警示 《中山大学授予学士学位工作细则》第六条："考试作弊不授予学士学位."

中山大学理工学院 2010 学年 1 学期期末

高等量子力学 试卷 (A)

08、研 10 年级 物理、逸仙班、研 10 专业 姓名：__________ 学号：__________

老师姓名：林琼桂 考试成绩：

一、（本题 50 分，每小题 5 分）在正确结论的序号前打 $\surd$.

1. 人们相信量子力学的基本假设是正确的，这是因为 ① 基于它们对实际问题作出的计算结果得到实验事实的支持. ② 它们经过了严格的数学和逻辑论证.

2. 全同性原理 ① 只适用于粒子全为 Bose 子或全为 Fermi 子的多粒子体系. ② 可适用于同时包含 Bose 子和 Fermi 子的多粒子体系.

3. 设粒子在中心力场中运动，$\psi(t)$ 是满足 Schrödinger 方程的任一态矢量，则 $(\psi(t), L\psi(t))$ ① 随 ② 不随 时间变化，其中 L 是轨道角动量.

4. 粒子在势场 $V(x) = a(x-y)^2 + b(y-z)^2 + c(z-x)^2$ 中运动，其中 a、b、c 是常数，则波包中心的运动规律与经典粒子 ① 相同. ② 不一定相同，只当 $a = b = c$ 时才相同.

5. 氢原子的能级简并度高于一般中心力场，是因为该体系比一般中心力场具有更高的对称性. 这种对称性源于 ① 其 Coulomb 势正比于 $-1/r$. ② 其 Coulomb 势等于 $-e^2/r$，即与其中的系数大小也有关系.

6. 在 Heisenberg 绘景中，算符成为时间的函数，则 $[x_{\mathrm{H}}, p_{\mathrm{H}}] = \mathrm{i}\hbar$ ① 仍然 ② 不再 成立.

7. 设 U_{I} 是空间反演算符，则 ① $U_{\mathrm{I}}\boldsymbol{x}U_{\mathrm{I}} = -\boldsymbol{x}$ ② $U_{\mathrm{I}}\boldsymbol{p}U_{\mathrm{I}} = -\boldsymbol{p}$ 和 ③ $U_{\mathrm{I}}\boldsymbol{L}U_{\mathrm{I}} = -\boldsymbol{L}$ 中哪个是错误的？（$\surd$ 出错误者.）

8. 不确定关系 $\Delta x \Delta p \geq \hbar/2$ 中的 Δx 和 Δp ① 需要 ② 不需要 同时测量.

9. 设一体系具有空间转动不变性，那么下列各算符中哪一个不能 成为其 Hamiltonian 中的一项（引入系数 c_1 等是为了保证量纲正确）？ ① $c_1\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{p}$ ② $c_2\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{L}$ ③ $c_3\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{L}$ ④ c_4L_z

10. 设一体系的初态为 Gauss 波包，则在随后的演化中， ① 波包的宽度可能变化，但不会无限增长. ② 波包宽度是否无限增长取决于体系的 Hamiltonian.

二、（本题 35 分）设 $\boldsymbol{J}$ 是角动量算符，已经无量纲化（或者说已经取 $\hbar = 1$），各分量满足 $[J_i, J_j] = \mathrm{i}\epsilon_{ijk}J_k$（下标 i 等取 $1,2,3$ 或 x,y,z），定义 $J_\pm = J_x \pm \mathrm{i}J_y$.

1. 计算 $\mathrm{e}^{aJ_+}J_z\mathrm{e}^{-aJ_+}$，其中 a 是复数（而非算符）.（5 分）

2. 计算 $\mathrm{e}^{bJ_z}J_-\mathrm{e}^{-bJ_z}$，其中 b 是复数.（10 分）

3. 计算 $\mathrm{e}^{aJ_+}J_-\mathrm{e}^{-aJ_+}$，其中 a 是复数.（10 分）

4. 设 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta J_x} = \mathrm{e}^{a(\beta)J_+}\mathrm{e}^{b(\beta)J_z}\mathrm{e}^{c(\beta)J_-}$，其中 β 是实数，$a(\beta)$ 等是未知函数，一般是复数. 试将两边对 β 求导，然后右乘以上述方程的逆，建立 $a(\beta)$ 等函数的微分方程（不必求解）.（10 分）

提示： 对任意算符 L 和 K，有公式 $\mathrm{e}^LK\mathrm{e}^{-L} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}[L^{(n)}, K] = K + [L,K] + \frac{1}{2!}[L,[L,K]] + \cdots$.

三、（本题 15 分）考虑 Dirac 方程 $(\mathrm{i}\gamma^\mu\partial_\mu - \kappa)\psi = 0$ 的平面波解 $\psi(x) = u\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x} = u\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x} - \mathrm{i}k_0x_0}$，其中 u 是与 x 无关的旋量（即列矢量）.

1. 设 $\boldsymbol{k}$ 给定，试求出 k_0.（5 分）

2. 只考虑 $k_0 > 0$ 的解（正能解），采用标准表象，求出两个线性独立解 u_r（$r = 1,2$），使之满足正交归一关系 $u_r^\dagger u_s = 2k_0\delta_{rs}$.（10 分）

提示： 标准表象中 $\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$， $\boldsymbol{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ -\boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}$，其中 $\boldsymbol{\sigma}$ 是 Pauli 矩阵.