分段 3 次样条多项式简便算法

事故现场:

先插入一个图片:

$$h_1 + h_2$$

$$d_3 = 6\,\frac{f[x_3,x_4] - f[x_2,x_3]}{h_2 + h_3} = -2.4300,$$

$$d_4 = \frac{6}{h_3}(f'_4 - f[x_3,x_4]) = -2.1150.$$

由此得矩阵形式的三弯矩方程为

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & & & \\ \frac{5}{14} & 2 & \frac{9}{14} & & \\ & \frac{3}{5} & 2 & \frac{2}{5} & \\ & & \frac{3}{7} & 2 & \frac{4}{7} \\ & & & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_0 \\ M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5.5200 \\ -4.3157 \\ -3.2640 \\ -2.4300 \\ -2.1150 \end{bmatrix},$$

解得 $M_0 = -2.0278, M_1 = -1.4643, M_2 = -1.0313, M_3 = -0.8072, M_4 = -0.6539.$

利用三次样条表达式

$$S(x) = M_j\,\frac{(x_{j+1} - x)^3}{6h_j} + M_{j+1}\,\frac{(x - x_j)^3}{6h_j} + \left(y_j - \frac{M_j h_j^2}{6}\right)\frac{x_{j+1} - x}{h_j} + \left(y_{j+1} - \frac{M_{j+1} h_j^2}{6}\right)\frac{x - x_j}{h_j}, \quad j = 0,1,2,$$

将 M_j, x_j, y_j **代入并整理,得**

$$S(x) = \begin{cases} 1.8783x^3 - 2.4227x^2 + 1.8591x + 0.1573, & x \in [0.25, 0.30], \\ 0.8019x^3 - 1.4538x^2 + 1.5685x + 0.1863, & x \in [0.30, 0.39], \\ 0.6225x^3 - 1.2440x^2 + 1.4866x + 0.1970, & x \in [0.39, 0.45], \\ 0.3194x^3 - 0.8348x^2 + 1.3025x + 0.2246, & x \in [0.45, 0.53]. \end{cases}$$

当我们用三弯矩法一通操作,得到了 M0-4 之后,我们还需要算出每个分段的 3 次多项式

那真的世界末日.因为我们要回代到~~凭本事背错的~~ S(x)中然后还要把三次多项式展开变成**老师考试要求的**以 x^3 x^2 x 1 为基的多项式

对此,我们应该:

简便方法

现在给出一个简单的方法,能够在算出 M 后
快速确定各分段的三次多项式$\mathrm{Ax^3+Bx^2+Cx+D}$的系数 ABCD

原理之后再说,先上例子,节约时间:

x_j	0.25	0.30	0.39	0.45	0.53
y_j	0.5000	0.5477	0.6245	0.6708	0.7280

试求三次样条插值 $S(x)$,并满足条件:

(1) $S'(0.25)=1.0000$, $S'(0.53)=0.6868$;

(2) $S''(0.25)=S''(0.53)=0$.

计算第一问第一个区间的 3 次多项式

经过蜜汁操作,我们用三弯矩法得到的了M_0 到 M_4:

由此得矩阵形式的三弯矩方程为

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & & & \\ \frac{5}{14} & 2 & \frac{9}{14} & & \\ & \frac{3}{5} & 2 & \frac{2}{5} & \\ & & \frac{3}{7} & 2 & \frac{4}{7} \\ & & & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_0 \\ M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5.5200 \\ -4.3157 \\ -3.2640 \\ -2.4300 \\ -2.1150 \end{bmatrix},$$

解得 $M_0=-2.0278, M_1=-1.4643, M_2=-1.0313, M_3=-0.8072, M_4=-0.6539$.

利用三次样条表达式

$$S(x)=M_j\frac{(x_{j+1}-x)^3}{6h_j}+M_{j+1}\frac{(x-x_j)^3}{6h_j}+\left(y_j-\frac{M_jh_j^2}{6}\right)\frac{x_{j+1}-x}{h_j}$$
$$+\left(y_{j+1}-\frac{M_{j+1}h_j^2}{6}\right)\frac{x-x_j}{h_j},\quad j=0,1,2,$$

将 M_j, x_j, y_j 代入并整理,得

$$S(x)=\begin{cases} 1.8783x^3-2.4227x^2+1.8591x+0.1573, & x\in[0.25,0.30], \\ 0.8019x^3-1.4538x^2+1.5685x+0.1863, & x\in[0.30,0.39], \\ 0.6225x^3-1{:}2440x^2+1.4866x+0.1970, & x\in[0.39,0.45], \\ 0.3194x^3-0.8348x^2+1.3025x+0.2246, & x\in[0.45,0.53]. \end{cases}$$

现在要求解第一个区间[0.25,0.3]上的 S(x)

M其实是多项式$S(x)$的两阶导数,所以有

$$S''(0.25) = M_0 = -2.0278, S''(0.3) = M_1 = -1.4643$$

两阶导数其实是一次多项式,其实就是两个点两条线,求一下$S''(x)$在[0.25,0.3]上解析几何里面的两点式,也是拉格朗日插值的一阶形式

公式:

$$S''(x) = M_j\frac{x_{i+1}-x}{h_i} + M_{j+1}\frac{x-x_i}{h_j}$$

在这里就是$-2.0278 * (0.3 - x)/(0.3 - 0.25) + (-1.4643)(x - 0.25)/(0.3 - 0.25)$

将这个多项式化简得到

$$S''(x) = 11.27x - 4.8453$$

对这个$S''(x)$积分两次,发现我们任务已经完成一半了:

$Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$的系数中

$$A = 11.27/6 \approx 1.8783$$
$$B = 4.8453/2 = -2.42265 \approx -2.4227$$

现在我们来求 C 和 D

因为我们知道

x_j	0.25	0.30
y_j	0.5000	0.5477

带入 S(x),相当于就解二元一次方程组:

$$\begin{cases} x_0^1 C + D = y_0 - A x_0^3 - B x_0^2 \\ x_1^1 C + D = y_1 - A x_1^3 - B x_1^2 \end{cases}$$

在卡西欧 991 分别按下:菜单,8,1,2
输入得到

得到:
C≈1.8592
D≈0.1573
因而在第一个区间的三次样条多项式为

$$\begin{cases} 1.8783x^3 - 2.4227x^2 + 1.8591x + 0.1573, \quad x \in [0.25, 0.30], \end{cases}$$

与标准答案

$$\begin{cases} 1.8783x^3 - 2.4227x^2 + 1.8591x + 0.1573, \quad x \in [0.25, 0.30], \end{cases}$$

非常接近,差的疑似舍入误差(反正老师说他看整数差不多就算过了)

原理

上面部分给出了一个算例,现在我来解释一下为什么可以这样算
我们首先应该注意到 S(x)的由来

下面我们利用 $S(x)$ 的二阶导数值 $S''(x_j)=M_j(j=0,1,\cdots,n)$ 表达 $S(x)$. 由于 $S(x)$ 在区间 $[x_j,x_{j+1}]$ 上是三次多项式，故 $S''(x)$ 在 $[x_j,x_{j+1}]$ 上是线性函数，可表示为

$$S''(x)=M_j\frac{x_{j+1}-x}{h_j}+M_{j+1}\frac{x-x_j}{h_j}. \tag{6.7}$$

对 $S''(x)$ 积分两次并利用 $S(x_j)=y_j$ 及 $S(x_{j+1})=y_{j+1}$，可定出积分常数，于是得三次样条表达式

$$S(x)=M_j\frac{(x_{j+1}-x)^3}{6h_j}+M_{j+1}\frac{(x-x_j)^3}{6h_j}+\left(y_j-\frac{M_jh_j^2}{6}\right)\frac{x_{j+1}-x}{h_j}+\left(y_{j+1}-\frac{M_{j+1}h_j^2}{6}\right)\frac{x-x_j}{h_j},\quad j=0,1,\cdots,n-1. \tag{6.8}$$

我们在区间$[x_i,x_{i+1}]$上,S(x)的两阶导数的左节点值为$\mathrm{M_i}$右节点值为$\mathrm{M_{i+1}}$,且这是线性函数

$$\mathrm{S}''(x)=M_j\frac{x_{i+1}-x}{h_i}+M_{j+1}\frac{x-x_i}{h_j}$$

然后可以直接化简写成$\mathrm{ax+b}$的形式
其中

$$\mathrm{a}=M_j\frac{-1}{h_i}+M_{j+1}\frac{1}{h_j}$$

$$\mathrm{b}=M_j\frac{x_{i+1}}{h_i}+M_{j+1}\frac{-x_i}{h_j}$$

对这个多项式求两次积分

可以得到$\frac{\mathrm{a}}{6}\mathrm{x}^3+\frac{\mathrm{b}}{2}\mathrm{x}^2+Cx+D$

然后我们愉快的得到
Ax^3+Bx^2+Cx+D的系数中

$$\mathrm{A}=\frac{\mathrm{a}}{6}$$

$$\mathrm{B}=\frac{\mathrm{b}}{2}$$

现在我们还差 C 与 D,而我们已经有了插值节点的值,所以可以直接待定系数求解:

$$\begin{cases} x_0^1C+D=y_0-Ax_0^3-Bx_0^2 \\ x_1^1C+D=y_1-Ax_1^3-Bx_1^2 \end{cases}$$

最终得到 C 与 D,从而轻松算出区间$[x_i,x_{i+1}]$上的三阶插值多项式 S(x)

PS:用同样的思路,可以对于用三转角法得到的 m(插值节点的一阶导数)来用三次 hermite 插值得到 A(x),感兴趣的同学可以试一下