中山大学本科生期末考试

考试科目：《电动力学》（A 卷）

学年学期：2019 学年第 2 学期　　　　姓　　名：________________

学　院/系：物理学院　　　　　　　　学　　号：________________

考试方式：开卷　　　　　　　　　　　年级专业：________________

考试时长：150 分钟　　　　　　　　　班　　别：________________

任课老师：李志兵，司徒树平，陈伟，项泽亮　　　　（2020. 6. 30）

警示 《中山大学授予学士学位工作细则》第八条：“考试作弊者，不授予学士学位。”

------------以下为试题区域，共七道大题，总分 100 分，考生请在答题纸上作答------------

一．（共10分）由两片无穷大理想导体极板构成的平行板电容器内有两层电介质（如图1），上层电容率为ε_1、厚度为h_1，下层电容率为ε_2、厚度为h_2. 设上、下极板静电势差为V且带大小相同符号相反的面自由电荷密度，介质和介质的界面没有自由电荷.

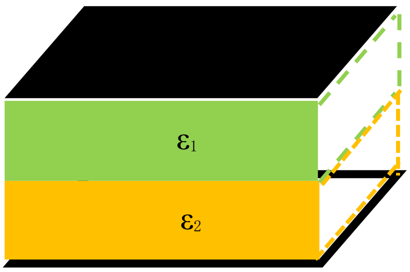

图 1.

（1）求极板上的自由电荷面密度、极板之间各个区域的电场、电位移矢量.

（2）求电场能量密度、介质各界面的束缚电荷密度.

二．（共10分）设真空中分布着静止电荷.

(1) 根据静电势满足的泊松方程，求产生电势 $\varphi(r)=A\dfrac{e^{-\lambda r}}{r}$ 的电荷分布$\rho(r)$，其中 A 、 λ 是常数，$r\neq 0$.

(2) 求静电场强度.

三．（共10分）在半径为R 的球面上已知电势 $\varphi(\theta)=A\sin^2\dfrac{\theta}{2}$，球外是没有电荷分布的真

空，利用分离变量法求球外区域的电势分布，其中 A 是常数，θ为矢径与Z轴的夹角.

四．（共15分）

（1）磁偶极子$\boldsymbol{m}$处在外磁场$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})$中，试写出它们之间的相互作用能量，并推导磁偶极子受到的磁场力和力矩（设$\boldsymbol{m}$与$\boldsymbol{B}$无关）.

（2）设在角频率为ω的交变磁场 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t)=\boldsymbol{B}_0(\boldsymbol{x})e^{-i\omega t}$ 中，介质小球被磁化并形成磁偶极矩 $\boldsymbol{m}(\boldsymbol{x},t)=\dfrac{\beta}{\omega_0^2-\omega^2}\boldsymbol{B}_0(\boldsymbol{x})e^{-i\omega t}$，其中$\beta$和$\omega_0$均为实常数. 试写出介质小球因交变磁场而获得的能量，并求它在一个时间周期内的平均值.

（3）接上问，计算介质小球受到的平均力（考虑$\delta=\omega-\omega_0$的绝对值是个小量，结果只保留到最重要的一项）.

五．（共15分）矢势$\boldsymbol{A}(z,t)$可用复数傅里叶展开写成 $\boldsymbol{A}(z,t)=\hat{\boldsymbol{e}}_x\sum_k\left[a_k(t)e^{ikz}+a_k^*(t)e^{-ikz}\right]$，其中 $\hat{\boldsymbol{e}}_x$ 是X方向的单位方向矢量，$a_k(t)$ 和 $a_k^*(t)$ 互为复共轭.

（1）在真空中取标势φ为常数. 证明题目给出的$\boldsymbol{A}$和常数φ一起满足洛伦兹规范条件.

（2）利用洛伦兹规范下$\boldsymbol{A}$满足的波动方程$\nabla^2\boldsymbol{A}-\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2}=0$，写出 $a_k(t)$ 满足的微分方程并求解（设 $a_k(0)=a_0\delta_{k,k_0}$ 和 $\dot{a}_k(0)=-icka_0\delta_{k,k_0}$，其中$a_0$为实常数而$c$为光速）.

（3）求磁场$\boldsymbol{B}$和电场$\boldsymbol{E}$，进而求该电磁波的平均能量密度和平均能流密度.

六．（共20分）考虑惯性系Σ中沿Y方向传播、角频率为ω的平面电磁波.

（1）写出它的四维波矢k_μ，其中μ=1，2，3，4;并写出其第四分量与前三个分量的关系.

（2）设惯性系Σ'相对惯性系Σ系沿X轴的正方向以速度v运动，时空变换由下面的特殊洛伦兹变换给出，请写出Σ'中的四维波矢.

$$a=\begin{bmatrix}\gamma & 0 & 0 & i\beta\gamma\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ -i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma\end{bmatrix}$$

（3）在Σ'中电磁波的波矢在哪个平面的哪个象限？

（4）推导Σ'中电磁波传播的方向所满足的关系式（自行引入描写传播方向的角度）.

七.（共 20 分）考虑在 B=1(特斯拉)磁场中高速运动的一个电子，其速度垂直磁场. 已知电子质量 $m_0=0.50\times10^6\text{eV}/c^2$. 设电子的能量为 $E = 5.0\times10^8$ eV，E 远大于它辐射损耗的能量，从而可以近似认为电子作匀角速度的圆周运动(以下计算保留 2 位有效数字，取 $\text{eV}=1.6\times10^{-19}\text{J}$, $c=3.0\times10^8\text{M/s}$，$1/(2\pi\varepsilon_0)=9\times10^9\text{NM}^2/\text{C}^2$).

（1）推导电子的速度大小v.

（2）计算电子的相对论动量大小.

（3）计算电子圆周运动的角速度$\dot{\theta}$和半径R.

（4）利用圆周运动辐射功率公式$P(t)=\dfrac{q^2\dot{v}^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\gamma^4$，其中$\gamma=1/\sqrt{1-(v/c)^2}$，求电子在一个时间周期内辐射损失的能量（提示：$\dot{v}=v\dot{\theta}$）.