrac{t}{2^n}\right)=\cdots=\lim\limits_{n\to\infty} f\left(\dfrac{t}{2^n}\right)$，

由于 $f(x)$ 在0点连续，所以 $\lim\limits_{n\to\infty} f\left(\dfrac{t}{2^n}\right)=f(0)$，

于是 $\forall t\in\mathrm{R}$ 有 $f(t)=f(0)$，即 f 是常数，证毕。