试时长：120 分钟　　　　　　　　　　班　　别：____________

示《中山大学授予学士学位工作细则》第八条："考试作弊者，不授予学士学位．"

————以下为试题区域，共三道大题，总分 100 分，考生请在答题纸上作答————

一、选择与填空题 (共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分．)

1. Hilbert 空间是一个集合，其中定义的结构或运算不包含下列哪一项？ ① 加法和数乘 ② 内积 ③ 由内积导出的距离 ④ 独立定义的距离．

2. Schrödinger 方程 $i\hbar\partial\psi/\partial t = H\psi$ ① 只能描述无自旋的粒子． ② 可以描述有自旋的粒子，只是需要找到适当的 H．

3. 一个算符的厄米性 ① 只依赖于算符的形式． ② 除了与算符的形式有关，也依赖于其所作用的空间．

4. 一粒子在外场中运动，其能级为 $E_n = p_n\epsilon$，其中 ϵ 是常数，p_n 是第 n 个素数 (质数)．设初态波函数平方可积，则在以后的运动中， ① 波包宽度不会无限增大． ② 波包宽度是否会无限增大取决于初态的具体形式．

5. 一个多体系统的 Hamilton 算符为 $H = \sum_{a=1}^{N} \boldsymbol{p}_a^2/2m_a + \sum_{a<b} q_a q_b/|\boldsymbol{r}_a - \boldsymbol{r}_b|$，定义 $\boldsymbol{P} = \sum_{a=1}^{N} \boldsymbol{p}_a$，$\boldsymbol{L} = \sum_{a=1}^{N} \boldsymbol{r}_a \times \boldsymbol{p}_a$，则 ① $\boldsymbol{P}$ 守恒而 $\boldsymbol{L}$ 不守恒． ② $\boldsymbol{L}$ 守恒而 $\boldsymbol{P}$ 不守恒． ③ $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{L}$ 均守恒．

6. 如果知道一个体系的经典 Hamilton 量，按照一定的规则将它变成算符，作为相应量子体系的 Hamilton 算符，则 ① 它一定就是正确的 Hamilton 算符． ② 它是否是正确的 Hamilton 算符，需要由实验来检验．

7. 态叠加原理 ① 是"Hilbert 空间具有线性结构"和"Schrödinger 方程是线性方程"两个事实的自然推论． ② 是量子力学的基本假设之一．

8. 电磁场中的 Schrödinger 方程是 $i\hbar\partial\psi/\partial t = -(\hbar^2/2\mu)(\nabla - iq\boldsymbol{A}/\hbar)^2\psi + qA_0\psi$．设 $\psi(\boldsymbol{x},t)$ 是方程的解．今作规范变换 $A_\mu \to A'_\mu$：$A'_x = A_x + a(y+z)$，$A'_y = A_y + a(z+x)$，$A'_z = A_z + a(x+y)$，$A'_0 = A_0$，其中 a 是常数．则新的解 $\psi'(\boldsymbol{x},t)$ 与 $\psi(\boldsymbol{x},t)$ 的关系是 ________．

9. 在 Lorentz 变换 $x \to x' = ax$ 下，标量场 $\phi(x)$ 的变换规律是 ① $\phi(x') = \phi(x)$ ② $\phi'(x) = \phi(x)$ ③ $\phi'(x') = \phi(x)$．

10. 用 Klein–Gordon 方程计算的氢原子能级相对论修正与实验结果不符，用 Dirac 方程计算则相符，这是因为 ① Dirac 方程描述自旋为 1/2 的粒子，正好适合电子． ② Dirac 方程比 Klein–Gordon 方程更基本．

二、计算题之一（ 20 分．）考虑外场中的一维粒子，其 Hamilton 算符是 $H = p^2/2\mu +$

$\mu\omega^2x^2/2 + \mu\omega^2 ax$，其中 a 是常数，其余各量的意义是熟知的．Heisenberg 绘景中的算符是 $F_{\mathrm{H}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht/\hbar}F\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht/\hbar}$．试求出该绘景中的坐标与动量算符 x_{H} 与 p_{H}，用 x、p 和 t 的显式表示．

三、计算题之二（共 4 小题，各小题分数依次为 6、10、10、4 分，共 30 分．）设 J 是一般角动量算符，定义 $J_\lambda = J_x + \mathrm{i}\lambda J_y$，其中 $\lambda \in \mathbb{R}$，$\lambda \neq 0$．

1. 试用 J_λ 和 $J_\lambda^\dagger$ 表示出 J_x、J_y 和 J_z．

2. 设 ψ 满足 $J_\lambda\psi = \alpha\psi$ 并已经归一化，其中 $\alpha = \alpha_1 + \mathrm{i}\alpha_2 \in \mathbb{C}$，试计算 J_x 和 J_y 在 ψ 中的期望值．

3. 设上述 ψ 中，$\langle J_z\rangle$ 为已知，试求出 ΔJ_x 和 ΔJ_y

4. 如果 $\lambda = 1$ 而 $\alpha \neq 0$，试求解满足 $J_\lambda\psi = \alpha\psi$ 的 ψ．**提示：本小题可能用到公式** $J_\pm|jm\rangle = \sqrt{(j\mp m)(j\pm m+1)}\hbar|j(m\pm 1)\rangle$．