中山大学本科生期末考试
考试科目:《高等量子力学》(A 卷)

学年学期: 2018 学年第 1 学期　　姓　　名: ____________

学　　院: 物理学院　　学　　号: ____________

考试方式: 闭卷　　年级专业: 物理 16 级, 研 18 级等

考试时长: 120 分钟　　班　　别: ____________

警示《中山大学授予学士学位工作细则》第八条:"考试作弊者,不授予学士学位."

————以下为试题区域,共四道大题,总分 100 分,考生请在答题纸上作答————

一、选择与填空题 (共 10 小题,每小题 5 分,共 50 分.)

1. 人们相信量子力学的基本假设是正确的,这是因为 ① 从它们出发得出的计算结果得到实验事实的支持. ② 它们具有严格的数学和逻辑基础.

2. 研究量子多体问题的困难主要在于 ① 难以断定 Schrödinger 方程 $\mathrm{i}\hbar\partial\psi/\partial t = H\psi$ 是否适用. ② H 较难构造, Schrödinger 方程较难求解.

3. 不确定关系 $\Delta A\Delta B \geq |\langle[A,B]\rangle|/2$ 中的 ΔA 和 ΔB ① 需要 ② 不需要 同时测量.

4. 不确定关系是 ① 量子力学基本假设的推论. ② 一个独立的基本假设.

5. 某体系具有空间反演对称性,初态具有偶宇称,则 ① 以后任何时刻的态仍具有偶宇称. ② 具有偶宇称的概率会随时间变化.

6. 两个力学量 A 和 B 不对易,则它们 ① 不可能有共同本征态. ② 可能有共同本征态,但这些本征态不可能构成体系的完备基矢.

7. 在相互作用绘景中,算符成为时间的函数,则 $[x_{\mathrm{I}}, p_{\mathrm{I}}] = \mathrm{i}\hbar$ ① 仍然 ② 不再 成立。

8. 在 Lorentz 变换 $x \to x' = ax$ 下,标量场 $\phi(x)$ 的变换规律是 ① $\phi'(x) = \phi(x)$ ② $\phi'(x) = \phi(ax)$ ③ $\phi'(x) = \phi(a^{-1}x)$.

9. 设 $\psi(x)$ 是 Dirac 场,在 Lorentz 变换 $x \to x' = ax$ 下,下列哪个是 Lorentz 标量? ① $\psi^\dagger(x)\psi(x)$ ② $\bar{\psi}(x)\psi(x)$ ③ $\bar{\psi}(x)\gamma_5\psi(x)$.

10. 在 Lorentz 变换 $x \to x' = ax$ 下, Dirac 场 $\psi(x)$ 的变换矩阵满足 $\Lambda^{-1}\gamma^\mu\Lambda = a^\mu{}_\nu\gamma^\nu$, 对于空间反射 $a = \mathrm{diag}(1,-1,-1,-1)$, 则 $\Lambda =$ ____________.

二、计算题之一 (20 分.) 考虑均匀场中的一维粒子,其 Hamilton 量是 $H = p^2/2\mu + \lambda x$, 其中 λ 是常数. 定义 Heisenberg 绘景中的算符 $x_{\mathrm{H}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht/\hbar}x\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht/\hbar}$, $p_{\mathrm{H}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht/\hbar}p\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht/\hbar}$. 试求出这两个算符的显式.

三、计算题之二 (共 3 小题,每小题 10 分,共 30 分.) 考虑两个算符 a_1、a_2 及其 Hermite 共轭 $a_1^\dagger$、$a_2^\dagger$, 其对易关系中非零的只有 $[a_\alpha, a_\beta^\dagger] = \delta_{\alpha\beta}$. 定义 Hermite 算符 $N_1 = a_1^\dagger a_1$、$N_2 = a_2^\dagger a_2$, 根据熟知的结果,其本征值为非负整数 n_1、n_2, 相应的共同本征态为

$$|n_1 n_2\rangle_{\mathrm{N}} = \frac{1}{\sqrt{n_1!n_2!}}(a_1^\dagger)^{n_1}(a_2^\dagger)^{n_2}|0\rangle,$$

其中 $|0\rangle$ 是基态,满足 $a_1|0\rangle = 0$、$a_2|0\rangle = 0$. 下标 N 表示 number state.

1. 定义算符 $J_i=\frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{2}a_\alpha^\dagger(\sigma_i)_{\alpha\beta}a_\beta$，$i=1,2,3$（或 x,y,z），其中 σ_i 是 Pauli 矩阵. Pauli 矩阵的具体形式如下：

$$\sigma_x=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\ \sigma_y=\begin{pmatrix}0&-\mathrm{i}\\\mathrm{i}&0\end{pmatrix},\ \sigma_z=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}.$$

试计算对易关系 $[J_i,J_j]$，结果用 $\boldsymbol{J}$ 的各分量表示（而不是用 a_1、a_2 等）.

2. 试计算 $\boldsymbol{J}^2$，结果用总粒子数算符 $N=N_1+N_2$ 表出.（提示：可以使用求和公式 $\sum_{i=1}^{3}(\sigma_i)_{\alpha\beta}(\sigma_i)_{\lambda\rho}=2\delta_{\alpha\rho}\delta_{\beta\lambda}-\delta_{\alpha\beta}\delta_{\lambda\rho}$.）

3. 证明 $|n_1n_2\rangle_{\mathrm{N}}$ 是 $\{\boldsymbol{J}^2,J_z\}$ 的共同本征态，求出本征值. 如果将本征值记作 $\{j(j+1),m\}$，试给出 j、m 与 n_1、n_2 之间的关系.

以上是求角动量谱的一种方法，称为 Schwinger 表象.