

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования «Воронежский государственный университет»

**Лабораторный практикум по курсу
«Цифровая обработка сигналов»**

Лабораторная работа №1.1

**«Дискретизация непрерывных сигналов.
Дискретное преобразование Фурье (ДПФ).
Утечка ДПФ. Окна.»**

Воронеж, 2019

Введение

В самом общем смысле термин *обработка сигналов* обозначает область науки, которая занимается анализом физических процессов, изменяющихся во времени. И как таковая, обработка сигналов делится на две ветви: аналоговую обработку сигналов и цифровую обработку сигналов.

Термин *аналоговый* используется для описания сигналов, которые непрерывны во времени и могут принимать значения из непрерывных диапазонов времени и значений. Примером аналогового сигнала является некоторое напряжение, которое мы можем подать на вход осциллографа, в результате чего на экране мы увидим непрерывную кривую как функцию времени. Аналоговый сигнал можно также подать на анализатор спектра, чтобы определить его частотный состав. Термин *аналоговый*, происходит из области аналоговых компьютеров, использовавшихся до начала 80-х. Эти компьютеры решали линейные дифференциальные уравнения с помощью электронных дифференциаторов и интеграторов.

Поскольку современная обработка сигналов с использованием резисторов, конденсаторов, операционных усилителей и т. п. имеет мало общего с аналоговыми компьютерами, термин *аналоговый* сегодня является не совсем удачным. Более корректным было бы называть *непрерывной обработкой сигналов* то, что мы сегодня обычно называем аналоговой обработкой сигналов.

Термин *дискретный сигнал* используется для обозначения сигнала, переменная времени которого квантована, так что мы знаем значения сигнала только в дискретные моменты времени. Таким образом, дискретный сигнал представляется не непрерывной кривой, а набором значений.

Кроме квантования по времени, дискретные сигналы квантуются так же и по значению. Рассмотрение эффектов связанных с квантованием аналоговых сигналов как по *времени* так и по *значению* необходимо для понимания основных принципов цифровой обработки сигналов.

Дискретные последовательности.

Представим себе непрерывный синусоидальный сигнал с амплитудой, равной 1, и частотой f_0 , описываемый уравнением

$$x(t) = \sin(2\pi f_0 t) \quad (1)$$

Изобразив (1) в виде графика, мы получаем известную синусоидальную кривую, показанную на рисунке 1 (а).

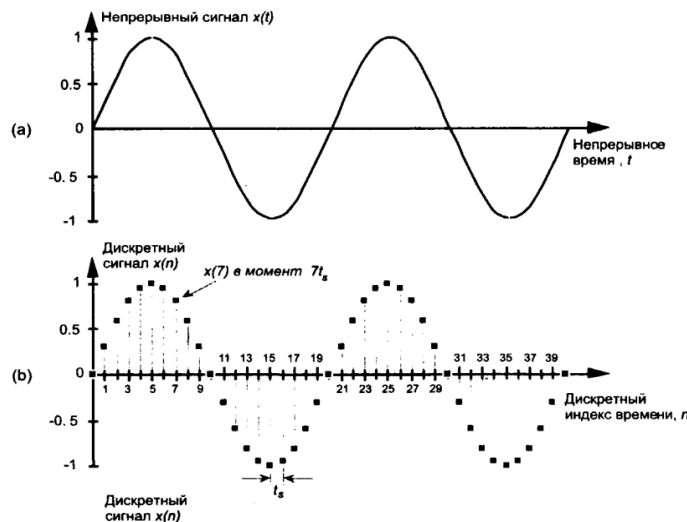


Рис.1. Синусоидальный сигнал во временной области: (а) представление непрерывного сигнала; (б) представление дискретного сигнала;

Если наш непрерывный сигнал физически представляет собой напряжение, мы можем *взять его отсчеты* по одному за каждые t_s секунд и представить синусоидальный сигнал в виде последовательности дискретных по времени значений. Изобразив эти значения как точки, мы получим дискретный сигнал, показанный на рисунке 1 (б). Мы говорим, что изображение на рисунке 1 (б), представляет собой «дискретную» версию непрерывного сигнала, показанного на рисунке 1 (а).

Заметим, что между отсчетами, изображенными на рисунке 1 (б) сигнал отсутствует. Независимая *индексная* переменная n на рисунке 1 (б) дискретна и может принимать только целые значения. Еще раз акцентируем внимание на том, что $x(n)$ — дискретная последовательность отдельных значений, и каждое значение изображается как отдельная точка.

Так же обратим внимание на то, что отсчеты дискретной версии сигнала имеют бесконечно точные значения, соответствующие значениям синусоиды на рисунке 1 (а). То есть квантования отсчетов по значению на данном этапе дискретизации проведено не было.

Значения отсчетов на рисунке 1 (б) можно представить выражением

$$x(n) = \sin(2\pi f_0 n t_s) \quad (2)$$

Дискретные системы.

Усвоив понятие дискретного сигнала, мы можем сказать, что дискретная система представляет собой набор аппаратурных компонентов или программных процедур, которые выполняют некоторые операции над дискретными сигналами.

Например, дискретная система может представлять собой процесс, который выдает выходную последовательность $y(0)$, $y(1)$, $y(2)$ и т. д., когда на его вход поступает дискретная входная последовательность $x(0)$, $x(1)$, $x(2)$ и т. д., как показано на рисунке 2 (а). Чтобы сделать наши обозначения краткими и сохранить контроль над индивидуальными элементами входной и выходной последовательностей, мы используем сокращенные обозначения, показанные на рисунке 2 (б), где n представляет собой целочисленную последовательность $0, 1, 2, 3$ и т. д. Таким образом, $x(n)$ и $y(n)$ являются обобщенными переменными, которые обозначают две разные последовательности чисел.

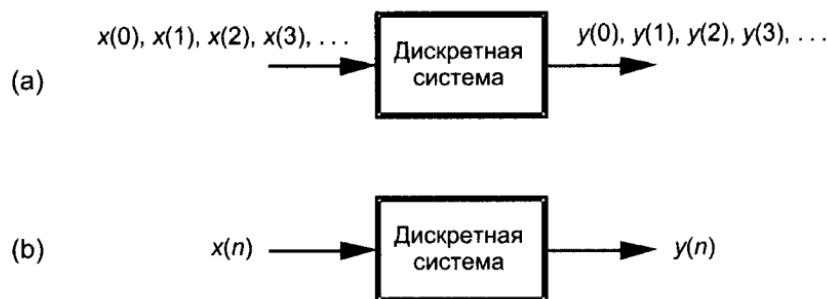


Рис.2. При подаче на вход дискретной системы сигнала система выдает выходной сигнал: (а) входной и выходной сигналы представляют собой последовательности отдельных значений; (б) входной и выходной сигналы обозначаются как $x(n)$ и $y(n)$

Фундаментальное различие в представлении времени в непрерывных и дискретных системах приводит к очень важному различию в том, как представляется частота в непрерывных и в дискретных системах. Чтобы показать это, рассмотрим непрерывный синусоидальный сигнал на рисунке 1 (а). Если бы он представлял напряжение между двумя проводами, мы могли бы измерить его частоту, подав его на вход осциллографа, анализатора спектра или частотомера. Однако если бы нам дали последовательность значений и попросили определить частоту сигнала, который представляется этими числами, мы столкнулись бы с проблемой. Мы построили бы график этих дискретных значений, мы распознали бы на этом графике один период синуса, как на рисунке 1 (б). Мы могли бы сказать, что сигнал повторяется каждые 20 отсчетов, но у нас нет никакого способа определить точное значение частоты только по дискретным отсчетам. Если бы мы знали интервал времени между отсчетами — *период дискретизации* — мы могли бы определить абсолютную частоту дискретного синусоидального сигнала. Таким образом в дискретных системах абсолютное значение частоты в Гц зависит от *частоты дискретизации* $f_s = 1/t_s$.

Периодическая дискретизация.

Периодическая дискретизация — процесс представления непрерывного сигнала последовательностью дискретных значений — используется во всех областях цифровой обработки сигналов. На практике дискретизация выполняется путем подачи непрерывного сигнала на вход аналого-цифрового преобразователя (АЦП), который выдает на выход последовательность цифровых значений. Поскольку теория дискретизации играет важную роль в определении точности и реализуемости любой схемы цифровой обработки сигналов, нам необходимо понимание эффектов периодической дискретизации. Первое, что необходимо выяснить в отношении дискретизации — как часто следует брать отсчеты непрерывного сигнала, чтобы сохранить содержащуюся в нем информацию.

Неоднозначность представление сигнала в частотной области.

Существует неоднозначность в частотной области, связанная с отсчетами дискретных сигналов, которая отсутствует в случае непрерывных сигналов.

Для примера предположим, что мы имеем последовательность значений, которые представляют мгновенные значения синусоидального сигнала во временной области на рисунке 3 (а), взятые через одинаковые интервалы времени.

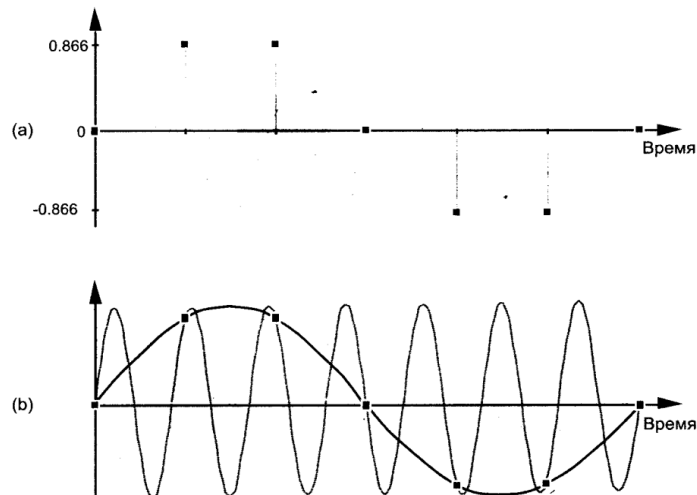


Рис.3. Частотная неоднозначность: (а) дискретная последовательность значений; (б) две разные синусоиды, которые проходят через точки, соответствующие отсчетам дискретной последовательности

Предположим мы хотим построить график исходного аналогового синусоидального сигнала, соответствующего данной дискретной последовательности.

Однако мы видим, что исходная последовательность с равной достоверностью могла бы представлять дискретизированные версии нескольких синусоид показанных на рисунке 2.1 (б) сплошной линией. Действительно

$$x(n) = \sin(2\pi f_0 n t_s) = \sin(2\pi f_0 n t_s + 2\pi m) = \sin(2\pi (f_0 + m/(n t_s)) n t_s),$$

учитывая $f_s = 1/t_s$, а также выбирая m кратным n , $m = kn$, мы можем заменить отношение m/n целочисленной переменной так, что получим

$$x(n) = \sin(2\pi f_0 n t_s) = \sin(2\pi (f_0 + k f_s) n t_s) \quad (3)$$

Выражение (3) одно из важнейших соотношений в области цифровой обработки сигналов. Фактически оно означает, что

При дискретизации с частотой f_s отсчетов в секунду мы не можем различить дискретизированные значения синусоиды частотой f_0 Гц и синусоиды частотой $f_0 + kf_s$ Гц, если k — любое положительное или отрицательное целое число.

Из данного вывода следует, что никакая последовательность значений, не может однозначно представлять одну и только одну синусоиду без дополнительной информации. Это положение в равной мере применимо к выходным отсчетам АЦП и к сгенерированным отсчетам дискретных сигналов. Дискретная природа любой последовательности значений приводит к тому, что эта последовательность представляет бесконечное количество разных синусоид.

Формула (3) оказывает влияние на все схемы цифровой обработки сигналов. Поскольку любой непрерывный сигнала в соответствии с преобразованием Фурье можно представить в виде суперпозиции синусоидальных сигналов, то фактически, спектр любой дискретной последовательности значений содержит периодически повторяющиеся копии исходного спектра непрерывного сигнала.

Период повторения этих копий спектра в частотной области всегда равен f_s , и периодический спектр простирается *от постоянной составляющей до бесконечности* в обоих направлениях частотной оси.

Дискретизация низкочастотных сигналов

Рассмотрим дискретизацию непрерывного действительного сигнала, спектр которого показан на рисунке 4 (а). Заметим, что спектр симметричен относительно частоты 0 Гц и его значения равны 0 для частот выше $+B$ Гц и ниже $-B$ Гц, т. е. это сигнал с ограниченным спектром.

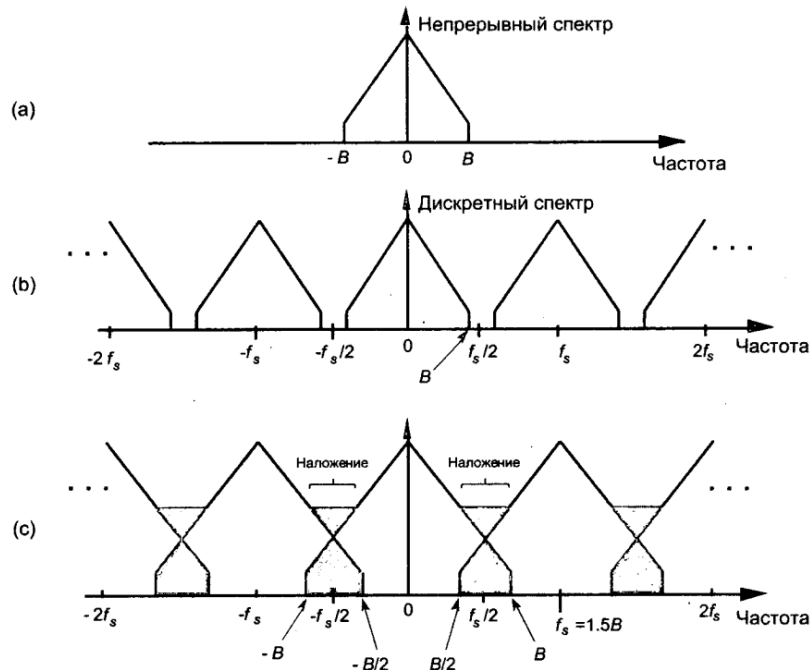


Рис.4. Размножение спектра: (а) спектр исходного непрерывного сигнала; (б) размножение спектра дискретного сигнала при $fs/2 > B$; (с) наложение частот при слишком низкой частоте дискретизации, для $fs/2 < B$

Как только сигнал представляется последовательностью дискретных значений, то в соответствии с сказанным выше, в частотной области его спектр принимает размноженную форму, показанную на рисунке 4 (б).

В практических схемах АЦП f_s всегда берется больше $2B$, чтобы оставить разделительный промежуток в районе частот $\pm f_s/2$. Это очень важное соотношение: $f_s > 2B$ — известно как **критерий Найквиста**.

Чтобы показать, почему критерий Найквиста так важен, понизим частоту дискретизации f_s . Спектральный результат такой дискретизации показан на рисунке 4 (с). Копии спектра теперь перекрывают исходный спектр. Ограничив наше внимание окрестностью частот $\pm f_s/2$ Гц, мы видим два очень интересных эффекта.

Во-первых, нижняя и верхняя границы копий спектра с центральными частотами $+f_s$ и $-f_s$ теперь лежат в интересующей нас полосе частот. Части копий спектра теперь взаимодействуют с исходным спектром, в результате чего появляются ошибки наложения (*aliasing*). Дискретные отсчеты, связанные со спектром, показанным на рисунке 4 (с), больше не представляют корректно исходный сигнал. Спектральная информация в полосах частот от $-B$ до $-B/2$ и от $B/2$ до B Гц искажена.

Второй эффект, иллюстрируемый рисунком 4 (с), состоит в том, что весь спектр исходного непрерывного сигнала сосредоточен в полосе частот между $-f_s/2$ и

$+f_s/2$. Это ключевое свойство показано на рисунке 4 (b) и будет иметь место всегда, независимо от дискретизируемого сигнала и частоты дискретизации. Этот эффект особенно важен, когда мы оцифровываем непрерывные сигналы. Любая энергия, расположенная выше $+B$ Гц и ниже $-B$ Гц в спектре исходного непрерывного сигнала, показанного на рисунке 4 (a), всегда после дискретизации окажется в интересующей нас полосе частот, независимо от частоты дискретизации. По этой причине на практике необходимы непрерывные (аналоговые) фильтры *нижних частот* (*antialiasing filter*).

Проиллюстрируем сказанное, показывая на рисунке 5 (a) непрерывный сигнал с шириной спектра B , сопровождаемый шумом. Дискретизация этой непрерывной смеси с частотой, которая превышает $2B$, позволяет избежать наложения копий спектра полезного сигнала, но вся энергия шума все равно попадает в диапазон частот между $-f_s/2$ и $+f_s/2$ нашего дискретного спектра, показанного на рисунке 5 (b)

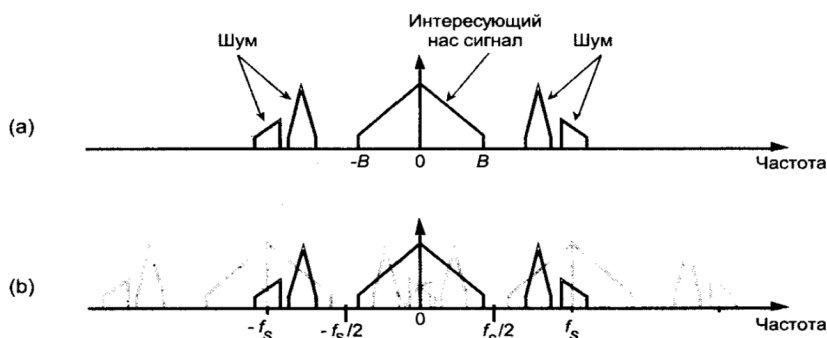


Рис.5. Размножение спектра: (a) спектр смеси сигнала с шумом; (b) спектр дискретного сигнала, в котором шум искажает полезный сигнал

Практически эта проблема решается применением аналогового *антиэлайзингового* фильтра нижних частот перед АЦП для уменьшения любой нежелательной энергии сигнала на частотах выше $+B$ и ниже $-B$ Гц, как показано на рисунке 6.

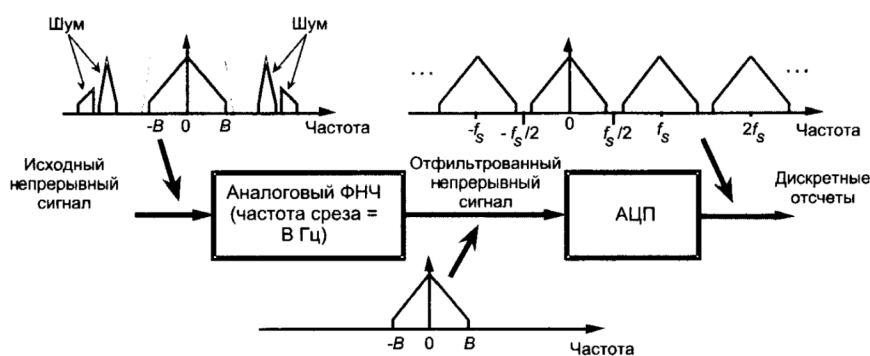


Рис.6. Низкочастотная фильтрация перед дискретизацией с частотой f_s Гц

Дискретизация полосовых сигналов

Хотя дискретизация низкочастотных сигналов, иллюстрируемая рисунком 6, удовлетворяет большинству требований, это не единственная схема дискретизации, используемая на практике. Для дискретизации непрерывных полосовых сигналов, центральные частоты которых отличны от нуля, мы можем использовать метод, известный как *полосовая дискретизация*. Когда ширина спектра и центральная частота непрерывного входного сигнала позволяют, полосовая дискретизация не только дает возможность снизить требуемое быстродействие АЦП по сравнению с традиционной низкочастотной дискретизацией, но и уменьшает объем памяти, необходимый для хранения сигнала на заданном интервале.

Мы используем термин *полосовая дискретизация* для процесса дискретизации непрерывных сигналов, центральные частоты которых отличны от 0 Гц. То, что мы называем *полосовой дискретизацией*, в литературе упоминается под различными другими названиями, такими как дискретизация ПЧ, гармоническая дискретизация, суб-найквистовская дискретизация и дискретизация с пониженной частотой.

В качестве примера рассмотрим дискретизацию сигнала с ограниченным спектром, показанного на рисунке 7 (а), с центральной частотой $f_c = 20$ МГц и шириной спектра $B = 5$ МГц.

В соответствии с критерием Найквиста (дискретизация с частотой, превышающей в 2 раза наивысшую частоту в спектре сигнала) частота дискретизации должна составлять не менее 45 МГц. Рассмотрим, что произойдет, если частота дискретизации будет равна 17.5 МГц, как показано на рисунке 7 (b).

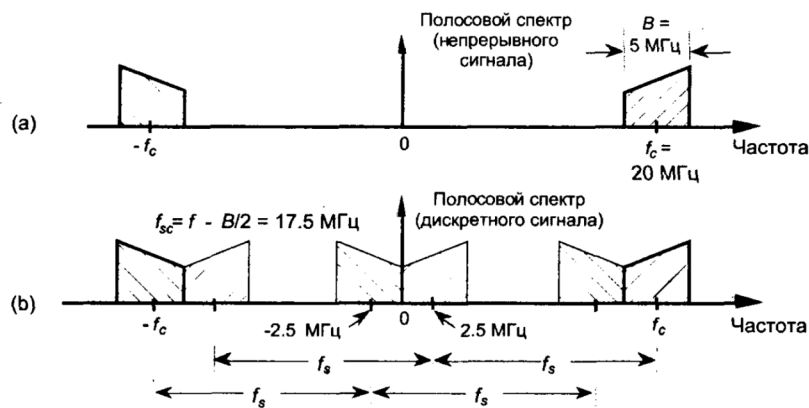


Рис.7. Дискретизация полосового сигнала: (а) спектр исходного непрерывного сигнала; (b) размножение спектра дискретизированного сигнала при частоте дискретизации 17.5 МГц.

Заметим, что исходные спектральные компоненты остаются на частотах $\pm f_c$, а копии спектра расположены в области низких частот, смыкаясь на нулевой частоте. Рисунок 7 (b) показывает, что для того, чтобы избежать наложений спектра, не нужна дискретизация с частотой 45 МГц — вместо этого мы используем эффект размножения спектра для достижения своей цели. Полосовая дискретизация выполняет оцифровку и перенос по частоте как один процесс, который часто называют *дискретизирующим переносом*.

Дискретное преобразование Фурье

Дискретное преобразование Фурье (ДПФ) - одна из двух наиболее распространенных и мощных процедур цифровой обработки сигналов. Дискретное преобразование Фурье позволяет анализировать, преобразовывать и синтезировать сигналы такими способами, которые невозможны при непрерывной (аналоговой) обработке. Хотя сегодня ДПФ используется практически во всех областях инженерной деятельности, мы увидим, что сфера его применения продолжает расширяться по мере того, как расширяется понимание его полезности. По этой причине Основательное понимание ДПФ необходимо всем, кто работает в области цифровой обработки сигналов.

ДПФ — это математическая процедура, используемая для определения гармонического, или частотного, состава дискретных сигналов. Хотя для нас дискретный сигнал представляет собой набор значений, полученных в результате периодической дискретизации непрерывного сигнала во временной области, мы увидим, что ДПФ полезно для анализа любых дискретных последовательностей, независимо от того, что на самом деле эти последовательности представляют.

Источком ДПФ, конечно же, является **непрерывное преобразование Фурье** $X(f)$, которое определяется как

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt \quad (3)$$

где $x(t)$ - некоторый непрерывный во временной области сигнал.

С приходом в нашу жизнь цифровых систем обработки информации преобразование Фурье так же было определено для дискретных сигналов, которое представляет собой дискретную последовательность $X(m)$, в частотной области. **Формула для ДПФ** определяется как

$$X(m) = \sum_0^{N-1} x(n) e^{-j2\pi n m / N} \quad (4)$$
$$X(m) = \sum_0^{N-1} x(n) [\cos(2\pi n m / N) - j \sin(2\pi n m / N)]$$

В нашем обсуждении формулы (4) $x(n)$ представляет собой дискретную последовательность значений, полученных дискретизацией во временной области непрерывной переменной $x(t)$.

Свойства ДПФ

Если мы представим произвольный отсчет ДПФ $X(m)$, как сумму действительной и мнимой частей:

$$X(m) = X_{real}(m) + jX_{imag}(m)$$

то амплитуда $X(m)$, вычисляется как

$$X_{mag}(m) = |X(m)| = \sqrt{(X_{real}(m))^2 + (X_{imag}(m))^2} \quad (5)$$

По определению, фазовый угол $X(m)$, $X_{\phi}(m)$, вычисляется как

$$X_{\phi}(m) = \tan^{-1} [X_{imag}(m) / X_{mag}(m)] \quad (6)$$

Мощность отсчетов $X(m)$, которая называется спектром мощности, представляют собой амплитуду, возведенную в квадрат

$$X_{mag}(m)^2 = X_{real}(m)^2 + X_{imag}(m)^2 \quad .$$

Фактически ДПФ показывает амплитудно частотную характеристику (АЧХ) и фазо частотную характеристику (ФЧХ) дискретного сигнала.

Свойства ДПФ:

- каждый выходной отсчет ДПФ есть сумма почленных произведений входной последовательности на последовательности, представляющие синусоидальный и косинусоидальный сигналы;
- для действительных сигналов N-точечное ДПФ дает только $N/2+1$ независимых отсчетов;
- ДПФ представляет собой линейную операцию;
- модули результатов ДПФ прямо пропорциональны N,
- разрешающая способность ДПФ по частоте составляет f_s/N
- сдвиг периодической последовательности $x(n)$ во времени проявляется в результатах ДПФ как добавка к их фазовым углам.

Хотя главной темой этой главы является ДПФ, сейчас уместно ввести **обратное дискретное преобразование Фурье (ОДПФ)**. Обычно мы считаем, что ДПФ преобразует данные временной области в представление в частотной области. Но мы можем обратить этот процесс и получить исходный сигнал во временной области, выполнив ОДПФ отсчетов $X(m)$ в частотной области. Стандартные выражения для ОДПФ имеют вид:

$$x(n) = (1/N) \sum_{m=0}^{N-1} X(m) e^{-j2\pi nm/N} \quad (7)$$

$$x(n) = (1/N) \sum_{m=0}^{N-1} X(m) [\cos(2\pi nm/N) - j \sin(2\pi nm/N)]$$

Утечка ДПФ

Необходимо отметить очень важный момент в понимании ДПФ. Дискретное преобразование Фурье дискретизированных сигналов реального мира дает в частотной области результаты, которые могут по началу сбивать с толку. Особенность ДПФ, известная как утечка, приводит к тому, что результаты ДПФ представляют собой только аппроксимацию истинного спектра исходного непрерывного сигнала. Хотя существуют способы минимизации утечки, мы не можем устранить ее полностью. Таким образом, нам необходимо точно понять, как она влияет на результат ДПФ

Дискретное преобразование Фурье применяется к конечным множествам N отсчетов, полученным дискретизацией сигнала с частотой f_s , с целью получить N -точечное преобразование, дискретные отсчеты которого ассоциируются с отдельными аналитическими частотами $f_{analysis}(m)$, где

$$f_{analysis}(m) = m f_s / N \quad (8)$$

при $m=0,1,2,\dots,N-1$.

Выражение (8), на первый взгляд, не содержит в себе ничего особенного, хотя на самом деле оно таит в себе проблему. **Дискретное преобразование Фурье дает правильный результат только тогда, когда входная последовательность данных содержит энергию точно на аналитической частоте (8), на частоте, кратной фундаментальной частоте f_s/N** . Если входной сигнал содержит компонент с некоторой промежуточной частотой, лежащей между аналитическими частотами $m f_s / N$, скажем $1.5 f_s / N$, то этот входной сигнал проявится в некоторой степени на всех N частотах анализа. В этом случае обычно говорят, что энергия входного сигнала проявляется на всех выходных *бинах* ДПФ. Попробуем понять значение этой проблемы на следующем примере.

Предположим, что мы вычисляем 64-точечное ДПФ последовательности, показанной точками на рисунке 8 (а). Последовательность представляет собой синусоидальный сигнал, имеющий ровно 3 периода, содержащихся в $N = 64$ отсчетах. На рисунке 8 (b) показана первая половина ДПФ входной последовательности, которая показывает, что последовательность не содержит никаких компонентов ни на каких частотах, кроме частоты, соответствующей $m=3$. Пока ничего удивительного.

На рисунке 8 (а) показана для примера аналитическая синусоида с $m=4$, наложенная на входную последовательность. Сумма произведений отсчетов входной последовательности на отсчеты синусоиды $m=4$ равна 0. (Другими словами, мы можем сказать, что корреляция входной последовательности с аналитической синусоидой $m=4$ равна 0.)

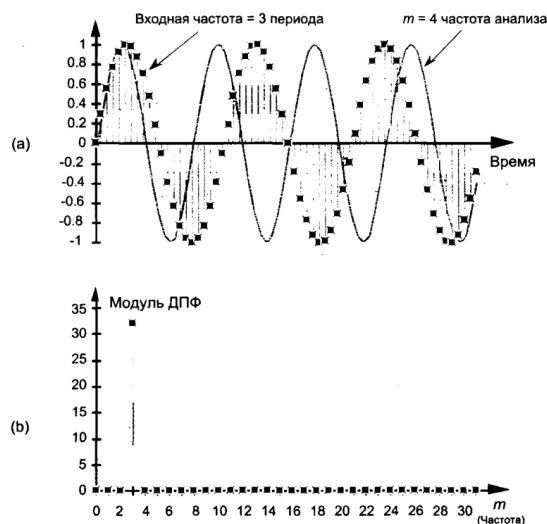


Рис.8. 64-точечное ДПФ: (а) входная последовательность из трех периодов и аналитическая синусоида с $m = 4$; (б) модуль ДПФ.

В качестве продолжения нашего примера утечки на рисунке 9 (а) точками показана входная последовательность, имеющая 3.4 периода на $N = 64$ отсчетах. Речь идет о входной последовательности, которая не имеет целого количества периодов на интервале в 64 отсчета, входная энергия «протекает» во все другие выходные бины ДПФ, как показано на рисунке 9 (б)

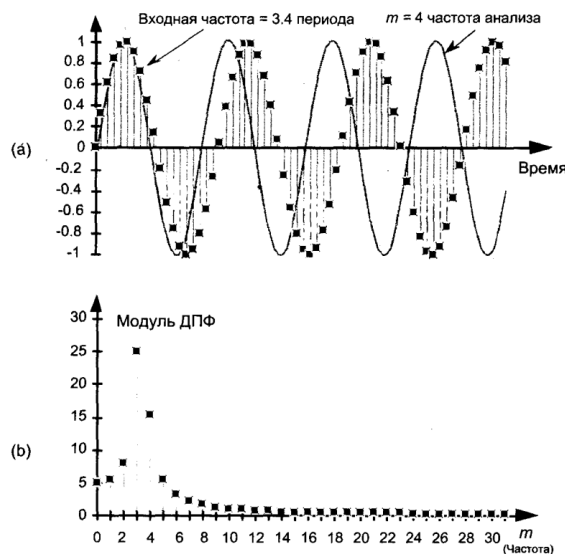


Рис.9. 64-точечное ДПФ: (а) входная последовательность из 3.4 периодов и аналитическая синусоида с $m = 4$; (б) модуль ДПФ

Бин $m=4$, например, не равен нулю, потому что сумма произведений отсчетов входной последовательности на отсчеты анализирующей синусоиды с $m=4$ уже не равна 0. В этом и состоит утечка спектра — она приводит к тому, что спектр входного сигнала, частота которого не равна точно центральной частоте одного из бинов,

«растекается» по всем остальным бинам. Более того, утечка — неизбежный эффект при выполнении ДПФ реальных последовательностей конечной длины.

Чтобы узнать, как предсказывать и минимизировать неприятное влияние утечки, взглянем на ее причину. Чтобы понять влияние утечки, нам необходимо определить амплитудно-частотную характеристику ДПФ при подаче на его вход произвольной реальной синусоиды.

Для действительного косинусоидального входного сигнала, имеющего k периодов на N отсчетах, амплитудно-частотная характеристика бина N -точечного ДПФ в зависимости от индекса бина m аппроксимируется функцией *sinc*

$$X(m) = (N/2) \frac{\sin(\pi(k-m))}{\pi(k-m)} \quad (9)$$

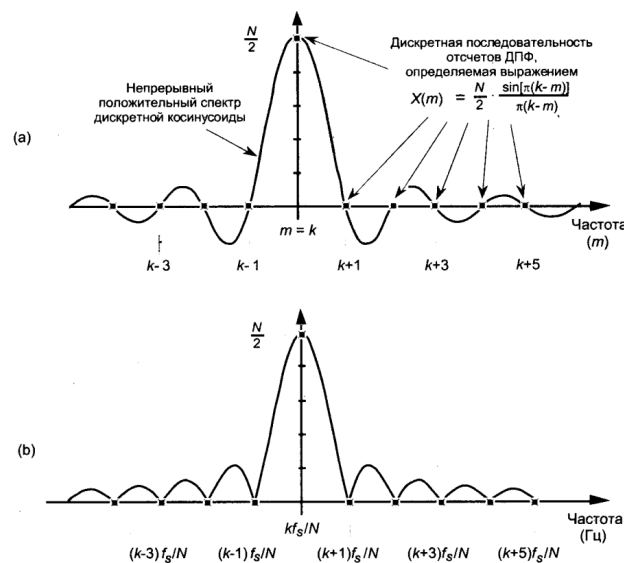


Рис.10. Положительная частотная характеристика ДПФ, обусловленная N -точечной входной последовательностью, содержащей k периодов действительной косинусоиды: (а) амплитудно-частотная характеристика как функция индекса бина m ; (б) амплитудно-частотная характеристика как функция частоты в Гц

Мы используем функцию (9), график которой приведен на рисунке 10 (а), чтобы определить уровень утечки, возникающей при ДПФ. Мы можем рассматривать кривую на рисунке 10 (а), состоящую из главного лепестка и периодически повторяющихся пиков и впадин, которые называют боковыми лепестками, как непрерывный положительный спектр действительной косинусоидальной последовательности, состоящей из N отсчетов и содержащей k полных периодов. Результатом ДПФ являются дискретные отсчеты, которые лежат на кривой, изображенной на рисунке 10; т. е. результат ДПФ будет представлять собой дискретизированную версию этого непрерывного спектра. (На рисунке 10 (б) мы приводим амплитудно-частотную характеристику ДПФ при подаче действительного входного сигнала как функцию частоты в Гц.) Когда входная последовательность ДПФ имеет ровно k полных периодов (т. е. центральная частота ее спектра точно совпадает с бином $m = k$), утечка не возникает, как на рисунке 10, потому что, когда значение аргумента в знаменателе (9) отлично от 0 и кратно π , синус этого аргумента равен нулю.

Покажем на примере, что происходит, когда частота входного сигнала не совпадает с центром бина. Предположим, что действительная синусоида с частотой 8кГц, амплитуда которой равна единице, дискретизирована с частотой $f_s=32000$ отсчетов/с. Если мы вычислим 32-точечное ДПФ этой последовательности, то разрешение по частоте, или интервал между бинами, составит $f_s/N=32000/32=1\text{кГц}$. Мы можем предсказать АЧХ ДПФ, поместив центр спектра входной синусоиды на частоту 8 кГц, как показано на рисунке 11 (а). Точки изображают модули отсчетов ДПФ

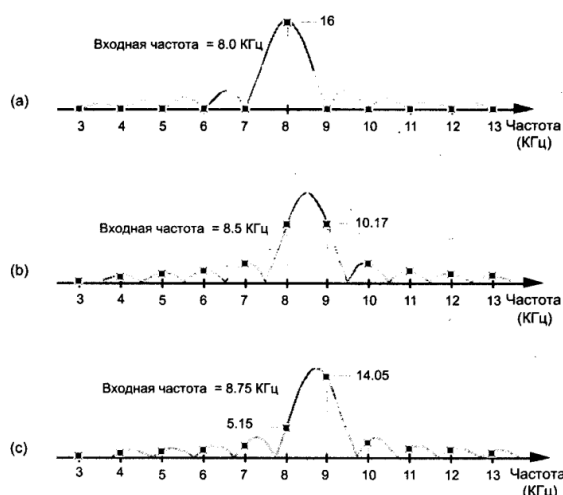


Рис.11. Частотные отклики ДПФ: (а) частота входного сигнала ДПФ = 8.0 кГц; (b) частота входного сигнала ДПФ = 8.5 кГц; (с) частота входного сигнала ДПФ = 8.75 kHz

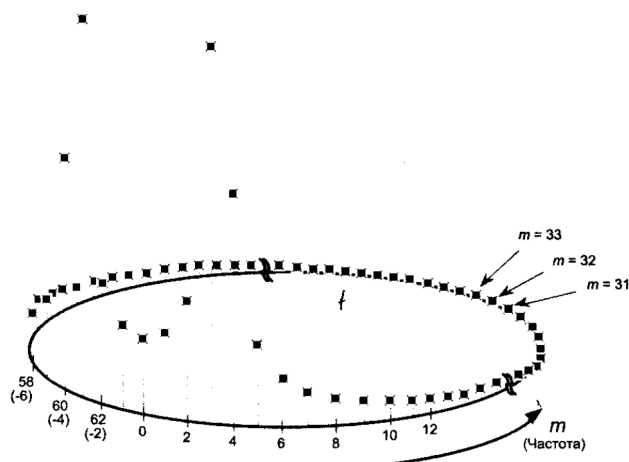
Здесь следует запомнить важный факт: результат ДПФ представляет собой дискретизированную версию непрерывного спектра, показанного на рисунке 11 (а). Эти дискретные отсчеты в частотной области, расположенные на частотах mf_s/N и есть точки на рисунке 11 (а). Поскольку частота входного сигнала точно совпадает с частотой бина ДПФ, результат ДПФ содержит только одно ненулевое значение. Другими словами, **когда выборка из N отсчетов содержит целое количество периодов входного сигнала, отсчеты ДПФ ложатся точно на максимум непрерывного спектра и точно на точки, в которых этот спектр равен нулю.**

Из (9) мы знаем, что пиковое значение амплитуды выходного отсчета равно $32/2=16$. (Если входная действительная синусоида имела амплитуду, равную 2, пиковое значение кривой спектра будет равно $2 \cdot 32/2$, или 32.) На рисунке 11 (b) показана утечка ДПФ, возникающая при частоте входного сигнала 8.5 кГц, и здесь мы видим, что в результате дискретизации в частотной области модули всех бинов ДПФ отличны от 0. Входной сигнал с частотой 8.75 кГц даст результат ДПФ с утечкой, показанный на рисунке 11 (с). Изучая утечку непосредственно на компьютере, строя графики модуля ДПФ, мы, конечно, получим точки, изображенные на рисунке 11, но не увидим непрерывные спектральные кривые.

Из анализа предыдущих ДПФ возникает вопрос: «Если непрерывный спектр, который мы дискретизируем, симметричен, то почему результат ДПФ на рисунке 9 (b) такой асимметричный?»

На рисунке 9 (b) модули бинов справа от третьего бина уменьшаются быстрее, чем модули бинов слева от третьего бина. Кроме того, вычисление значения непрерывного спектра $X(f)$ для аргумента, равного 0.4, дает относительное значение амплитуды 0.75. Умножая на этот коэффициент пиковое значение спектра 32, мы должны были бы иметь модуль третьего бина, равный примерно $32 \cdot 0.75 = 24$. но на рисунке 9(b) этот модуль несколько больше 25.

Вспомним, что на самом деле представляет собой рисунок 9 (b). Изучая результат ДПФ, мы обычно интересуемся бинами от $m=0$ до $m=(N/2-1)$. Следовательно, при наших 3.4 периодах на интервал выборки на рисунке 9 (b), показаны только первые 32 бина. Результат ДПФ периодичен в частотной области, как показано на рисунке 12. Рассматривая результат ДПФ для все более и более высоких частот, мы как бы ходим по кругу, и спектр повторяется бесконечно.



что и -2-й, и т. д. Эта эквивалентность бинов позволяет нам рассматривать бины ДПФ так, как если бы они продолжались в область отрицательных частот. Результат состоит в том, что утечка «заворачивается» вокруг бина $m=0$, а также вокруг бина $m=N$ поскольку частота $m=0$ — это и есть частота $m=N$. «Заворот» утечки относительно частоты $m=0$ и несет ответственность за асимметрию ДПФ относительно бина $m = 3$ на рисунке 3.8 (b).

Минимальная асимметрия, вызванная утечкой, будет в районе $N/4$ -го бина, как показано на рисунке 14 (a), на котором приведен полный спектр входного сигнала, содержащего 16.4 периода на интервале наблюдения. Рисунок 14 (b) содержит первые 32 бина спектра этого сигнала в увеличенном масштабе.

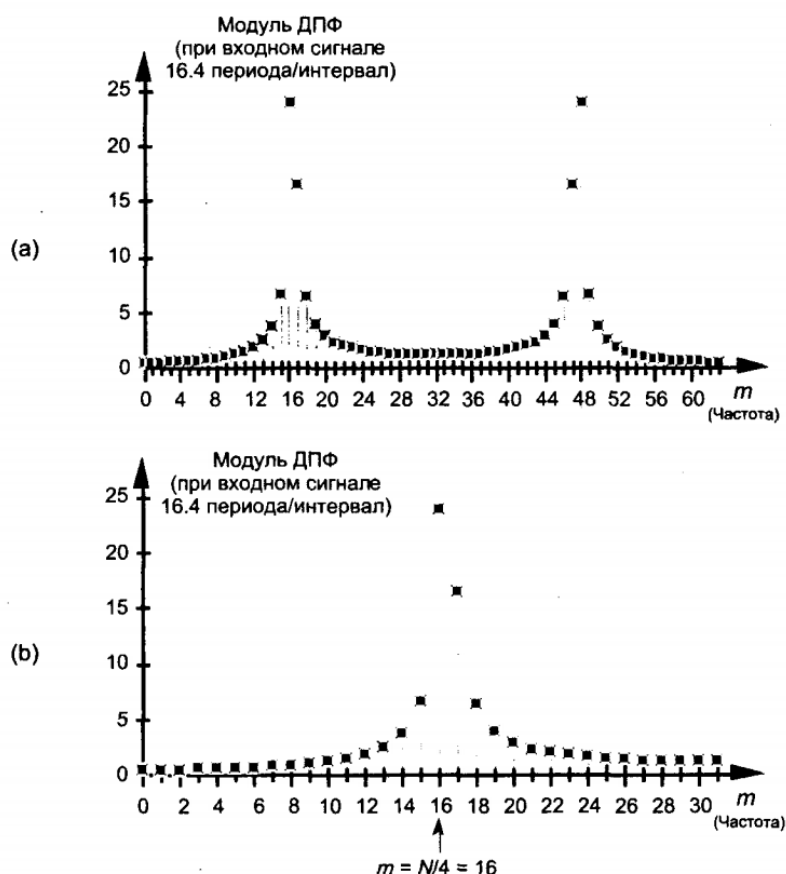


Рис.14. Модуль ДПФ для сигнала, имеющего 16.4 периода на интервале наблюдения: (a) полный спектр; (b) спектр в увеличенном масштабе, демонстрирующий асимметрию, вызванную утечкой, относительно частоты $m=N/4$

Из предыдущего анализа легко показать, что утечка ДПФ не безобидна, т. к. бины, содержащие сигналы низкого уровня, могут оказаться искаженными боковыми лепестками соседних бинов, содержащих сигналы большой амплитуды.

Хотя утечку невозможно устранить полностью, для уменьшения ее влияния можно использовать часто применяемый метод взвешивания окном. Рассмотрим несколько примеров окон.

Окна

Взвешивание окном уменьшает утечку ДПФ за счет уменьшения уровня боковых лепестков функции (9), показанных на рисунке 9. Это достигается тем, что отсчеты в начале и конце последовательности постепенно приводятся к одному общему значению. Рисунок 15 демонстрирует, как работает описанный механизм. Если мы рассмотрим сигнал бесконечной длительности во временной области, показанный на рисунке 15 (а), ДПФ можно выполнить только над интервалом конечной длительности, подобным показанному на рисунке 15 (с)

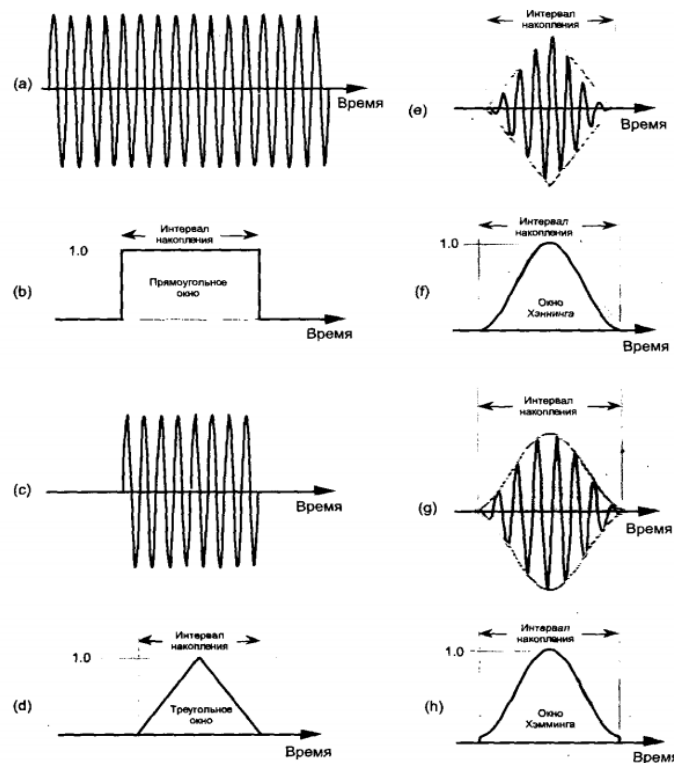


Рис.15. Минимизация разрывов на концах интервала наблюдения: (а) бесконечная синусоида; (б) прямоугольное окно для конечного интервала наблюдения; (с) произведение прямоугольного окна и бесконечной синусоиды; (д) треугольное окно; (е) произведение треугольного окна и бесконечной синусоиды; (ф) окно Хэннинга; (г) произведение окна Хэннинга и бесконечной синусоиды; (h) окно Хэмминга.

Мы можем рассматривать входной сигнал ДПФ на рисунке 15 (с) как произведение входного сигнала, существующего на всей оси времени (рисунок 15 (а)) и прямоугольного окна, отсчеты которого равны 1 на всем интервале анализа, показанного на рисунке 15 (б). Каждый раз, когда мы вычисляем ДПФ от последовательности конечной длительности, мы по умолчанию умножаем эту последовательность на окно, все отсчеты которого равны единице, и, по существу, умножаем все отсчеты последовательности за пределами окна на 0. Форма функции $\sin(x)/x$ в (9), объясняется этим прямоугольным окном, потому что непрерывное преобразование Фурье этого прямоугольного окна (рисунок 15 (б)) и есть эта самая функция sinc.

Именно резкие переходы **прямоугольного** окна от 0 к 1 и являются причиной появления боковых лепестков функции $\sin(x)/x$. Чтобы минимизировать утечку спектра, обусловленную этими боковыми лепестками, нам необходимо уменьшить их амплитуду, используя отличные от прямоугольного окна.

Представим себе, что мы умножаем входную последовательность ДПФ, показанную на рисунке 15 (с), на **треугольное** окно (рисунок 15(d)), чтобы получить взвешенный сигнал, показанный на рисунке 15(e). Заметьте, что значения отсчетов сигнала, как показывает рисунок 15 (е), оказываются одинаковыми в начале и в конце интервала наблюдения. Уменьшенный разрыв снижает уровень относительно высокочастотных составляющих в отсчетах ДПФ; т.е. уровни боковых лепестков ДПФ при использовании треугольного окна уменьшаются. Существуют и другие окна, которые снижают уровень утечки больше, чем треугольное окно, такие как окно **Хэннинга**, показанное на рисунке 15 (f) - Произведение этого окна на входную последовательность дает сигнал, показанный на рисунке 15 (g). Другое часто используемое окно — это окно **Хэмминга**, показанное на рисунке 15 (h). Оно очень похоже на окно Хэннинга, но имеет подставку.

Спектр прямоугольного окна используется как эталон для оценки спектров других окон; т. е. мы обычно оцениваем спектр некоторого окна, сравнивая его со спектром прямоугольного окна, $|W(m)|$, на рисунке 16 (a). Кроме того, рисунок 16 (a) содержит амплитудные спектры окон Хэмминга, Хэннинга и треугольного окна. Можно видеть, что последние три окна обладают пониженным уровнем боковых лепестков по сравнению с прямоугольным окном.

Поскольку окна Хэмминга, Хэннинга, а также треугольное окно снижают уровень сигнала, который подвергается ДПФ, пиковое значение их главного лепестка оказывается меньше, чем у прямоугольного окна. Как бы то ни было, мы в первую очередь интересуемся боковыми лепестками окна, которые на рисунке 16 (a) увидеть трудно из-за линейного его масштаба. Для этого построим амплитудные спектры в логарифмическом масштабе в дБ и нормализуем каждый график так, чтобы пиковое значение главного лепестка было равно 0 дБ. Построение графиков в логарифмического масштаба в данном случае более оправданно, поскольку позволяет наглядно сравнивать ослабления боковых лепестков, чего практически невозможно сделать сравнивая обычные графики. Обозначив логарифмический спектр как $|W_{dB}(m)|$, мы вычисляем его по формуле

$$|W_{dB}(m)| = 20 \log_{10} [W(m)/W_{dB}(0)] \quad (10)$$

Кривые $|W_{dB}(m)|$ для разных окон показаны на рисунке 16 (b).

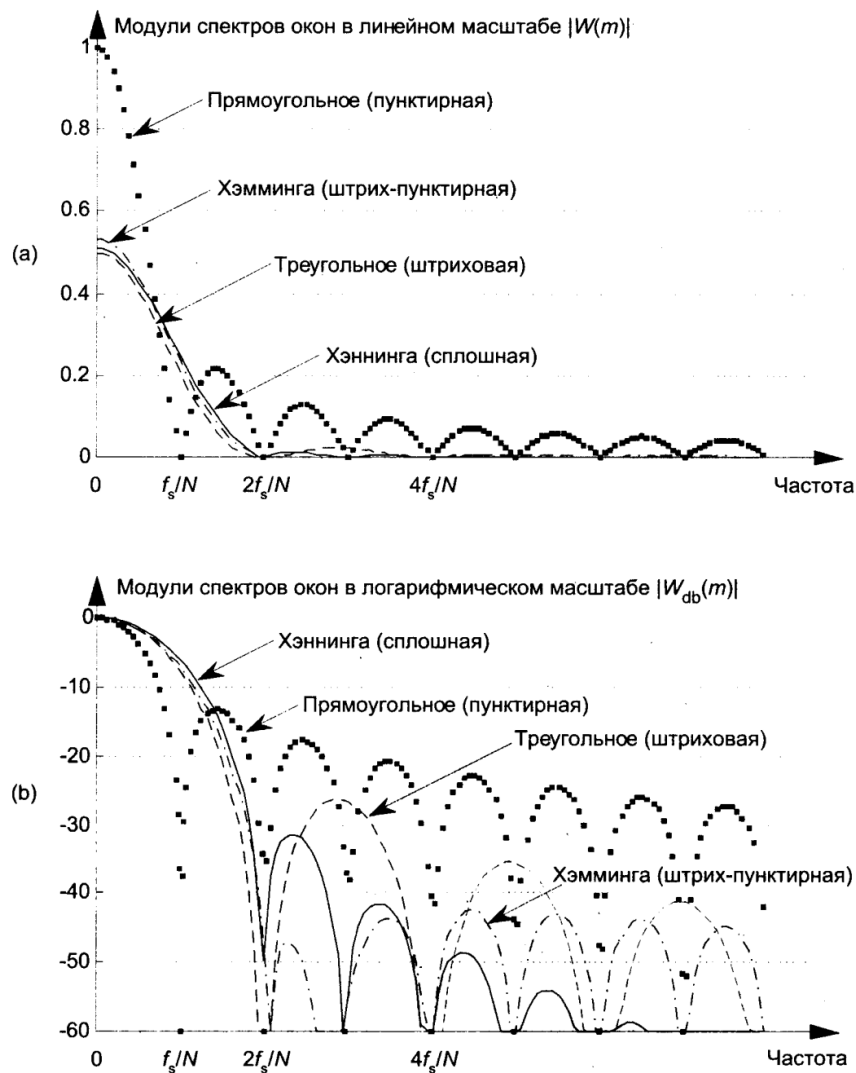


Рис.16. Амплитудные спектры окон: (а) $|W(m)|$ в линейном масштабе; (б) $|W_{db}(m)|$ в нормированном логарифмическом масштабе.

Анализируя спектр прямоугольного окна, мы видим, что его главный лепесток самый узкий из всех, и его ширина равна f_s/N . Но, к сожалению, его первый боковой лепесток имеет уровень всего -13 дБ по отношению к пику главного лепестка, что не так хорошо. Боковые лепестки треугольного окна ниже, но ширина главного лепестка увеличилась в два раза по сравнению с шириной главного лепестка прямоугольного окна. Широкие главные лепестки различных непрямоугольных окон ухудшают разрешающую способность взвешенного ДПФ почти в два раза. Однако, как мы увидим, выгоды от снижения утечки обычно перевешивают потерю разрешающей способности.

Обратите внимание на еще меньший уровень первого бокового лепестка и быстрое уменьшение боковых лепестков окна Хэннинга. Окно Хэмминга имеет еще более низкий первый боковой лепесток, но скорость спада боковых лепестков у него меньше, чем у окна Хэннинга. Это значит, что утечка на расстоянии трех или четырех бинов от центрального бина будет ниже для окна Хэмминга, чем для окна Хэннинга, а

утечка на большом расстоянии, бинов от центрального бина будет ниже для окна Хэннинга, чем для окна Хэмминга.

Когда мы применим окно Хэннинга к сигналу, имеющему 3.4 периода на анализируемом интервале, показанному ранее, мы получим на входе ДПФ сигнал, показанный на рисунке 17 (а) под огибающей окна Хэннинга. Результат ДПФ взвешенного окна сигнала показан на рисунке 17 (b) вместе с результатом

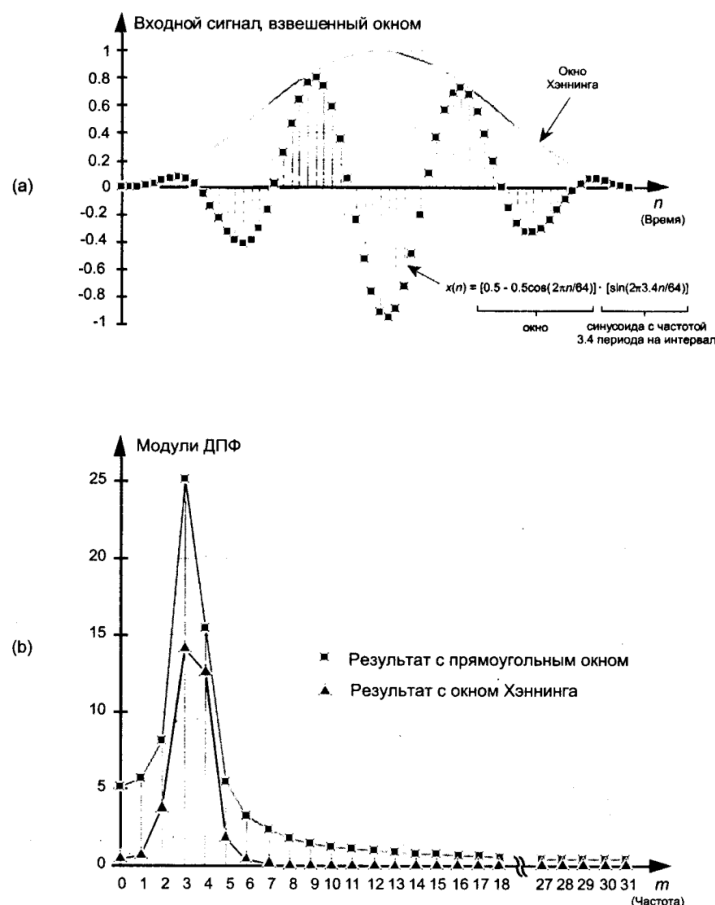


Рис.17. Окно Хэннинга: (а) 64 отсчета произведения окна Хэннинга на синусоидальный сигнал, имеющий 3.4 периода на интервале анализа; (b) результат ДПФ с окном Хэннийга в сравнении с ДПФ с прямоугольным окном

Спектр в случае использования окна Хэннинга оказывается шире и имеет более низкий максимум, но утечка по боковым лепесткам существенно ниже, чем в случае прямоугольного окна.

Отметим один важное замечание по поводу применения окон на практике. У инженеров ЦОС не редко можно встретить определенный набор, состоящий из нескольких достаточно популярных окон, но данные окна не являются универсальными. Выбор того или иного окна зависит от конкретной поставленной задачи.

Разрешающая способность ДПФ

Один популярный метод, используемый для улучшения оценки спектра с помощью ДПФ известен как дополнение нулями. Суть его заключается в добавлении нулевых отсчетов к исходной анализируемой последовательности для увеличения общего количества отсчетов входных данных. Исследование метода дополнения нулями иллюстрирует важное свойство ДПФ — дискретизацию по частоте, о которой мы упоминали при обсуждении утечки спектра. Когда мы дискретизируем непрерывный сигнал во временной области, имеющий непрерывный спектр, и затем берем ДПФ от полученных отсчетов, ДПФ дает в частотной области дискретизированную аппроксимацию непрерывного спектра. Чем больше точек в ДПФ, тем точнее ДПФ аппроксимирует непрерывное преобразование Фурье.

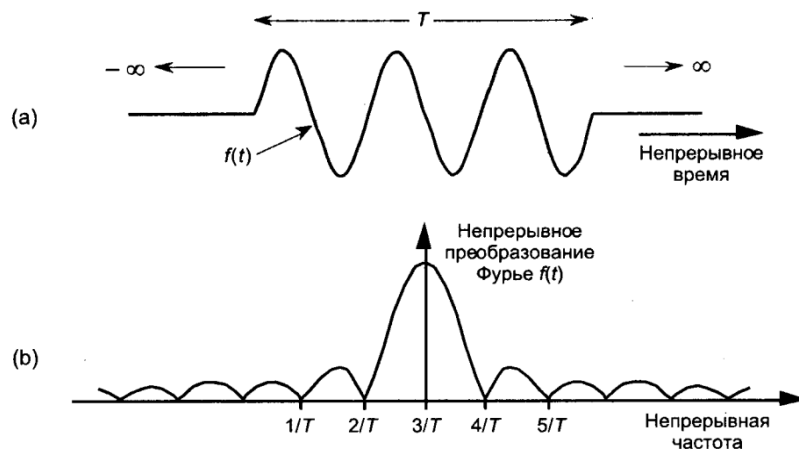


Рис.18. Непрерывное преобразование Фурье: (а) непрерывная функция времени $f(t)$, состоящая из усеченной синусоиды частотой $3/T$; (б) модуль непрерывного преобразования Фурье функции $f(t)$.

Чтобы проиллюстрировать эту мысль, предположим, что мы хотим аппроксимировать непрерывное преобразование Фурье непрерывной функции, показанной на рисунке 18 (а). Колебание простирается до бесконечности в обоих направлениях по времени, но отлично от нуля только на интервале в T секунд. Если ненулевая часть функции представляет собой синусоиду, имеющую три периода на интервале в T секунд, ее непрерывный амплитудный спектр выглядит так, как показано на рисунке 18 (б).

Предположим, что мы хотим использовать 16-точечное ДПФ для аппроксимации непрерывного преобразования функции $f(t)$, показанной на рисунке 19 (а). Добавляя к исходной последовательности нули мы получаем соответствующие спектры 19 (b,c,d).

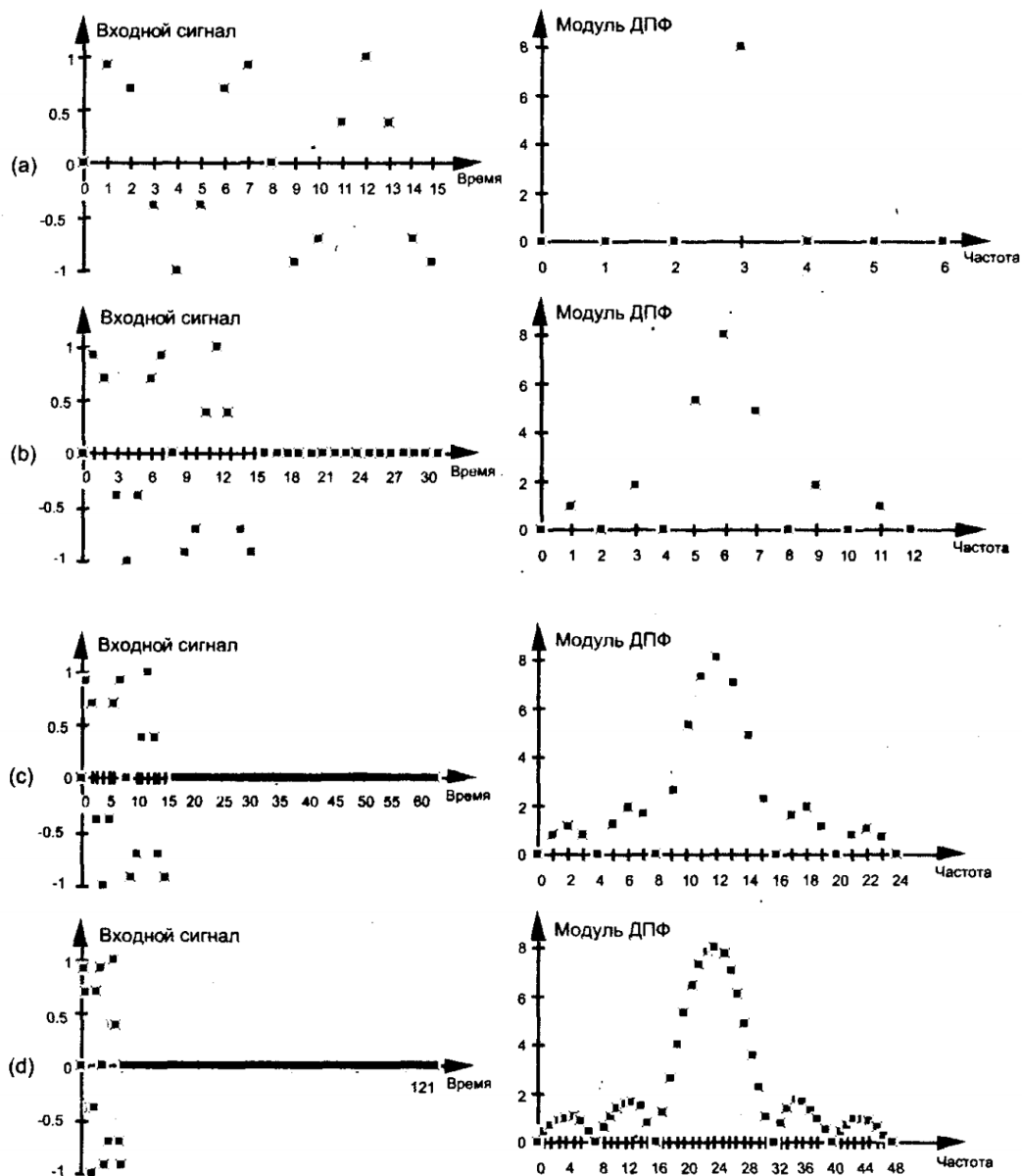


Рис.19. Дискретизация в частотной области при вычислении ДПФ: (а) 16 входных отсчетов и $N = 16$; (b) 16 входных отсчетов, 16 добавленных нулей и $N = 32$; (с) 16 входных отсчетов, 48 добавленных нулей и $N = 64$; (d) 16 входных отсчетов, 112 добавленных нулей и $N = 128$

В зависимости от количества отсчетов в некоторой произвольной входной последовательности и частоты дискретизации на практике могло бы потребоваться дополнение каким угодно количеством нулей для получения требуемого разрешения по частоте.

Коэффициент улучшения ДПФ

Применение понятия коэффициента улучшения ДПФ становится очевидным, когда мы рассматриваем отдельный бин ДПФ как узкополосный фильтр. Поскольку частотная характеристика бина ДПФ имеет вид функции $\sin(x)/x$, значение этого бина определяется главным образом энергией сигнала, попадающей в его главный лепесток. Бин ДПФ можно рассматривать как полосовой фильтр, центр полосы пропускания которого находится на частоте mf_s/N . Очевидно, что максимально возможное значение отсчетов ДПФ возрастает при увеличении длины преобразования N . Кроме того, при увеличении N главный лепесток бина становится уже.

Таким образом, бин ДПФ можно рассматривать как полосовой фильтр, коэффициент передачи которого можно увеличить, а ширину полосы пропускания уменьшить, увеличивая значение N .

Уменьшение ширины полосы пропускания полезно при обнаружении энергии сигнала, потому что в дополнение к уменьшению энергии шума, попадающей в пределы его полосы пропускания, улучшается и разрешающая способность по частоте. Мы можем продемонстрировать это, рассмотрев ДПФ тона (синусоиды постоянной частоты), смешанного со случайным шумом.

На рисунке 20 (а) в логарифмическом масштабе показаны первые 32 отсчета 64-точечного ДПФ, при этом частота тона совпадает с центром бина $m=20$. Уровни мощности (квадрат модуля ДПФ) на рисунке 20 (а) нормированы так, что мощность наибольшего бина принята за 0 дБ. Поскольку мощность исходного тона меньше мощности шума, при $N = 64$ обнаружить его не так просто. Если же мы увеличим количество отсчетов в четыре раза и размер ДПФ до $N = 256$, мы увидим, как мощность тона поднимается над уровнем шума на бине $m = 80$ на рисунке 20 (b). Повышение размера ДПФ до $N = 1024$ дает дополнительное улучшение, так что спектр тона еще больше поднимается над уровнем шума, как показано на рисунке 20 (c).

Отношение сигнал/шум растет с ростом N , потому что стандартное отклонение, средне квадратичное отклонение, шума для бина ДПФ пропорционально $\sqrt{(N)}$, а величина бина, в котором находится сигнал, пропорциональна N

$$SNR_N = SNR_{N'} + 20 \log_{10}(\sqrt{(N/N')}) \quad (11)$$

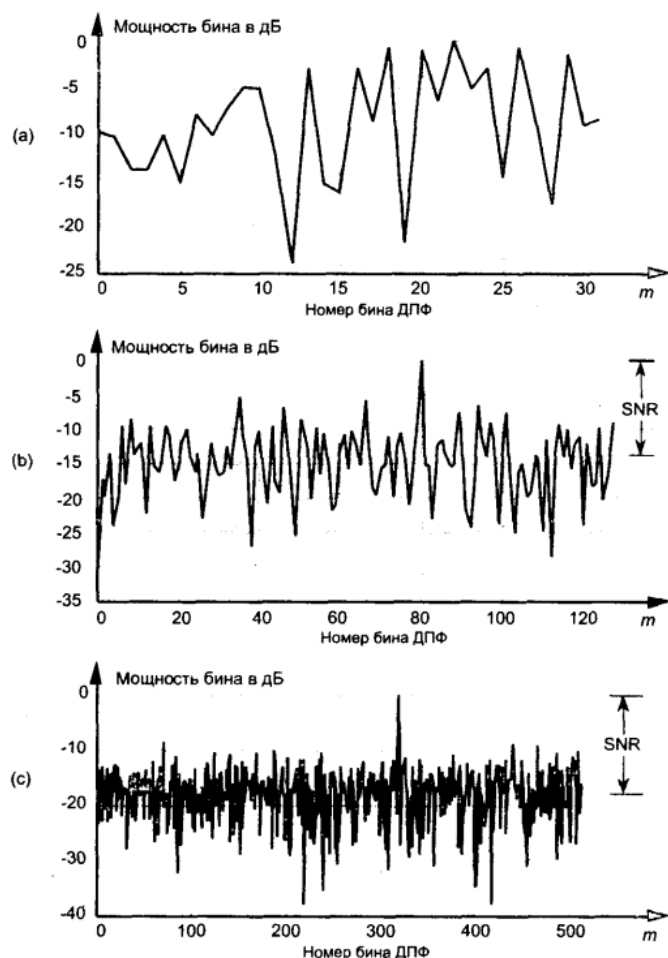


Рис.20. Улучшение отношения сигнал/шум при одном ДПФ: (а) $N=64$; (б) $N=256$; (с) $N=1024$

Если мы повышаем размер ДПФ с N' до $N = 2N'$, согласно (11) отношение сигнал/шум возрастает на 3 дБ. Мы поэтому говорим, что коэффициент улучшения ДПФ увеличивается на 3 дБ при каждом удвоении N .

Теоретически мы могли бы получать неограниченно большие коэффициенты улучшения, увеличивая размер ДПФ. Проблема состоит в том, что количество операций умножения при выполнении БПФ растет пропорционально N^2 , и вычисление ДПФ длинных последовательностей становится трудоемким процессом. Поскольку операция сложения выполняется проще и быстрее, чем умножение, мы можем усреднять результаты нескольких ДПФ для повышения коэффициента улучшения и чувствительности при обнаружении сигналов.

Частотный отклик ДПФ на комплексный входной сигнал

В этом разделе мы определим частотный отклик N -точечного ДПФ, когда входная последовательность представляет собой дискретную комплексную синусоиду, обозначенную как $x_c(n)$. Под частотным откликом мы имеем ввиду выходные отсчеты ДПФ при преобразовании комплексной синусоидальной последовательности. Мы начнем с графика входной последовательности $x_c(n)$, приведенного на рисунке 21. Эта последовательность имеет форму

$$x_c(n) = e^{j2\pi nk/N} \quad (12)$$

где k – количество полных циклов на интервале в N отсчетов.



Рис.21. Комплексная последовательность $x_c(n)$ во временной области, имеющая два полных периода ($k = 2$) на интервале в N отсчетов: (a) действительная часть $x_c(n)$; (b) мнимая часть $x_c(n)$

Обозначая выходную последовательность ДПФ как $X_c(m)$ и подставив сигнал $x_c(n)$ в формулу ДПФ получим

$$X_c(m) = \sum_{n=0}^{N-1} x_c(n) e^{-j2\pi nm/N} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{j2\pi nk/N} e^{-j2\pi nm/N} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{j2\pi n(k-m)/N} \quad (13)$$

Если мы положим $N=K$, $n=p$ и $q=-2\pi n(k-m)/N$, выражение (13) превращается в

$$X_c(m) = \sum_{p=0}^{K-1} e^{-jq p} \quad (14)$$

где (14) сумма геометрической прогрессии и ее можно выразить в замкнутой форме как

$$X_c(m) = \sum_{p=0}^{K-1} e^{-jq p} = \frac{(1 - e^{-jqK})}{(1 - e^{-jq})} \quad (15)$$

поделив числитель и знаменатель на экспоненты получаем

$$X_c(m) = e^{-jq(K-1)/2} (e^{jqK/2} - e^{-jqK/2}) / (e^{jq/2} - e^{-jq/2}) \quad (16)$$

Учитывая тождество Эйлера $\sin(\phi) = (e^{j\phi} - e^{-j\phi}) / 2j$, преобразуем (16) в виде

$$X_c(m) = e^{-jq(K-1)/2} [\sin(qK/2)] / [\sin(q/2)] \quad (17)$$

Возвращая переменные, получаем **ДПФ комплексной синусоиды**

$$X_c(m) = e^{j(\pi(k-m) - \pi(k-m)/N)} \frac{\sin[\pi(k-m)]}{\sin[\pi(k-m)/N]} \quad (18)$$

Выражение (18) отношение синусов есть амплитуда $X_c(m)$, а экспоненциальный множитель дает фазовый угол $X_c(m)$. В данный момент в (18) нас интересует только отношение синусов. Его модуль показан на рисунке 22. Заметьте, что, т.к. $x_c(n)$ является комплексным, в $X_c(m)$ отсутствуют компоненты с отрицательными частотами. Сосредоточимся на серой кривой на рисунке 22. Эта кривая представляет собой непрерывное преобразование Фурье комплексной последовательности $x_c(n)$ и может рассматриваться как непрерывный спектр последовательности $x_c(n)$. Под непрерывным спектром мы понимаем спектр, который определен для всех значений частоты, а не только для частот анализа N -точечного ДПФ, кратных f_s/N . Форма этого спектра с главным и боковыми лепестками является прямым и неизбежным следствием анализа последовательности ограниченной длительности, подобной последовательности $x_c(n)$ на рисунке 21.



Рис.22. Модуль реакции ДПФ на комплексную синусоиду, имеющую k полных периодов на интервале в N отсчетов, вида $x_c(n) = e^{j2\pi nk/N}$

Практическая часть

1. Построить в Octave/Matlab график на котором через одни и те же дискретные отсчеты проведено N непрерывных синусоид.
2. Рассчитать и построить на графике ДПФ N отсчетов синусоиды единичной амплитуды с частотой f_1 и частотой дискретизации f_s согласно формуле (4). Наложить на данный график ДПФ того же сигнала, рассчитанного штатными функциями Octave/Matlab.
3. Рассчитать и построить в Octave/Matlab на графике N -точечное ДПФ синусоидального сигнала с утечкой и без утечки, без применения окна.
4. Рассчитать и построить в Octave/Matlab на графике ДПФ двух близко расположенных в частотной области синусоидальных сигнала с частотами f_1 и f_2 и амплитудами A_1 и A_2 для частоты дискретизации f_s с использованием окна и без него.
5. Рассчитать и построить в Octave/Matlab на графике ДПФ синусоидального сигнала с дополнением нулями.
6. Экспериментально показать справедливость выражения (11). К синусоидальному сигналу, аддитивно добавить генерированный гауссовский белый шум, построить несколько графиков ДПФ для разных N аналогично рисунку 20.
7. Рассчитать и построить в Octave/Matlab на графике ДПФ комплексного синусоидального сигнала с частотой f_1 и частотой дискретизации f_s .
8. Синтезировать в Octave/Matlab из N синусоид низкочастотный полосовой сигнал, построить его временную зависимость на графике. Рассчитать и построить на графике ДПФ для трех значений частоты дискретизации аналогично рис.4.
9. Синтезировать в Octave/Matlab полосовой сигнал из N синусоид с центральной частотой f_c . Осуществить его дискретизацию с переносом частоты, построить графики ДПФ аналогично рисунку 7.

Список литературы

1. Ричард *Лайонс*. *Цифровая обработка сигналов*: Второе издание. Пер. с англ. — М.: ООО. «Бином-Пресс», 2006 г. — 656 с.
2. Айфичер Э., Джервис Б. *Цифровая обработка сигналов. Практический подход*. 2-е издание. — Пер. с англ. — М.: Вильямс, 2004. — 992 с.
3. Скляр Б. *Цифровая связь. Теоретические основы и практическое применение* 2-е издание, исправленное. — Москва; Санкт-Петербург; Киев: Вильямс, 2003 — 1104 с.