中山大学本科生期末考试

考试科目:《高等量子力学》(A 卷)

学年学期: 2014 学年第 2 学期　　　姓　　名: ______________
学　　院: 物理科学与工程技术学院　　　学　　号: ______________
考试方式: 闭卷　　　年级专业: ______________
考试时长: 120 分钟　　　班　　别: ______________

警示《中山大学授予学士学位工作细则》第八条:"考试作弊者,不授予学士学位."

————以下为试题区域,共三道大题,总分 100 分,考生请在答题纸上作答————

一、选择与填空题(共 10 小题,每小题 5 分,共 50 分.)

1. 电磁场中的 Schrödinger 方程是 $i\hbar\partial\psi/\partial t = -(\hbar^2/2\mu)\left(\nabla - iq\boldsymbol{A}/\hbar\right)^2\psi + qA_0\psi$. 设 $\psi(x,t)$ 是方程的解. 今作规范变换 $A_\mu \to A'_\mu$: $A'_x = A_x + \lambda y$, $A'_y = A_y + \lambda x$, $A'_z = A_z$, $A'_0 = A_0$, 则新的解 $\psi'(x,t)$ 与 $\psi(x,t)$ 的关系是 ______________

2. 研究量子多体系统的困难主要在于 ① 难以断定 Schrödinger 方程 $i\hbar\partial\psi/\partial t = H\psi$ 是否适用. ② H 较难构造, Schrödinger 方程较难求解.

3. 在 Lorentz 变换 $x \to x' = ax$ 下, 标量场 $\phi(x)$ 的变换规律是 ① $\phi'(x) = \phi(x)$ ② $\phi'(x) = \phi(ax)$ ③ $\phi'(x) = \phi(a^{-1}x)$.

4. Dirac 矩阵 γ^μ ① 是 ② 不是 Lorentz 矢量.

5. 粒子在势场 $V(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\mu(\omega_1^2x^2 + \omega_2^2y^2 + \omega_3^2z^2) + \lambda_1x + \lambda_2y + \lambda_3z$ 中运动, 其中 ω_1、λ_1 等是常数, 则波包中心的运动规律与经典粒子 ① 相同. ② 不一定相同, 只当 $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3$ 且 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ 时才相同.

6. 设矢量算符 $\boldsymbol{A}$ 与角动量算符 $\boldsymbol{J}$ 满足对易关系 $[J_i, A_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}A_k$ (默认对重复指标求和). $\{J^2, J_z\}$ 的共同本征态是 $|jm\rangle$, 本征值是 $\{j(j+1)\hbar^2, m\hbar\}$, 则 $A_z|jm\rangle$ ① 也是 ② 不是 J_z 的本征态, 如果也是, 则其本征值为 ________. $A_z|jm\rangle$ ① 也是 ② 不是 J^2 的本征态, 如果也是, 则其本征值为 ________.

7. 接上题, 令 $A_\pm = A_x \pm iA_y$, 则 $A_\pm|jm\rangle$ ① 也是 ② 不是 J_z 的本征态, 如果也是, 则其本征值为 ________.

8. 设变换 $x \to x' = ax$ 表示绕 z 轴转动 2π 角度, 在该变换下, Dirac 场 $\psi(x)$ 的变换规律是 ① $\psi'(x) = \psi(x)$ ② $\psi'(x) = \psi(-x)$ ③ $\psi'(x) = -\psi(x)$ ④ $\psi(x') = -\psi(-x)$.

9. 氢原子的 Coulomb 势为 $-e^2/r$, 该体系比一般中心力场具有更高的对称性. 下列变化哪个会破坏这一对称性? ① 改变 r 的幂次. ② 改变系数 e^2 为 Ze^2 (Z 是正整数).

10. 设某单粒子体系具有空间转动不变性和空间反演不变性, 那么下列算符中哪一个不能成为其 Hamiltonian 中的一项(引入系数 c_1 等是为了保证量纲正确)? ① $c_1\boldsymbol{x}^2$ ② $c_2\boldsymbol{p}^2$ ③ $c_3\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{p}$ ④ $c_4\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{L}$.

二、计算题之一(共 2 小题, 每小题 10 分, 共 20 分.)

考虑一维粒子, 其 Hamiltonian 如下, 其中 μ、ω 和 a 为常数.

$$H = \frac{p^2}{2\mu} + \frac{1}{2}\mu\omega^2x^2 - \mu\omega^2ax.$$

1. 设波函数 $\psi(x,y,t)$ 满足 Schrödinger 方程, 且已经归一化. 定义 $\bar{x}(t) = (\psi, x\psi)$, $\bar{p}(t) = (\psi, p\psi)$, 它们是时间 t 的函数. 求 $\bar{x}(t)$、$\bar{p}(t)$ 满足的微分方程.

2. 已知 $t = 0$ 时, $\bar{x}(0) = x_0$, $\bar{p}(0) = p_0$, 试解出 $\bar{x}(t)$ 和 $\bar{p}(t)$.

三、计算题之二（共 3 小题，各小题分数依次为 8 分、12 分、10 分，共 30 分.）

类氢离子的 Hamiltonian 如下，其中 μ、Z 和 e 为常数.

$$H = \frac{p^2}{2\mu} - \frac{Ze^2}{r}$$

试按下述步骤在球坐标系 (r, θ, ϕ) 中求解定态 Schrödinger 方程 $H\psi = E\psi$ 的束缚态解. 已知球坐标系中的 Laplace 算符为

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2}.$$

1. 令 $\psi(r, \theta, \phi) = R(r) Y_{lm}(\theta, \phi)$，求出 $R(r)$ 所满足的常微分方程. 然后引入下列变量和参数，化简该方程

$$\rho = \alpha r, \quad \alpha = \sqrt{-\frac{8\mu E}{\hbar^2}}, \quad \lambda = \frac{Ze^2}{\hbar}\sqrt{-\frac{\mu}{2E}}.$$

已知球谐函数 $Y_{lm}(\theta, \phi)$ 满足方程

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left[\sin\theta \frac{\partial Y_{lm}(\theta, \phi)}{\partial \theta}\right] + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y_{lm}(\theta, \phi)}{\partial \phi^2} + l(l+1) Y_{lm}(\theta, \phi) = 0.$$

2. 令 $R(\rho) = e^{-\rho/2} v(\rho)$，导出 $v(\rho)$ 所满足的微分方程；然后令 $v(\rho) = \rho^l u(\rho)$，导出 $u(\rho)$ 所满足的微分方程.

3. 将级数解 $u(\rho) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \rho^{k+s}$（其中 $a_0 \neq 0$）代入 $u(\rho)$ 的方程，定出 s 值. 选择使 $R(\rho)$ 在 $\rho = 0$ 处没有奇性的 s 值，导出 a_k 的递推关系. 为了使 $u(\rho)$ 中断为多项式，λ 应该如何取值？根据所取 λ 值，导出束缚态能级.