SEKOLAH TINGGI TEKNOLOGI BANDUNG

Teori Peluang

Teknik Informatika

Semester 3

Semester 3

Suluh Widya Yakti ST. MT

Peluang digunakan untuk melihat kemungkinan terjadinya sebuah kejadian. Sebelum mendefinisikan apa itu peluang, ada beberapa istilah yang harus Anda ketahui:

a. Ruang sampel adalah himpunan semua kemungkinan yang dapat terjadi pada suatu percobaan.

   Misalkan kita melempar sebuah uang logam. Pada sebuah uang logam terdapat angka (A) dan gambar (G). maka ruang sampel dari percobaan itu adalah {A, G}.

b. Titik sampel adalah anggota dari ruang sampel.

   Pada contoh melempar uang logam, titik sampelnya adalah A dan G.

Jika A adalah suatu kejadian dengan ruang sampel S, maka peluang kejadian A (ditulis P(A)) adalah:

$$P(A) = \frac{n\,(A)}{n(S)} = \frac{banyak\ cara\ terjadi\ kejadian\ A}{banyak\ semua\ kemungkinan}$$

Pada sebuah kelas, guru akan memilih satu orang perwakilan untuk membacakan hasil pengamatannya. Jika pada kelas tersebut terdapat 18 siswa laki-laki dan 12 siswa perempuan, maka berapakah peluang terpilihnya murid laki-laki?

Penyelesaian:

A = Kejadian terpilihnya murid laki-laki.

$n(A) = 18$ $n(S) = 30$

$$P(A) = \frac{n\,(A)}{n(S)} = \frac{18}{30} = \frac{3}{5}$$

Jadi, peluang terpihnya murid laki-laki adalah $\frac{3}{5}$

Ruang Sample

Semua hasil yang mungkin dari sebuah eksperimen, seperti yang baru dicontohkan, dalam teori peluang disebut sebagai ruang sampel atau ruang hasil. Jumlah titik yang dianggap sebagai representasi setiap peristiwa dalam ruang sampel ini dinotasikan dengan N, sedangkan jumlah peristiwa yang sedang diamati dinotasikan dengan huruf n. Secara formal ruang sampel ini dinyatakan dengan huruf S. Untuk kemudahan bentuk penulisan ruang sampel ini mengunakan teori himpunan seperti contoh berikut.

Contoh : $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ $N = 6$

Beberapa cara mencari ruang sample

a. Aturan Penjumlahan

Ani akan pergi berpergian dari kota Semarang ke kota Surabaya menggunakan transportasi umum. Setelah mencari informasi, Ani mencatat untuk pergi dari kota Semarang ke kota Surabaya dapat menggunakan bis dengan jadwal keberangkatan pukul 08.00, pukul 13.00, dan pukul 18.00, atau dapat juga menggunakan kereta api dengan jadwal keberangkatan pukul 14.30 dan 19.00. Ada berapa banyak cara yang dapat dipilih Ani untuk pergi dari kota Semarang ke kota Surabaya?

Penyelesaian:

Banyak cara yang dapat dipilih Ani adalah $3 + 2 = 5$ cara (mengapa?).
Apabila terdapat 1 benda pada peristiwa atau himpunan pertama, dan 2 benda pada peristiwa atau himpunan kedua, dan kedua himpunan tidak beririsan, maka banyak cara yang dapat dipilih adalah $a1 + a2$.

Beberapa cara mencari ruang sample

a. Aturan Penjumlahan

Ani akan pergi berpergian dari kota Semarang ke kota Surabaya menggunakan transportasi umum. Setelah mencari informasi, Ani mencatat untuk pergi dari kota Semarang ke kota Surabaya dapat menggunakan bis dengan jadwal keberangkatan pukul 08.00, pukul 13.00, dan pukul 18.00, atau dapat juga menggunakan kereta api dengan jadwal keberangkatan pukul 14.30 dan 19.00. Ada berapa banyak cara yang dapat dipilih Ani untuk pergi dari kota Semarang ke kota Surabaya?

Penyelesaian:

Banyak cara yang dapat dipilih Ani adalah 3 + 2 = 5 cara (mengapa?).

Apabila terdapat 1 benda pada peristiwa atau himpunan pertama, dan 2 benda pada peristiwa atau himpunan kedua, dan kedua himpunan tidak beririsan, maka banyak cara yang dapat dipilih adalah a1 + a2.

b. Aturan Pengisian Tempat (Aturan Perkalian)

Dewi menerima undangan untuk tampil pada acara pementasaan seni SD Sukamakmur. Dewi menyiapkan 4 buah celana yang berwarna hitam, putih, biru, dan coklat. Dewi juga menyiapkan 5 baju yang berwarna merah, hijau, kuning, biru, dan putih, serta menyiapkan 2 buah topi yang berwarna hitam dan biru. Berapa banyak cara Dewi memilih celana, baju, dan topi yang akan dipakainya?

Penyelesaian:

1 = kejadian 1 (dalam hal ini banyak celana) = 4
2 = kejadian 2 (dalam hal ini baju) = 5
3 = kejadian 3 (dalam hal ini topi) = 2

Banyak cara Dewi memilih celana, baju, dan topi adalah:
$1 \times 2 \times 3 = 4 \times 5 \times 2 = 40$ cara.

Beberapa cara mencari ruang sample

c. Permutasi

Pada suatu pemilihan ketua kelas dan wakil ketua kelas, terdapat 3 siswa yang mendaftar yaitu Feri, Malik, dan Runa. Berapa banyak kemungkinan pasangan ketua kelas dan wakil ketua kelas yang akan terpilih?

Penyelesaian:
Siswa yang mendaftar adalah Feri, Malik, dan Runa.

Ketua Kelas	Wakil Ketua Kelas
Feri	Malik
Feri	Runa
Malik	Runa
Malik	Feri
Runa	Feri
Runa	Malik

Perhatikan bahwa Feri – Malik akan berbeda dengan Malik – Feri, mengapa?
Karena Feri sebagai ketua kelas berbeda dengan Feri sebagai wakil ketua kelas. Pada kasus ini, urutan sangatlah diperhatikan.

Banyak pasangan ketua kelas dan wakil ketua kelas yang mungkin ada 6 pasangan.
secara matematis, bagaimana menghitungnya? Perhatikan penjelasan berikut ini.

Permutasi adalah sebuah susunan dari sekumpulan objek dengan memperhatikan urutannya. Perhitungan banyak susunan atau banyak cara
berdasarkan permutasi sangat bergantung pada banyaknya objek yang tersedia dan banyak objek yang akan diambil.

Catatan: Sebelum membahas tentang permutasi, perlu diketahui tentang notasi
faktorial.
Untuk setiap bilangan bulat positif n, berlaku

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1 \text{ dan } 0! = 1.$$

Jenis – Jenis permutasi

1. Permutasi semua objek diambil

Misalkan terdapat n objek yang berbeda, maka banyak permutasi yang dapat dibentuk dari semua objek adalah:

$${}_nP_n = P(n, n) = n! \text{ cara.}$$

Contoh :
Terdapat empat buah bendera yang akan disusun di sebuah ruangan, maka banyak cara menyusun bendera adalah

Penyelesaian:

Banyak bendera = n = 4.
Banyak cara menyusun bendera yang mungkin adalah:
4! = 4 × 3 × 2 × 1 = 24 cara.

2. Permutasi sebagian objek diambil

Misalkan terdapat n objek yang berbeda, jika k objek diambil dari n objek, maka banyak permutasi yang mungkin adalah:

$${}_nP_k = P(n, k) = \frac{n!}{(n-k)!} \text{ susunan}$$

Contoh :
Pada sebuah kelas akan diadakan pemilihan kepengurusan kelas yang meliputi ketua kelas, sekretaris, dan bendahara. Saat penjaringan, ada 9 siswa yang akan mengikuti pemilihan tersebut. Berapa banyak kemungkinan susunan kepengurusan kelas tersebut?

Penyelesaian:
Banyak siswa = n = 9. Banyak objek = k = 3.
Banyak kemungkinan susunan kepengurusan kelas tersebut adalah:

$${}_nP_k = P(n.k) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

$${}_9P_3 = P(9.3) = \frac{9!}{(9-3)!} = \frac{9!}{6!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6!}{6!} = 504 \; susunan$$

Jenis – Jenis permutasi

3. Permutasi pengulangan

Banyaknya huruf sama dalam susunan kata MATEMATIKA adalah ….

Penyelesaian:
Banyak huruf dari MATEMATIKA, n = 10.
$n1$= huruf M = 2.
$n2$= huruf A = 3.
$n3$= huruf T = 2.

$$P_{10,2,3,2} = \frac{10!}{2!\,3!\,2!} = 151200\ susunan$$

4. Permutasi melingkar.

Ayah, ibu, kakak, dan adik duduk mengelilingi meja bundar. Banyak susunan
yang dapat dibuat oleh ayah, ibu, kakak, dan adik adalah ….
Penyelesaian:
Banyak orang = n = 4
Banyak susunan = (n − 1)! = (4 − 1)! = 3! = 6 susunan.

Jenis – Jenis permutasi

5. Kombinasi

Amar, Dzaky, dan Hendra mengikuti kegiatan seminar yang sama. Ketiga orang tersebut saling berjabat tangan sambal memperkenalkan diri mereka. Berapa banyak jabat tangan yang terjadi diantara ketiganya?

Penyelesaian:
Jabat tangan yang mungkin adalah: Amar – Dzaky, Amar – Hendra, Dzaky – Hendra. Bagaimana dengan Dzaky – Amar? Jabat tangan Amar – Dzaky dan Dzaky – Amar adalah sama. Pada kasus seperti ini urutan tidak diperhatikan.

Banyak jabat tangan yang terjadi adalah 3 jabat tangan. Secara matematis perhatikan definisi berikut ini:
Kombinasi adalah sebuah susunan dari sekumpulan objek tanpa memperhatikan urutannya. Apabila kita memiliki n objek yang berbeda, maka banyak kombinasi yang dapat dibentuk dari semua objek itu ada satu cara. Misalnya kita memiliki n objek berbeda, apabila kita akan mengambil k objek dari n objek, maka banyak kombinasi yang mungkin ada

$$\boldsymbol{C(n,k)} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \text{ cara.}$$

Contoh.
Pada suatu ruangan terdapat 8 orang dan mereka saling berjabat tangan satu dengan yang lain. Banyak jabat tangan yang terjadi adalah ….

Penyelesaian:
n = 8
k = 2 (satu kali jabat tangan melibatkan 2 orang).

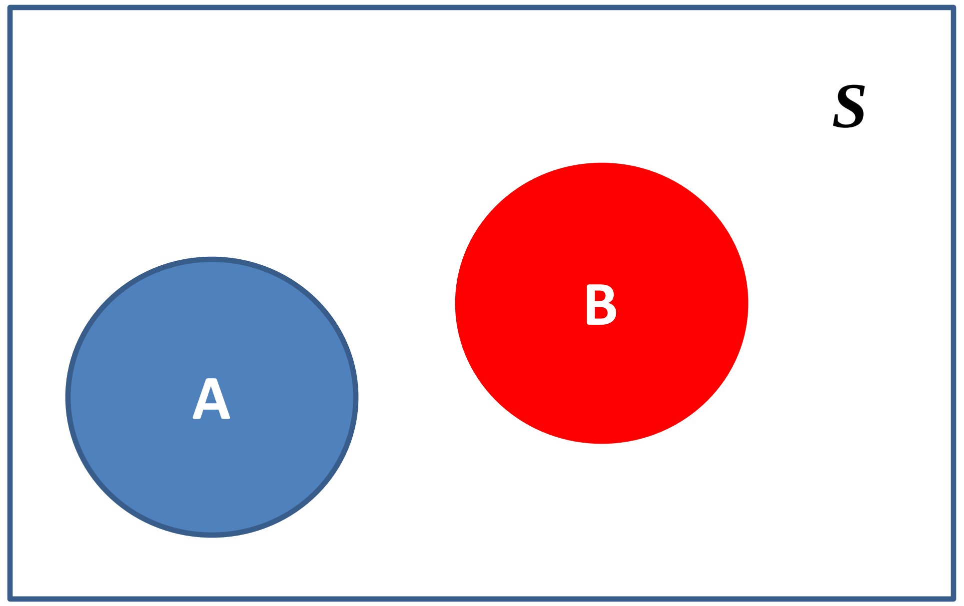
$$C(n,k) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

$$C(8,2) = \binom{8}{2} = \frac{8!}{2!(8-2)!} = \frac{8!}{2!6!} = \frac{8 \times 7 \times 6!}{2!6!} = 28 \textit{ jabat tangan}$$

Peristiwa / Kejadian

1. Saling lepas

Definisi :*Dua peristiwa A dan B dikatakan saling lepas jika kedua peristiwa ini tidak memiliki titik sample yang sama atau tidak ada irisan antara kedua peristiwa.*



berlaku aturan bahwa peluang terjadinya dua peristiwa *A atau B* (secara notasi himpunan A∪B) adalah jumlah dari peluang tiap peristiwa tersebut

$$P(A \text{ atau } B) = P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Contoh.
Atas prestasinya seorang manajer pemasaran memperoleh penghargaan untuk mengunjungi 3 negara. Dia memutuskan untuk memilih secara acak 3 dari 5 negara yang tersedia (***A***merika, ***B***elanda, ***C***hina, ***D***enmark dan ***E***kuador) dengan mengambil inisial dari nama negara tersebut. Berapa peluang Amerika dan Belanda selalu terpilih bersamaan, *atau* China dan Ecuador selalu terpilih, *atau* Belanda, China dan Denmark?

Penyelesaian:
Ruang sample dari kombinasi pilihan adalah :
$S = \{abc, abd, abe, acd, ace, ade, bcd, bce, bde, cde\} \rightarrow N = 10$

Sekarang kita tentukan peristiwa-peristiwa

Deskripsi verbal	Peristiwa	*n*
Amerika dan Belanda selalu terpilih	$A_1 = \{abc, abd, abe\}$	3
China dan Ekuador selalu terpilih	$A_2 = \{ace, bce, cde\}$	3
Belanda, China dan Denmark terpilih	$A_3 = \{bcd\}$	1

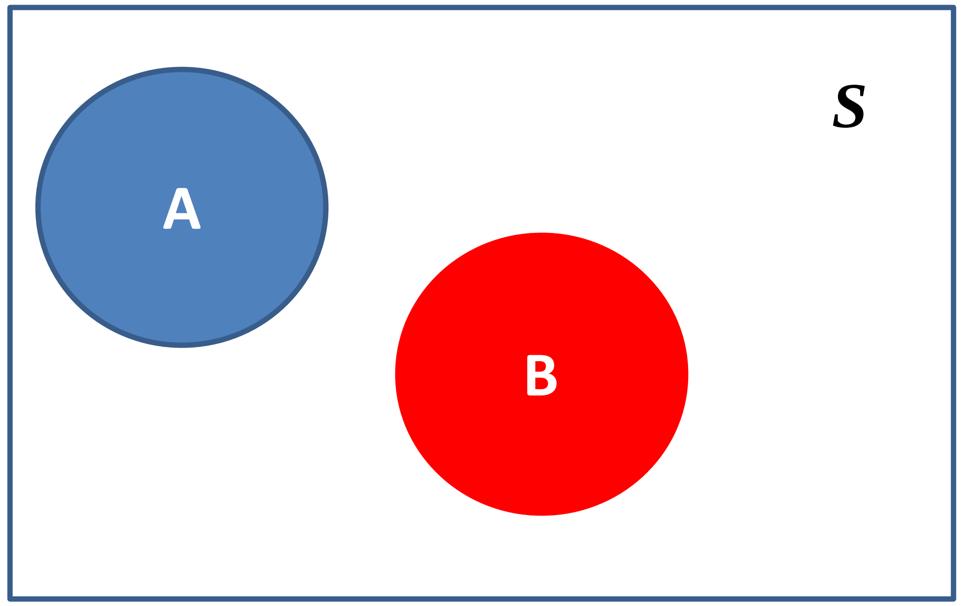
Karena pemilihan dilakukan secara acak, maka setiap kombinasi pilihan mempunyai nilai peluang yang sama yaitu 1/10 = 0,1. Selain itu, dari ketiga peristiwa di atas tidak ada satu pun yang memiliki titik sample yang sama

$$P(A_1 \text{ atau } A_2 \text{ atau } A_3) = P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3)$$
$$= 0{,}3 + 0{,}3 + 0{,}1 = 0{,}7$$

Peristiwa / Kejadian

2. Saling Bebas

Definisi : *Peristiwa A dikatakan bebas dari peristiwa B jika salah satu peristiwa tidak dipengaruhi oleh peristiwa lainnya*



Dua peristiwa yang saling bebas dinyatakan dalam hubungan *A dan B* atau secara notasi himpunan A∩B adalah perkalian antara kedua peluang tersebut.. Secara simbolik :

$$P(A\ dan\ B) = P(A \cap B) = P(A).P(B)$$

Contoh.

Berapa peluang dadu kedua memunculkan angka 6 bersyarat dadu pertama memunculkan angka 4. Apakah A bebas dari B?

Penyelesaian:

Angka pada dadu kedua	Angka pada dadu pertama					
	1	2	3	4	5	6
1	1,1	2,1	3,1	4,1	5,1	6,1
2	1,2	2,2	3,2	4,2	5,2	6,2
3	1,3	2,3	3,3	4,3	5,3	6,3
4	1,4	2,4	3,4	4,4	5,4	6,4
5	1,5	2,5	3,5	4,5	5,5	6,5
6	1,6	2,6	3,6	4,6	5,6	6,6

Misal *B* peristiwa munculnya angka 6 pada dadu kedua dan *A* peristiwa munculnya angka 4 pada dadu pertama.

A = {(4,1),(4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6)} ;
B = { (1,6),(2,6),(3,6),(4,6),(5,6), (6,6)} ;
$A \cap B$ ={(4,6)}

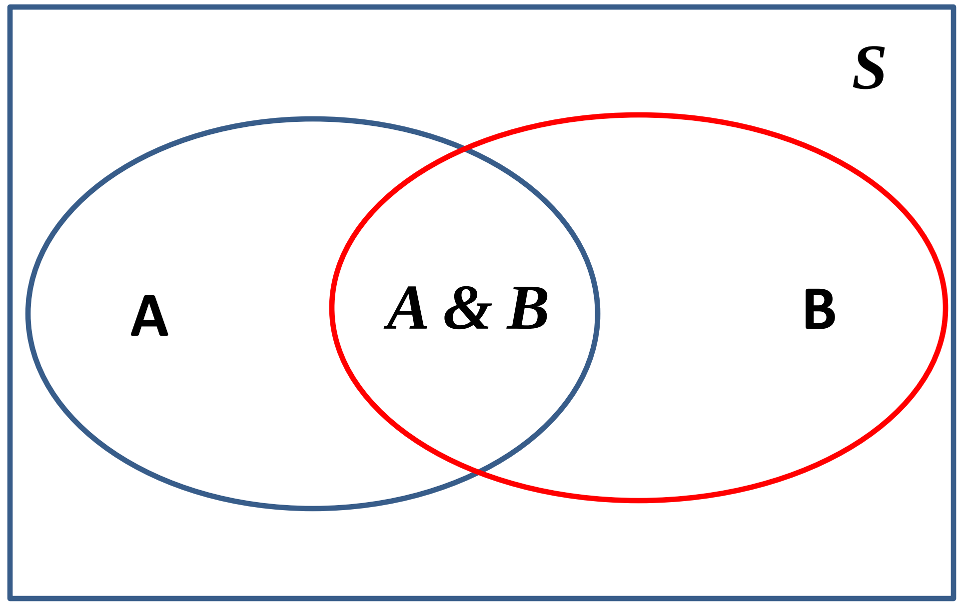
$P(A) = 1/6$; $P(A \cap B) = 1/36$; $P(B) = 1/6$

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{1/36}{1/6} = \frac{1}{6}$$

Peristiwa / Kejadian

3. Bergantung atau bersyarat

Definisi : *Peristiwa A dikatakan bergantung atau bersayarat dengan peristiwa B jika peristiwa A dipengaruhi oleh peristiwa B*



Peluang terjadinya A bersyarat B atau sebaliknya.

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \qquad ; P(B) \neq 0$$

Atau

$$P(B \mid A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} \qquad ; P(A) \neq 0$$

Peristiwa / Kejadian

3. Bergantung atau bersyarat

1). Sebuah dadu dilempar sekali. Tentukan peluang munculnya mata dadu ganjil dengan syarat munculnya kejadian mata dadu prima lebih dahulu.

Penyelesaian :

*). Misal A adalah kejadian munculnya angka prima,

Ruang sampel : S = {1,2,3,4,5,6}, sehingga $n(S) = 6$

A = {2,3,5}, sehingga $n(A) = 3$.

Peluang kejadian A : $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

*). Misal B adalah kejadian muncul mata dadu ganjil,

B = {1,3,5} , sehingga irisannya : $A \cap B$ = {3,5} , dengan $n(A \cap B) = 2$.

Peluang irisannya : $P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(S)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

*). Menentukan peluang munculnya mata dadu ganjil dengan syarat munculnya kejadian mata dadu prima lebih dahulu : $P(B|A)$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

Jadi, peluang munculnya mata dadu ganjil dengan syarat munculnya kejadian mata dadu prima lebih dahulu adalah $\frac{2}{3}$.

Peristiwa / Kejadian

3. Bergantung atau bersyarat

Contoh bentuk yang menggunakan Bayesian Method

2). Sebuah kotak berisi bola merah dan bola putih, dan setiap bola diberi tanda X atau tanda Y. Berikut komposisi bola-bola yang ada dalam kotak :

Tanda	Hitam (B)	Putih (W)	Total
X	5	3	8
Y	1	2	3
Total	6	5	11

Dipilih satu bola secara acak dari kotak tersebut. Tentukan peluang dari kejadian terambil bola hitam bertanda X.

Penyelesaian :

*). Kejadian ini bisa kita pandang sebagai peluang kejadian munculnya bola hitam (kejadian B) dengan syarat bola bertanda X (kejadian X) lebih dahulu.

*). Terdapat 8 bola bertanda X dari total 11 bola,
sehingga peluangnya $P(X) = \frac{8}{11}$.

*). Dari 8 bola bertanda X terdapat 5 warna hitam, artinya $n(B \cap X) = 5$.
sehingga peluangnya $P(B \cap X) = \frac{5}{11}$.

*). Peluang warna hitam (B) dengan syarat bertanda X : $P(B|X)$

$$P(B|X) = \frac{P(B \cap X)}{P(X)} = \frac{\frac{5}{11}}{\frac{8}{11}} = \frac{5}{8}$$

Jadi, peluang dari kejadian terambil bola hitam bertanda X adalah $\frac{5}{8}$.