臺北區 110 學年度第一學期
第二次學科能力測驗模擬考試

數學 A 考科

—作答注意事項—

考試範圍：第一～二冊、數學 A 第三～四冊

考試時間：100 分鐘

作答方式：

- 選擇（填）題用 2B 鉛筆在「答題卷」上作答；更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液（帶）。
- 除題目另有規定外，非選擇題用筆尖較粗之黑色墨水的筆在「答題卷」上作答；更正時，可以使用修正液（帶）。
- 考生須依上述規定劃記或作答，若未依規定而導致答案難以辨識或評閱時，恐將影響成績並損及權益。
- 答題卷每人一張，不得要求增補。
- 選填題考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子畫記。請仔細閱讀下面的例子。

例：若答案格式是 $\dfrac{(18\text{-}1)}{(18\text{-}2)}$，而依題意計算出來的答案是 $\dfrac{3}{8}$，則考生必須分別在答題卷上的第 18-1 列的 $\underset{\square}{3}$ 與第 18-2 列的 $\underset{\square}{8}$ 劃記，如：

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	−	±
18-1	□	□	■	□	□	□	□	□	□	□	□	□
18-2	□	□	□	□	□	□	□	■	□	□	□	□

例：若答案格式是 $\dfrac{(19\text{-}1)(19\text{-}2)}{50}$，而答案是 $\dfrac{-7}{50}$ 時，則考生必須分別在答題卷的第 19-1 列的 $\underset{\square}{-}$ 與第 19-2 列的 $\underset{\square}{7}$ 劃記，如：

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	−	±
19-1	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	■	□
19-2	□	□	□	□	□	□	■	□	□	□	□	□

選擇(填)題計分方式：

- 單選題：每題有 n 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項。各題答對者，得該題的分數；答錯、未作答或劃記多於一個選項者，該題以零分計算。
- 多選題：每題有 n 個選項，其中至少有一個是正確的選項。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得該題全部的分數；答錯 k 個選項者，得該題 $\dfrac{n-2k}{n}$ 的分數；但得分低於零分或所有選項均未作答者，該題以零分計算。
- 選填題每題有 n 個空格，須全部答對才給分，答錯不倒扣。

※試題中參考的附圖均為示意圖，試題後附有參考公式及數值。

祝考試順利

99363203-30

第壹部分、選擇（填）題（占 85 分）

一、單選題（占 25 分）

說明：第 1 題至第 5 題，每題 5 分。

1. 為便於國際比較，指揮中心同時公布疫苗「接種人口涵蓋率」和「劑次人口比」數據，「接種人口涵蓋率」的算法是第一劑疫苗接種人數除以全國人口數；「劑次人口比」則是第一劑、第二劑疫苗接種人數加總後除以全國人口數，通用指標為「每 100 人接種劑數」。某地區目前人口數 2400 萬人，疫苗「接種人口涵蓋率」為 35 %，「劑次人口比」為每 100 人 40 劑。若想在 30 天內達成「接種人口涵蓋率」為 60 % 的目標，則平均每天第一劑疫苗接種之施打量為多少萬劑？
(1) 24
(2) 20
(3) 16
(4) 12
(5) 8

2. 某百貨公司週年慶為吸引消費者，舉辦百元禮券大放送的活動。禮券發放規則為百貨業者準備 1 顆不公正的骰子，骰子出現 k 點的機率為 $\frac{k}{n}$ $(k=1，2，3，4，5，6)$，每投擲一次，若出現 k 點可得 $7-k$ 張禮券，一位消費者可連投 3 次，試求消費者所得禮券張數的期望值為多少張？
(1) 4 張
(2) 6 張
(3) 8 張
(4) 10 張
(5) 12 張

3. 在坐標平面上，已知 $|\overrightarrow{AB}|=3$，$|\overrightarrow{AC}|=5$，$\overrightarrow{AB}$ 與 $\overrightarrow{AC}$ 的夾角為 60°，則由 $2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}$ 兩向量所張成的平行四邊形面積為何？
(1) $\frac{15\sqrt{3}}{2}$
(2) $75\sqrt{3}$
(3) $105\sqrt{3}$
(4) $\frac{105\sqrt{3}}{2}$
(5) $\frac{105\sqrt{3}}{4}$

4. 已知方程組$\begin{cases} ax+by=3 \\ cx+dy=5 \end{cases}$的解 $(x, y)=(1, 7)$，若方程組$\begin{cases} ex+fy=1 \\ gx+hy=7 \end{cases}$的解 $(x, y)=(m, n)$，且 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$，則 $m-n$ 之值為下列何者？

(1) 44

(2) 11

(3) 6

(4) -3

(5) -22

5. 甲，乙，丙三位好友經常相約聚餐，每次的餐費都採取擲硬幣決定何人付費。付費規則為甲，乙，丙三人各擲一枚均勻的硬幣，若某人出現的正、反面與另外兩人不同時，則必須負責支付三人該次的餐費總額；若三人皆擲出相同面，則再各自擲一次硬幣，每次投擲結果互不影響；若連續 3 次仍無法決定何人付費，則該次餐費便採取各自付費。某次用餐，三人所點的餐皆為 320 元，請問該次聚餐甲無須付費的機率為何？

(1) $\dfrac{2}{3}$

(2) $\dfrac{11}{16}$

(3) $\dfrac{21}{32}$

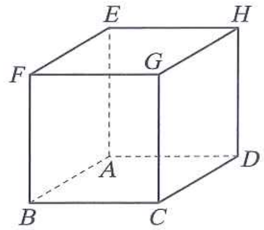
(4) $\dfrac{11}{32}$

(5) $\dfrac{21}{64}$

二、多選題（占 25 分）

說明：第 6 題至第 10 題，每題 5 分。

6. 坐標空間中一正立方體 $ABCD-EFGH$ 如右圖所示。已知 $t>0$，其中四個頂點的坐標為 $A(0, 0, 0)$、$B(t, 0, 0)$、$D(0, t, 0)$、$E(0, 0, t)$，$P(a, b, c)$ 為正立方體內一點。若 $\overline{PA}=\sqrt{2}$，$\overline{PB}=\overline{PD}=\sqrt{3}$，$\overline{PE}=1$，請選出正確的選項。



(1) P 點落在 $\overline{BD}$ 的垂直平分面上

(2) $c=2a$

(3) 正立方體的體積為 9

(4) $\cos\angle PAB=\dfrac{\sqrt{6}}{6}$

(5) P 點與直線 BD 的距離為 $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

7. 若$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & a & c \\ 1 & b & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 12 & 74 & 212 \\ 36 & 212 & 656 \end{bmatrix}$，請選出正確的選項。

(1) a，b，c，d 的算術平均數為 $\dfrac{43}{2}$

(2) a，b，c，d 的標準差為 $\sqrt{\dfrac{77}{2}}$

(3) $a^3+b^3=468$

(4)若 $\overrightarrow{u}=(a, d)$，$\overrightarrow{v}=(c, b)$，則 $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=656$

(5)若 $\overrightarrow{OA}=(a, b)$，$\overrightarrow{OB}=(-d, c)$，則$\triangle OAB$ 的面積為 212

8. 臺北市某紅茶店的店長隨機選了 5 天記錄當日最高氣溫(攝氏)和紅茶的銷售金額(千元)，如下表所示。

最高氣溫(攝氏 X 度)	32	29	35	36	33
銷售金額(臺幣 Y 千元)	86	74	100	109	81

店長為提供資料給想開加盟店的美國好友，將攝氏溫度(X 度)及臺幣(Y 千元)分別轉換成華氏溫度(U 度)及美元(V 千美元)，其中華氏溫度$=\dfrac{9}{5}$(攝氏溫度)$+32$；1 美元以 30 元臺幣計算。令 X，Y 兩者的相關係數為 r_1，Y 對 X 的最適直線斜率為 m_1。轉換後，U，V 兩者的相關係數為 r_2，V 對 U 的最適直線斜率為 m_2，請選出正確的選項。

(1) $r_1>0.6$

(2) $r_1=r_2$

(3) $m_1<m_2$

(4) Y 對 X 的最適直線通過點 $(33, 81)$

(5) V 對 U 的最適直線通過點 $(91.4, 3)$

9. 空間中有兩條直線 L_1：$\dfrac{x-7}{3}=\dfrac{y-3}{a}=\dfrac{z-8}{6}$，$L_2$：$\dfrac{x-6}{2}=\dfrac{y-4}{3}=\dfrac{z}{b}$，其方向向量分別為 $\overrightarrow{\ell_1}=(3, a, 6)$，$\overrightarrow{\ell_2}=(2, 3, b)$，請選出正確的選項。

(1)若 $L_1 // L_2$，則 $a=\dfrac{9}{2}$，$b=9$

(2)若 $L_1 // L_2$，則 L_1，L_2 兩直線距離為 $\sqrt{66}$

(3)若 $a=6$，$b=2$，則存在一平面同時包含 L_1，L_2

(4)若 $a=6$，$b=2$，則 L_1，L_2 兩直線距離為 4

(5)若有一正四面體的兩個不相交稜邊分別在 L_1，L_2 上，則 $|\overrightarrow{\ell_1}|^2+|\overrightarrow{\ell_2}|^2$ 的最小值為 $\dfrac{294}{5}$

10. 有一個玩牌拿獎金遊戲，其規則如下：莊家與玩家各拿一副分別寫有數字 1、2、3、4、5 的五張牌，然後莊家與玩家各自從自己的五張牌中隨機拿出一張牌出來，每張牌被取出的機會相等。若拿出來的兩張牌數字和為奇數，則玩家可獲得該數字和的 100 倍獎金，若數字和為偶數，則玩家須給莊家 600 元，請選出正確的選項。

(1)玩家玩一次能獲得獎金的機率為 $\dfrac{6}{25}$

(2)玩家玩一次的所得金額期望值為 24 元

(3)若玩家連續玩兩次，則最終結算金額大於 0 元的機率為 $\dfrac{12}{25}$

(4)若玩家連續玩兩次，則最終結算金額超過 1000 元的機率為 $\dfrac{72}{625}$

(5)若玩家連續玩兩次且最終結算金額大於 0 元，則其最終結算金額超過 1000 元的機率為 $\dfrac{6}{25}$

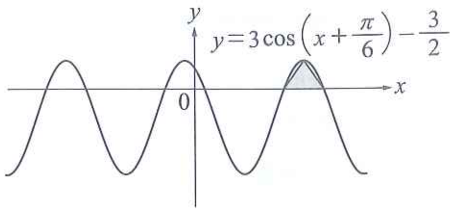
三、選填題（占 35 分）

說明：第 11 題至第 17 題，每題 5 分。

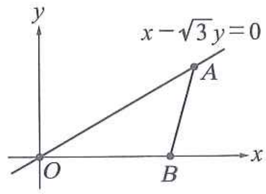
11. 已知一奈米為 10^{-9} 公尺，某病毒的直徑為 x 公尺，且 $\log x = -7.2219$，若此病毒的直徑為 y 奈米，則 y 最接近的整數為 11-1 11-2 。

12. $\triangle ABC$ 的重心為 P 點，過 P 點作一直線分別交 $\overline{AB}$ 、$\overline{AC}$ 於 Q、R 兩點，若 $\overrightarrow{AQ} = a\overrightarrow{AB}$ ，$\overrightarrow{AR} = \dfrac{3a}{2}\overrightarrow{AC}$ ，則 $a = \dfrac{\text{12-1}}{\text{12-2}}$ 。(化為最簡分數)

13. 若右圖為訊號產生器產出的波 $y=3\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-\frac{3}{2}$，則右圖中著色三角形的面積為 $\dfrac{\text{13-1}}{\text{13-2}}\pi$。(化為最簡分數)

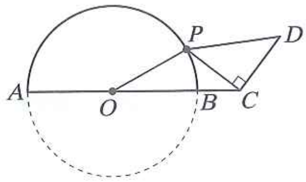


14. 在坐標平面上第一象限有一點 A 在直線 $x-\sqrt{3}y=0$ 上，另一點 B 在 x 軸的正向上，如右圖所示。已知 $\overline{AB}=4$，O 為原點，試求$\triangle OAB$ 面積的最大值為 $\text{14-1}+\text{14-2}\sqrt{\text{14-3}}$。(化為最簡根式)

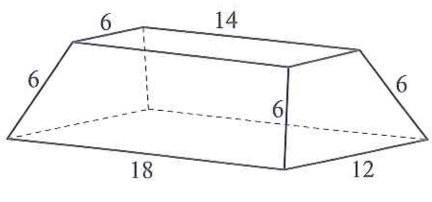


15. 農夫有一塊正方形的田地，已知該田地的四個邊界剛好各有一口水井，而且都不是在正方形的頂點上；若將該田地坐標化且選取一定點為原點後，則四口水井的坐標依順時針方向分別為 $(0,8)$、$(9,2)$、$(6,0)$、$(-5,4)$，試問滿足該四口水井位置的最大田地面積為 15-1 15-2 15-3 平方單位。

16. 如右圖，O 為圓心，圓的直徑 $\overline{AB}=4$，C 在 $\overrightarrow{AB}$ 射線上，$\overline{BC}=1$，P 為上半圓上的動點，$\triangle PCD$ 為等腰直角三角形，$\angle PCD=90^\circ$，O，D 在 $\overline{PC}$ 異側，試求四邊形 $OCDP$ 面積的最大值為 $\text{16-1}\sqrt{\text{16-2}}+\dfrac{\text{16-3 16-4}}{\text{16-5}}$。(化為最簡分數及最簡根式)



17. 有一個搭好的帳篷由上方一個長方形，側面四個梯形組成，其中四個梯形皆為等腰梯形，且對面的梯形全等。上方的長方形長 14 公分，寬 6 公分，側面的等腰梯形分別為上底 14 公分、下底 18 公分、腰長 6 公分，上底 6 公分、下底 12 公分、腰長 6 公分。設兩相鄰梯形所夾的兩面角為 θ，



試求 $|\cos\theta|=\dfrac{\sqrt{\text{17-1}}}{\text{17-2 17-3}}$。(化為最簡根式)

第貳部分、混合題或非選擇題（占 15 分）

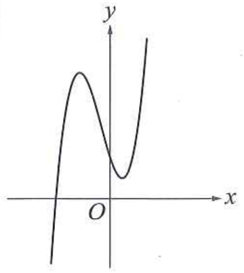
說明：本部分共有 1 題組，每一子題配分標於題末。限在標示題號作答區內作答。選擇題與「非選擇題作圖部分」使用 2B 鉛筆作答，更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液（帶）。非選擇題請由左而右橫式書寫，作答時必須寫出計算過程或理由，否則將酌予扣分。

18－20 題為題組

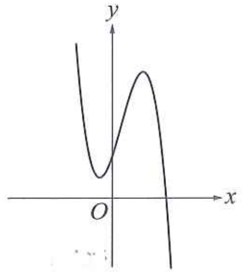
令 $f(x)=2x^3+ax^2-2ax+5$，試回答下列問題：

18. 下列哪個選項為 $y=f(x)$ 可能的圖形？(單選題，3 分)

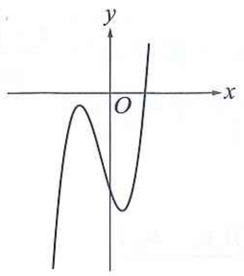
(1)



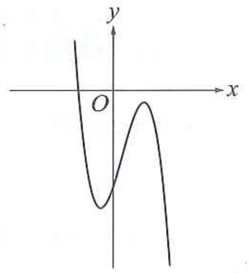
(2)



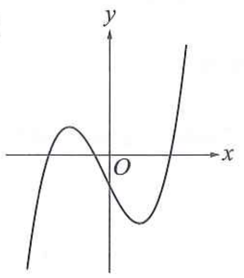
(3)



(4)



(5)



19. $f(x)$ 除以 $x(x-2)$ 的餘式為何？(非選擇題，6 分)

20. $y=f(x)$ 的圖形向左平移 1 單位，向下平移 1 單位後會通過原點，若 $y=f(x)$ 的圖形在點 $(1\ ,f(1))$ 附近的一次近似函數為 $g(x)$，則 $g(0.99)=$？(四捨五入至小數點後第一位) (非選擇題，6 分)

參考公式及可能用到的數值

1. 首項為 a，公差為 d 的等差數列前 n 項之和為 $S=\dfrac{n(2a+(n-1)d)}{2}$

   首項為 a，公比為 $r\,(r\neq 1)$ 的等比數列前 n 項之和為 $S=\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$

2. 級數和 $1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

3. $\triangle ABC$ 的正弦定理：$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$ (R 為$\triangle ABC$ 外接圓半徑)

   $\triangle ABC$ 的餘弦定理：$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

4. 一維數據 X：x_1，x_2，……，x_n

   算術平均數 $\mu_X=\dfrac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n)$

   標準差 $\sigma_X=\sqrt{\dfrac{1}{n}[(x_1-\mu_X)^2+(x_2-\mu_X)^2+\cdots\cdots+(x_n-\mu_X)^2]}=\sqrt{\dfrac{1}{n}[(x_1^{\,2}+x_2^{\,2}+\cdots\cdots+x_n^{\,2})-n\mu_X^{\,2}]}$

5. 一維數據 X：x_1，x_2，……，x_n，標準化後數據 X'：x_1'，x_2'，……，x_n'，其中 $x_i'=\dfrac{x_i-\mu_X}{\sigma_X}$，

   $i=1$，2，……，n。標準化後數據算術平均數 $\mu_{X'}=0$；標準差 $\sigma_{X'}=1$

6. 二維數據 (X,Y)：(x_1,y_1)，(x_2,y_2)，……，(x_n,y_n)，

   相關係數 $r_{X,Y}=\dfrac{(x_1-\mu_X)(y_1-\mu_Y)+(x_2-\mu_X)(y_2-\mu_Y)+\cdots\cdots+(x_n-\mu_X)(y_n-\mu_Y)}{n\sigma_X\sigma_Y}$

   迴歸直線(最適直線)方程式 $y-\mu_Y=r_{X,Y}\dfrac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x-\mu_X)$

7. 參考數值：$\sqrt{2}\approx 1.414$，$\sqrt{3}\approx 1.732$，$\sqrt{5}\approx 2.236$，$\sqrt{6}\approx 2.449$，$\sqrt{7}\approx 2.646$，$\pi\approx 3.142$

8. 對數值：$\log 2\approx 0.3010$，$\log 3\approx 0.4771$，$\log 5\approx 0.6990$，$\log 7\approx 0.8451$

臺北區 110 學年度第一學期
第二次學科能力測驗模擬考試

數學A考科參考答案暨詳解

99363214-30

數學 A 考科詳解

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
(2)	(3)	(4)	(2)	(3)	(1)(2)(4)(5)	(2)(3)
8.	9.	10.				
(1)(2)(5)	(4)(5)	(3)				

第壹部分、選擇（填）題

一、單選題

1. (2)

出處：第二冊〈數據分析〉

目標：一維數據分析

解析：某地區目前疫苗「接種人口涵蓋率」為 35 %

$\Rightarrow \dfrac{\text{第一劑疫苗接種人數}}{2400\text{萬}} = 35\ \%$

$\Rightarrow$ 第一劑疫苗接種人數 $=2400$ 萬$\times 35\ \%$

$=840$ 萬(人)

30 天內達成「接種人口涵蓋率」為 60 %

$\Rightarrow \dfrac{\text{第一劑疫苗接種人數}}{2400\text{萬}} = 60\ \%$

$\Rightarrow$ 第一劑疫苗接種人數 $=2400$ 萬$\times 60\ \%$

$=1440$ 萬(人)

則平均每天第一劑疫苗接種之施打量為

$\dfrac{1440-840}{30}=\dfrac{600}{30}=20$ 萬劑

故選(2)。

2. (3)

出處：第二冊〈排列組合與機率〉

目標：期望值計算

解析：機率總和為 $\dfrac{1}{n}+\dfrac{2}{n}+\dfrac{3}{n}+\dfrac{4}{n}+\dfrac{5}{n}+\dfrac{6}{n}=1 \Rightarrow n=21$

k	1	2	3	4	5	6
機率	$\frac{1}{21}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{3}{21}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{6}{21}$
$7-k$	6	5	4	3	2	1

每投擲 1 次的期望值為

$\dfrac{1}{21}\times 6+\dfrac{2}{21}\times 5+\dfrac{3}{21}\times 4+\dfrac{4}{21}\times 3+\dfrac{5}{21}\times 2+\dfrac{6}{21}\times 1$

$=\dfrac{56}{21}=\dfrac{8}{3}$(張)

連投 3 次的期望值為 $3\times\dfrac{8}{3}=8$(張)

故選(3)。

3. (4)

出處：第三冊〈平面向量〉

目標：面積與二階行列式

解析：$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ 兩向量所張成的平行四邊形面積為

$\left|\begin{vmatrix}\overrightarrow{AB}\\ \overrightarrow{AC}\end{vmatrix}\right| = |\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\sin 60^\circ$

$=3\times 5\times \sin 60^\circ$

$=\dfrac{15\sqrt{3}}{2}$

$2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}$ 兩向量所張成的平行四邊形面積為

$\left|\begin{vmatrix}2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}\\ \overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}\end{vmatrix}\right| \times(-2) = \left|\begin{vmatrix}7\overrightarrow{AC}\\ \overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}\end{vmatrix}\right|$

$=7\left|\begin{vmatrix}\overrightarrow{AC}\\ \overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}\end{vmatrix}\right| \times 2 = 7\left|\begin{vmatrix}\overrightarrow{AC}\\ \overrightarrow{AB}\end{vmatrix}\right| = 7\left|\begin{vmatrix}\overrightarrow{AB}\\ \overrightarrow{AC}\end{vmatrix}\right|$

$=7\times\dfrac{15\sqrt{3}}{2}=\dfrac{105\sqrt{3}}{2}$

故選(4)。

〔另解〕

由 $|\overrightarrow{AB}|=3$，$|\overrightarrow{AC}|=5$，$\overrightarrow{AB}$ 與 $\overrightarrow{AC}$ 的夾角為 60°

可令 $\overrightarrow{AB}=(3,0)$，$\overrightarrow{AC}=\left(\dfrac{5}{2},\dfrac{5\sqrt{3}}{2}\right)$

則 $2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}=\left(\dfrac{27}{2},\dfrac{15\sqrt{3}}{2}\right)$，

$\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}=(-2,-5\sqrt{3})$

以坐標數據進行二階行列式運算

故選(4)。

4. (2)

出處：第四冊〈矩陣〉

目標：用乘法反方陣解線性方程組

解析：因為 $\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\5\end{bmatrix}$，且 $\begin{bmatrix}e&f\\g&h\end{bmatrix}\begin{bmatrix}m\\n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\7\end{bmatrix}$

所以 $\begin{bmatrix}3\\5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e&f\\g&h\end{bmatrix}\begin{bmatrix}m\\n\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}5&3\\4&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}m\\n\end{bmatrix}$

因此 $\begin{bmatrix}m\\n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&3\\4&2\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}3\\5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&\frac{3}{2}\\2&-\frac{5}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{9}{2}\\-\frac{13}{2}\end{bmatrix}$

$\Rightarrow m-n=\dfrac{9}{2}-\left(-\dfrac{13}{2}\right)=11$

故選(2)。

5. (3)

出處：第四冊〈機率〉

目標：獨立事件

解析：每擲一次均勻的硬幣，由三人中的其中 1 人付費與無法分出結果的機率皆為 $\dfrac{1}{4}$

若只擲 1 次硬幣，甲無須付費的機率為 $\dfrac{1}{2}$

若只擲 2 次硬幣，甲無須付費的機率為 $\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{8}$

若擲 3 次硬幣，甲無須付費的機率為 $\left(\dfrac{1}{4}\right)^2\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{32}$

故此次用餐甲無須付費的機率為 $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{32}=\dfrac{21}{32}$

故選(3)。

二、多選題

6. (1)(2)(4)(5)

出處：第四冊〈空間向量〉、

第四冊〈空間中的平面與直線〉

目標：三元一次聯立方程式、空間向量

解析：(1) ○：$\because \overline{PB}=\overline{PD}=\sqrt{3}$

$\therefore P$ 點會落在 $\overline{BD}$ 的垂直平分面 $x-y=0$ 上

(2) ○：$\because A(0,0,0)$、$B(t,0,0)$、$D(0,t,0)$、$E(0,0,t)$

由 $\overline{PA}=\sqrt{2}$，$\overline{PB}=\overline{PD}=\sqrt{3}$，$\overline{PE}=1$，可得

$$\begin{cases} a^2+b^2+c^2=2 \\ (a-t)^2+b^2+c^2=3 \\ a^2+(b-t)^2+c^2=3 \\ a^2+b^2+(c-t)^2=1 \end{cases}$$

$\Rightarrow a=\dfrac{t^2-1}{2t}$，$b=\dfrac{t^2-1}{2t}$，$c=\dfrac{t^2+1}{2t}$

代入 $a^2+b^2+c^2=2$，得 $t=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 或 $\sqrt{3}$

$\because \overline{AG}=\sqrt{3}t$ 且 $\overline{AG}>\overline{PA}$

$\therefore t=\sqrt{3}$ 與 $(a,b,c)=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)$

故 $c=2a$

(3) ╳：正立方體的體積為 $t^3=3\sqrt{3}$

(4) ○：$\cos\angle PAB=\dfrac{\overline{AB}^2+\overline{AP}^2-\overline{PB}^2}{2\times\overline{AB}\times\overline{AP}}$

$$=\frac{(\sqrt{3})^2+(\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2}{2\times\sqrt{3}\times\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}}{6}$$

〔另解〕

$$\cos\angle PAB=\frac{\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AP}||\overrightarrow{AB}|}$$

$$=\frac{\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)\cdot(\sqrt{3},0,0)}{\sqrt{2}\times\sqrt{3}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{6}$$

(5) ○：$\because \overline{PB}=\overline{PD}=\sqrt{3}$

$\therefore \triangle PBD$ 是等腰三角形，且 $\overline{BD}=\sqrt{6}$

P 點與直線 BD 的距離為 P 點與線段 BD 中點的連線段長 $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

故選(1)(2)(4)(5)。

7. (2)(3)

出處：第一冊〈數與式〉、第二冊〈數據分析〉、第三冊〈平面向量〉、第四冊〈矩陣〉

目標：乘法公式、算術平均數、標準差、面積與二階行列式、內積

解析：根據矩陣乘法我們得到 $\begin{cases} a+b=12 \\ c+d=36 \\ a^2+b^2=74 \\ ac+bd=212 \\ c^2+d^2=656 \end{cases}$

(1) ╳：a，b，c，d 的算術平均數為

$$\frac{a+b+c+d}{4}=\frac{12+36}{4}=12$$

(2) ○：a，b，c，d 的標準差為

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4}-12^2}=\sqrt{\frac{74+656}{4}-144}$$

$$=\sqrt{\frac{77}{2}}$$

(3) ○：$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2 \Rightarrow 12^2=74+2ab$

$\Rightarrow ab=35$

則 $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

$=12\times(74-35)=468$

(4) ╳：$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=ac+bd=212$

(5) ╳：$\triangle OAB$ 的面積為

$$\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} a & -d \\ b & c \end{vmatrix}\right|=\frac{1}{2}|ac+bd|=106$$

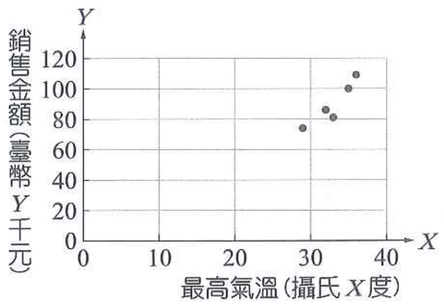
故選(2)(3)。

8. (1)(2)(5)

出處：第二冊〈數據分析〉

目標：二維數據分析

解析：(1) ○：利用散布圖判斷，兩組變數呈高度正相關



(2) ○：$U=\dfrac{9}{5}X+32$，$V=\dfrac{1}{30}Y$

$\because \dfrac{9}{5}$ 與 $\dfrac{1}{30}$ 同號　$\therefore r_1=r_2$

(3) ╳：$m_1=r_1\cdot\dfrac{\sigma_Y}{\sigma_X}$，$m_2=r_2\cdot\dfrac{\sigma_V}{\sigma_U}$

$\because r_1=r_2$，$\sigma_V=\dfrac{1}{30}\sigma_Y$，$\sigma_U=\dfrac{9}{5}\sigma_X$

$\therefore \dfrac{m_2}{m_1}=\dfrac{1}{54}$，故 $m_2<m_1$

(4) ╳：Y 對 X 的最適直線通過點 $(\mu_X,\mu_Y)=(33,90)$，因此 $(33,81)$ 不在直線上

(5) ○：V 對 U 的最適直線通過點 (μ_U,μ_V)，其中

$\mu_U=\dfrac{9}{5}\times33+32=91.4$，$\mu_V=\dfrac{1}{30}\times90=3$

故選(1)(2)(5)。

9. (4)(5)

出處：第四冊〈空間向量〉、第四冊〈空間中的平面與直線〉

目標：空間中兩直線的關係

解析：(1) ╳：$(3,a,6)\,//\,(2,3,b)$ 時，得 $a=\dfrac{9}{2}$，$b=4$

(2) ╳：點 $(7,3,8)$ 與點 $(6,4,0)$ 距離為 $\sqrt{66}$

但兩點連線與向量 $(2,3,4)$ 並不垂直

(3) ╳：此時 L_1 與 L_2 互為歪斜線

(4) ○：$(3,6,6)$ 與 $(2,3,2)$ 有一公垂向量 $(2,-2,1)$

則包含 L_1 且與 L_2 平行的平面為 $2x-2y+z=16$

而點 $(6,4,0)$ 與此平面的距離為 4

(5) ○：若正四面體的兩個不相交稜邊分別在 L_1，L_2 上

$\Rightarrow \overrightarrow{\ell_1} \perp \overrightarrow{\ell_2} \Rightarrow \overrightarrow{\ell_1} \cdot \overrightarrow{\ell_2} = 6+3a+6b=0$

$\Rightarrow a+2b=-2$

$|\overrightarrow{\ell_1}|^2+|\overrightarrow{\ell_2}|^2$

$=(\sqrt{3^2+a^2+6^2})^2+(\sqrt{2^2+3^2+b^2})^2$

$=a^2+b^2+58$

已知乘積和求平方和最小 ⇒ 利用柯西不等式

$(a^2+b^2)(1^2+2^2) \geq (a+2b)^2=(-2)^2$

$\Rightarrow a^2+b^2 \geq \frac{4}{5} \Rightarrow |\overrightarrow{\ell_1}|^2+|\overrightarrow{\ell_2}|^2 \geq \frac{4}{5}+58=\frac{294}{5}$

故選(4)(5)。

10. (3)

出處：第二冊〈排列組合與機率〉、第四冊〈機率〉

目標：期望值的計算

解析：(1) ╳：玩一次能獲得獎金，則兩張牌數字和為奇數，即(奇,偶)或(偶,奇)

所求機率為 $\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}+\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{12}{25}$

(2) ╳：玩一次獲得獎金的金額與機率如下表

獎金金額	300 元	500 元	700 元	900 元
數字和種類	(1 , 2)，(2 , 1)	(1 , 4)，(4 , 1)，(2 , 3)，(3 , 2)	(2 , 5)，(5 , 2)，(3 , 4)，(4 , 3)	(4 , 5)，(5 , 4)
機率	$\frac{2}{25}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{2}{25}$

所以玩一次獲得獎金的期望值為

$\frac{2}{25}\times300+\frac{4}{25}\times500+\frac{4}{25}\times700+\frac{2}{25}\times900$

$-\frac{13}{25}\times600=-24$ (元)

(3) ○：連續玩兩次且最終結算金額大於 0 元，則可能(兩次都獲得獎金)或(一次得 700 元或 900 元另一次賠 600 元)

所求機率為

$\frac{12}{25}\times\frac{12}{25}+2\times\frac{4}{25}\times\frac{13}{25}+2\times\frac{2}{25}\times\frac{13}{25}=\frac{12}{25}$

(4) ╳：連續玩兩次且最終結算金額超過 1000 元，則有 (300 , 900)，(500 , 700)，(500 , 900)，(700 , 700)，(700 , 900)，(900 , 900) 六種可能

所求機率為

$2\times\frac{2}{25}\times\frac{2}{25}+2\times\frac{4}{25}\times\frac{4}{25}+2\times\frac{4}{25}\times\frac{2}{25}$

$+\frac{4}{25}\times\frac{4}{25}+2\times\frac{4}{25}\times\frac{2}{25}+\frac{2}{25}\times\frac{2}{25}=\frac{92}{625}$

(5) ╳：所求為條件機率，由(3)、(4)的結果得機率為

$\dfrac{\frac{92}{625}}{\frac{12}{25}}=\frac{23}{75}$

故選(3)。

三、選填題

11. 60

出處：第三冊〈指數與對數函數〉

目標：對數與科學記號的轉換

解析：因為 $\log x=-7.2219=-8+0.7781$

$=\log 10^{-8}+0.3010+0.4771$

$\approx \log 10^{-8}+\log 2+\log 3=\log(6\times10^{-8})$

所以 $x \approx 6\times10^{-8}=60\times10^{-9}$，因此該病毒的直徑最接近的整數為 60 奈米。

12. $\frac{5}{9}$

出處：第三冊〈平面向量〉

目標：向量的線性組合

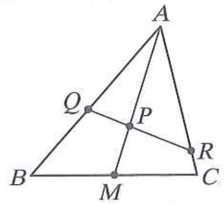
解析：∵ P 點為 $\triangle ABC$ 的重心，設 $\overline{BC}$ 的中點為 M

$\therefore \overrightarrow{AP}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AM}=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)$

$=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a}\overrightarrow{AQ}+\frac{2}{3a}\overrightarrow{AR}\right)$

$=\frac{1}{3a}\overrightarrow{AQ}+\frac{2}{9a}\overrightarrow{AR}$



∵ Q、P、R 三點共線 ∴ $\frac{1}{3a}+\frac{2}{9a}=1$

$\Rightarrow \frac{5}{9a}=1 \Rightarrow a=\frac{5}{9}$。

13. $\frac{1}{2}$

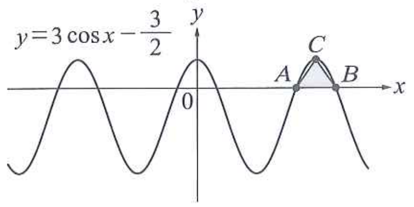
出處：第三冊〈三角函數〉

目標：三角函數的圖形

解析：將 $y=3\cos x-\frac{3}{2}$ 的圖形向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 可得

$y=3\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-\frac{3}{2}$ 的圖形，平移後面積不變

故考慮 $y=3\cos x-\frac{3}{2}$ 的圖形即可



當 $3\cos x-\frac{3}{2}=0 \Rightarrow \cos x=\frac{1}{2}$

由上圖可知圖形與 x 軸交於 $A\left(\frac{5\pi}{3}, 0\right)$，$B\left(\frac{7\pi}{3}, 0\right)$

$y=3\cos x-\frac{3}{2}$ 的最大值為 $3-\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$，

$\triangle ABC$ 的面積為 $\frac{1}{2}\cdot\frac{2\pi}{3}\cdot\frac{3}{2}=\frac{1}{2}\pi$

故著色三角形的面積為 $\frac{1}{2}\pi$。

14. $8+4\sqrt{3}$

出處：第一冊〈數與式〉、第三冊〈三角函數〉

目標：算幾不等式、餘弦定理、三角形面積公式

解析：令 A 點坐標為 $(\sqrt{3}t\,,\,t)$，B 點坐標為 $(a\,,\,0)$，t，$a>0$

則 $\overline{OA}=2t$，$\overline{OB}=a$，$\angle AOB=30^\circ$

由餘弦定理得 $16=4t^2+a^2-4at\cos 30^\circ$

$=4t^2+a^2-2\sqrt{3}at$

由算幾不等式可知

$\dfrac{4t^2+a^2}{2}\geq\sqrt{4a^2t^2}$

$\Rightarrow 4t^2+a^2\geq 2\sqrt{4a^2t^2}=4at$

$\Rightarrow 4t^2+a^2-16\geq 4at-16$

因此 $2\sqrt{3}at=4t^2+a^2-16\geq 4at-16$

$\Rightarrow 4at-2\sqrt{3}at\leq 16$

$\Rightarrow at\leq\dfrac{16}{4-2\sqrt{3}}=8(2+\sqrt{3})$

又$\triangle OAB$ 面積為

$\dfrac{1}{2}\times\overline{OA}\times\overline{OB}\times\sin\angle AOB$

$=\dfrac{1}{2}\times 2t\times a\times\sin 30^\circ=\dfrac{1}{2}at$

$\leq\dfrac{1}{2}\times 8(2+\sqrt{3})=4(2+\sqrt{3})=8+4\sqrt{3}$

故$\triangle OAB$ 面積的最大值為 $8+4\sqrt{3}$ 。

15. 100

出處：第一冊〈直線與圓〉

目標：兩平行線距離

解析：設 $(0\,,\,8)$、$(9\,,\,2)$、$(6\,,\,0)$、$(-5\,,\,4)$ 所在的直線方程式

分別為 L_1：$ax+by=c_1$、L_3：$bx-ay=c_3$、

L_2：$ax+by=c_2$、L_4：$bx-ay=c_4$

將點代入分別得到 $\begin{cases}8b=c_1\\9b-2a=c_3\\6a=c_2\\-5b-4a=c_4\end{cases}$ ……(*)

又正方形的邊長為兩平行線 L_1，L_2 或 L_3，L_4 的距離

令正方形邊長為 ℓ，則

$\ell=\dfrac{|c_2-c_1|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\dfrac{|c_4-c_3|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

將(*)的值代入得

$\ell=\dfrac{|6a-8b|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\dfrac{|-2a-14b|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$\Rightarrow 4a=-3b$ 或 $2a=11b$

代回 ℓ 得到正方形邊長為 $2\sqrt{5}$ 或 10

故該田地最大面積為 100 平方單位。

〔另解〕

可改設直線方程式為 $mx-y+8=0$、$x+my-9-2m=0$、$mx-y-6m=0$、$x+my+5-4m=0$。

16. $3\sqrt{5}+\dfrac{13}{2}$

出處：第三冊〈三角函數〉

目標：正餘弦函數的疊合

解析：令 $\angle POB=\theta\ (0^\circ<\theta<180^\circ)$

根據餘弦定理 $\overline{PC}=\sqrt{13-12\cos\theta}$

$OCDP$ 面積為$\triangle OPC+\triangle PCD$

$=\dfrac{1}{2}\times 2\times 3\times\sin\theta+\dfrac{1}{2}\times\overline{PC}^2$

$=3\sin\theta+\dfrac{13}{2}-6\cos\theta$

$=3\sqrt{5}\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}}\sin\theta-\dfrac{2}{\sqrt{5}}\cos\theta\right)+\dfrac{13}{2}$

$=3\sqrt{5}\sin(\theta-\phi)+\dfrac{13}{2}$

其中 $\sin\phi=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$，$\cos\phi=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

故 $OCDP$ 面積的最大值為 $3\sqrt{5}+\dfrac{13}{2}$，

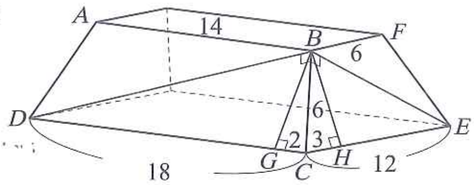
此時 $\theta=90^\circ+\phi$，$\sin\theta=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$，$\cos\theta=-\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ 。

17. $\dfrac{\sqrt{6}}{12}$

出處：第四冊〈空間向量〉

目標：兩面角的計算

解析：



如上圖，過 B 作 $\overline{BG}$ 垂直 $\overline{CD}$ 於 G，過 B 作 $\overline{BH}$ 垂直 $\overline{CE}$ 於 H，由等腰梯形得 $\overline{CG}=2$，連 $\overline{BD}$

$\because\triangle BCD\sim\triangle GCB(SAS)$ $\therefore\overline{BD}\perp\overline{BC}$

同理得 $\overline{BE}\perp\overline{BC}$

故平面 $ABCD$ 與平面 $BFEC$ 的兩面角即為$\triangle BDE$ 中的 $\angle DBE$

$\overline{BD}=\sqrt{\overline{CD}^2-\overline{BC}^2}=\sqrt{18^2-6^2}=12\sqrt{2}$

$\overline{BE}=\sqrt{\overline{CE}^2-\overline{BC}^2}=\sqrt{12^2-6^2}=6\sqrt{3}$

$\overline{DE}=\sqrt{\overline{CD}^2+\overline{CE}^2}=\sqrt{18^2+12^2}=6\sqrt{13}$

$\therefore|\cos\theta|=|\cos\angle DBE|=\left|\dfrac{\overline{BD}^2+\overline{BE}^2-\overline{DE}^2}{2\times\overline{BD}\times\overline{BE}}\right|$

$=\left|\dfrac{(12\sqrt{2})^2+(6\sqrt{3})^2-(6\sqrt{13})^2}{2\times 12\sqrt{2}\times 6\sqrt{3}}\right|$

$=\left|\dfrac{8+3-13}{2\times 2\sqrt{2}\times\sqrt{3}}\right|$

$=\dfrac{\sqrt{6}}{12}$ 。

〔另解〕

由 $\overline{BC}$ 中點 M 作 $\overline{MP}$ 垂直 $\overline{CD}$ 於 P，過 M 作 $\overline{MQ}$ 垂直 $\overline{CE}$ 於 Q，

利用側面等腰梯形邊長比例可得

$\overline{BP}=6\sqrt{2}$，$\overline{CP}=9$，$\overline{BQ}=3\sqrt{3}$，$\overline{CQ}=6$，

且 $\overline{PQ}=3\sqrt{13}$

故 $|\cos\theta|=\left|\dfrac{(6\sqrt{2})^2+(3\sqrt{3})^2-(3\sqrt{13})^2}{2\times 6\sqrt{2}\times 3\sqrt{3}}\right|$

$=\left|\dfrac{-18}{36\sqrt{6}}\right|=\dfrac{\sqrt{6}}{12}$ 。

第貳部分、混合題或非選擇題

18. (1)

出處：第一冊〈多項式函數〉

目標：三次函數的圖形

解析：$f(x)$ 的首項係數 $2>0\Rightarrow$ 圖形的趨勢為右上左下

(1)(3)(5)符合

又 $f(x)$ 的常數項為 5，所以 $y=f(x)$ 的圖形通過 $(0,5)$

故選(1)。

19. $8x+5$

出處：第一冊〈多項式函數〉

目標：除法原理

解析：$\because f(0)=5$，$f(2)=16+4a-4a+5=21$

令 $f(x)=x(x-2)\,q(x)+mx+n$

$\because f(0)=n=5$

$f(2)=2m+n=21\Rightarrow m=8$

$\therefore f(x)=x(x-2)\,q(x)+8x+5$

故餘式為 $8x+5$。

〔另解〕

利用長除法

$$\begin{array}{r|llll} & 2x & +(a+4) & & \\ \hline x^2-2x & 2x^3+ & a\ x^2- & 2a\ x & +5 \\ & 2x^3- & 4\ x^2 & & \\ \hline & & (a+4)x^2- & 2a\ x & +5 \\ & & (a+4)x^2 & -2(a+4)x & \\ \hline & & & 8\ x & +5 \end{array}$$

故餘式為 $8x+5$。

◎評分原則

$\because f(0)=5$，$f(2)=16+4a-4a+5=21$

令 $f(x)=x(x-2)\,q(x)+mx+n$ (2 分)

$\because f(0)=n=5$

$f(2)=2m+n=21\Rightarrow m=8$ (2 分)

$\therefore f(x)=x(x-2)\,q(x)+8x+5$

故餘式為 $8x+5$。 (2 分)

〔另解〕

利用長除法

$$\begin{array}{r|llll} & 2x & +(a+4) & & \\ \hline x^2-2x & 2x^3+ & a\ x^2- & 2a\ x & +5 \\ & 2x^3- & 4\ x^2 & & \\ \hline & & (a+4)x^2- & 2a\ x & +5 \\ & & (a+4)x^2 & -2(a+4)x & \\ \hline & & & 8\ x & +5 \end{array}$$

(3 分)

故餘式為 $8x+5$。 (3 分)

20. 0.9

出處：第一冊〈多項式函數〉

目標：一次近似函數

解析：$y=f(x)$ 的圖形向左平移 1 單位，向下平移 1 單位之後會通過原點

$\Rightarrow y=f(x)$ 的圖形通過 $(1,1)$

$f(1)=2+a-2a+5=1\Rightarrow a=6$

$\Rightarrow y=f(x)=2x^3+6x^2-12x+5$

連續利用綜合除法，可得

$f(x)=2(x-1)^3+12(x-1)^2+6(x-1)+1$

故 $g(x)=6(x-1)+1$

則 $g(0.99)=6\cdot(-0.01)+1=0.94\approx 0.9$。

〔另解〕

$y=f(x)$ 的圖形向左平移 1 單位，向下平移 1 單位之後會通過原點

$\Rightarrow y=f(x)$ 的圖形通過 $(1,1)$

$f(1)=2+a-2a+5=1\Rightarrow a=6$

$\Rightarrow y=f(x)=2x^3+6x^2-12x+5$

利用微分得 $f'(x)=6x^2+12x-12$

$\therefore f'(1)=6+12-12=6$

則 $y=g(x)=f'(1)(x-1)+f(1)=6(x-1)+1$

故 $g(0.99)=6\cdot(-0.01)+1=0.94\approx 0.9$。

◎評分原則

$y=f(x)$ 的圖形向左平移 1 單位，向下平移 1 單位之後會通過原點

$\Rightarrow y=f(x)$ 的圖形通過 $(1,1)$

$f(1)=2+a-2a+5=1\Rightarrow a=6$

$\Rightarrow y=f(x)=2x^3+6x^2-12x+5$ (2 分)

連續利用綜合除法，可得

$f(x)=2(x-1)^3+12(x-1)^2+6(x-1)+1$

故 $g(x)=6(x-1)+1$ (2 分)

則 $g(0.99)=6\cdot(-0.01)+1=0.94\approx 0.9$。 (2 分)

〔另解〕

$y=f(x)$ 的圖形向左平移 1 單位，向下平移 1 單位之後會通過原點

$\Rightarrow y=f(x)$ 的圖形通過 $(1,1)$

$f(1)=2+a-2a+5=1\Rightarrow a=6$

$\Rightarrow y=f(x)=2x^3+6x^2-12x+5$ (2 分)

利用微分得 $f'(x)=6x^2+12x-12$

$\therefore f'(1)=6+12-12=6$

則 $y=g(x)=f'(1)(x-1)+f(1)=6(x-1)+1$ (2 分)

故 $g(0.99)=6\cdot(-0.01)+1=0.94\approx 0.9$。 (2 分)