

oleh
Kelompok 3

MATERI INTEGRAL

Untuk SMA/MA Kelas XII

Integral Aljabar _Integral Fungsi Trigonometri _ Integral Tak
Tentu _Integral Tertentu

Isna Silvia, Selly Erawati S, Ima Tarsimah
Kelas 1.D PENDIDIKAN MATEMATIKA
oleh Kelompok 3





KATA PENGANTAR

Buku sebagai salah satu sumber pembelajaran mempunyai peranan yang penting dalam meningkatkan sumber daya manusia khususnya peserta didik. Dengan buku, peserta didik dapat mengikuti kegiatan belajar mengajar dengan baik dan siswa mampu memahami materi dengan lebih mudah.

Untuk meningkatkan keterampilan siswa dalam berpikir kritis, kreatif, dan sistematis dalam memecahkan masalah pengoprasian integral serta aplikasi dalam kesehariannya, kami lengkapi buku ini dengan contoh soal dan Uji kompetensi. Kami berharap buku ini dapat membimbing para siswa menerapkan berbagai konsep untuk mengembangkan materi integral.

Sesuai kata orang bijak, tidak ada yang sempurna dalam hidup begitupun dengan buku ini. Oleh karena itu, saran dan kritik yang bersifat membangun dari para pembaca untuk memperbaiki mutu buku berikutnya sangat kami harapkan.

Cirebon, Oktober 2014

Penulis

**DAFTAR ISI**

KATA PENGANTAR	i
DAFTAR ISI	ii
KATA-KATA MOTIVASI	iii
TUJUAN PEMBELAJARAN	iv
BAB INTEGRAL	
A. Pengertian Integral.....	1
B. Integral Tak Tentu	
1. Pengertian Integral Tak Tentu	1
a. Rumus Integral Tak Tentu Fungsi Aljabar	2
b. Rumus Integral Tak Tentu Fungsi Trigonometri	3
2. Penerapan Integral Tak Tentu	6
C. Integral Tertentu	7
D. Teknik-Teknik Pengintegralan	
1. Integral Substitusi	
a).Bentuk Substitusi-1	10
b).Integral yang Memuat Bentuk $\sqrt{a^2 - x^2}$, $\sqrt{a^2 + x^2}$, $\sqrt{x^2 - a^2}$	12
2. Integral Parsial	13
E. Beberapa Penggunaan Integral Tertentu	
1. Luas Daerah antara Kurva dan Sumbu X	14
2. Luas Daerah antara Dua Kurva	15
3. Volume Benda Putar Mengelilingi Sumbu X dan Y	16
F. Aplikasi Integral Dalam Kehidupan Sehari-hari	20
UJI KOMPETENSI	22
DAFTAR PUSTAKA	27
BIODATA KELOMPOK DAN DESKRIPSI KERJA KELOMPOK	



Ambisi dan mimpimu adalah samudra.

Meski kadang terjadi pasang surut, tapi takkan pernah surut airnya.
Oleh sebab itu, bersemangatlah selalu, meski melakukan hal sekecil apapun. Jangan pernah menunda-nunda apa yang bisa dilakukan hari ini.

M

*engalahkan Rasa
engolah menjadi Asa
ewujudkan dalam Realita*



Perhatikanlah daun-daun yang mati dan berguguran dari pohon, ia sebenarnya memberikan hidup baru pada pohon. Bahkan sel-sel dalam tubuh kita pun selalu memperbaharui diri.

PERBAIKI DIRI. GALI POTENSI.

Segala sesuatu di alam ini memberikan jalan kepada kehidupan yang baru dan membuang yang lama. **Satu-satunya yang menghalangi kita untuk melangkah dari masa lalu adalah pikiran kita sendiri.**



Setiap insan manusia dilahirkan luarbiasa.

Ingatlah, hanya seorang pemenang yang bisa melihat potensi, sementara seorang pecundang sibuk mengingat masa lalu.

**Jauhkan keraguan,
Temukan Cara Terbaikmu
Meraih Mimpi**





TUJUAN PEMBELAJARAN

- a. Memahami pengertian integral
- b. Memahami pengertian integral tak tentu
- c. Menentukan integral tak tentu fungsi aljabar dan fungsi trigonometri
- d. Memahami pengertian integral tertentu
- e. Menentukan integral tertentu dengan menggunakan sifat-sifat integral
- f. Menentukan integral dengan cara substitusi dan parsial
- g. Menggambar suatu daerah yang dibatasi oleh beberapa kurva
- h. Merumuskan integral tertentu untuk luas daerah antara kurva dan sumbu x
- i. Menghitung luas suatu daerah yang dibatasi dua kurva
- j. Merumuskan integral tertentu untuk volume benda putar dari daerah yang diputar terhadap sumbu x dan sumbu y
- k. Menghitung volume benda dari daerah yang dibatasi oleh dua kurva yang mengelilingi sumbu x dan sumbu y



BAB INTEGRAL

A. Pengertian Integral

Di Kelas XI, kalian telah mempelajari konsep turunan. Pemahaman tentang konsep turunan ini dapat kalian gunakan untuk memahami konsep integral. Untuk itu, coba tentukan turunan fungsi berikut. Perhatikan bahwa fungsi ini memiliki bentuk umum $f(x) = 2x^3$. Setiap fungsi ini memiliki turunan $f'(x) = 6x^2$. Jadi, turunan fungsi $f(x) = 2x^3$ adalah $f'(x) = 6x^2$.

Menentukan fungsi $f(x)$ dari $f'(x)$, berarti menentukan antiturunan dari $f'(x)$. Sehingga, integral merupakan antiturunan (antidiferensial) atau operasi invers terhadap diferensial.

Jika $f(x)$ adalah fungsi umum yang bersifat $f'(x) = f(x)$, maka $f(x)$ merupakan antiturunan atau integral dari $F'(x) = f(x)$.

B. Integral Tak Tentu

1. Pengertian Integral Tak Tentu

Pengintegralan fungsi $f(x)$ yang ditulis sebagai $\int f(x)dx$ disebut integral tak tentu dari $f(x)$. Jika $F(x)$ anti turunan dari $f(x)$, maka

$$\int f(x)dx = f(x) + c$$

Keterangan:

\int = notasi integral (yang diperkenalkan oleh Leibniz, seorang matematikawan Jerman)

$f(x)$ = fungsi integran

$f(x)$ = fungsi integral umum yang bersifat $f'(x) = F(x)$

c = konstanta pengintegralan

Ada dua jenis integral tak tentu yang akan kamu pelajari pada bagian ini yaitu integral tak tentu dari fungsi aljabar dan integral tak tentu



dari fungsi trigonometri. Agar kamu memahaminya dengan baik, perhatikan uraian berikut.

a. Rumus Dasar Integral Tak Tentu dan Fungsi Aljabar

Sekarang, perhatikan turunan fungsi-fungsi berikut.

▪ $g_1(x) = x$, didapat $g_1'(x) = 1$

Jadi, jika $g_1'(x) = 1$ maka $g_1(x) = \int g_1'(x) dx = x + c_1$

▪ $g_2(x) = \frac{1}{2}x^2$, didapat $g_2'(x) = x$

Jadi, jika $g_2'(x) = x$ maka $g_2(x) = \int g_2'(x) dx = \frac{1}{2}x^2 + c_2$

Dari uraian ini, tampak bahwa jika $g'(x) = x^n$, maka $g(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c$ atau dapat dituliskan $\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c$, $n \neq -1$.

Sebagai contoh, turunan fungsi $f(x) = 2x^2 + c$ adalah

$f'(x) = 4x$. Ini berarti, antiturunan dari $f'(x) = 4x$ adalah $f(x) = 2x^2 + c$ atau dituliskan $\int f'(x) dx = 2x^2 + c$.

Uraian ini menggambarkan hubungan berikut.

Jika $f'(x) = x^n$, maka $f(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c$, $n \neq -1$

dengan c suatu konstanta.

Misalnya k konstanta real sembarang, $f(x)$ dan $g(x)$ merupakan fungsi yang dapat diintegrasikan, maka akan berlaku:

a) $\int dx = x + c$

b) $\int k f(x) dx = k \int f(x) dx$

c) $\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$

d) $\int ax^n dx = \frac{a}{n+1}x^{n+1} + c$

Untuk lebih memahami integral tak tentu fungsi aljabar, marilah kita simak contoh-contoh berikut.



Contoh:

1. Selesaikan integral berikut!

a) $\int x^3 dx$

b) $\int x^{\frac{3}{2}} dx$

c) $\int 2\sqrt[4]{x^3} dx$

d) $\int (6x^2 + 2x - 3) dx$

Jawab:

a) $\int x^3 dx = \frac{1}{3+1} x^{3+1} + c = \frac{1}{4} x^4 + c$

b) $\int x^{\frac{3}{2}} dx = \frac{1}{\frac{3}{2}+1} x^{\frac{3}{2}+1} + c = \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} + c$

c) $\int 2\sqrt[4]{x^3} dx = 2 \int x^{\frac{3}{4}} dx = 2 \cdot \frac{x^{\frac{3}{4}+1}}{\frac{3}{4}+1} + c = \frac{8}{7} x^{\frac{7}{4}} + c$

d) $\int (6x^2 + 2x - 3) dx = \int 6x^2 dx + \int 2x dx - \int 3 dx = 2x^3 + x^2 - 3x + c$

b. Rumus Integral Tak Tentu dari Fungsi Trigonometri

Untuk memahami integral dari fungsi trigonometri, dibutuhkan pemahaman yang baik mengenai turunan trigonometri. Agar kamu lebih memahaminya, perhatikan label turunan fungsi trigonometri berikut :

Tabel Turunan Fungsi Trigonometri

$\mathcal{F}(x)$	$\mathcal{F}'(x)$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\sec^2 x$
$\sec x$	$\tan x \cdot \sec x$
$\cot x$	$-\csc^2 x$
$\csc x$	$-\cot x \cdot \csc x$



Berdasarkan tabel Tersebut, rumus dasar pengintegralan trigonometri adalah sebagai berikut.

$$\int \cos x \, dx = \sin x + C \quad \int \sin x \, dx = -\cos x + C$$

$$\int \sec^2 x \, dx = \tan x + C$$

$$\int \csc^2 x \, dx = -\cot x + C$$

$$\int \tan x \cdot \sec x \, dx = \sec x + C$$

$$\int \cot x \cdot \csc x \, dx = -\csc x + C$$

Berdasarkan rumus integral dari fungsi trigonometri diatas, maka rumus-rumus tersebut dapat diperluas menjadi :

$$\text{a. } \int \cos(ax + b) \, dx = \frac{1}{a} \sin(ax + b) + C$$

$$\text{b. } \int \sin(ax + b) \, dx = -\frac{1}{a} \cos(ax + b) + C$$

$$\text{c. } \int \sec^2(ax + b) \, dx = \frac{1}{a} \tan(ax + b) + C$$

$$\text{d. } \int \tan(ax + b) \cdot \sec(ax + b) \, dx = \frac{1}{a} \sec(ax + b) + C$$

$$\text{e. } \int \csc^2(ax + b) \, dx = -\frac{1}{a} \cot(ax + b) + C$$

$$\text{f. } \int \cot(ax + b) \cdot \csc(ax + b) \, dx = -\frac{1}{a} \csc(ax + b) + C$$

Contoh 1.2

Selesaikan integral berikut!

1. $\int (2 \sin x + 3) \, dx$
2. $\int \sec^2 2x - 1 \, dx$
3. $\int \sin^2 x \, dx$
4. $\int (\sin x + \cos x)^2 \, dx$
5. $\int \sin 4x \cdot \cos 2x \, dx$

Ingat kembali

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x$$



6. $\int \sec x \cdot \tan x \, dx$

7. $\int 2 \sin 3x \, dx$

Penyelesaian :

1. $\int (2 \sin x + 3) \, dx = 2 \int \sin x \, dx + \int 3 \, dx = -2 \cos x + 3x + C$

2. $\int (\sec^2 2x - 1) \, dx = \int \sec^2 2x \, dx - \int 1 \, dx = \frac{1}{2} \tan 2x - x + C$

3. $\int \sin^2 x \, dx = \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x \right) \, dx = \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} 2x + C$

4. $\int (\sin x + \cos x)^2 \, dx = \int (\sin^2 x + 2 \sin x \cdot \cos x + \cos^2 x) \, dx$

$$= \int (1 + 2 \sin x \cdot \cos x) \, dx$$

$$= \int (1 + \sin 2x) \, dx$$

$$= x - \frac{1}{2} \cos 2x + C$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\tan^2 x + 1 = \sec^2 x$$

$$\cot^2 x + 1 = \csc^2 x$$

5. $\int \sin 4x \cdot \cos 2x \, dx$

$$= \int \frac{1}{2} (\sin 6x + \sin 2x) \, dx$$

$$= \frac{1}{2} \int (\sin 6x + \sin 2x) \, dx$$

$$= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{6} \cos 6x - \frac{1}{2} \cos 2x \right) + C$$

$$= -\frac{1}{12} \cos 6x - \frac{1}{4} \cos 2x + C$$

6. $\int \sec x \cdot \tan x \, dx = \sec x + C$

7. $\int 2 \sin 3x \, dx = 2 \int \sin 3x \, dx$

$$= -\frac{2}{3} \cos 3x + C$$



2. Penerapan Integral Tak Tentu

Integral tak tentu dapat digunakan untuk menyelesaikan permasalahan-permasalahan di bawah ini :

1. Untuk menentukan suatu fungsi jika turunan dari fungsinya diberikan.
2. Untuk menentukan posisi, kecepatan, dan percepatan suatu benda pada waktu tertentu. Misalnya s menyatakan posisi benda, kecepatan benda dinyatakan dengan v , dan percepatan benda dinyatakan dengan a . Hubungan antara s , v , dan a adalah sebagai berikut.

$$v = \frac{ds}{dt} \text{ sehingga } s = \int v \, dt \text{ dan } a = \frac{dv}{dt} \text{ sehingga } v = \int a \, dt$$

Agar lebih memahami aplikasi integral tak tentu, perhatikan contoh soal berikut ini!

1. Diketahui $f'(x) = 6x^2 - 10x + 3$ dan $f(-1) = 2$. Tentukan $f(x)$.

Jawab :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 6x^2 - 10x + 3 \\ f(x) &= \int (6x^2 - 10x + 3) dx \\ &= 2x^3 - 5x^2 + 3x + C \\ f(-1) &= 2 \\ 2 &= 2(-1)^3 - 5(-1)^2 + 3(-1) + C \\ 2 &= -2 - 5 - 3 + C \\ C &= 12 \end{aligned}$$

Jadi, $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 3x + 12$

2. Sebuah benda bergerak pada garis lurus dengan percepatan a yang memenuhi persamaan $a = 2t - 1$, a dalam m/s^2 dan t dalam detik. Jika kecepatan awal benda $v = 5 \, m/s$ dan posisi benda saat $t = 6$ adalah $s = 92 \, m$, maka tentukan persamaan posisi benda tersebut saat t detik!

Jawab :

$$\begin{aligned} a &= 2t - 1 \\ v &= \int a \, dt \\ v &= \int (2t - 1) dt \\ &= t^2 - t + C \end{aligned}$$



Kecepatan awal benda 5 ms^{-1} , artinya saat $t = 0$ nilai $v = 5$

$$\begin{aligned}v_{t=0} &= 5 \\0^2 - 0 + C &= 5 \\C &= 5\end{aligned}$$

Sehingga,

$$v = t^2 - t + 5$$

$$\begin{aligned}s &= \int v \, dt \\&= \int (t^2 - t + 5) \, dt \\&= \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + 5t + d\end{aligned}$$

$$\text{untuk } s_{t=6} = 92$$

$$\frac{1}{3}(6)^3 - \frac{1}{2}(6)^2 + 5(6) + d = 92$$

$$72 - 18 + 30 + d = 92$$

$$84 + d = 92$$

$$d = 8$$

Jadi, persamaan posisi benda tersebut saat t detik dirumuskan dengan

$$s = \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + 5t + 8$$

C. Integral Tertentu

Jika fungsi $y = f(x)$ kontinu pada interval $a \leq x \leq b$, maka:

$$\int_a^b f(x) \, dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

dengan $F(x)$ adalah anti turunan dari $f(x)$ dalam $a \leq x \leq b$. Bentuk integral di atas disebut integral tertentu dengan a sebagai batas bawah dan b sebagai batas atas. Definisi integral di atas dikenal sebagai *Teorema Dasar Kalkulus*.



Misalnya $f(x)$ dan $g(x)$ merupakan fungsi-fungsi kontinu dalam interval tertutup $[a, b]$, maka integral tertentu memenuhi sifat-sifat umum sebagai berikut.

$$1. \int_a^a f(x) dx = 0$$

$$2. \int_a^b k \cdot f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx, k = \text{konstanta}$$

$$3. \int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$$

$$4. \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

$$5. \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx$$

Untuk memahami integral tertentu lebih lanjut, marilah kita simak contoh-contoh berikut.

Contoh :

1. Hitunglah hasil integral berikut!

a. $\int_0^3 6x^2 dx$

Jawab :

$$\begin{aligned} \int_0^3 6x^2 dx &= 6 \int_0^3 x^2 dx = 6 \cdot \left. \frac{1}{3} x^3 \right|_0^3 = 6 \left(\left(\frac{1}{3} \cdot 3^3 \right) - \left(\frac{1}{3} \cdot 0^3 \right) \right) \\ &= 6(9 - 0) = 54 \end{aligned}$$

b. $\int_1^3 (x^2 + 2x - 3) dx$

Jawab :

$$\begin{aligned} \int_1^3 (x^2 + 2x - 3) dx &= \int_1^3 x^2 dx + \int_1^3 2x dx - \int_1^3 3 dx = \left. \frac{1}{3} x^3 \right|_1^3 + \left. x^2 \right|_1^3 - \left. 3x \right|_1^3 \\ &= \left(\left(\frac{1}{3} \cdot 3^3 \right) - \left(\frac{1}{3} \cdot 1^3 \right) \right) + (3^2 - 1^2) - ((3 \cdot 3) - (3 \cdot 1)) \\ &= \left(9 - \frac{1}{3} \right) + (9 - 1) - (9 - 3) = \frac{26}{3} + 8 - 6 \\ &= \frac{32}{3} = 10 \frac{2}{3} \end{aligned}$$



2. Hitunglah hasil integral dari bentuk berikut!

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} (2 \sin x + 6 \cos x) dx$$

Jawab :

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} (2 \sin x + 6 \cos x) dx &= -2 \cos x + 6 \sin x \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \left(-2 \cos \left(\frac{\pi}{4} \right) + 6 \sin \left(\frac{\pi}{4} \right) \right) - \left(-2 \cos \left(-\frac{\pi}{2} \right) + 6 \sin \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right) \\ &= (-\sqrt{2} + 3\sqrt{2}) - [0 - 6] = 6 + 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

3. Jika $\int_1^k (2x - 5) dx = 18$ untuk $k > 0$ maka tentukan nilai $k + 1$!

Jawab:

$$\begin{aligned} \int_1^k (2x - 5) dx &= 18 \\ [x^2 - 5x]_1^k &= 18 \\ (k^2 - 5k) - (1 - 5) &= 18 \\ k^2 - 5k + 4 - 18 &= 0 \\ k^2 - 5k - 14 &= 0 \\ (k - 7)(k + 2) &= 0 \\ k = 7 \text{ atau } k = -2 & \text{ (tidak memenuhi)} \\ \text{maka nilai } k + 1 &= 7 + 1 = 8. \end{aligned}$$

4. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \, dx$

jawab:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} (1 + \cos 2x) \, dx = \left[\frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \sin 2x \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$



$$= \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{1}{4} \sin 2\left(\frac{\pi}{2}\right) \right] = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - 0\right) + \frac{1}{4} (0 - 0) = \frac{\pi}{4}$$

D. Teknik-Teknik Pengintegralan

Sering kita jumpai fungsi-fungsi yang akan diintegalkan tidak sesuai dengan rumus dasar integral dan tidak sedikit fungsi tersebut diberikan dalam bentuk yang sangat rumit. Pada subbab ini kita akan membahas dua teknik pengintegralan untuk menyelesaikan integral dengan fungsi seperti itu, yaitu *integral substitusi* dan *integral parsial*.

1. Integral Substitusi

a) Bentuk Substitusi-1

Tidak semua bentuk pengintegralan bisa dikerjakan dengan menggunakan rumus $\int ax^n dx = \frac{a}{n+1} x^{n+1} + c$. Banyak bentuk-bentuk yang kelihatannya rumit, sehingga tidak bisa diselesaikan dengan rumus di atas. Karena itu dibutuhkan suatu cara lain untuk menyelesaikannya. Pada bagian ini akan dibahas teknik integrasi yang disebut metode substitusi. Konsep dasar dari metode ini adalah dengan mengubah integral yang kompleks menjadi bentuk yang lebih sederhana. Bentuk umum integral substitusi adalah sebagai berikut.

$$\int \left[f(u) \frac{du}{dx} \right] dx = \int f(u) du$$

Contoh soal.

1. $\int (5x - 2)^3 dx$
2. $\int (x^2 - 1)(x + 3)^5 dx$
3. $\int 2x(x^2 + 3)^4 dx$

Jawab :

1. $\int (5x - 2)^3 dx$

Misal: $u = 5x - 2$



$$du = 5 dx \rightarrow dx = \frac{1}{5} du$$

Sehingga

$$\begin{aligned}\int (5x - 2)^3 dx &= \int u^3 \frac{1}{5} du = \frac{1}{5} \int u^3 du = \frac{1}{5} \left(\frac{1}{4} u^4 \right) + c \\ &= \frac{1}{20} (5x - 2)^4 + c\end{aligned}$$

$$\text{Jadi, } \int (5x - 2)^3 dx = \frac{1}{20} (5x - 2)^4 + C$$

$$2. \int (x^2 - 1)(x + 3)^5 dx$$

$$\text{Misal } u = x + 3 \rightarrow dx = du$$

$$x = u - 3$$

$$\text{Sehingga } \int (x^2 - 1)(x + 3)^5 dx = \int ((u - 3)^2 - 1) u^5 dx$$

$$= \int (u^2 - 6u + 8) u^5 dx$$

$$= \int (u^7 - 6u^6 + 8u^5) dx$$

$$= \frac{1}{8} u^8 - \frac{6}{7} u^7 + \frac{4}{3} u^6 + C$$

$$= \frac{1}{8} (x + 3)^8 - \frac{6}{7} (x + 3)^7 + \frac{4}{3} (x + 3)^6 + C$$

$$\text{Jadi, } \int (x^2 - 1)(x + 3)^5 dx = \frac{1}{8} (x + 3)^8 - \frac{6}{7} (x + 3)^7 + \frac{4}{3} (x + 3)^6 + C$$

$$3. \int 2x(x^2 + 3)^4 dx$$

$$\text{Misalkan } u = x^2 + 3, \text{ maka } \frac{du}{dx} = 2x \text{ atau } dx = \frac{du}{2x}$$

Sehingga diperoleh,

$$\int 2x(x^2 + 3)^4 dx = \int 2x u^4 \frac{du}{2x}$$

$$= \int u^4 du = \frac{1}{5} u^5 + C$$

$$= \frac{1}{5} (x^2 + 3)^5 + C$$



b) Integral yang Memuat Bentuk $\sqrt{a^2 - x^2}$, $\sqrt{a^2 + x^2}$, $\sqrt{x^2 - a^2}$

Untuk menyelesaikan pengintegralan yang memuat bentuk-bentuk $\sqrt{a^2 - x^2}$, $\sqrt{a^2 + x^2}$ dan $\sqrt{x^2 - a^2}$, kita menggunakan teknik integral substitusi trigonometri. Agar kamu lebih memahaminya, perhatikan dengan baik tabel berikut.

Bentuk	Substitusi	Hasil
$\sqrt{a^2 - x^2}$	$x = a \sin \theta$	$\sqrt{a^2 - x^2} = a \cos \theta$
$\sqrt{a^2 + x^2}$	$x = a \tan \theta$	$\sqrt{a^2 + x^2} = a \sec \theta$
$\sqrt{x^2 - a^2}$	$x = a \sec \theta$	$\sqrt{x^2 - a^2} = a \tan \theta$

Untuk lebih memahami teknik integral substitusi trigonometri, perhatikan contoh berikut.

$$\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}} dx$$

Misal $x = 2 \sin \theta$, maka $\sin \theta = \frac{x}{2}$

$$dx = 2 \cos \theta d\theta$$

Batas Integral

x	0	2
θ	0	$\frac{\pi}{2}$

Sehingga

$$\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2 \cos \theta d\theta}{\sqrt{4 - 4 \sin^2 \theta}}$$



$$\begin{aligned} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2 \cos \theta}{2 \cos \theta} d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \theta \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

2. Integral Parsial

Apabila kamu menemukan bentuk integral yang tidak bisa diselesaikan dengan integral substitusi, mungkin permasalahan tersebut dapat diselesaikan dengan substitusi ganda yang lebih dikenal sebagai *integral parsial*.

Perhatikan uraian berikut.

Misalnya, $y = u \cdot v$ dengan y , u , dan v fungsi dari x , maka

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= u' \cdot v + u \cdot v' \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{du}{dx} \cdot v + u \cdot \frac{dv}{dx} \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{dx} (v du + u dv) \\ dy &= v du + u dv \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int dy &= \int v du + \int u dv \\ y &= \int v du + \int u dv \\ uv &= \int v du + \int u dv \\ \int u dv &= uv - \int v du \end{aligned}$$

Jadi, dari uraian di atas dapat kita ambil kesimpulan bahwa rumus integral parsial adalah sebagai berikut.

$$\int u dv = uv - \int v du$$



Contoh soal:

1. $\int x^2 \cos x \, dx$

Jawab:

1. $\int x^2 \cos x \, dx$

Misal $u = x^2 \rightarrow du = 2x \, dx$

$dv = \cos x \rightarrow v = \sin x$

Sehingga

$$\begin{aligned}\int x^2 \cos x \, dx &= x^2 \sin x - \int (\sin x)(2x) \, dx = x^2 \sin x - 2 \int x \sin x \, dx \\ &= x^2 \sin x - 2(-x \cos x + \sin x) + c \\ &= x^2 \sin x + 2x \cos x - \sin x + c\end{aligned}$$

E. Beberapa Penggunaan Integral Tertentu

1. Luas Daerah antara Kurva dan Sumbu X

Misalkan S adalah daerah yang dibatasi oleh kurva

$y = f(x)$, sumbu X , garis $x = a$, dan garis $x = b$

Dengan $f(x) \geq 0$ pada (a, b) maka luas daerah

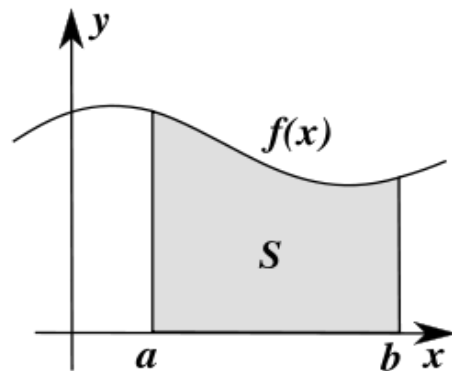
S dapat ditentukan dengan rumus :

$$S = \int_a^b f(x) \, dx$$

Apabila $f(x) \leq 0$ atau daerahnya di bawah sumbu X , maka

Gambar 1

$$S = - \int_a^b f(x) \, dx$$



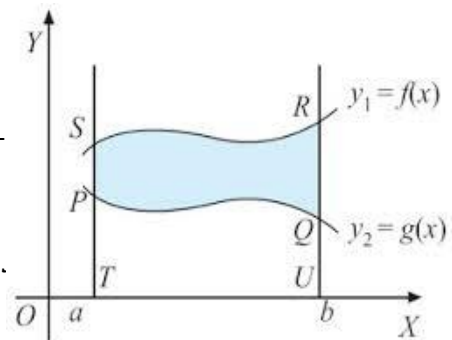


2. Luas Daerah antara Dua Kurva

Misalkan daerah S adalah daerah yang dibatasi oleh kurva $y_1 = f(x)$, $y_2 = g(x)$, garis $x = a$, dan garis $x = b$ seperti pada gambar di samping maka luas daerah $S = L_{TURS} - L_{TUQP}$.

Luas daerah S dapat ditentukan dengan cara sebagai berikut.

$$\begin{aligned} S &= L_{TURS} - \\ &= \int_a^b f(x) dx - \\ &= \int_a^b \{f(x) - g(x)\} dx \end{aligned}$$



Jadi, luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y_1 = f(x)$, $y_2 = g(x)$, dari $x = a$ sampai $x = b$ ditentukan dengan rumus

$$L = \int_a^b \{f(x) - g(x)\} dx$$

Dengan $f(x) \geq g(x)$ dalam interval $a \leq x \leq b$.

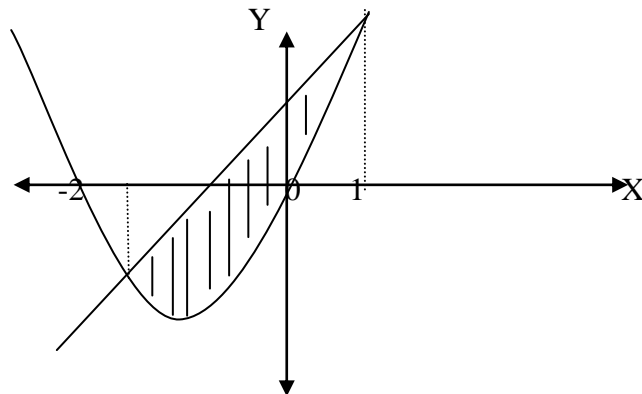
Untuk memahami cara menentukan luas daerah, perhatikan contoh berikut ini!

1. Tentukan luas daerah antara kurva $y = x^2 + 3x$ dan $y = 2x + 2$

Penyelesaian :

Titik potong kedua kurva yaitu :

$$x^2 + 3x = 2x + 2 \Leftrightarrow (x+2)(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = -2 \text{ atau } x = 1$$

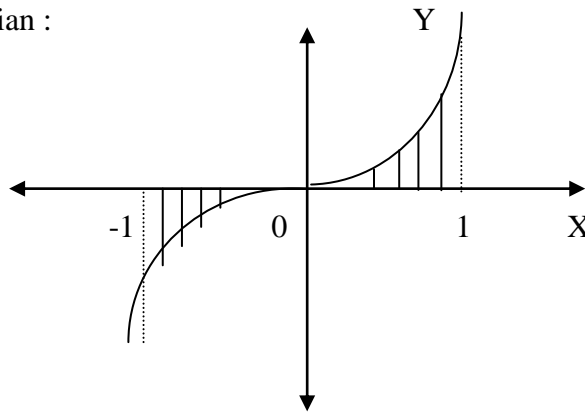




$$L = \int_{-2}^1 [(2x+2) - (x^2+3x)] dx = \int_{-2}^1 (2-x-x^2) dx = 4\frac{1}{2} \text{ satuan luas.}$$

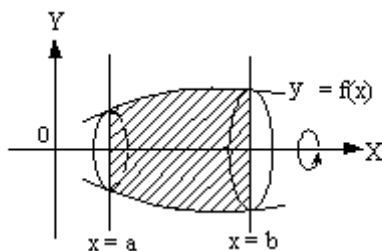
2. Tentukan luas daerah antara kurva $y = x^3$, sumbu X, $x = -1$ dan $x = 1$!

Penyelesaian :



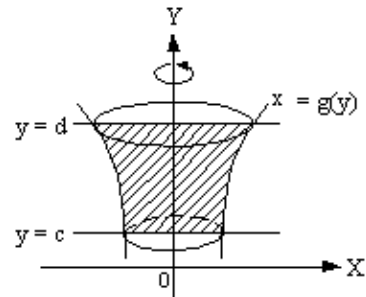
$$L = -\int_{-1}^0 x^3 dx + \int_0^1 x^3 dx = -\left[\frac{1}{4}x^4\right]_{-1}^0 + \left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^1 = -(0 - \frac{1}{4}) + (\frac{1}{4} - 0) = \frac{1}{2} \text{ satuan luas}$$

3. Volume Benda Putar Mengelilingi Sumbu X



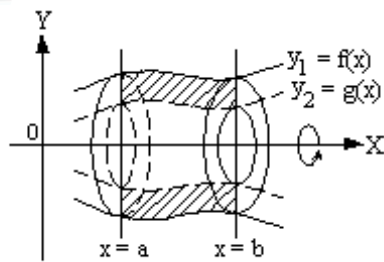
Volume benda putar dari daerah yang diputar sejauh 360° mengelilingi sumbu X

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx \text{ atau } V = \pi \int_a^b y^2 dx$$



Volume benda putar dari daerah yang diputar sejauh 360° mengelilingi sumbu Y

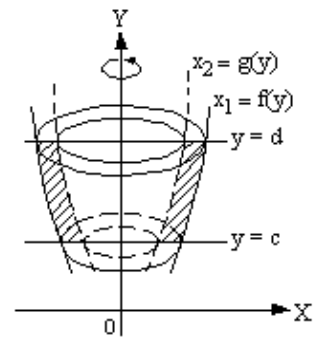
$$V = \pi \int_c^d (g(y))^2 dy \text{ atau } V = \pi \int_c^d x^2 dy$$



Volume benda putar dari daerah antara dua kurva kurva yang diputar 360° terhadap sumbu Y.

$$V = \pi \int_a^b \{f^2(x) - g^2(x)\} dx \text{ atau}$$

$$V = \pi \int_a^b (y_1^2 - y_2^2) dx$$



Volume benda putar dari daerah antara dua kurva kurva yang diputar 360° terhadap sumbu X.

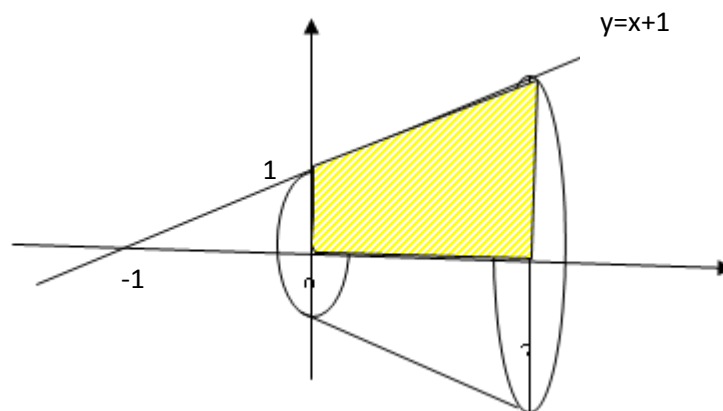
$$V = \pi \int_c^d \{f^2(y) - g^2(y)\} dy \text{ atau}$$

$$V = \pi \int_c^d (x_1^2 - x_2^2) dy$$

Contoh Soal :

1. Hitunglah volume benda putar yang terjadi, jika yang daerah dibatasi kurva $y = x + 1$, $x = 0$, $x = 2$, dan sumbu x diputar mengelilingi sumbu x sejauh 360°

Penyelesaian :





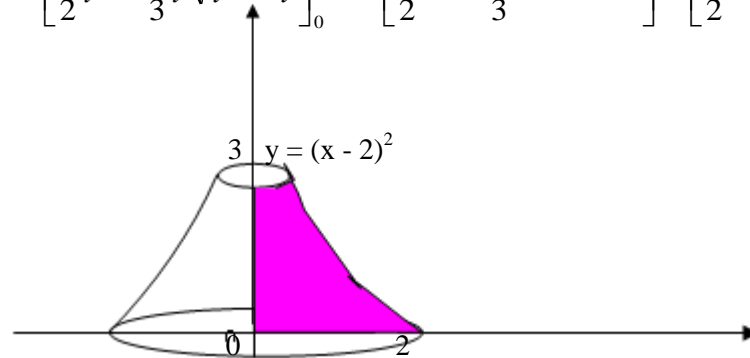
$$\begin{aligned}
 V &= \pi \int_0^2 f^2(x) dx = \pi \int_0^2 (x+1)^2 dx = \pi \int_0^2 (x^2 + 2x + 1) dx \\
 &= \pi \left[\frac{1}{3} x^3 + x^2 + x \right]_0^2 = \pi \left[\left(\frac{1}{3} \cdot 2^3 + 2^2 + 2 \right) - \left(\frac{1}{3} \cdot 0^3 + 0^2 + 0 \right) \right] = \pi \left(\frac{26}{3} \right) \\
 &= \frac{26}{3} \pi \text{ satuan volume}
 \end{aligned}$$

2. Hitung volume benda putar yang terjadi jika daerah yang dibatasi $y=(x-2)^2$, sumbu y , $y=0$ dan $y=3$ diputar mengelilingi sumbu y sejauh 360° .

Penyelesaian:

dimana $(x-2)^2 = y$ menjadi $x = \sqrt{y} + 2$

$$\begin{aligned}
 V &= \pi \int_0^3 x^2 dy = \pi \int_0^3 (\sqrt{y} + 2)^2 dy = \pi \int_0^3 (y + 4\sqrt{y} + 4) dy \\
 &= \pi \left[\frac{1}{2} y^2 + \frac{8}{3} y\sqrt{y} + 4y \right]_0^3 = \pi \left[\frac{1}{2} \cdot 3^2 + \frac{8}{3} \cdot 3\sqrt{3} + 4 \cdot 3 \right] = \left[\frac{9}{2} + 8\sqrt{3} + 12 \right] \pi
 \end{aligned}$$



3. Tentukan volume benda putar, jika daerah yang dibatasi oleh grafik $f(x) = 4 - x^2$, sumbu- x , dan sumbu- y diputar 360° terhadap :

- Sumbu- x
- Sumbu- y



Jawab :

- a. Volumennya adalah

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^2 (4 - x^2)^2 dx = \pi \int_0^2 (16 - 8x^2 + x^4) dx \\ &= \pi \left[16x - \frac{8}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 \right]_0^2 \\ &= \pi \left(\left(16 \cdot 2 - \frac{8}{3} \cdot 2^3 + \frac{1}{5} \cdot 2^5 \right) - 0 \right) \\ &= \pi \left(32 - \frac{64}{3} + \frac{32}{5} \right) \\ &= \frac{256}{15} \pi \end{aligned}$$

Jadi, volume benda putar yang terjadi jika daerah R diputar mengelilingi sumbu-x adalah $\frac{256}{15} \pi$ satuan volume.

- b. Untuk menentukan volume benda putar yang terjadi jika daerah R diputar mengelilingi sumbu-y, nyatakan persamaan kurva $y = f(x) = 4 - x^2$ menjadi persamaan x^2 dalam variabel y. $y = 4 - x^2 \Rightarrow x^2 = 4 - y$

Volume benda putar tersebut adalah

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^4 (4 - y) dy \\ &= \pi \left[4y - \frac{1}{2}y^2 \right]_0^4 \\ &= \pi \left(\left(4 \cdot 4 - \frac{1}{2} \cdot 4^2 \right) - 0 \right) \\ &= \pi(16 - 8) = 8 \pi \end{aligned}$$

Jadi, volume benda putar yang terjadi jika daerah R diputar mengelilingi sumbu-y adalah 8π satuan volume.



1 Aplikasi Integral dalam Kehidupan Sehari-hari

Definisi Integral adalah kebalikan dari diferensial. Apabila kita mendiferensiasi kita mulai dengan suatu pernyataan dan melanjutkannya untuk mencari turunannya. Apabila kita mengintergrasikan, kita mulai dengan turunannya dan kemudian mencari pernyataan asal integral ini. Lambang integral adalah

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

Integral dalam kehidupan sehari-hari sangatlah luas cangkupannya seperti digunakan di bidang teknologi, fisika, ekonomi, matematika, teknik dan bidang-bidang lain. Adapun uraiannya sebagai berikut :

A. Bidang Teknologi

Integral sering digunakan untuk memecahkan persoalan yang berhubungan dengan volume, panjang kurva, memperkirakan populasi, keluaran kardiak, usaha, gaya dan surplus konsumen.

B. Bidang Ekonomi

Penerapan integral dalam bidang ekonomi yaitu:

- Untuk menentukan persamaan-persamaan dalam perilaku ekonomi.
- Untuk mencari fungsi konsumsi dari fungsi konsumsi marginal.

C. Bidang Matematika

Penerapan integral dalam bidang matematika yaitu:

- Untuk menentukan luas suatu bidang.
- Untuk menentukan volume benda putar dan menentukan panjang busur.

D. Bidang Fisika

Penerapan integral dalam bidang fisika yaitu:

- Untuk menganalisis rangkaian listrik arus AC.
- Untuk menganalisis medan magnet pada kumparan.
- Untuk menganalisis gaya-gaya pada struktur pelengkung.



E. Bidang Teknik

Penerapan integral dalam bidang teknik yaitu:

- Untuk mengetahui volume benda putar
- Untuk mengetahui luas daerah pada kurva.

Contoh integral dalam kehidupan sehari-hari, dapat kita ketahui dari kecepatan sebuah motor pada waktu tertentu, dan posisi perpindahan benda itu pada setiap waktu. Untuk menemukan hubungan ini kita memerlukan proses integral (antidiferensial), contoh lain yaitu setiap gedung Petronas di Kuala Lumpur atau gedung-gedung bertingkat di Jakarta. Semakin tinggi bangunan semakin kuat angin yang menghantamnya. Karenanya bagian atas bangunan harus dirancang berbeda dengan bagian bawah. Untuk menentukan rancangan yang tepat, dipakailah integral.



UJI KOMPETENSI

Kerjakan dengan teliti !

1. Selesaikan tiap integral berikut ini!

- a. $\int 2x^5 dx$
- b. $\int 5x^4 dx$
- c. $\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx$
- d. $\int (3x^4 - 4x^3 + 2x^2 - 5x + 7) dx$
- e. $\int (6 - 2x + 3x^2 - 8x^3) dx$
- f. $\int (2x - 3)^2 dx$
- g. $\int x^2(x + 6) dx$
- h. $\int (1 - x)\sqrt{x} dx$
- i. $\int \frac{x^3 + 5x^2 - 4}{x^2} dx$
- j. $\int \left(x\sqrt{x} - \frac{1}{x\sqrt{x}} \right)^2 dx$

2. Selesaikan integral tak tentu fungsi trigonometri berikut ini!

- a. $\int 5 \sin x \, dx$
- b. $\int (\sin x - \cos x) \, dx$
- c. $\int (8 \cos x - 6 \sin x) \, dx$
- d. $\int (2 + x + \sin x) \, dx$
- e. $\int (x^2 - 2 \sin x) \, dx$

3. Selesaikan integral tak tentu fungsi trigonometri berikut ini!

- a. $\int 2 \sin 4x \cos 2x \, dx$
- b. $\int 4 \sin 5x \sin x \, dx$
- c. $\int \cos 3x \cos x \, dx$



4. Tentukan nilai integral di bawah ini :

a. $\int_0^3 4x \, dx$

b. $\int_{-2}^1 6x^2 \, dx$

c. $\int_0^4 12x\sqrt{x} \, dx$

d. $\int_{-1}^1 (5 - 2x - 6x^2) \, dx$

e. $\int_1^2 \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 \, dx$

5. Tunjukkan dengan arsiran, luas daerah yang dinyatakan dengan integral berikut :

a. $\int_0^4 3x \, dx$

b. $\int_{-2}^3 x^2 \, dx$

c. $\int_{-3}^3 (x^2 - 4) \, dx$

d. $\int_{-2}^2 x^3 \, dx$

6. Tentukan integral dari fungsi –fungsi berikut dengan menggunakan metode substitusi !

a. $\int (2x + 3)^5 \, dx$

b. $\int \frac{2}{(5x + 1)^4} \, dx$

c. $\int 4x(x^2 - 4)^6 \, dx$

d. $\int 12x^2(x^3 + 5)^4 \, dx$

e. $\int 6x\sqrt{6 - x^2} \, dx$



7. Tentukan integral berikut dengan metode parsial !

a. $\int 6x(x+2)^5 dx$

b. $\int 8x(1-2x)^3 dx$

c. $\int x\sqrt{2x-4} dx$

d. $\int \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx$

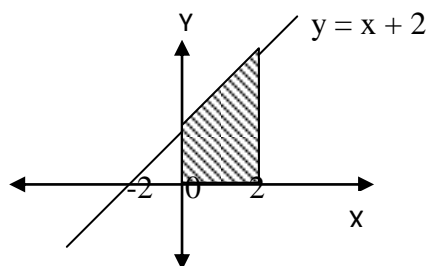
e. $\int x \sin x dx$

f. $\int x^2 \cos x dx$

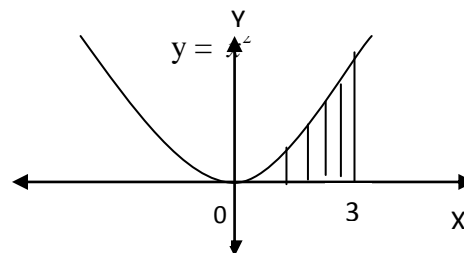
g. $\int (2x+1)\sin 2x dx$

8. Tentukan luas daerah yang diarsir pada gambar di bawah ini :

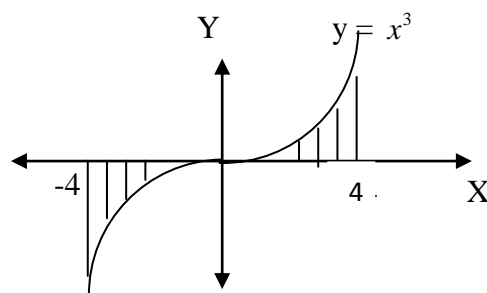
a.



b.



c.

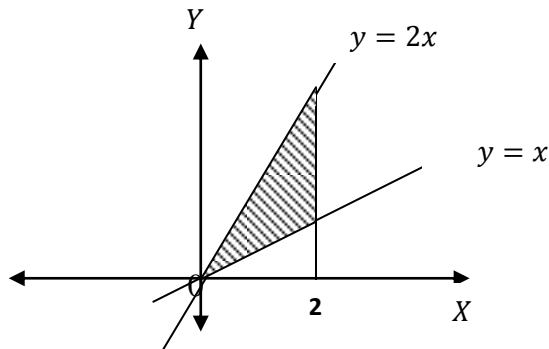




9. Tentukan luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = x^3 - 3x^2$, sumbu X, $x = -1$ dan $x = 3$

10. Hitunglah luas daerah yang diarsir pada gambar di bawah ini :

a.



11. Hitunglah volume benda putar yang terjadi jika daerah yang dibatasi oleh kurva-kurva yang diketahui diputar mengelilingi sumbu X sejauh 360° !

- a. $y = x$, $x = 1$ dan $x = 10$
- b. $y = x^2$, sumbu X, sumbu Y dan $x = 6$
- c. $y = \sqrt{x}$, sumbu X, sumbu Y dan $x = 9$
- d. $y = x^2 + 1$, $x = 0$ dan $x = 1$
- e. $y = x^3$, sumbu X, $x = -3$ dan $x = 3$

12. Volume benda putar yang terjadi jika daerah yang dibatasi oleh kurva $y = x^2 + 1$ dan $y = 3$ diputar mengelilingi sumbu Y sejauh 360° adalah ... satuan volum

- a. 2π
- b. $2\frac{1}{2}\pi$
- c. 3π
- d. $4\frac{1}{3}\pi$
- e. 5π



13. Volume benda putar yang terjadi karena daerah yang dibatasi oleh parabolay $= x^2$ dan $y^2 = 8$ diputar 360° mengelilingi sumbu Y adalah satuan volum

- a. $2\frac{4}{5}\pi$ c. $4\frac{4}{5}\pi$ e. $9\frac{4}{5}\pi$
- b. $3\frac{4}{5}\pi$ d. $5\frac{4}{5}\pi$



DAFTAR PUSTAKA

E.,S. Pesta, Cecep Anwar H.F.S. 2008. *Matematika Aplikasi Jilid 3*. Jakarta: Pusat Perbukuan Departemen Pendidikan Nasional.

Martono, K. 1992. *Kalkulus*. Bandung: Fakultas IPA Jurusan Matematika ITB.

Purcell, Edwin. J. 1992. *Kalkulus dan Geometri Analitis*. Jakarta: Erlangga.

Ayres, Frank J.R. 1964. *Calculus*. McGraw Hill.

Herynugroho, dkk. 2006. *Matematika SMA Kelas XII*. Jakarta: Yudhistira

www.soalmatematik.com. Diakses pada 9 Oktober 2014.

Download dokumen Matem teknik. Diakses pada 9 Oktober 2014.

Download dokumen Integral Terentu Murti Astuti. Diakses pada 9 Oktober 2014.

**Deskripsi Kerja****Kelompok**

Dalam pembuatan project buku ajar ini kami mengerjakannya dengan berbagi tugas dengan tujuan agar project buku ajar ini selesai tepat waktu, akan tetapi bukan berarti kami mengerjakannya secara terpisah dan masing-masing, kami tetap setiap hari berkumpul dan bertukar pendapat. Banyak sekali masalah yang kami temui saat pembuatan buku ajar ini, namun dengan rasa kerja sama dan tanggungjawab dari masing-masing anggota kelompok kami, masalah yang kami hadapi dapat terselesaikan. Kami berharap buku ajar yang kami buat ini dapat memberikan manfaat bagi semua pembacanya, khususnya bagi pendidik dan peserta didik dalam proses pembelajaran.

Isna Silvia

Nama : Isna Silvia

Tempat, tanggal lahir : Majalengka,
02 September 1996

Jenis kelamin : Perempuan

Agama : Islam

Alamat : Ling. Ganjar Asih, RT/05,
RW/06 Kel. Cikasarung, Kec./Kab.
Majalengka, Prov. Jawa Barat

Facebook : Isna Silvia

Twitter: @isna_silvia

e-mail :isna_silvia@yahoo.com

Selly Erawati Sudarja

Nama: Selly Erawati Sudarja

Tempat, Tanggal Lahir : Indramayu, 13
Desember 1996

Jenis kelamin : Perempuan

Agama : Islam

Alamat : Jl. Raya Limpas No.59 Patrol-
Indramayu

Facebook : Selly Erawati Sudarja

Twitter : @sellyerawati_13

e-mail: sellyerawatisudarja@yahoo.com

Ima Tarsimah

Nama : Ima Tarsimah

Tempat, tanggal lahir : Majalengka, 25
Maret 1995

Jenis Kelamin : Perempuan

Agama : Islam

Alamat : Blok Leuwiorok RT/03 RW/01 Ds.
Jatimulya kec. Kasokandel kab.
Majalengka

Facebook : イマ

Twitter : @ImaTarsimah

e-mail : imatarsimah@gmail.com