

警示

《中山大学授予学士学位工作细则》第六条：“考试作弊不授予学士学位。”

中山大学理工学院 2013 学年 2 学期期末
高等量子力学 试卷 (A)

11、研 13 年级 物理等、研 13 专业 姓名：_____ 学号：_____
老师姓名：林琼桂 考试成绩：_____

一、(本题 50 分, 每小题 5 分) 在正确陈述的序号前打 \checkmark 或在空白处填入答案。

1. 静磁场中的 Schrödinger 方程是 $i\hbar\partial\psi/\partial t = -(\hbar^2/2\mu)(\nabla - iq\mathbf{A}/\hbar)^2\psi$. 使得方程形式保持不变的规范变换是 $\psi \rightarrow \psi' = e^{iq\Lambda(\mathbf{x})/\hbar}\psi$ 以及 ① $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} - \nabla\Lambda(\mathbf{x})$ ② $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\Lambda(\mathbf{x})$.

2. 设力学量 F 满足 $i\hbar\partial F/\partial t + [F, H] = 0$, ψ 满足 Schrödinger 方程, 则 $(d/dt)(\psi, F\psi) =$ _____.

3. $[x, p] = i\hbar$, 这 ① 意味着 ② 并不意味着 x 和 p 不可能有任何共同本征态.

4. $[L_x, L_y] = i\hbar L_z$, 这 ① 意味着 ② 并不意味着 L_x 和 L_y 不可能有任何共同本征态.

5. $\mathbf{L} = \mathbf{x} \times \mathbf{p}$ 是轨道角动量, L_z 与位置算符的对易关系是 $[L_z, x] =$ _____, $[L_z, y] =$ _____, $[L_z, z] =$ _____.

6. 接上题, 已知 $\{L^2, L_z\}$ 的共同本征态是 $|lm\rangle$, 本征值是 $\{l(l+1)\hbar^2, m\hbar\}$, 则 $z|lm\rangle$ ① 也是 ② 不是 L_z 的本征态, 如果也是, 则其本征值为 _____.

7. 接上题, 令 $x_{\pm} = x \pm iy$, 则 $x_{\pm}|lm\rangle$ ① 也是 ② 不是 L_z 的本征态, 如果也是, 则其本征值为 _____.

8. 关于 Dirac 方程与 Klein-Gordon 方程的下列说法哪个是正确的? ① 它们和 Schrödinger 方程一样都是基本假设. ② 它们可以从 Schrödinger 方程推导出来. ③ 它们可以从量子力学的基本假设推导出来.

9. 中心力场中的 Dirac 方程为 $i\hbar\partial\psi/\partial t = H\psi$, 其中 $H = c\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta mc^2 + V(r)$, 此时, 轨道角动量 $\mathbf{L} = \mathbf{x} \times \mathbf{p}$ ① 是 ② 不是 守恒量.

10. 在 Lorentz 变换 $x \rightarrow x' = ax$ 下, Dirac 场 $\psi(x)$ 的变换矩阵满足 $\Lambda^{-1}\gamma^\mu\Lambda = a^\mu_\nu\gamma^\nu$, 对于镜面反射 $a = \text{diag}(1, -1, 1, 1)$, Λ 应为 ① γ^1 ② $\gamma^0\gamma^1$ ③ $\gamma^2\gamma^3$ ④ $\gamma^0\gamma^2\gamma^3$.

二、(本题 20 分) 用坐标 x 和动量 p 定义算符

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\alpha x + \frac{ip}{\hbar\alpha} \right), \quad a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\alpha x - \frac{ip}{\hbar\alpha} \right),$$

其中 α 是常数, 量纲为 L^{-1} . 定义相干态 $|\beta\rangle$ 满足 $a|\beta\rangle = \beta|\beta\rangle$ 和 $\langle\beta|\beta\rangle = 1$ (其中 $\beta \in \mathbb{C}$).

1. 试计算 $x_0 = \langle\beta|x|\beta\rangle$ 和 $p_0 = \langle\beta|p|\beta\rangle$. (10 分)

2. 求坐标表象中的归一化波函数 $\psi_\beta(x) = \langle x|\beta\rangle$. (10 分)

三、(本题 30 分) 外场 V 中的一维 Klein-Gordon 方程为

$$\left[\left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{i}{\hbar c} V \right)^2 - \frac{d^2}{dx^2} + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right] \varphi(x, t) = 0.$$

1. 设 $V = V(x)$ 与时间无关, 则可令 $\varphi(x, t) = \psi(x)e^{-iEt/\hbar}$ 进行分离变量, 试求出 $\psi(x)$ 所满足的方程. (8 分)

2. 设 $V(x) = 0$, 当 $|x| > a$; $V(x) = -V_0$, 当 $|x| < a$; 其中 $0 < V_0 \ll mc^2$. 试根据解的行为确定束缚态能级 E 的取值范围. (10 分)

3. 求偶宇称束缚态的能级满足的方程. (6 分)

4. 求奇宇称束缚态的能级满足的方程. (6 分)