

中山大学本科生期末考试
考试科目:《高等量子力学》(A 卷)

学年学期: 2017 学年第 2 学期

姓 名: _____

学 院: 物理学院

学 号: _____

考试方式: 闭卷

年级专业: 物理 15 级, 研 17 级等

考试时长: 120 分钟

班 别: _____

警示 《中山大学授予学士学位工作细则》第八条: “考试作弊者, 不授予学士学位。”

—————以下为试题区域, 共四道大题, 总分 100 分, 考生请在答题纸上作答—————

一、选择与填空题 (共 10 小题, 每小题 5 分, 共 50 分.)

1. Hilbert 空间是一个集合, 并且具有下述结构或运算 (选出必须者): ① 加法和数乘 ② 内积 ③ 由内积导出的距离 ④ 独立定义的距离.
2. Schrödinger 方程是否正确地描述微观体系的运动, ① 可以通过实验观测直接验证. ② 只能间接验证其在具体问题中的计算结果, 比如跃迁概率.
3. 设 F 是力学量, 本征值和本征矢量分别是 λ_n 和 u_n , n 为正整数, 并且没有简并, 体系在任何时刻的状态 $\psi(t)$ 可以展开为 $\psi(t) = \sum_n a_n(t)u_n$. 如果 F 是守恒量, ① 则可以断定 $|a_n(t)|^2 = |a_n(0)|^2$. ② 前述结论是否成立取决于 Hamilton 算符的具体形式.
4. Pauli 不相容原理是 ① 全同性原理的推论. ② 量子力学中一个独立的基本假设.
5. 设一体系具有空间转动不变性和空间反演不变性, 那么下列各算符中哪一个可以成为其 Hamiltonian 中的一项 (引入系数 c_1 等是为了保证量纲正确)? ① $c_1 \mathbf{x} \cdot \mathbf{p}$ ② $c_2 \mathbf{x} \cdot \mathbf{L}$ ③ $c_3 \mathbf{p} \cdot \mathbf{L}$ ④ $c_4 L_z$
6. 不确定关系 $\Delta x \Delta p \geq \hbar/2$ 中的 Δx 和 Δp ① 需要 ② 不需要 同时测量.
7. 氢原子的 Coulomb 势为 $-e^2/r$, 该体系比一般中心力场具有更高的对称性. 下列哪种势仍具有这一对称性? ① $-e^2/r^{1+\delta}$, 其中 $\delta \ll 1$. ② $-Ze^2/r$, 其中 Z 是正整数.
8. 用 Klein-Gordon 方程计算的氢原子能级相对论修正与实验结果不符, 用 Dirac 方程计算则相符, 这是因为 ① Dirac 方程描述自旋为 $1/2$ 的粒子, 正好适合电子. ② Dirac 方程比 Klein-Gordon 方程更基本.
9. 设 $\psi(x)$ 是 Dirac 场, 在 Lorentz 变换 $x \rightarrow x' = ax$ 下, 下列哪个是 Lorentz 矢量? ① γ^μ ② $\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)$ ③ $\psi^\dagger(x)\gamma^\mu\psi(x)$.
10. 对 Dirac 方程来说, 在中心力场中只有总角动量守恒, ① 自由粒子亦然. ② 而自由粒子则轨道角动量和自旋分别守恒.

二、计算题之一 (共 2 小题, 分数依次为 12 分、8 分, 共 20 分.) 一粒子带电 q , 质量为 M , 在 xy 平面上运动, 粒子受 z 方向的均匀磁场 B ($B > 0$) 作用, 取矢势为 $A_x = 0$, $A_y = Bx$, 其 Hamiltonian 为

$$H = \frac{1}{2M} [p_x^2 + (p_y - qBx)^2].$$

1. 试给出定态能级和归一化波函数.

2. 如果改取矢势为 $A'_x = Cy$, $A'_y = (B + C)x$, 其中 C 为常数, 试重新给出定态能级和归一化波函数. (提示: 可利用上一小题的结果.)

三、计算题之二 (共 2 小题, 分数依次为 8 分、12 分, 共 20 分.) 考虑 Dirac 方程 $(i\gamma^\mu \partial_\mu - \kappa)\psi = 0$ 的平面波解 $\psi(x) = ue^{-ik \cdot x} = ue^{ik \cdot x - ik_0 x_0}$, 其中 u 是与 x 无关的旋量 (即列矢量).

1. 设 k 给定, 试求出 k_0 .

2. 只考虑 $k_0 > 0$ 的解 (正能解), 采用标准表象, 求出两个线性独立解 u_r ($r = 1, 2$), 使之满足正交归一关系 $u_r^\dagger u_s = 2k_0 \delta_{rs}$.

提示: 标准表象中 $\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\gamma = \begin{pmatrix} 0 & \sigma \\ -\sigma & 0 \end{pmatrix}$, 其中 σ 是 Pauli 矩阵.

四、计算题之三 (10 分) 一维谐振子的 Hamilton 量是 $H = \frac{p^2}{2\mu} + \frac{1}{2}\mu\omega^2 x^2$, 其本征值为 $E_n = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega$, 相应的正交归一的本征函数记作 $\psi_n(x)$, $n = 0, 1, 2, \dots$. 令 $\alpha = \sqrt{\mu\omega/\hbar}$, 已知有递推关系

$$x\psi_n = \frac{1}{\sqrt{2}\alpha}(\sqrt{n}\psi_{n-1} + \sqrt{n+1}\psi_{n+1}).$$

今设体系处于本征态 $\psi_n(x)$, 求 $\Delta x \Delta p = ?$

提示: 本题根据已知条件即可计算, 不需用到 $d\psi_n/dx$ 的递推关系, 但如果你记得这一关系, 也可以使用.