

拓扑线性空间

泛函分析是无穷维线性空间中的分析, 我们想要的结构有

- 线性结构 (数的加减和数乘可以自然地推广到函数上)
- 拓扑结构, 或者更强的度量结构

在最理想的情况下, 我们想要把理论建立在这东西上

Definition 1 (线性拓扑空间).

如果线性空间 X 中同时有 T_1 拓扑结构 \mathcal{O} , 并且线性空间中的两种运算加法 ($m_+ : X \times X \rightarrow X$) 和数乘 ($m_\cdot : \mathbb{C} \times X \rightarrow X$) 依拓扑 \mathcal{O} 和 \mathbb{C} 上的通常拓扑是连续映射, 那么称 X 是拓扑线性空间

Examples:

下面这两个拓扑线性空间不是 Banach 空间

$$\Omega \subset \mathbb{R}^n, \quad C(\Omega), \quad H(\Omega)$$

open

(虽然我们还没定义这两个东西上的拓扑)

局部基

#todo 对于范数诱导的拓扑, 上述有界的定义和常规定义 ($\exists R > 0, S \subset B(0, R)$) 等价

研究拓扑线性空间的一般方法是不管对哪个点, 先利用线性结构平移到 0 再处理, 所以一个比较重要的量是 0 处的局部基, 即一个集类

$$\mathcal{B} \subset \underset{\text{open neighborhood}}{\text{ONbhd}}(0_X) : \forall 0_X \in U, \exists u \in \mathcal{B}, u \subseteq U$$

这是常规拓扑中 $B_0(\epsilon)$ 的推广, 在没有度量用的日子里只能靠局部基过日子这样子

类似度量空间, 我们可以在此定义 Cauchy 列, 即

$$x : \mathbb{N} \rightarrow X : \forall V \in \mathcal{B}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n, m > N, x_n - x_m \in V$$

这需要验证两件事:

1. 这一定义不依赖局部基的选取
2. 当拓扑由度量诱导出时, 由此定义的 Cauchy 列与常规定义等价

不过我不想验证, 俺寻思这挺对的

Lemma 2 (拓扑线性空间中的闭包).

对于拓扑线性空间 X 的子集 A , $\overline{A} = \bigcap_{U \in \text{ONbhd}(0)} (A + U)$

Proof.

$$\begin{aligned} x \in \overline{A} &\iff \forall U \in \text{Nboh}(0), (x + U) \cap A \neq \emptyset \\ &\iff \forall U \in \text{Nboh}(0), x \in A - U \\ (U \in \text{ONbhd}(0)) &\iff -U \in \text{ONbhd}(0) \\ &\iff \forall U \in \text{ONbhd}(0), x \in A + U \end{aligned}$$

我们的任务是把之前在 \mathbb{R}^n 上建立的那套拓扑在这个体系下重新建立一遍

□

一些术语:

1. 局部紧/局部凸/局部有界: 指任意点 (由于线性空间结构, 只在 0 处考虑即可) 有紧/凸/有界的开邻域
2. 可度量化/可赋范: 指其拓扑可以由度量/范数诱导出来, 特别地, Frechet 空间是指由平移不变的拓扑诱导出的拓扑线性空间
3. Heine-Borel 性: 是指其中的任意有界闭集都是紧集

称拓扑线性空间 X 的子集 S 是

1. 有界的 (bounded), 如果 $\forall N: (0 \in N), \exists t > 0, \forall s > t, S \subseteq sN$
2. 星形的 (balanced), 如果 $\forall C \ni \alpha \leq 1, \alpha S \subseteq S$
3. absorbing, 如果 $\forall x \in X, \exists t > 0, x \in tS$

Theorem 3 (分离性).

$$\underset{\text{紧}}{K}, \underset{\text{闭}}{C} \subseteq \underset{\text{拓扑线性空间}}{X}, K \cap C = \emptyset \implies \exists V \in \text{ONbhd}(0_X), (K + V) \cap (C + V) = \emptyset$$

注意到 $K + V = \bigcup_{x \in K} (x + V)$ 是开的, 实际上有一步推广 $\overline{(K + V)} \cap (C + V) = \emptyset$

特别地, 如果取 $K = \{0\}$, $C = U^c : U \in \text{ONbhd}(0)$, 那么有 $\overline{V} \cap U^c = \emptyset$, 这就是说

$$\forall U \in \text{ONbhd}(0_X), \exists V \in \text{ONbhd}(0_X), \overline{V} \subset U$$

证明思路:

如果我们有度量可用, 那直接量

$$d_{\min} = \inf\{d(x, y) : x \in K, y \in C\} > 0$$

再令

$$V = B_0(d_{\min}/2)$$

将是绝杀, 但是用不得, 我们手头有一个差不多的工具 \mathcal{B} , 先从上述 $K = \{0\}$ 的特殊情况开始, 对这个开集 U , 我们想找到一个和 $B_0(d_{\min}/2)$ 相似的东西, 即

$$V \in \text{ONbhd}(0_X) : V = -V, V + V \subset U$$

我们可以通过把一些满足部分条件的集合交起来拿到想要的东西:

由于加法是连续的, $m_+^{-1}(U) \subset X \times X$ 是开集, 从而存在 $V_1, V_2 \subset U : V_1 + V_2 \subset W$, 于是我们可以令

$$V = V_1 \cap V_2 \cap (-V_1) \cap (-V_2)$$

简单验证可知 V 就是我们想要的开集, 从而容易得到

$$(V + V) \cap U^c = \emptyset \xrightarrow{\text{对称}} V \cap (U^c + V) = \emptyset \xrightarrow{\text{开集}} \overline{V} \cap U^c = \emptyset$$

(这个结构在 Baire 纲定理的证明中也相当重要, 只有闭的集列才有可能收敛到一个点) 另外我们还可以递归这个流程得到满足

$$V + V + V + V \subset U$$

的对称开集, 这就是说每个开集都可以无限地细分下去

紧性是有限性的推广, 把上述这个过程对每个点 $x \in K$ 走一遍, 再利用紧性即可得证

Proof.

$\forall x \in K$ (如果 $K = \emptyset$ 命题显然), $x \notin C$, $C^c - x \in \text{ONbhd}(0)$ 存在

$$V_x + V_x + V_x \subset C^c - x \\ \xrightarrow{V_x \text{ 对称}} (x + V_x + V_x) \cap (C + V_x) = \emptyset$$

由于 K 是紧集, 开覆盖 $\bigcup_{x \in K} (x + V_x)$ 有有限的子覆盖 $\bigcup_{i=1}^n (x_i + V_{x_i})$, 记 $V = \bigcap_{i=1}^n V_{x_i}$, 则

$$K + V \subset \bigcup_{j=1}^n (x_j + V_{x_j} + V) \subset \bigcup_{j=1}^n (x_j + V_{x_j} + V_{x_j})$$

并且 $\bigcup_{j=1}^n (x_j + V_{x_j} + V_{x_j}) \cap C + V = \emptyset$

□

Corollary 4.

$$E \text{ 有界} \iff \overline{E} \text{ 有界}$$

我们本来只能拿到 $E \subset tW \Rightarrow \overline{E} \subset t\overline{W}$, 但是上述的定理允许我们取更细的限制, 即

$$\forall V \in \text{ONbhd}(0), \exists \text{ONbhd}(0) \ni W \subset N : \overline{W} \subset N$$

从而

$$E \text{ 有界} \Rightarrow \exists_{t>0}, E \subset tW \Rightarrow \overline{E} \subset t\overline{W} \subset tV$$

Theorem 5.

对任意拓扑线性空间 X 的子集 $U \in \text{Nbhd}(0_X)$, 存在星形集 $\text{Nbhd}(0_X) \ni V \subset U$
特别地, 若 U 是凸的, 则也存在凸的 V

Proof.

由于数乘的连续性, 存在 $\delta > 0$, $W \in \text{ONbhd}(0)$ 使得 $\forall_{0 < t < \alpha}, tW \subset U$ 则 $V = \bigcup_{0 < t < \alpha} tW$ 为所求. 假如

同时有 U 的凸性, 取 $A = \bigcap_{\alpha \in \mathbb{C}, |\alpha|=1} \alpha U$, 再如上建立 V 即可保持凸性 (?) #不会qaq

□

利用连续性我们还能得到更多的结论, 对任意 $x \in X, U \in \text{ONbhd}(0_X)$, 由于函数

$$\begin{aligned} m_{\cdot}^{\mathbb{C}} : \mathbb{C} &\rightarrow X \\ \alpha &\mapsto \alpha x \end{aligned}$$

是连续的, 必然存在 $\delta > 0$ 使得 $\forall |\alpha| < \delta, \alpha x \in U$, 由此能推出

Theorem 6.

对拓扑线性空间 X

1. $\forall U \in \text{ONbhd}(0_X)$ 取 $r_n \rightarrow \infty$, 则 $X = \bigcup_n r_n U$, 即 U 一定是 absorbing 的
2. 所有的紧集是有界的
3. 对于 $\delta_n \downarrow 0$ 和有界子集 $U \in \text{ONbhd}(0_X)$, 则 $\{\delta_n U\}$ 是一组局部基

Proof.

1. 只需要取足够大的 n 使 $\frac{1}{r_n} < \delta$
2. 这可以由上述 U 的任意性看出来, 由于紧性, 开覆盖

$$K \underset{\text{任意紧集}}{\subset} \bigcup_{n=1}^{\infty} r_n U$$

必定有有限的子覆盖

3. 反过来说, 对于 $V \in \text{ONbhd}(0)$ 由 U 的有界性 $\exists s > 0, U \subset sV$, 那只要取 $\delta_n < \frac{1}{s}$ 即可

下一步是考虑保持结构的映射, 同样线性结构允许我们将 0 附近的性质平移到全局

Proposition 7.

若 $\Lambda : \underset{\text{拓扑线性空间}}{X} \rightarrow Y$ 在 0 处连续, 则处处连续

Proof.

取 $U \in \text{open}(Y)$ 往证 $\Lambda^{-1}(U) \in \text{Open}(X)$, 若其为空集立刻证毕, 否则取 $x \in \Lambda^{-1}(X)$

$$\begin{aligned} 0_X &\in \Lambda^{-1}(U) - x \\ &\iff \Lambda(0_X) = 0_Y \in \Lambda(\Lambda^{-1}(U) - x) \stackrel{\text{线性}}{=} U - \Lambda(x) \\ &\iff U - \Lambda(x) \in \text{ONbhd}(0_Y) \\ &\stackrel{0 \text{ 处连续}}{\implies} \Lambda^{-1}(U - \Lambda(x)) = \Lambda^{-1}(U) - x \in \text{ONbhd}(0_X) \end{aligned}$$

□

Lemma 8.

对线性映射 $\Lambda : \underset{\text{拓扑线性空间}}{V} \rightarrow \mathbb{C}$ 且 $\ker(\Lambda) \neq V$ 以下等价

- Λ 连续
- $\ker(\Lambda) \in \text{Closed}(V)$
- $\ker \Lambda$ 在 V 中不稠密
- $\exists U \in \text{ONbhd}(0): \Lambda(U)$ 有界

我们称一个线性函数是有界的当且仅当其将有界集映到有界集 (这和有界函数是不同的, 有界函数将全空间映到有界集, 不过这么干的话就只有 0 是有界线性映射了)

Theorem 9.

对于两个线性拓扑空间 X, Y 之间的线性映射 $\Lambda: X \rightarrow Y$ 以下 $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3$

- Λ 是连续的
- Λ 是有界的
- 若 $x: \mathbb{N} \rightarrow X$ 满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ 则 $\{\Lambda x_n\}_n$ 是有界的

另外若 X 是可度量化, 则以上三个等价

Proof.

$1 \Rightarrow 2$

$$\forall W \in \text{Obhd}(0_Y), \exists V \in \text{ONbhd}(0_X) : \Lambda V \subset W$$

从而对任意有界集 E

$$E \subset tV \Rightarrow \Lambda E \subset \Lambda tV = t\Lambda V \subset tW$$

$2 \Rightarrow 3$ 是天然成立的, 因为 $\text{ONbhd}(0)$ 都是 absorbing 的

加上可度量化条件以后 $3 \Rightarrow 1$ 比较烦人 #todo

□

度量化和半范数

下面研究拓扑和度量 (范数) 之间的关系

Theorem 10 (拓扑线性空间度量化).

若 X 是一个有可列局部基的拓扑线性空间, 则存在度量 $d: X^2 \rightarrow [0, \infty)$ 满足

- d 与 X 上的拓扑兼容;
- 对任意 $\varepsilon > 0$, $B_\varepsilon(0_X)$ 是星形的;
- d 与线性结构兼容 (即平移不变).

这就是说, 一个拓扑线性空间只要有可列的局部基, 就能赋上一个度量变成度量空间
不过这个证明太烦人了, 暂且 #todo

用度量生成范数已经是老生常谈了, 这里是一个不用完整范数也能生成拓扑的方法

Theorem 11 (半范数).

线性空间 X 上的一个半范数是指 $p : X \rightarrow [0, \infty)$ 满足

1. $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$
2. $\forall \alpha \in \mathbb{C}, p(\alpha x) = |\alpha|p(x)$

这就是个和线性结构相容的正值函数, 对此容易证明另一个方向的三角不等式

$$\forall x, y, p(x) = p(x - y + y) \leq p(x - y) + p(y) \Rightarrow p(x) - p(y) \leq p(x - y)$$

和 $p(0) = p(0 \cdot x) = 0, p(x) = 0$ 所以其实和真正的范数也不差啥了, 唯一的差距就是就是允许在某些非零处取零, 所以对半范数的核的研究比较重要, 这显然是个线性空间, 因为

$$p(x) = p(y) = 0 \Rightarrow p(x + y) \leq 0 + 0 = 0, \forall \alpha, p(\alpha x) = \alpha \times 0 = 0$$

所以想要用半范数造一个范数也比较简单, 只要把核商掉就好了

对半范数的定量研究可以借助其 "单位球" $B : \{x \in X : p(x) < 1\}$ 既是凸的, 星形的, 又是absorbing的, 那么我们可以定义 B 的 Minkowski 函数

$$\mu_B(x) = \inf\{t > 0 : x \in tB\} \quad (x \in X)$$

断言 $p = \mu_B$, 证明就是说车轱辘话:

$$\begin{aligned} \forall x \in X, \forall s > p(x), x \in sB &\implies \mu_B(x) \leq p(x) \\ \forall x \in X, \forall t < p(x), x \notin tB &\implies \mu_B(x) \geq p(x) \end{aligned}$$

下一步是研究半范数之间的关系

对于一簇半范数 \mathcal{P} , 称其可分是指 $\bigcap_{p \in \mathcal{P}} \ker p = \{0\}$, 当然这时候我想要用这堆东西凑一个范数出来, 例如

$$P(x) = \sup_{p \in \mathcal{P}} \frac{p(x)}{1 + p(x)}$$

但是有个问题, 可以想见这个范数会在很多地方取 1 (甚至可能是全空间), 所以并不好用, 由此生成的拓扑也毫无意义

Theorem 12.

假定 \mathcal{P} 是线性空间 X 上的一簇可分的半范数, 定义

$$\forall n \in \mathbb{N}, p \in \mathcal{P}, V_n(p) := \left\{ x \in X : p(x) < \frac{1}{n} \right\}$$

记 \mathcal{B} 为 $\{V_n(p), n \in \mathbb{N}, p \in \mathcal{P}\}$ 的所有有限交, 则 \mathcal{B} 为 X 上一拓扑的凸的, 星形的局部基, 并且满足以下条件

- 拓扑与线性结构相容, 既 X 是个拓扑线性空间
- 任意 $p \in \mathcal{P}$ 是连续的
- $E \subset X$ 是有界的当且仅当它在任一 $p \in \mathcal{P}$ 下是有界的

Proof.

定义 $A \in \text{Open}(X)$ 当且仅当 A 是 \mathcal{B} 中元素经过可列的平移和并运算得到, 从而这一拓扑自然平移不变且局部基为 \mathcal{B} , 则这个拓扑满足

- T_1 :

$$\begin{aligned} \forall x \neq 0, \exists p \in \mathcal{P} : p(x) > 0 &\Rightarrow \exists V_n(p) : 0 \notin x - V_n(p) \Rightarrow x \notin \overline{\{0\}} \\ &\Rightarrow \{0\} \in \text{Closed}(X) \xrightarrow{\text{平移不变}} T_1 \end{aligned}$$

- 加法连续: $\forall U \in \text{ONbhd}(0), \exists V_{n_1}(p_1) \cap \cdots \cap V_{n_m}(p_m) \subset U$ 则有 $V := V_{2n_1} \cap \cdots \cap V_{2n_m}$ 使得 $V + V \subset U$.
- 数乘连续: 同上定义 U, V , 则由单位球的性质 V absorbing 且星形, $\forall x \in X, \alpha \in \mathbb{C}, \exists s > 0, x \in sV$, 记 $t := \frac{s}{1+|\alpha|s}$, 从而

$$\forall y \in x + tV, \forall \beta : |\alpha - \beta| < 1/s, \beta y - \alpha x = \beta(y - x) + (\beta - \alpha)x \in |\beta|tV + |\beta - \alpha|sV \subset V + V \subset U$$

这证明了 X 是个局部凸的拓扑线性空间 $V_n(p)$ 的定义保证了 p 在 0 处连续, 由线性结构知其处处连续, 下面证明判断 3:

利用 Minkskovi 函数, 必要性是显然的, 充分性: 同上定义 U, V , 则有上界

$$E \subset \max_i 2n_i \sup p_i|_E V \subset CU$$

□

用半范数造拓扑的一个例子是开集上的连续函数空间

Example 13.

对于 $\Omega \in \text{Open}(\mathbb{R}^n) \setminus \{0\}$ 存在一系列紧集 $K_{\mathbb{N}}$ 满足

$$K_n \subset \overset{\circ}{K}_{n+1}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} K_n = \Omega$$

在 $C(\Omega)$ 上定义一簇半范数

$$p_n(f) = \sup\{|f(x)| : x \in K_n\}$$

显然其零空间上的交是 $\{0\}$, 由 Theorem 12 可以由其构造一个局部凸的拓扑事实上这个拓扑是可度量化的, 其度量是

$$d(f, g) = \max_n \frac{2^{-n} p_n(f - g)}{1 + p_n(f - g)}$$

这个度量甚至是完备的. 但是这个拓扑不局部有界, 所以它不能赋范. 另外 $H(\Omega)$ 是 $C(\Omega)$ 的一个闭子空间

Banach 空间及其完备性

Proposition 14.

Banach 空间是线性拓扑空间

下一步是讨论 Banach 空间间的线性映射,

$$A : X \rightarrow Y$$

假如它是连续的, 则由 Theorem 9 其天然是有界的, 或者说

$$M = \sup_{\|x\|_X \leq r} \|Ax\|_Y < \infty$$

我们定义线性映射 A 的算子范数为

$$\|A\|_{\mathcal{B}(X \rightarrow Y)} := \sup(\{\|Ax\|_Y \mid x \in X, \|x\| \leq 1\})$$

其中 $\mathcal{B}(X \rightarrow Y)$ 是所有的有界线性映射, 我们还要判断它是个范数

- $\|A\|_{\mathcal{B}(X \rightarrow Y)} = 0 \Rightarrow \|Ax\|_Y|_{B(0,1)} = 0 \Rightarrow A = 0$
- 三角不等式

$$\begin{aligned} \|(A+B)x\|_Y &\leq \|Ax\|_Y + \|Bx\|_Y && (Y \text{ 上的三角不等式}) \\ \sup_{\|x\| \leq 1} \|(A+B)x\|_Y &\leq \sup_{\|x\| \leq 1} [\|Ax\|_Y + \|Bx\|_Y] \\ &\leq \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\|_Y + \sup_{\|x\| \leq 1} \|Bx\|_Y \end{aligned}$$

若算则范数有限

$$\forall x, y, \|Ax - Ay\| \leq \|A\| \|x - y\|$$

这说明 Banach 空间间的有界线性泛函一定是连续的, 事实上在 Theorem 9 我们提过一个更强的结论, 只要是拓扑线性空间即可.

然后又到了喜闻乐见的套圈环节,

Theorem 15.

若 X, Y 是两个 Banach 空间, 则 $(\mathcal{B}(X \rightarrow Y), \|\cdot\|_{\mathcal{B}(X \rightarrow Y)})$ 也是 Banach 空间

Proof.

已经证明 $\|\cdot\|_{\mathcal{B}(X \rightarrow Y)}$ 是个范数, 其间的加法和数乘可以正常定义, 那么只需要证明其完备即可, 假定一个 Cauchy 列 $\{A_n\}_n$ 可以令

$$\begin{aligned} A : X &\rightarrow Y \\ x &\mapsto \lim_{n \rightarrow \infty} A_n x \end{aligned}$$

(右边那个极限可行是因为 Y Banach)

则 A 显然是线性的, 则只要验证 $A_n \rightarrow A$ 即可, 在算子范数下

$$\forall x: \|x\| \leq 1, \|Ax - A_n x\|_Y = \lim_{m \rightarrow \infty} \|A_m x - A_n x\|_Y \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \|A_m - A_n\|_{\mathcal{B}(X \rightarrow Y)}$$

$$\text{从而 } \|A - A_m\|_{\mathcal{B}(X \rightarrow Y)} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n - A_m\|_{\mathcal{B}(X \rightarrow Y)} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$$

□

Definition 16.

对 Banach 空间 X, Y , $A : X \rightarrow Y$ 称同构, 如果 $\forall x, \|Ax\|_Y = \|x\|_X$

Theorem 17 (Baire category).

完备度量空间 (E, d) 是第二纲集, 既其中稠密开集的可列交依然是稠密的

Rmk:

1. 这个定理非常依赖度量空间的完备性, 不完备的度量空间 \mathbb{Q} 中有反例 $\bigcap_{q \in \mathbb{Q}} \mathbb{Q} \setminus \{q\} = \emptyset$
2. 反过来说也很有意思, 无处稠密的闭集的可列并是一稠密集集的补集, 也就是说不能是全集

Proof.

记一列稠密开集 $\{E_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, 任取 $B(x_0, r_0) \in E$

$$B(x_0, r_0) \cap E_1 \in \text{Open}(E) \Rightarrow \exists B(x_1, r_1) : \overline{B(x_1, r_1)} \subset E_1 \cap B(x_0, r_0)$$

再对 $B(x_1, r_1)$ 执行相同操作, 得到一列闭球

$$B(x_n, r_n) : \emptyset \neq \bigcap \overline{B(x_n, r_n)} \subset \bigcap E_n$$

三大定理

□

Banach-Steinhaus thm: 一致有界原则

Theorem 18 (Banach-Steinhaus thm: 一致有界原则).

一族从 Banach 空间映射到赋范线性空间的有界线性算子

$$T_\alpha : \begin{matrix} X \\ \text{Banach} \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} Y \\ \text{NLS} \end{matrix}$$

要么是一致有界的即

$$\|T_\alpha\|_{\text{op}} < M$$

要么在某个稠密 G_δ 集上满足

$$\sup_{\alpha \in A} \|T_\alpha x\| = \infty$$

Proof.

令

$$\phi(x) = \sup_{\alpha \in A} \|T_\alpha x\| \quad V_n = \{x \in X : \phi(x) > n\}$$

由于 T_α 和取范数运算都是连续的

$$V_n = \bigcup_{\alpha \in A} [\|T_\alpha x\| > n] \in \text{Open}(Y)$$

对 V_n 考虑如下情形

- 若每个 V_n 都是稠密 G_δ 集, 则由 Baire 纲定理知为情形 2;
- 若存在 V_m 不稠密, 往证其为情形 1.

存在 $B(x_0, r) \cap V_m = \emptyset$, 则 $\forall_{\|x\| < r} \forall_\alpha, \|T_\alpha(x_0 + x)\| \leq m$, 利用线性结构

$$\forall_{\alpha \in A}, \forall_{\|x\| \leq r}, \|T_\alpha x\| = \|T_\alpha(x_0 + x)\| + \|T_\alpha(x_0)\| \leq 2m \implies \text{存在一致上界 } M = \frac{2m}{r}$$

其重要应用是, 对于一簇有界线性算子, 在 A 上一致, X 上逐点有界

$$\sup_{\alpha \in A} \|T_\alpha x\|_Y < \infty \quad (x \in X)$$

能推出在 A 和 X 上都一致有界

$$\sup_{\alpha \in A} \|T_\alpha\|_{\mathcal{B}(X \rightarrow Y)} < \infty$$

Proposition 19.

X, Y, Z Banach, 双线性函数 $B: X \times Y \rightarrow Z$ 在两个分量上连续 (既 $B_x: y \mapsto B(x, y)$, 以及类似的 B_y 是连续的), 则 B 是连续的

Proof.

证法 1:

由 B_x 的连续性

$$\|B(x, y)\|_Z \leq c(x)\|y\|_Y$$

令 $\|y\|_Y = 1$, 则有 $\|B(x, y)\| \leq c(x)$.

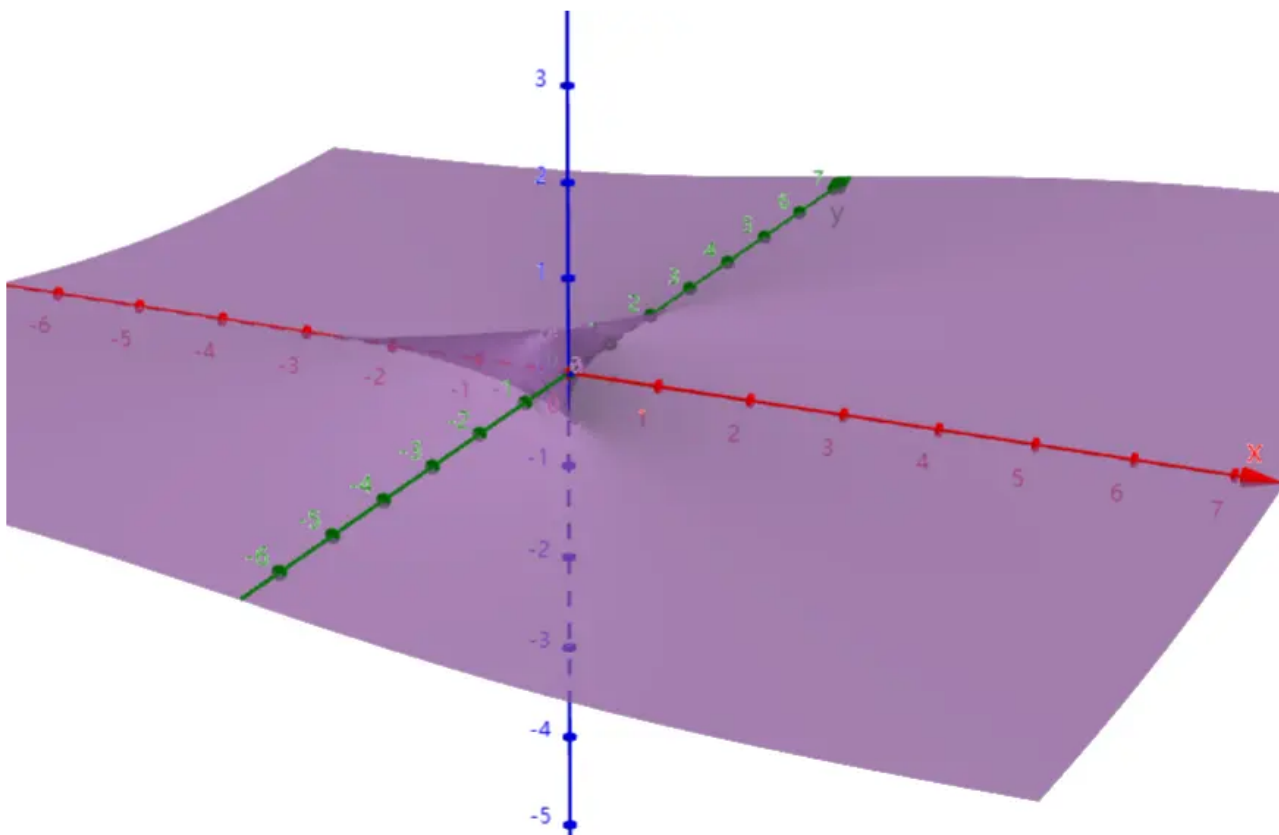
考虑连续线性函数簇 $\mathcal{F} := \{B(\cdot, y): X \rightarrow Z \mid y \in \partial B_1(0_Y)\}$ 有逐点的上界 $c(x)$. 从而有一致上界 M 使得 $\|B(\cdot, y)\|_{\mathcal{B}(X \rightarrow Z)} \leq M \quad (y \in \partial B_1(0_Y))$, 从而

$$\|B(x, y)\|_Z = \|y\|_Y \left\| B\left(x, \frac{y}{\|y\|_Y}\right) \right\|_Z \leq \|y\|_Y \left\| B\left(\cdot, \frac{y}{\|y\|_Y}\right) \right\|_{\mathcal{B}(X \rightarrow Z)} \|x\|_X \leq M \|x\|_X \|y\|_Y$$

当然这个假设了线性性, 如果不线性反例就多起来了, 比如

$$\frac{xy}{x^2 + y^2}$$

这种假装跳一下的怪东西 (如图)



开映射定理

我们首先利用线性性把开映射的性质固定在, 既

Claim 20.

TVS X, Y , 线性映射 $f: X \rightarrow Y$ 将开集映到开集当且仅当

$$\forall N \in \text{ONbhd}(0_X), \exists M \in \text{ONbhd}(0_Y) : M \subset f(N)$$

Proof.

必要性显然, 下证充分性: 对 $\forall N \in \text{Open}(X)$, 往证 $\forall y \in f(N), \exists \text{ONbhd}(y) \ni M \subset f(N)$ (邻域结构), 这是因为

$$N - x \in \text{ONbhd}(0_X) \Rightarrow \exists M_y \in \text{ONbhd}(0_Y) : M_y \subset f(N - x) = f(N) - y \Rightarrow M = M_y + y$$

Proposition 21.

Banach 空间之间的线性映射 $\Lambda: X \rightarrow Y$ 是有界的当且仅当

$$\text{Int } \Lambda^{-1} \overline{B(0_Y, 1)} \neq \emptyset$$

Proof.

$$\exists x_0 + B(0_X, \varepsilon) \subset \Lambda^{-1} \overline{B(0_Y, 1)} \iff \forall \|x\| < \varepsilon, \|\Lambda(x_0 + x)\| \leq 1 + \|\Lambda x\| < \infty$$

这个思路和下面定理其实差不多

Theorem 22 (开映射定理).

有界线性算子

$$\Lambda : \underset{\text{Banach}}{X} \rightarrow \underset{\text{Banach}}{Y}$$

如果是满射, 则任一开集的像是开的

$$U \in \text{Open}(X) \Rightarrow \Lambda(U) \in \text{Open}(Y)$$

Rmk:

- 一个直接的推论 $\exists_{\delta>0}, \Lambda(B_X) \supset \delta B_Y$;
- 若 Λ 是双射, 定理是说 Λ^{-1} 是连续的.

Proof.

ps: 这个证明感觉被我简化过分了, 但至少我没发现错误 qwq

Step1: 利用某些 Baire 纲大法

$$\begin{aligned} X &= \bigcup_{k \in \mathbb{N}} kB(0, 1) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} B(0, k) \\ \xrightarrow{\text{满射}} \Lambda X &= \Lambda \bigcup_{k \in \mathbb{N}} B(0, k) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \Lambda B(0, k) \end{aligned}$$

完备 Banach 空间 Y 是第二纲, 那么 $\Lambda B(0, k)$ 就不能都是第一纲的, 而显然只要有一个是第几纲全是第几纲, 从而其闭包有非空的内部, 既

$$\forall_{r>0}, \text{Int } \overline{\Lambda B(0, r)} \neq \emptyset$$

Step2: 把各种点都往原点挪一挪: 由上知道存在 y, ε 使得 $B(y, \varepsilon) \subset \overline{\Lambda B(0_X, r)}$, 从而对任意 $\|\tilde{y}\| < \varepsilon$, 有 $y + \tilde{y} \in \overline{\Lambda B(0_X, r)}$, 分别取

$$x, \tilde{x} \in \overline{B(0, r)} : \quad \Lambda x = y, \quad \Lambda \tilde{x} = y + \tilde{y},$$

则 $\|x - \tilde{x}\| \leq 2r$, $\Lambda(\tilde{x} - x) = \tilde{y}$, 从而由 \tilde{y} 的任意性

$$B(0, \varepsilon) \subset \overline{\Lambda B(0, 2r)} \subset \Lambda B(0, 4r)$$

闭图像定理

□

所谓的图像就是

$$\Gamma(f) := \{(x, y) \in X \times Y \mid f(x) = y\}$$

容易知道一个线性算子的图像本身也是一个线性空间, 并且其若是一个闭集, 则其本身是一个 Banach 空间

Theorem 23.

两 Banach 空间之间的线性映射 $\Lambda : X \rightarrow Y$ 是有界的当且仅当其图像是闭的

Proof.

必要性: 考虑 Γ 中的一 Cauchy 列 $(x_n, \Lambda x_n) \rightarrow (x, y)$, 由乘积拓扑的定义, 投影映射

$$p_1 : (x, y) \mapsto x \quad p_2 : (x, y) \mapsto y$$

是连续的, 从而

$$\begin{aligned} x &= p_1(\lim(x_n, y_n)) = \lim p_1(x_n, y_n) = \lim x_n \\ y &= p_2(\lim(x_n, y_n)) = \lim p_2(x_n, y_n) = \lim y_n \end{aligned}$$

又由于 Λ 是连续的

$$\Lambda x = \Lambda \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \Lambda x_n = y$$

从而 $(x, y) \in \Gamma$ 于是 Γ 是闭的

充分性: 若 Γ 是 (X, Y) 的一个闭子线性空间则可以令

$$\begin{aligned} \tilde{\Lambda} : X &\rightarrow \Gamma \\ x &\mapsto (x, Ax) \end{aligned}$$

则 $\tilde{\Lambda}$ 是一个双射, 其逆 $p_1|_{\Gamma}$ 为连续函数, 从而由开映射定理, $p_1|_{\Gamma}$ 有连续的逆.

□

Example 24 (Grothendieck).

对于概率测度空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, $p \in (1, \infty)$, 若 $L(\mu)$ 的线性子空间 S 满足

- $S \in \text{Closed}(L^p(\mu))$
- $S \subset L^\infty(\mu)$

则 S 为有限维的.

Proof.

将 S 赋予 L^p 的子空间拓扑并嵌入 $j : S \rightarrow L^\infty$ (这也是上述两个条件的用处), 在 S 中取

$$f_n \xrightarrow{L^p} f, \quad f_n \xrightarrow{L^\infty} g$$

则 $f \stackrel{\text{a.e.}}{=} g$, 因为

$$\|f - g\|_p \leq \|f - f_n\|_p + \|f_n - g\|_p \leq \|f - f_n\|_p + \|f_n - g\|_\infty \rightarrow 0$$

从而 j 的图像是闭的, 则 $\|j\|_{\mathcal{B}(S \rightarrow L^\infty)} < \infty$, 既存在 $K > 0$ 满足

$$\|f\|_\infty \leq K\|f\|_p \quad f \in S$$

若 $p \leq 2$, 则 $\alpha \mapsto \alpha^{\frac{2}{p}}$ 为凸函数, 由 Jensen 不等式 $\|f\|_p \leq \|f\|_2$ 从而 $\|f\|_\infty \leq K\|f\|_2$

若 $p > 2$, 则由于 $|f|^p \leq \|f\|_\infty^{p-2}|f|^2$ 两边积分有 $\|f\|_p \leq K^{\frac{p-2}{2}}\|f\|_2$, 总之存在 $M > 0$ 满足

$$\|f\|_\infty \leq M\|f\|_2 \quad f \in S$$

既嵌入 $L^2 \rightarrow L^\infty$ 是连续的.

将 S 赋予 L^2 中的内积并取出其中的 n 个单位正交元素 $\varphi_1, \dots, \varphi_n$, $B := \partial B(0_{\mathbb{C}^n}, 1)$, 以及

$$\begin{aligned}\psi &: B \rightarrow S \\ c &\mapsto \sum_{j=1}^n c_j \varphi_j\end{aligned}$$

则 $\|\varphi(c)\|_2 \leq \|c\|_{\mathbb{C}^n} = 1$, 从而

$$\|\varphi(c)\|_{\infty} \leq M$$

则对任意 $c \in B$, 存在 $\Omega'_c \subset \Omega : \mu(\Omega'_c) = 1, \forall x \in \Omega, |\psi(c)(x)| \leq M$ 现在固定一点, 取 B 的一个可列稠密子集 Q , 则

$$\exists \Omega' \subset \Omega : \mu(\Omega') = 1, \forall c \in Q, \forall x \in \Omega', |\psi(c)(x)| \leq M$$

并且对固定的 $x \in \Omega'$, $B \ni c \mapsto |\psi(c)(x)|$ 是连续的, 这说明

$$\forall c \in B, \forall x \in \Omega', |\psi(c)(x)| \leq M$$

从而

$$\forall x \in \Omega, \sum_j |\varphi_j(x)|^2 \leq M^2 \Rightarrow n = \left\| \sum_{j=1}^n \varphi_j(x) \right\|_2^2 \leq M^2 \Rightarrow \dim(S) \leq M^2$$

好奇妙的倒来倒去

□

凸性和 Hahn-Banach 定理

Theorem 25 (\mathbb{R} Hahn-Banach).

取 X 为一 \mathbb{R} 线性空间, 函数 $p : X \rightarrow \mathbb{R}$ 满足

$$\forall x, y \in X, \forall \alpha \in [0, 1], p(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha p(x) + (1 - \alpha)p(y)$$

若定义在一子空间 $Y \subset X$ 上的线性映射 $\lambda : Y \rightarrow \mathbb{R}$ 满足 $\forall x \in Y \lambda(x) \leq p(x)$, 则存在延拓

$$\Lambda : X \rightarrow \mathbb{R} : \Lambda|_Y = \lambda, \forall x \in X, \Lambda(x) \leq p(x)$$

注意线性延拓存在是平凡的 (若承认 Zorn 引理), 关键是仍然被 p 控制

Proof.

先扩一个点: 对任意 $z \in X \setminus Y$, 记 $\tilde{Y} = \text{span}(Y, z)$, 尝试延拓 $\tilde{\lambda} : \tilde{Y} \rightarrow \mathbb{R}$ 由线性性模

$$\tilde{\lambda}(az + y) := a\tilde{\lambda}(z) + \lambda(y)$$

因此只需要定义 $\tilde{\lambda}(z)$ 使得 $\lambda \leq p$ 即可. 任取 $y_1, y_2 \in Y, \alpha, \beta > 0$, 则

$$\begin{aligned}\beta\lambda(y_1) + \alpha\lambda(y_2) &= (\alpha + \beta)\tilde{\lambda}\left(\frac{\alpha}{\alpha + \beta}(y_1 - \alpha z) + \frac{\beta}{\alpha + \beta}(y_2 + \beta z)\right) \\ &\leq (\alpha + \beta)p\left(\frac{\alpha}{\alpha + \beta}(y_1 - \alpha z) + \frac{\beta}{\alpha + \beta}(y_2 + \beta z)\right) \\ &\leq \beta p(y_1 - \alpha z) + \alpha p(y_2 + \beta z)\end{aligned}$$

则

$$\frac{1}{\alpha}[-p(y_1 - \alpha z) + \lambda y_1] \leq \frac{1}{\beta}[-p(y_2 + \beta z) - \lambda y_2]$$

从而可以令

$$\sup_{\alpha > 0, y_1 \in Y} \frac{1}{\alpha}[-p(y_1 - \alpha z) + \lambda y_1] \leq \tilde{\lambda}(z) \leq \inf_{\beta > 0, y_2 \in Y} \frac{1}{\beta}[-p(y_2 + \beta z) - \lambda y_2]$$

只需令 $\alpha = a$ ($a < 0$) 或 $\beta = a$ ($a > 0$) 即可得到所需式子了

为了说明这个扩展在全空间有效, 我们需要 **Zorn 引理**: 考虑 λ 的所有扩张 (Z, λ) , 在其上定义偏序

$$(Z, \lambda) \leq (Z', \lambda') \iff Z \subset Z', \lambda'|_Z = \lambda$$

对全序子集 $\{(Z_v, \lambda_v)\}$ 可以定义其极大元 $(Z = \bigcup Z_v, \lambda = \lambda_v)$, 从而任意全序子集有极大元, 由 Zorn 引理, 存在一个最大的扩张 (X', Λ) , 由上述讨论必然由 $X' = X$, 从而命题得证. □

下一步是将其扩展到复线性空间上

Theorem 26 (Hahn-Banach).

对线性空间 X 以及其上的凸函数 $p: X \rightarrow \mathbb{R}$, 若有定义在 $Y \subset X$ 上的线性函数 $\lambda: Y \rightarrow \mathbb{C}$ 使得 $|\lambda(x)| \leq p(x)$ 则存在其 X 上的延拓 Λ 使得 $\Lambda|_Y = \lambda$ 且 $|\Lambda| \leq p$

Proof.

只需令 $l(x) := \operatorname{Re}(\lambda(x))$ 则 $l(ix) = \operatorname{Re}(i\lambda(x)) = -\operatorname{Im}(\lambda(x))$, 从而 $\lambda(x) = l(x) - il(ix)$ 再利用 \mathbb{R} Hahn-Banach 定理延拓 l 至 L , 再令 $\Lambda(x) = L(x) - iL(ix)$ 验证即可. □

对偶

Definition 27 (Banach 空间的 对偶).

对于 Banach 空间 $(X, \|\cdot\|)$, 其对偶是指 $X^* = (\mathcal{B}(X \rightarrow \mathbb{C}), \|\cdot\|_{\text{op}})$ 其中

$$\|A\|_{\text{op}} = \|A\|_{\mathcal{B}(X \rightarrow \mathbb{C})} = \sup_{x \in X: \|x\| \leq 1} |\lambda(x)|$$

Banach 空间的 对偶 也是 Banach 空间, 这由 Theorem 15 保证.

此处的结构称为 对偶 的主要原因是, X^* 中的元素可以视为 X 的线性函数, X 中的元素也可以视为 X^* 上的线性函数 $X^* \ni \lambda \mapsto \lambda(x) \in \mathbb{C}$, 由于这种对称的结构, 我们后续采用一个更直观的记法:

$$\begin{aligned} X^* \times X &\rightarrow \mathbb{C} \\ (\lambda, x) &\mapsto \lambda(x) \end{aligned}$$

这个结构几乎就是内积了. 现在我们反过来看这个映射:

Theorem 28 ($X \subset X^{**}$).

若 X 为一 Banach 空间, 则映射

$$J : X \rightarrow X^{**}$$

$$x \mapsto T_x : \lambda \mapsto \lambda(x)$$

为一保范的单射, 其像为 X^{**} 的一子空间 (大概率不是 X^*)

Proof.

容易知道

$$\forall x \in X, \lambda \in X^*, |J(x)(\lambda)| = |(x, \lambda)| \leq \|\lambda\|_{\text{op}} \|x\| \Rightarrow \|J(x)\| \leq \|x\|$$

反过来, 固定一个 x_0 , 应用 Hahn-Banach 定理, 线性函数

$$X \supset \mathbb{C}x_0 \ni \alpha x_0 \xrightarrow{f} \alpha \|x_0\|_X : f(y) \leq \|y\|$$

从而存在 $\lambda_0 \in X^*$ 满足

$$\begin{aligned} \|\lambda_0\|_{\text{op}} &= \sup\{|\lambda_0(y)| : \|y\| \leq 1\} \\ &\leq \sup\{\|y\| : \|y\| \leq 1\} = 1 \end{aligned}$$

从而证明了等式的反向:

$$\|J(x_0)\|_{\mathcal{B}(X^* \rightarrow \mathbb{C})} = \sup_{\tilde{\lambda} \in X^* : \|\tilde{\lambda}\|_{\text{op}} \leq 1} |\tilde{\lambda}(x_0)| \geq |\lambda_0(x_0)| = \|x_0\|_X$$

其余由 J 的线性性显然.

□

弱拓扑和弱对偶拓扑

Definition 29 (weak topology).

记 X 为一 Banach 空间, 则 X 上的弱拓扑是指能够使所有 $\lambda \in X^*$ 连续的拓扑

Rmk: 拓扑 \mathcal{J}_1 比 \mathcal{J}_2 弱是指 $\mathcal{J}_1 \subset \mathcal{J}_2$, 显然这个弱拓扑比 X 上先天的范数拓扑更弱, 则任意弱连续函数是个范数连续函数, 即其算子范数有限.

具体来说, 这个弱拓扑是由 $\lambda^{-1} \text{Open}(\mathbb{C})$ 生成的拓扑, 所以弱拓扑中的开集长这个样子

$$\bigcup_{\alpha} \bigcap_{j=1}^{n_{\alpha}} \lambda_{\alpha,j}^{-1}(E_{\alpha,j})$$

从而对任意 $x \in U$ 其中 U 为一弱开集, 则存在

$$x \in \bigcap_{j=1}^n \lambda_j^{-1}(B_{\varepsilon_j}(z_j)) \subset U$$

从而容易推出 (注意有限交)

$$x_0 \in \bigcap_{j=1}^n \lambda_j^{-1}(B_{\varepsilon}(\lambda_j(x_0))) \xrightarrow{\text{线性性}} x_0 + \bigcap_{j=1}^n \lambda_j^{-1}(B_{\varepsilon}(0_{\mathbb{C}})) \subset U$$

弱拓扑的另一个视角是讨论收敛条件

Definition 30 (弱收敛).

称 $\{x_n\}$ 弱收敛至 x , 是指其在弱拓扑下收敛于 x , 且

$$x_n \xrightarrow{\text{weak}} x \iff \forall \lambda \in X^*, (\lambda, x_n) \rightarrow (\lambda, x)$$

Theorem 31.

Banach 空间上任意弱收敛列是范数有界的

Proof.

这是一致有界原则的直接应用, 由线性性我们只讨论收敛到 0 的点列

$$x_n \xrightarrow{\text{weak}} 0 \iff \forall \lambda \in X^*, (\lambda, x_n) \rightarrow 0$$

视 x_n 为 X^* 上的一簇有界线性泛函, 则其依 n 一致有界, 于是依 λ 和 n 都一致有界 (Banach-Steinhaus thm: 一致有界原则), 从而等价于

$$\exists M > 0, \forall \lambda \in B_1(0_{X^*}), n \in \mathbb{N}, (\lambda, x_n) < M$$

这说明 x_n 范数有界

□

下面是弱拓扑的一些性质:

Lemma 32.

若 X 为一无穷维 Banach 空间, 则任意 $U \in \text{Open}_{\text{weak}}(X)$ 在范数 $\|\cdot\|_X$ 下无界, 且拓扑 $\text{Open}_{\text{weak}}(X)$ 不由任意范数导出

^9d3b7b

Proof.

(1) 原因是 $\dim \text{Im}(\lambda_j) \leq 1$, 而其局部基仅为有限交, 必然在某个维度上逃逸到无穷

(2) 假设有一度量 d 诱导弱收敛, 由 (1) 容易构造出一列点依度量收敛 (即弱收敛) 到 0 但依范数趋于 ∞ , 这是不可能的.

□

Lemma 33.

Banach 空间依弱拓扑为一 TVS

Proof.

首先验证 T_1 , 即独点集是闭集, 即

$$\forall x_0 \neq 0_X, \exists \varepsilon > 0, \exists \lambda \in X^* : |\lambda(x_0)| > \varepsilon$$

这只需对 $\mathbb{C}x_0 \ni \alpha x_0 \mapsto \alpha \|x_0\|$ 应用 Hahn-Banach 定理即可.

加法连续性和数乘连续性显然

□

由上讨论, 我们发现 Banach 空间至少可以附上两个拓扑, 一个是范数诱导的拓扑, 另一个是其诱导的弱拓扑, 而弱拓扑不可度量化, 我们从一个 Banach 空间出发, 拿到了两个不同胚的拓扑线性空间, 而在有限维上我们是不能这么干的.

Definition 34 (弱对偶拓扑).

对 Banach 空间 X , 称 X^* 上使得任意 $x \in J(X) \subset X^{**}$ (注意不是全体) 连续的拓扑为弱对偶拓扑

则显然 X^* 上的弱对偶拓扑比弱拓扑更弱, 而若 X 是一个自反的空间, 其弱对偶拓扑就是弱拓扑, 事实上反过来也成立

Theorem 35.

对 Banach 空间 X , 若 X^* 上的弱拓扑与弱对偶拓扑等价, 则 X 自反即 $X = X^{**}$

ref: Conway, p131, thm4.2

Banach-Alaoglu

我们知道, Banach 空间中的单位球紧当且仅当其有限维, 对于无限维空间, 能否有一个更弱的拓扑使得单位球紧呢, 弱拓扑就是这样一个拓扑

Theorem 36 (Banach-Alaoglu).

若 X 为一 Banach 空间, 则

$$\overline{B_1(0_{X^*})} \subset X^*$$

依 X^* 上的弱对偶拓扑是紧的

这个证明太烦人了有空再看

Banach 代数

考虑 Banach 空间的自线性映射 $\mathcal{B}(X)$, 我们知道它本身是一个 Banach 空间, 并且其中有自然的乘法即映射复合, 并且

$$\|AB\|_{\text{op}} \leq \|A\|_{\text{op}} \|B\|_{\text{op}}$$

从中可以抽象出一个代数结构

Definition 37 (Banach 代数).

一个 Banach 代数是指一个 Banach 空间 \mathcal{A} 配上一个乘法运算 $\mathcal{A}^2 \rightarrow \mathcal{A}$ 使得

- 与加法和数乘分别有结合律

- 其范数满足次可乘性

$$\forall a, b \in \mathcal{A}, \|ab\| \leq \|a\| \|b\|$$

- 存在乘法单位元

$$\exists 1 \in \mathcal{A} : \forall a, a1 = 1a = a$$

好, 现在数数我们都在这东西上叠了多少结构了:

- 一个范数
- 一个拓扑 (由范数引出)
- 一个线性 (加法和数乘, 都是连续的)
- 一个乘法 (由次可乘性连续)

Examples:

- L^p 空间配上逐点相乘
- 连续函数在 L^∞ 范数意义下构成的空间配上逐点相乘

总之还是得研究这个代数的性质, 这个乘法不交换, 所以要讨论左逆和右逆, 容易证明左逆和右逆同时存在则相等, 我们记 \mathcal{A} 中的可逆元为 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$,

利用完备性我们能得到一个有趣性质

Proposition 38.

$$x \in \mathcal{A}$$

$$\|x - 1\| < 1 \iff x^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (1 - x)^n$$

且

$$\|x^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|1 - x\|}$$

Proof.

$$x \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N (1 - x)^n \xrightarrow{\text{乘法连续}} \lim_{N \rightarrow \infty} x \sum_{n=0}^N (1 - x)^n = 1 - \lim_{N \rightarrow \infty} (1 - x)^{N+1} = 1$$

下面研究可逆元素整体的性质

□

Proposition 39.

$\mathcal{G}_{\mathcal{A}} \in \text{Open}(\mathcal{A})$ 且 $a \mapsto a^{-1}$ 为一同胚

Proof.

开集的证明: 往证 $B_{\|a^{-1}\|^{-1}}(a) \subset \mathcal{G}_{\mathcal{A}}$, 对于 $\tilde{a} \in B_{\|a^{-1}\|^{-1}}(a)$

$$\|\tilde{a} - a\| \leq \|a^{-1}\|^{-1} \Rightarrow \|a^{-1}\tilde{a} - \mathbb{1}\| < 1$$

从而 $a^{-1}\tilde{a}$ 可逆

$$\underbrace{(a^{-1}\tilde{a})^{-1}a^{-1}\tilde{a}}_{\tilde{a}^{-1}} = \mathbb{1}$$

说明 \tilde{a} 有左逆, 同理有右逆. 并且

$$\|\tilde{a}^{-1}\| \leq \|a^{-1}\| \|\tilde{a}a^{-1}\| \leq \|a^{-1}\| \frac{1}{1 - \|\tilde{a}a^{-1} - \mathbb{1}\|} \leq \frac{\|a^{-1}\|}{1 - \|a^{-1}\| \|\tilde{a} - a\|}$$

另外由于

$$a^{-1}(b - a)b^{-1} = a^{-1} - b^{-1}$$

得到

$$\begin{aligned} \|a^{-1} - \tilde{a}^{-1}\| &\leq \|a^{-1}\| \|a - \tilde{a}\| \|\tilde{a}^{-1}\| \\ &\leq \frac{\|a^{-1}\|^2 \|a - \tilde{a}\|}{1 - \|a^{-1}\| \|a - \tilde{a}\|} \end{aligned}$$

观察这个函数就知道取逆是个连续映射了, 从而是个同胚.

□

再补充一个其实应该出现在线性代数里的命题

Proposition 40.

$a, b \in \mathcal{A}$

$$\mathbb{1} - ab \in \mathcal{G}_{\mathcal{A}} \iff \mathbb{1} - ba \in \mathcal{G}_{\mathcal{A}}$$

Proof.

断言

$$(\mathbb{1} - ab)^{-1} = \mathbb{1} + b(\mathbb{1} - ab)^{-1}a$$

因为

$$\begin{aligned} (\mathbb{1} - ba)(\mathbb{1} + b(\mathbb{1} - ab)^{-1}a) &= \mathbb{1} - ba + b(\mathbb{1} - ab)^{-1}a - bab(\mathbb{1} - ab)^{-1}a \\ &= \mathbb{1} - ba + b(\mathbb{1} - ab)^{-1}a - b(ab - \mathbb{1} + \mathbb{1})(\mathbb{1} - ab)^{-1}a \\ &= \mathbb{1} - ba + b(\mathbb{1} - ab)^{-1}a - b((\mathbb{1} - ab)^{-1} - \mathbb{1})a \\ &= \mathbb{1} - ba + b(\mathbb{1} - ab)^{-1}a + ba - b(\mathbb{1} - ab)^{-1}a \\ &= \mathbb{1} \end{aligned}$$

□

这个形其实很像谱, 后续将在 [Lemma 53](#) 中应用之

Banach 空间值解析函数

这一段里我们把原本复分析中的像空间换成 Banach 空间, 可以发现原有的一堆性质仍然保留, 首先定义可微

Definition 41 (可微 Banach 空间值解析函数).

令 X 为一 Banach 空间, $\Omega \subset \mathbb{C}$ 为一连通开集, 称函数

$$f: \Omega \rightarrow X$$

- 在点 z_0 复可微, 是指极限

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + z) - f(z_0)}{z}$$

在 X 范数诱导的拓扑意义下存在, 并且若函数全 Ω 可微, 记其值为 $f': \Omega \rightarrow X$

- 在点 z_0 Frechet 可微, 如果存在线性函数 $L: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ 满足

$$\lim_{\|z\| \rightarrow 0} \frac{\|f(z_0 + z) - f(z_0) - Lz\|}{\|z\|} = 0$$

- 弱可微, 是指对任意 $\Lambda \in X^*$, $\Lambda \circ f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ 复可微

Claim: 对于 \mathbb{C} Banach 空间, 上述三种定义等价, 对于 \mathbb{R} -Banach 空间, 弱可微与复可微等价, 但是不与 Frechet 可微等价.

相应的, 我们也可以定义 Banach 空间值函数的 Riemann 积分, 对于任意分割 P_n

$$\int_{[a,b]} f = \lim_{P_n} \sum_{j=1}^n (x_j - x_{j-1}) f(x_j)$$

类似微积分中的做法, 右侧这个极限良定当且仅当抖动

$$\omega(f, P) := \sum_{j=1}^n (x_j - x_{j-1}) \sup\{f(s) - f(t) : s, t \in (x_{j-1}, x_j)\}$$

可以被控制得任意小, 另外一个专属 Banach 空间的做法:

Theorem 42.

若函数 $f: [a, b] \rightarrow X$ 是连续的, 则对任意 $\lambda \in X^*$, $\lambda \circ f: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ 是 Riemann 可积的并且

$$\lambda \int f = \int \lambda \circ f$$

相对的, 若存在 $\psi \in X$ 满足

$$\forall \lambda \in X^*, \lambda \psi = \int \lambda \circ f$$

则

$$\psi = \int f$$

Proof.

正向的证明需要两步操作, 一个是把两边积分的分割互相插入对方, 另一个是利用 λ 的连续性交换次序, 逆向是显然的.

□

这是把 \mathbb{C} 上的条件搬到 Banach 空间的理论基础

利用这个可以在这上定义围道积分, 然后把复分析那一套拿过来

Definition 43.

对于逐段光滑函数 $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, 定义 $f : \mathbb{C} \rightarrow X$ 的围道积分为

$$\int_{\gamma} f := \int_{[a,b]} (f \circ \gamma) \gamma'$$

如果后者是 Riemann 可积的, 那么就将其值定义为 f 沿 γ 的围道积分

利用 Banach 空间的范数可以把复分析那一套东西直接搬过来

Lemma 44 (ML lemma).

$f : \mathbb{C} \rightarrow X$ 连续, 且 $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ 逐段光滑, 则

$$\left\| \int_{\gamma} f \right\| \leq \sup_{t \in [a,b]} \|f(\gamma(t))\|_X L(\gamma)$$

Theorem 45 (Cauchy 积分公式).

$\Omega \subset \mathbb{C}$ 为一单连通集, $f : \Omega \rightarrow X$ 在其上 \mathbb{C} -可微, 则对任意单连通闭曲线 $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$, 若 z_0 在 γ 内部

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{(z - z_0)^{n+1}} f(z) dz$$

Proof.

类比复分析, 只需证明 $n = 0$ 的情况, 取 $\lambda \in X^*$, 则 $\lambda \circ f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ 为 \mathbb{C} -可微, 从而

$$(\lambda \circ f)(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} (\lambda \circ f)(z) dz$$

对任意 λ 满足, 则由 Theorem 42 可知结论成立, 同理可推广到

□

那自然就有 Cauchy 不等式

$$\|f^{(n)}(z_0)\|_X \leq \frac{n!}{R^n} \sup_{z \in B_R(z_0)} \|f(z)\|_X$$

以及

Theorem 46 (Banach 空间值解析函数的 Liouville 定理).

令 X 为一 Banach 空间, $f: \mathbb{C} \rightarrow X$ 为一弱整函数, 并且 $f(\mathbb{C})$ 为一弱有界函数, 则 f 为常值

Proof.

条件就是说对任意 $\Lambda \in X^*$, $\Lambda \circ f$ 为整函数和有界函数, 从而是常值函数, 这就是说

$$\Lambda \circ f(z) = \Lambda \circ f(0_{\mathbb{C}}), \forall \Lambda \in X^*$$

而对任意 $z: f(z) - f(0) \neq 0$, 取一在 $f(z) - f(0) \neq 0$ 上非零的对偶即可得到矛盾.

□

这或许是对偶空间对原始空间的控制的一例

谱

谱是 Banach 代数的主要概念, 此处 \mathbb{C} 和 \mathbb{R} -Banach 空间的性质有所不同, 我们主要关注复的情形

Definition 47 (谱).

记 \mathcal{A} 为一 Banach 代数, $\forall a \in \mathcal{A}$ 记 $\sigma(a) \subset \mathbb{C}$ 为 a 的谱:

$$\sigma(a) := \{z \in \mathbb{C} \mid (a - z1) \notin \mathcal{G}_{\mathcal{A}}\}$$

其补集 $\rho := \mathbb{C} \setminus \sigma(a)$ 记作 a 的 resolvent 集, $r(a) = \sup |\sigma(a)|$ 称为 a 的谱半径

其重要性质是

Theorem 48.

$\forall a \in \mathcal{A}$, $\sigma(a)$ 为 \mathbb{C} 的一非空紧子集

\mathbb{C} 上的紧子集无非是有界闭集, 所以我们实际上要证三件事: 闭集, 有界, 和非空.

Proof.

闭集: 考虑函数

$$\begin{aligned} \varphi: \mathbb{C} &\rightarrow \mathcal{A} \\ z &\mapsto a - z1 \end{aligned}$$

则 φ 是个连续函数, 而 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 为一开集, 则 $\rho(a) = \varphi^{-1}(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$ 为一开集, 从而其补集 $\sigma(a)$ 为闭集

有界: 往证 $r(a) \leq \|a\|$, 这是因为

$$\forall z: |z| > \|a\|, \|1 - (1 - \frac{a}{z})\| < 1 \Rightarrow (1 - \frac{a}{z}) \text{ 可逆} \Rightarrow a - z1 \text{ 可逆}$$

从而 $\varphi(B_{\|a\|}^c(0_{\mathbb{C}})) \subset \rho(a) \Rightarrow \sigma(a) \subset B_{\|a\|}(0_{\mathbb{C}})$

非空: 若 $\sigma(a) = \emptyset$, 则 $\rho(a) = \mathbb{C}$

$$\begin{aligned}\psi : \rho(a) &\rightarrow \mathcal{A} \\ z &\mapsto (a - z\mathbb{1})^{-1}\end{aligned}$$

我们断言 ψ 是复可微的, 因为 ^[1]

$$\begin{aligned}\psi'(z_0) &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\psi(z + z_0) - \psi(z_0)}{z} \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{(a - (z + z_0)\mathbb{1})^{-1} - (a - z_0\mathbb{1})^{-1}}{z} \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{(a - z_0\mathbb{1})^{-1}((a - z_0\mathbb{1}) - (a - (z + z_0)\mathbb{1}))(a - (z + z_0)\mathbb{1})^{-1}}{z} \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} (a - z_0\mathbb{1})^{-1}(a - (z + z_0)\mathbb{1})^{-1} \\ &= \psi^2(z_0)\end{aligned}$$

并且 ψ 是有界的, 因为对 $|z| > \|a\|$, 有

$$\begin{aligned}\|\psi(z)\| &= \|(a - z\mathbb{1})^{-1}\| \leq |z|^{-1} \left\| \left(\frac{a}{z} - \mathbb{1} \right)^{-1} \right\| \\ &\leq \frac{|z|^{-1}}{1 - \|a/z\|} \rightarrow 0 \quad \text{as } |z| \rightarrow \infty\end{aligned}$$

而 $\forall \lambda, |\lambda \circ \psi(z)| \leq \|\lambda\|_{\text{op}} \|\psi(z)\|$ 从而若 ψ 为整函数由 Banach 空间值解析函数的 Liouville 定理 立刻知 ψ 为常数, 这与刚刚的计算相矛盾

□

下一个概念是谱范数的逼近

Theorem 49 (Gelfand 公式).

$\forall a \in \mathcal{A}$, 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \|a^n\|^{1/n}$ 存在, 且

$$r(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|a^n\|^{1/n} = \inf \|a^n\|^{1/n}$$

Proof.

注意到数列 $b_n := \log \|a^n\|$ 是次可加的, 即

$$b_{n+m} = \log \|a^{m+n}\| \leq \log(\|a^n\| \|a^m\|) = b_n + b_m$$

那么 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} b_n = \inf \frac{1}{n} b_n$ 存在, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} \|a^n\|^{1/n} = \inf \|a^n\|^{1/n}$ 存在, 这部分的证明是平凡的.

首先证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \|a_n\|^{1/n} \geq r(a)$, 若 $z \in \sigma(a)$, 则

$$z^n \mathbb{1} - a^n = (z\mathbb{1} + a)(z^{n-1}\mathbb{1} + \cdots + a^{n-1})$$

也不可逆 ^[2], 于是 $|z^n| \leq \|a^n\|$, 从而 $r(a) \leq \inf \|a^n\|^{1/n}$

下面证明另一个方向, 借助上一证明中定义的 ψ , 考虑

$$\psi(z) = (a - z\mathbb{1})^{-1} = - \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n-1} a^n$$

在 $|z| > \|a\|$ 一致收敛, 从而可以利用 Cauchy 公式

$$\begin{aligned}
\int_{|z|=R} z^m \psi(z) dz &= - \int_{|z|=R} \sum_{n \geq 0} z^{m-n-1} a^n dz \\
&= - \sum_{n \geq 0} a^n \int_{|z|=R} z^{m-n-1} dz \\
&= - \sum_{n=0}^{\infty} a^n 2\pi i \delta_{n,m} \\
&= -2\pi i a^m
\end{aligned}$$

从而

$$a^n = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} z^n \psi(z) dz \quad (R > \|a\|; n \in \mathbb{N}^+)$$

而我们知道 $\sigma(a) \subset B_{\|a\|}(0_{\mathbb{C}})$, 这说明 $r(a) < \|a\|$, 而 ψ 在 $|z| > r(a)$ 上调和, 从而可以把围道换成

$$a^n = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} z^n \psi(z) dz \quad (R > r(a); n \in \mathbb{N}^+)$$

两边取范数

$$\|a^n\| \leq R^{n+1} \sup_{|z|=R} \|\psi(z)\| \quad (R > r(a))$$

对 n 取极限

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|a^n\| \leq r(a)$$

Theorem 50 (Gelfand-Mazur).

若 \mathcal{A} 为一 Banach 代数且 $\mathcal{A} \setminus \{0\} \subset \mathcal{G}_{\mathcal{A}}$, 则 \mathcal{A} 等测度同构于 \mathbb{C}

Proof.

因为 $\sigma(a)$ 非空, 则其即为原点的独点集, 从而对任意 $a \in \mathcal{A}$, 存在 $z \in \mathbb{C} : a - z1 = 0 \Rightarrow a = z1$, 则这个同构就是 $z \mapsto z1$.

Lemma 51.

$$\mathcal{G}_{\mathcal{A}} \ni x_n \rightarrow x \in \partial \mathcal{G}_{\mathcal{A}} \Rightarrow \|(x_n)^{-1}\| \rightarrow \infty$$

Proof.

考虑

$$\|1 - (x_n)^{-1}x\| = \|(x_n)^{-1}(x_n - x)\| \leq \|(x_n)^{-1}\| \|x_n - x\|$$

若小于 1 则 $(x_n)^{-1}x$ 可逆, 进而 $x \in \mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 产生矛盾, 而 $\|(x_n - x)\|$ 是个逼近 0 的东西, 所以 $\|(x_n)^{-1}\|$ 必然不能有界

Theorem 52 (谱的连续性).

若 $a \in \mathcal{A}$, 且 $\sigma(a) \subset \Omega \in \text{Open}(\mathbb{C})$, 若 b 满足

$$\|b - a\| \leq \left(\sup_{z \in \Omega^c} \|(a - z\mathbb{1})^{-1}\| \right)^{-1}$$

则 $\sigma(b) \subset \Omega$

Proof.

对任意 $z \in \Omega^c$

$$b - z\mathbb{1} = \underbrace{(a - z\mathbb{1})}_{\text{可逆}} \underbrace{((a - z\mathbb{1})^{-1}(b - a) + \mathbb{1})}_h$$

则要令 h 可逆只需

$$\begin{aligned} \|(a - z\mathbb{1})^{-1}(b - a)\| &\leq \|(a - z\mathbb{1})^{-1}\| \|b - a\| \leq 1 \\ \iff \|b - a\| &\leq \left(\sup_{z \in \Omega^c} \|(a - z\mathbb{1})^{-1}\| \right)^{-1} \end{aligned}$$

换句话说, 函数 σ 是 "连续" 的

□

Lemma 53.

$\forall a, b \in \mathcal{A}$

$$\sigma(ab) \setminus \{0\} = \sigma(ba) \setminus \{0\}$$

这是 [Proposition 40](#) 的直接推论

调和函数微积分

我们先在 Banach 空间上构建多项式函数

$$\begin{aligned} \chi_a : \mathcal{P} &\rightarrow \mathcal{A} \\ p &\mapsto p(a) = \sum_{j=1}^n c_j z^j \end{aligned}$$

这个映射称为函数微积分, 某种意义上讲, 泛函分析的任务就是在函数空间中逐渐定义更广泛的函数微积分, 相应的, 我们也需要逐渐加强对函数空间的要求. 其高潮是 Hilbert 空间上正规算子的谱定理.

下面我们把这个多项式变成幂级数, 就能得到调和函数微积分:

$$f(a) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n a^n$$

这里要处理的问题有

- 若 f 不是整函数, 上述表述未必成立
- 后面那个幂级数的收敛问题

我们先回忆幂级数的一般理论, 假设一函数在 $B_R(0_{\mathbb{C}})$ 上调和, 则可以将 f 写成

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

则若 $r(a) < R$, 由谱半径公式

$$\left\| \sum_{n=N}^M c_n a^n \right\| \leq \sum_{n=N}^M |c_n| \left(\|a^n\|^{1/n} \right)^n \underset{N \gg 1}{\leq} \sum |c_n| R^n$$

从而幂级数 Cauchy, 由完备性收敛

但是这对调和函数的要求其实很高, 我们像拿到更小的调和要求, 我们先给这个函数戳几个洞, 考虑有理函数

Theorem 54.

记 $a \in \mathcal{A}$, $\alpha \in \rho(a)$, $\Omega := \mathbb{C} \setminus \alpha$. 取出一些包裹 $\sigma(a)$ 的可定向曲线 $\gamma_{1 \sim m} : [a, b] \rightarrow \Omega$ 使得

$$\frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^m \int_{\gamma_j} \frac{1}{z - \lambda} dz = \begin{cases} 1 & \lambda \in \sigma(a) \\ 0 & \lambda \in \Omega^c \text{ or } \lambda = \alpha \end{cases}$$

则

$$\frac{1}{2\pi i} \sum \int_{\gamma_j} (\alpha - z)^n (z\mathbb{1} - a)^{-1} dz = (\alpha\mathbb{1} - a)^n \quad n \in \mathbb{Z}$$

rmk: 可以想见这些曲线大概就是 " $\sigma(a)$ 中的一个点只被一个曲线圈进去" 的曲线, 其存在性由 $\sigma(a)$ 是非空紧集保证, 构造大概是切成足够小的小方格套住 K , 再把所有和 K 交集非空的小方块边界全部定向的并起来 (这样避开了讨论 "套住" 这个不好定义的概念)

Proof.

首先证 $n = 0$ 的情形, 即

$$\frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^m \int_{\gamma_j} (z\mathbb{1} - a)^{-1} dz = \mathbb{1}$$

把这些曲线并起来简写成

$$\int_{\Gamma} \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n-1} a^n = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \int_{\Gamma} z^{-n-1} dz = \mathbb{1} \int_{\Gamma} \frac{1}{z} dz = 2\pi i \mathbb{1}$$

(事实上因为 $z \mapsto (a - z\mathbb{1})^{-1}$ 在 $\rho(a)$ 上全纯, 这一步的 Γ 实际上是把 $\sigma(a)$ 圈进来的一条大曲线)

后续其实就是一些符号计算, 记

$$y_n := \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (a - z)^n (z\mathbb{1} - a)^{-1} dz$$

并证明

$$(z\mathbb{1} - \alpha)^{-1}y_n = y_{n+1}$$

同时应用观察

$$\begin{aligned}(z\mathbb{1} - a)^{-1} - (\alpha\mathbb{1} - a)^{-1} &= (\alpha\mathbb{1} - a)^{-1}((\alpha\mathbb{1} - a) - (z\mathbb{1} - a))(z\mathbb{1} - a)^{-1} \\ (z\mathbb{1} - \alpha)^{-1} &= (\alpha\mathbb{1} - a)^{-1} + (\alpha - z)(\alpha\mathbb{1} - a)^{-1}(z\mathbb{1} - a)^{-1}\end{aligned}$$

带入得到

$$\begin{aligned}y_n &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (a - z)^n (z\mathbb{1} - a)^{-1} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (a - z)^n ((\alpha\mathbb{1} - a)^{-1} + (\alpha - z)(\alpha\mathbb{1} - a)^{-1}(z\mathbb{1} - a)^{-1}) dz \\ &= \frac{(\alpha\mathbb{1} - a)^{-1}}{2\pi i} \left(\underbrace{\int_{\Gamma} (\alpha - z)^n dz}_{=0} + \int_{\Gamma} (\alpha - z)^{n+1} (z\mathbb{1} - a)^{-1} dz \right) \\ &= (\alpha\mathbb{1} - a)^{-1} y_{n+1}\end{aligned}$$

□

直接带入可知

Corollary 55.

对有理函数

$$R(z) = \underbrace{p(z)}_{\text{多项式}} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^q c_{i,j} (z - z_i)^{-j}$$

以及 $a \in \mathcal{A}$, $\sigma(a) \subset \Omega \in \text{Open}(\mathbb{C})$, R 在 Ω 上全纯, 若有一簇曲线 $\gamma_k : [a, b] \rightarrow \Omega$, $k = 1, \dots, m$, 使得

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{1}{z - \lambda} dz = \begin{cases} 1 & \lambda \in \sigma(a) \\ 0 & \lambda \notin \Omega \end{cases}$$

则

$$R(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} R(z) (z\mathbb{1} - a)^{-1} dz$$

这就是有理函数的 Cauchy 公式, 下面证明调和函数的版本

Theorem 56 (调和函数微积分).

$a \in \mathcal{A}$, $\sigma(a) \subset \Omega \subset \text{Open}(\mathbb{C})$, 一簇可定向曲线 $\gamma_j : [a, b] \rightarrow \Omega$, $j = 1, \dots, m$ 满足

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{1}{z - \lambda} dz = \begin{cases} 1 & \lambda \in \sigma(a) \\ 0 & \lambda \notin \Omega \end{cases}$$

则对任意 $f \in H(\Omega)$,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(z)(z\mathbb{1} - a)^{-1} dz = f(a)$$

这是一个含么代数单同态:

- $f(a)g(a) = (fg)(a), f(a) + g(a) = (f + g)(a)$
- $(z \mapsto 1)(a) = \mathbb{1}, (z \mapsto z)(a) = a$
- 连续性体现在若有 Ω 的紧子集 K 上 $f_n \xrightarrow{\text{uni}} f$, 则依范数 $f_n(a) \rightarrow f(a)$

Proof.

我们已经证明过 $z \mapsto (z\mathbb{1} - a)^{-1}$ 为 $\rho(a)$ 上的一调和函数, 从而式子左边可积

下一步是说明 $f \mapsto f(a)$ 为单射, 我们需要讨论这一映射的核, 由积分公式

$$\begin{aligned} f(a) = 0 &\Rightarrow \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(z)(z\mathbb{1} - a)^{-1} dz = 0 \\ &\Rightarrow \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(z)(z\mathbb{1} - \lambda\mathbb{1})^{-1} dz = 0 \quad (\lambda \in \sigma(a)) \end{aligned}$$

#todo

□

从而我们知道 $f(a)g(a) = g(a)f(a)$, 即单个算子的函数乘法交换, 这也是我们把 a 直接带入 f 的理论依据, 否则可以想见把一个本来作用在交换的东西上的函数作用在不叫唤的东西上本身就会导致一堆问题

调和函数微积分的一些其它性质, 其实也是线代就见过的东西

Lemma 57.

$a \in \mathcal{A}, \sigma(a) \subset \Omega \in \text{Open}(\mathbb{C}), f \in \mathcal{H}(\Omega)$

$$f(a) \in \mathcal{G}_{\mathcal{A}} \iff 0 \notin f(\sigma(a))$$

Proof.

$$0 \notin f(\sigma(a)) \Rightarrow g := \frac{1}{f} \in \bigcup_{\substack{\sigma(a) \subset \tilde{\Omega} \subset \Omega \\ \text{open}}} \mathcal{H}(\tilde{\Omega}) \Rightarrow f(a)g(a) = \mathbb{1} \Rightarrow f(a) \in \mathcal{G}_{\mathcal{A}}$$

相对的

$$\begin{aligned} \alpha \in \sigma(a) : f(\alpha) = 0 &\Rightarrow f(\lambda) = h(\lambda)(\lambda - \alpha), h \in \mathcal{H}(\Omega) \\ &\Rightarrow f(a) = (a - \alpha\mathbb{1})h(a) = h(a)(a - \alpha\mathbb{1}) \\ (\alpha \in \sigma(a) \Rightarrow a - \alpha\mathbb{1} \text{ 不可逆}) &\Rightarrow f(a) \notin \mathcal{G}_{\mathcal{A}} \end{aligned}$$

Theorem 58 (谱映射定理).

□

$$\sigma(f(a)) = f(\sigma(a)) \equiv \{f(z) : z \in \sigma(a)\}$$

Proof.

by Lemma 57

$$\begin{aligned}
 z \in \sigma(f(a)) &\iff f(a) - z\mathbb{1} \notin \mathcal{G}_{\mathcal{A}} \\
 &\iff 0 \in \text{Im}((\sigma(a) \ni \lambda \mapsto f(\lambda) - z)|_{\sigma(a)}) \\
 &\iff z \in \text{Im}((\sigma(a) \ni \lambda \mapsto f(\lambda))|_{\sigma(a)}) \\
 &\iff z \in f(\sigma(a))
 \end{aligned}$$

Lemma 59.

$a \in \mathcal{A}$, $\sigma(a) \subset \Omega \in \text{Open}(\mathbb{C})$, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, $f(\sigma(a)) \subset \tilde{\Omega} \in \text{Open}(\mathbb{C})$, $g \in \mathcal{H}(\tilde{\Omega})$

$$g(f(a)) = (g \circ f)(a)$$

Proof.

套两次调和函数微积分

$$\begin{aligned}
 g(f(a)) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} g(z)(z\mathbb{1} - f(a))^{-1} dz \\
 (z\mathbb{1} - f(a))^{-1} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{\Gamma}} (z - f(\zeta))^{-1}(a - \zeta\mathbb{1})^{-1} d\zeta \\
 g(f(a)) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} g(z) \frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{\Gamma}} (z - f(\zeta))^{-1}(a - \zeta\mathbb{1})^{-1} d\zeta dz \\
 (\text{一致收敛}) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{\Gamma}} \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} g(z)(z - f(\zeta))^{-1} dz}_{g(f(\zeta)) = g \circ f(\zeta)} (a - \zeta\mathbb{1})^{-1} d\zeta \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{\Gamma}} (g \circ f)(\zeta)(a - \zeta\mathbb{1})^{-1} d\zeta \\
 &\equiv (g \circ f)(a)
 \end{aligned}$$

当然这里需要判断 $(z - f(\zeta))^{-1} \in \mathcal{H}(\Omega)$, 这是因为 $z \in \tilde{\Omega} \setminus f(\sigma(a))$.

一个在实践中反复应用的例子是

Theorem 60.

$a \in \mathcal{A}$, $\sigma(a)$ 不将 0 和 ∞ 分离, 则 $\log(a) \in \mathcal{A}$, 且 $a = \exp \log(a)$

1. 这里我看的 notes 似乎带错数, 和我算的相反, 当然也不排除我唐了, 暂且写成个注在这里. 一个不用具体计算的证法是关注 (以及 Lax 的泛函这里也差个符号, 我越发觉得是我唐了)

$$(z - h - a)^{-1} = \sum_{n \geq 0} (z - a)^{-n-1} h^n$$

在 $|h| < |(z - a)^{-1}|^{-1}$ 时后者收敛 \Leftarrow

2. 注意在无穷维时 a, b 分别不可逆并不意味着 ab 不可逆, 考虑把所有的基向量排列在 \mathbb{N} 上, 向右迁移 k 位和向左迁移 k 位的线性泛函分别是不可逆的, 但复合起来是 1 , 而此处可以进行此论断是因为这里的两个因子是可交换的. \leftarrow