SEKOLAH TINGGI TEKNOLOGI BANDUNG

BAB 9. Penaksiran parameter

Teknik Informatika

Semester 3

Semester 3

Suluh Widya Yakti ST. MT

Populasi dan sample

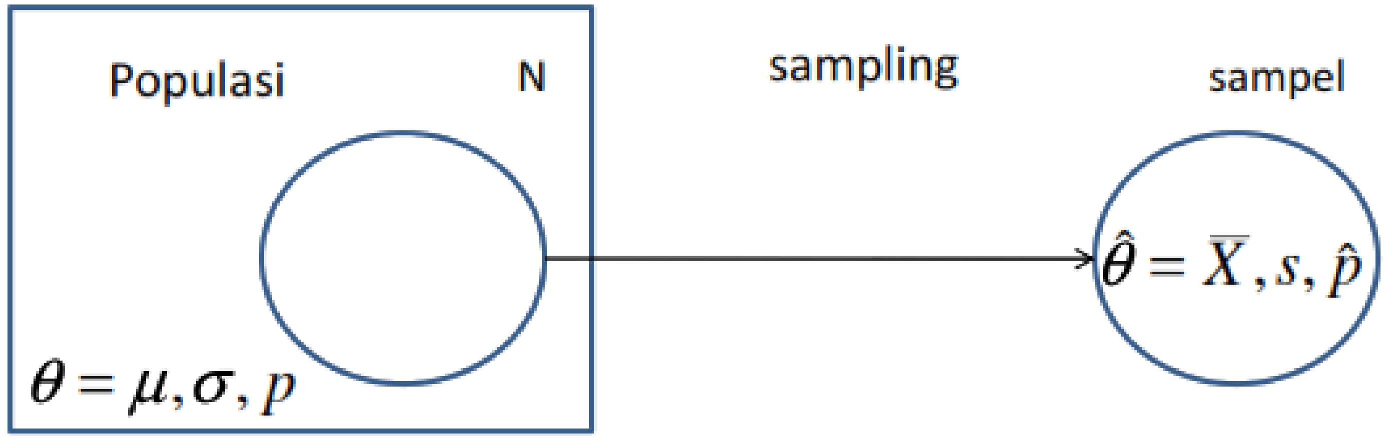
Tujuan utama pengambilan sampel dari suatu populasi adalah untuk mengetahui parameter populasi itu sendiri.

- Ada dua cara yang digunakan untuk mengetahui parameter populasi:

  1. Cara penaksiran (pendugaan)
  2. Cara pengujian hipotesis

- Dua cara di atas didasarkan pada statistik atau besaran yang dihitung dari sampel sehingga kita harus mengambil sampel dari populasi.

Parameter populasi ditulis dilambangkan dengan θ (dibaca tetha) dimana θ bisa merupakan rata-rata Populasi (yaitu μ), simpangan baku / standar deviasi populasi (yaitu σ), dan bisa pula proporsi populasi (yaitu p)



- Dalam statistika inferensi, statistik $\hat{\theta}$ inilah yang dipakai untuk menaksir parameter θ dari populasi. Tepatnya adalah:

  Statistik $\hat{\theta}$ = $\hat{X}$ dipakai untuk menaksir parameter θ = μ
  Statistik $\hat{\theta}$ = S dipakai untuk menaksir parameter θ = σ
  Statistik $\hat{\theta}$ = $\hat{p}$ dipakai untuk menaksir parameter θ = p

- Ada dua macam penaksiran:

  1. Penaksiran titik

  Bila nilai parameter θ dari populasi hanya ditaksir dengan memakai satu nilai statistik $\hat{\theta}$ dari sampel yang diambil dari populasi tersebut.

  Contoh: misalkan kita ingin mengetahui rata-rata tinggi orang Indonesia. Diambil sampel acak sebanyak 1000 orang dan diperoleh tinggi rata-ratanya adalah $\hat{X}$ = 164 cm. Nilai ini dipakai untuk menduga rata-rata tinggi orang Indonesia. Karena hanya satu nilai saja sebagai penaksir, maka $\hat{X}$ disebut penaksir titik.

Rata – rata tinggi = 164 cm

2. Penaksiran selang (interval)

Bila nilai parameter θ dari populasi hanya ditaksir dengan memakai beberapa nilai statistik $\hat{\theta}$ yang berada dalam suatu interval, maka statistik $\hat{\theta}$ disebut **penaksir selang.**

Contoh: rata-rata tinggi orang Indonesia dapat ditaksir berada dalam selang 160 sampai 166 cm, di antara kedua nilai ini terdapat rata-rata sesungguhnya.

Nilai ujung selang 160 dan 166 tergantung pada rataan sampel $\overline{X}$. Bila ukuran sampel membesar, maka $\sigma_{\bar{x}}^2 = \sigma^2 / n$ mengecil, sehingga kemungkinan besar taksiran bertambah dekat dengan parameter μ.

Rata – rata tinggi = 160 – 166 cm

Menaksir Rataan

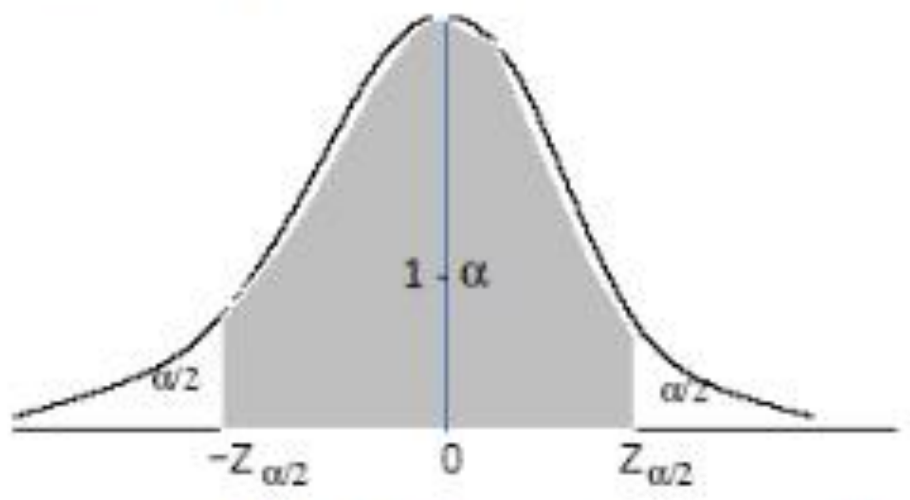
- Akan ditentukan selang taksiran dari μ.

- Misalkan sampel diambil dari populasi normal, atau jika tidak mempunyai ukuran sampel yang besar., selang kepercayaan untuk μ dapat dibuat dengan menggunakan distribusi sampel $\bar{X}$

  Sesuai dengan teorema limit pusat, diharapkan distribusi sampel $\bar{X}$ akan mendekati normal dengan rataan $\mu_{\bar{X}} = \mu$ dan simpangan baku $\sigma_{\bar{X}} = \sigma/\sqrt{n}$

- Tulislah $z_{\alpha/2}$ untuk nilai z yang di sebelah kanannya terdapat daerah seluas $\alpha/2$,

- Selanjutnya peluang Z yang terletak antara $-z_{\alpha/2}$ dan $z_{\alpha/2}$ ditunjukkan pada kurva berikut:



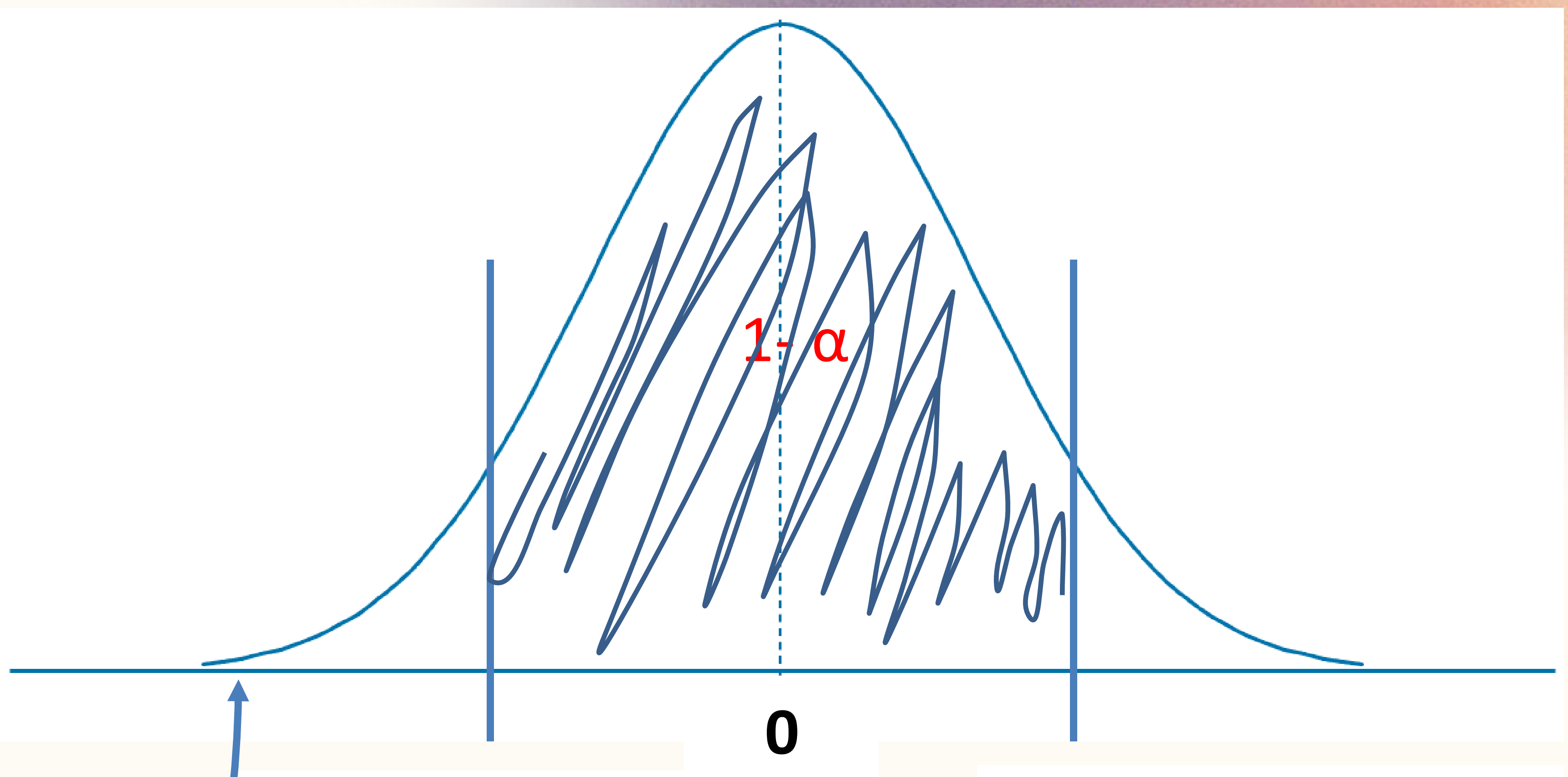
Gambar 2 P $(-z_{\alpha/2} < Z < z_{\alpha/2}) = 1-\alpha$

Menaksir Rataan

Terdapat berita yang menyatakan bahwa paslon no. 4 memiliki rata – rata pendukung di jawa barat sebesar 60%, diambil berdasarkan sample 10 penduduk di setiap kota dan kabupaten.

Yang harus ditanyakan oleh orang yang kritis terhadap suatu pernyataan adalah apakah benar paslon 4 memiliki rata – rata pendukung di jawa barat sebesar 60%?

Nah pertanyaan kritis diatas layaknya sebuah hipotesis



Zα/2 = batasan

Zα/2 = batasan

Rumus menaksir rataan

Dalam rumus kita menentukan Batasan kesimpulan, sehingga misal nilai 60% adalah rata – rata yang dapat mewakili keseluruhan populasi dari pendukung paslon, jika nilai 60% masuk dalam arsiran **biru** pada grafik, maka 60% dari penduduk jawa barat memilih paslon no. 4. Batasan yang terdapat pada dua sisi yaitu Batasan pernyataan terkait rata-rata yang diterima

Selang Kepercayaan untuk μ bila σ diketahui:

Jika $\bar{x}$ adalah rataan dari sampel acak dengan ukuran n dari sebuah populasi dengan variansi σ^2, maka selang kepercayaan $(1-\alpha)100\%$ dari μ adalah:

$$\bar{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

di mana $z_{\alpha/2}$ adalah nilai z yang memberikan luas $\frac{\alpha}{2}$ sebelah kanan nilai tersebut.

Rataan nilai matematika sampel acak 36 mahasiswa tingkat sarjana adalah 2.6. Hitunglah selang kepercayaan 95% untuk rataan nilai matematika semua mahasiswa tingkat sarjana. Anggap simpangan baku = 0.3.

Jawaban:

H0 = Apakah nilai rata – rata 2,6 yang diambil dari sample dapat mewakili nilai rata – rata populasi jika menggunakan selang kepercayaan 95%?

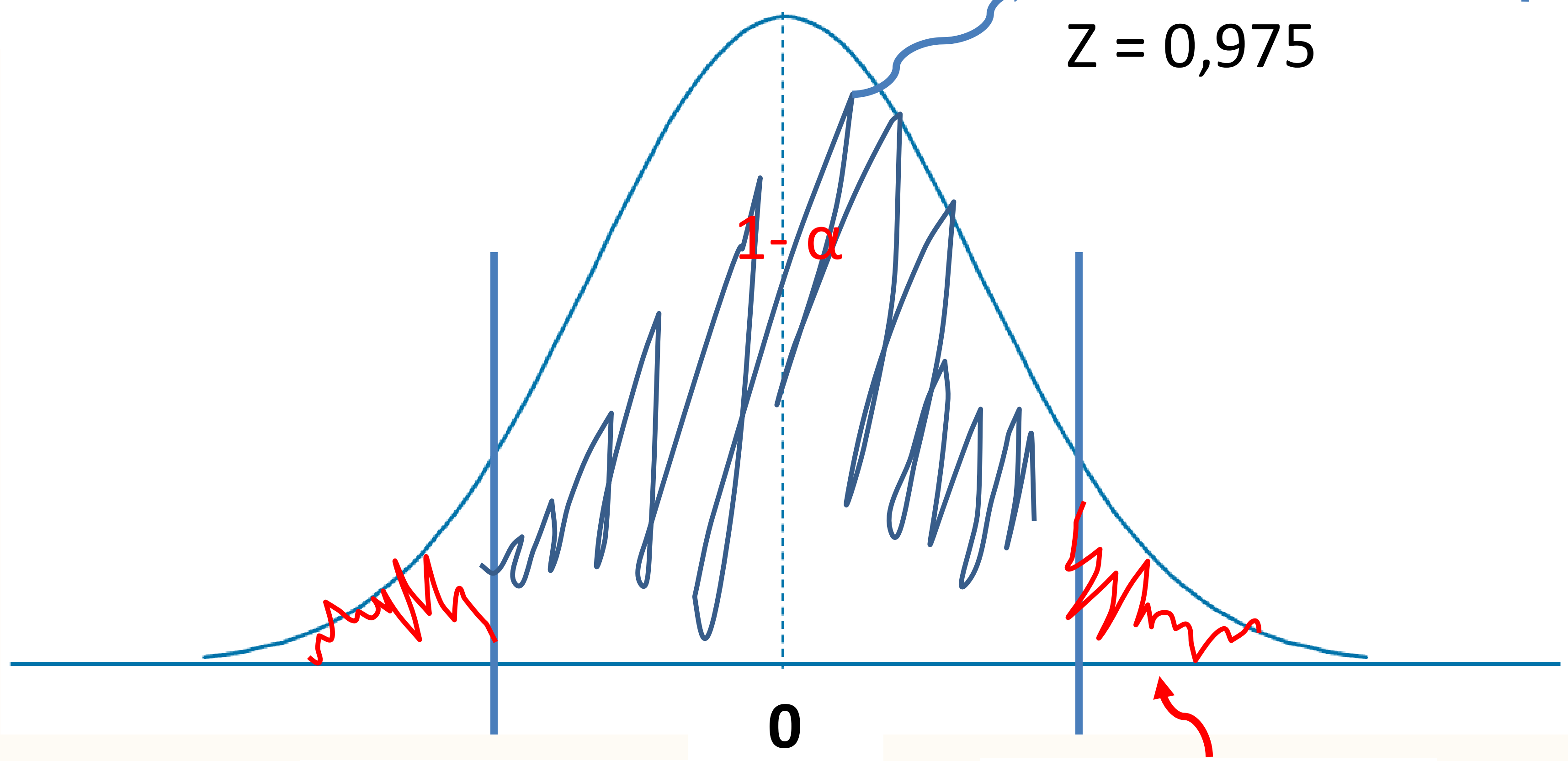
X bar = 2,6

Kepercayaan = 95%, 1- α = 0,05 atau 5% jadi nilai α = 0,05

$Z\alpha/2$ = 0,05 / 2 = 0,025

1-0,025 = 0,975

Z = 0,975



$Z\alpha/2$ = 0,025 **$Z\alpha/2$ = 0,025**

3

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767

2 1

Nilai dari $Z\alpha/2$ atau Z0,025 = 1,96

$$\bar{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$= 2{,}6 - (1{,}96)\,(0{,}3/\sqrt{36}) < \mu < 2{,}6 + (1{,}96)\,(0{,}3/\sqrt{36})$

$= 2{,}50 < \mu < 2{,}70$

$= 2{,}50 < 2{,}6 < 2{,}70$

Pernyataan rata – rata 2,6 dapat diterima jika kita percaya 95%, karena berdiri diantara batas 2,50 dan 2,70

Contoh Masih berkaitan denga soal nomor 3, tentukan selang kepercayaan 99% untuk rataan nilai matematika semua mahasiswa tingkat sarjana.

n = 36. X bar = 2,6 dan simpangan baku / standar deviasinya 0,3

Jadiin Tugas

Selang kepercayaan untuk μ bila σ tidak diketahui:

Jika $\bar{x}$ dan s adalah rataan dan simpangan baku sampel acak dari populasi normal dengan variansi σ^2 tidak diketahui, selang kepercayaan $(1-\alpha)100\%$ untuk μ adalah:

$$\bar{x} - t_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + t_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}$$

Dengan $t_{\alpha/2}$ adalah nilai t dengan n-1 derajat kebebasan yang memberikan luas $\frac{\alpha}{2}$ sebelah kanan nilai tersebut.

- Penggunaan distribusi t untuk σ yang tidak diketahui berdasarkan anggapan bahwa sampel berasal dari populasi berdistribusi hampir normal (kurva berbentuk lonceng)

Contoh 6. Tujuh botol yang mirip masing-masing berisi minuman 9.8, 10.2, 10.4, 9.8, 10.0, 10.2, dan 9.6 liter. Carilah selang kepercayaan 95% untuk rataan isi botol semecam itu bila distribusinya hampir normal.

Jawaban: Rataan dan simpangan baku sampel di atas

$\bar{x}$ = 10.0 dan s = 0.283 **V = n-1 = 7-1 = 6**

Tingkat kepercayaan = 0.95 = 1 - α → sehingga α = 0.05

$t_{0.05/2} = t_{0.025}$

Dari tabel distribusi t diperoleh $t_{0.05/2}$ = 2.447 untuk derajat kebebasan v = n – 1 = 6. Jadi, selang kepercayaan 95% untuk μ adalah

$$10.0-(2.447)\frac{(0.283)}{\sqrt{7}} < \mu < 10.0+(2.447)\frac{(0.283)}{\sqrt{7}}$$

atau 9.74 < μ < 10.26

Menaksir Variansi

- Definisi:

  Jika sampel berukuran *n* diambil dari populasi normal dengan variansi σ^2 dan variasi sampel s^2 dihitung, akan diperoleh nilai statistik S^2 yang digunakan sebagai nilai taksiran dari σ^2.

  Dengan kata lain S^2 adalah penaksir dari σ^2.

  Interval penaksiran ditentukan dengan statistik:

$$X^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$$

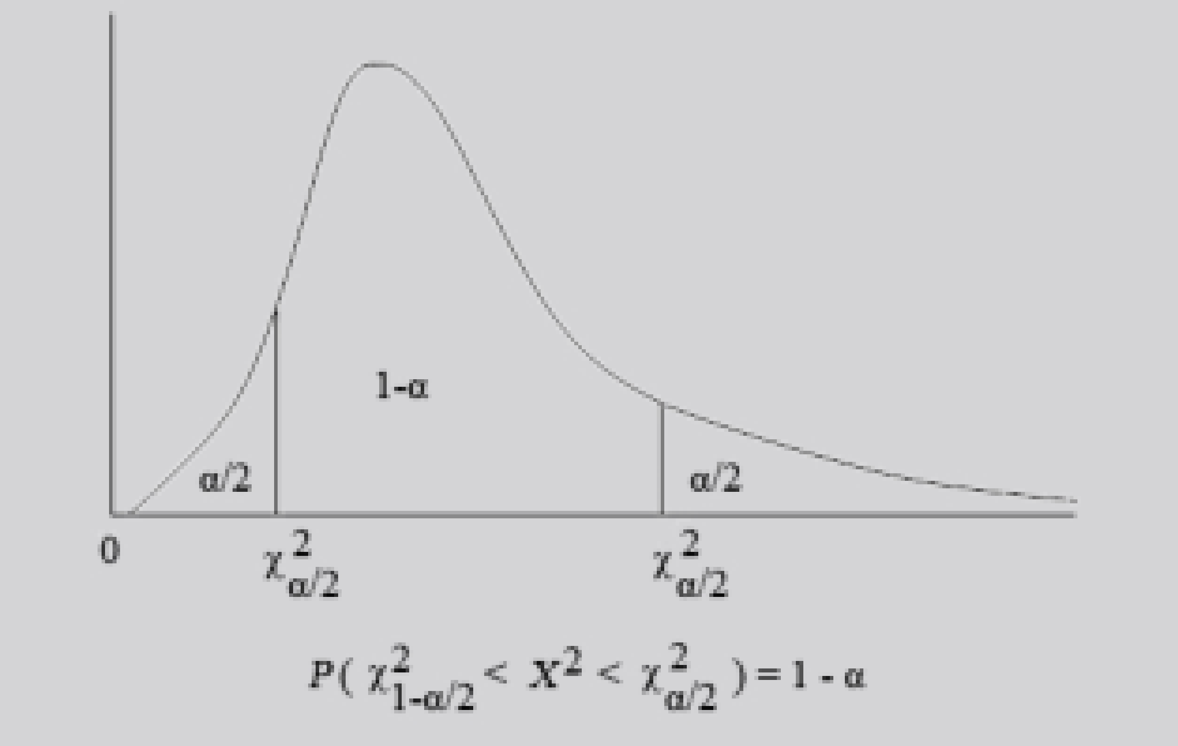
- Statistik X^2 mempunyai distribusi *chi-squared* dengan derajat kebebasan *n* - 1 untuk sampel dari populasi normal.

  Selang penaksiran dapat dituliskan:

$$P\left(X^2_{1-\alpha/2} < X^2 < X^2_{\alpha/2}\right) = 1 - \alpha$$

  dengan $X^2_{1-\alpha/2}$ dan $X^2_{\alpha/2}$ adalah nilai-nilai dari distribusi *chi-squared* dengan *n*-1 derajat kebebasan.

- Kurva:



Gambar 4 Interval Penaksiran

- Definisi:

Jika s^2 adalah variansi sampel acak berukuran *n* dari populasi normal, selang kepercayaan $(1-\alpha)100\%$ dari σ^2 adalah:

$$\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}}$$

dengan $\chi^2_{\alpha/2}$ dan $\chi^2_{1-\alpha/2}$ adalah nilai *chi-squared* dengan*n*-1 derajat kebebasan yang mempunyai luas di sebelah kanan $\frac{\alpha}{2}$ dan $1-\frac{\alpha}{2}$.

Contoh Berat 10 paket biji rumput yang didistribusikan oleh perusahaan tertentu adalah 46.4; 46.1; 45.8; 47.0; 46.1; 45.9; 45.8; 46.9; 45.2; 46.0. Hitunglah selang kepercayaan 95% dari variansinya, asumsi distribusi normal.

v	0.30	0.25	0.20	0.10	0.05	0.025	0.02	0.01	0.005	0.001
1	1.074	1.323	1.642	2.706	3.841	5.024	5.412	6.635	7.879	10.827
2	2.408	2.773	3.219	4.605	5.991	7.378	7.824	9.210	10.597	13.815
3	3.665	4.108	4.642	6.251	7.815	9.348	9.837	11.345	12.838	16.266
4	4.878	5.385	5.989	7.779	9.488	11.143	11.668	13.277	14.860	18.466
5	6.064	6.626	7.289	9.236	11.070	12.832	13.388	15.086	16.750	20.515
6	7.231	7.841	8.558	10.645	12.592	14.449	15.033	16.812	18.548	22.457
7	8.383	9.037	9.803	12.017	14.067	16.013	16.622	18.475	20.278	24.321
8	9.524	10.219	11.030	13.362	15.507	17.535	18.168	20.090	21.955	26.124
9	10.656	11.389	12.242	14.684	16.919	19.023	19.679	21.666	23.589	27.877

$$46{,}4^2 + 46{,}1^2 + \cdots \ldots + 46^2$$

Jawaban:

Hitung dulu

$$(46{,}4+46{,}1+\ldots..+46)^2$$

$$s^2 = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2}{n(n-1)}$$

$$= \frac{(10)(21{,}273.12) - (461.2)^2}{(10)(9)}$$

$$= 0.286$$

v	0.995	0.99	0.98	0.975
1	0.0^4393	0.0^3157	0.0^3628	0.0^3982
2	0.0100	0.0201	0.0404	0.0506
3	0.0717	0.115	0.185	0.216
4	0.207	0.297	0.429	0.484
5	0.412	0.554	0.752	0.831
6	0.676	0.872	1.134	1.237
7	0.989	1.239	1.564	1.690
8	1.344	1.647	2.032	2.180
9	1.735	2.088	2.532	2.700

Untuk selang 95%, maka $\alpha = 0.05$, dengan tabel chi-kuadrat maka untuk $v = 9$ diperoleh $\chi^2_{0.025} = 19.023$ dan $\chi^2_{0.975} = 2.700$

Dengan demikian selang kepercayaan 95% adalah:

$$\frac{(9)(0.286)}{19.023} < \sigma^2 < \frac{(9)(0.286)}{2.700} \quad \text{atau} \quad 0.135 < \sigma^2 < 0.953$$

Menaksir Dua Variansi

Suatu selang kepercayaan untuk perbedaan rataan kadar suatu senyawa kimia, diukur dalam mg/liter, pada dua stasiun di sungai telah dihitung. 15 sample dari stasiun 1 dan 12 sample dari stasiun 2. stasiun 1 rata – rata 3,84 kg standar deviasinya 3,07. stasiun 2 rata –rata 1,49 std deviasi 0,8. cari selang kepercayaan 95%, anggap data terdistribusi normal dengan variansi berbeda.

X bar 1 = 3,84 s1 = 3,07 n1 = 15 dan X bar 2 = 1,49 s2 = 0,8 n2 = 12. Karena variansi berbeda maka kita menggunakan distribusi t

$$= \frac{\left(\frac{3{,}07^2}{15} + \frac{0{,}80^2}{12}\right)^2}{\left[\frac{\left(\frac{3{,}07^2}{15}\right)^2}{14}\right] + \left[\frac{\left(\frac{0{,}80^2}{12}\right)^2}{11}\right]}$$

= 16,3 → 16

Taksiran titik X bar 1 – X bar 2 = 3,84 – 1,49 = 2,35. dengan α = 0,05 pada table distribusi t diperoleh t0,025 = 2,120 untuk derajat kebebasan 16. selang kepercayaan 95% adalah

$$= 2{,}35 - 2{,}120\sqrt{\frac{3.07^2}{15}} + \sqrt{\frac{0{,}80^2}{12}} < \mu 1 - \mu 2 < 2{,}35 + 2{,}120\sqrt{\frac{3.07^2}{15}} + \sqrt{\frac{0{,}80^2}{12}}$$

= $0{,}60 < \mu 1 - \mu 2 < 4{,}10$

Menaksir Proporsi

$$P - \frac{Z\alpha}{2}\sqrt{\frac{pq}{n}} < p < P - \frac{Z\alpha}{2}\sqrt{\frac{pq}{n}}$$

Contoh
Sample acak n = 500 yaitu keluarga yang memiliki televisi di kota A. ditemukan bahwa x = 340 memiliki tv berwarna cari selang kepercayaan 95% untuk proporsi sesungguhnya dari keluarga yang memiliki televisi berwarna di kota A

Jawab

P = 340/500 = 0,68
Z0,025 = 1,96

$$0{,}68 - 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}68x\ 0{,}32}{500}} < p < 0{,}68 + 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}68x\ 0{,}32}{500}}$$

= 0,64 <p<0,72

Menaksir dua Proporsi

$$(p1\text{-}p2) - \frac{Z\alpha}{2}\sqrt{\frac{p1q1}{n1}+\frac{p1q1}{n2}} < p1 - p2 < (p1 - p2) + \frac{Z\alpha}{2}\sqrt{\frac{p1q1}{n1}+\frac{p1q1}{n2}}$$

Contoh . Suatu perusahaan dalam cara pembuatan suku cadang sedang direncanakan. Sample diambil dari cara lama dan cara baru pembuatan suku cadang, untuk melihat apakah cara baru dapat memberikan kemajuan, 75 dari 1500 suku cadang berasal dari cara lama ternyata cacat, dan 80 dari 2000 yang berasal dari cara baru ternyata cacat, cari selang kepercayaan 90% untuk selisih sesungguhnya proporsi yang cacat pada kedua cara tersebut.

Jadiin Tugas