

수학 영역 **과1**

주최	학생자치회	출제	부학생회장 이은재, 봉사부처장 서유리, 총무부장 지수현
----	-------	----	--------------------------------

이 자료는 「저작권법」에 의하여 보호되는 저작물로, 저작권은 **이은재, 서유리, 지수현**에게 있으며, 허가 없는 복제·수정·배포·전송 등 일체의 행위를 금지합니다.

5지선다형

1. 다항식  $3x^2 - 2xy + 2y^2 - 3(x^2 - 2xy + y^2)$ 을 간단히 하면? [3점]

- ①  $-3xy - y^2$
- ②  $4xy - y^2$
- ③  $5xy - 2y^2$
- ④  $-6xy - 3y^2$
- ⑤  $7xy - 2y^2$

2. 복소수에 대한 학생들의 대화 내용을 읽고, 옳지 않은 학생만을 있는 대로 고른 것은? (단,  $i = \sqrt{-1}$ 이고  $\bar{z}$ 는  $z$ 의 켤레복소수이다.) [3.2점]

선생님: 복소수의 특징을 하나씩 말해봅시다.

은재: 자연수  $k, l$ 에 대하여  $k, l$ 이 짝수이면  $i^{k+l} = i$ 를 만족하는 순서쌍  $(k, l)$ 은 존재하지 않아요.

유리: 실수부분과 허수부분이 모두 자연수인 복소수  $z$ 에 대하여  $\bar{z}z \leq 1$ 을 만족하는  $z$  중에 임의로 하나를 택했을 때 그것이 실수일 확률은  $\frac{1}{2}$ 보다 커요.

하영:  $\sqrt{-2}\sqrt{-3}$ 의 정수부분은  $-3$ 이에요.

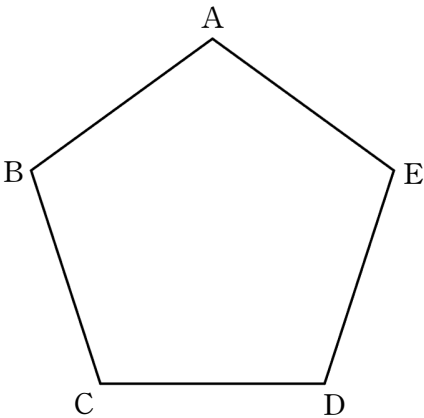
수진: 어... 그러면  $ab \neq 9$ 인 자연수  $a, b$ 에 대하여  $\sqrt{-a}\sqrt{-b}$ 의 정수부분이  $-3$ 이면  $\sqrt{ab}$ 의 정수부분은 2이겠네요.

소윤: 자연수  $x$ 에 대하여  $x$ 가 짝수이면  $x^2 + y^2 = -1$ 의 해는 존재하지 않아요.

- ① 수진
- ② 소윤
- ③ 유리, 소윤
- ④ 유리, 수진
- ⑤ 은재, 하영, 소윤

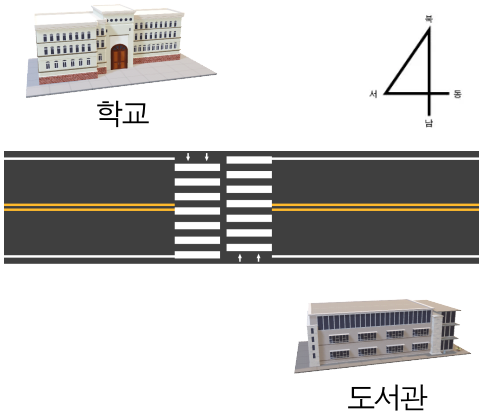
3. 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정오각형 ABCDE가 있다. 점 P는 점 A를 출발하여 시계 반대 방향으로 서로 다른 세 개의 주사위를 동시에 던져 나온 눈의 수의 합만큼 정오각형의 변을 따라 이동한다고 할 때, 점 P가 점 D에 놓일 경우의 수는?

[4.5점]



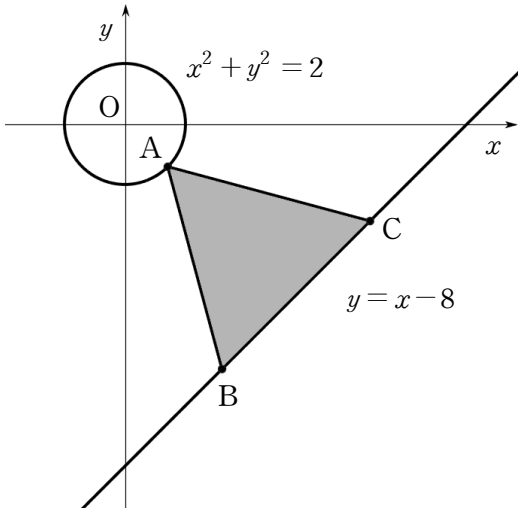
- ① 38
- ② 42
- ③ 44
- ④ 48
- ⑤ 50

4. 그림과 같이 폭이 20 m인 직선 도로를 사이에 두고 학교와 도서관이 있다. 학교에서 동쪽으로 1200 m, 남쪽으로 520 m 떨어진 지점에 도서관이 있는데, 학교에서 출발하여 횡단보도를 건너 도서관까지 가는 거리가 최단 거리가 되도록 횡단보도를 설치할 때, 이 최단 거리는? (단, 지형의 높이와 횡단보도의 너비는 고려하지 않는다.) [4.5점]



- ① 1120 m
- ② 1220 m
- ③ 1320 m
- ④ 1420 m
- ⑤ 1520 m

5. 좌표평면에서 원  $x^2 + y^2 = 2$  위를 움직이는 점 A와 직선  $y = x - 8$  위를 움직이는 서로 다른 두 점 B, C를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC가 정삼각형이 될 때 삼각형 ABC의 넓이의 최댓값을  $M$ , 최솟값을  $m$ 이라고 하면  $M - m$ 의 값은? [4.5점]



- ①  $5\sqrt{3}$     ②  $\frac{8\sqrt{3}}{3}$     ③  $\frac{32\sqrt{3}}{3}$     ④  $\frac{44\sqrt{3}}{3}$     ⑤  $\frac{50\sqrt{3}}{3}$

6.  $3 \leq x \leq 5$ 인 모든  $x$ 에 대하여 부등식

$$ax \leq \frac{2x}{x-1} \leq bx$$

가 성립할 때, 상수  $a$ 의 최댓값을  $M$ , 상수  $b$ 의 최솟값을  $m$ 이라고 하자.

삼차방정식  $2x^3 + Mx^2 + mx + 1 = 0$ 의 세 근의 합을  $A$ , 세 근의 곱을  $B$ 라고 할 때,  $A + B$ 의 값은? [5.1점]

- ①  $-\frac{3}{4}$     ②  $-\frac{1}{2}$     ③  $-\frac{1}{4}$     ④  $\frac{1}{4}$     ⑤  $\frac{3}{4}$

7. 실수  $a, b$ 에 대하여 이차방정식

$$x^2 + 2(a+b)x + 2ab + 4a + 6b - 13 = 0$$

이 중근을 가질 때, 좌표평면 위의 세 점  $O(0, 0)$ ,  $A(-3, 7)$ ,  $B(b, -a)$ 를 꼭짓점으로 하는 삼각형 OAB에서 점 O를 지나는 직선  $l$ 이 선분 AB와 만나는 점을 C라고 하자. 삼각형 OAC와 삼각형 OBC의 넓이의 비가 2:1일 때, 이 직선  $l$ 의 방정식은? [5.3점]

- ①  $y = -x$     ②  $y = -\frac{1}{2}x$     ③  $y = \frac{1}{4}x$   
④  $y = \frac{1}{2}x$     ⑤  $y = x$

8. 원래 좌표  $(x, y)$ 에 대하여  $x$ 축의 방향으로 3만큼,  $y$ 축의 방향으로 4만큼 평행이동하면  $(x^2 - 3, y^2 - 8)$ 가 되는 제2사분면 위의 점  $A_1$ 과  $B(4, 7)$ 이 있다. 점  $A_1$ 을 점  $B$ 에 대하여 대칭이동한 점을  $A_2$ 라고 하자. 다시 점  $A_2$ 를 점  $A_1$ 에 대하여 대칭이동한 점을  $A_3$ 라고 하자. 이와 같은 과정을 반복하여 얻은 점  $A_n$ 에 대하여  $\frac{A_{n+2024}A_{n+2025}}{A_nA_{n+1}} = p^k$  ( $p$ 는 소수)라고 할 때, 다음은 실수  $\sqrt{p}$ 가 무리수임을 증명하는 과정을 나타낸 것이다. 빈칸의 ㉠에 들어갈 가장 적절한 말과  $k$ 의 값을 고르면? [5.3점]

(증명)

결론을 부정하여 실수  $\sqrt{p}$ 가 무리수가 아니라고 하자.

그러면  $\sqrt{p}$ 는 유리수이므로

$$\sqrt{p} = \frac{b}{a} \text{ (} a, b \text{는 서로소인 자연수)}$$

로 놓을 수 있다. 따라서  $a^2p = b^2$ 이다.

$b^2$ 이  $p$ 의 배수이면  $b$ 도  $p$ 의 배수이고,  $b$ 가  $p$ 의 배수이면  $b^2$ 은 ㉠ 이고,  $a$ 도  $p$ 의 배수이다.

그런데 이것은 모순이므로,  $\sqrt{p}$ 는 무리수이다.

㉠	$k$
① $p^2$ 의 배수이므로 $p$ 도 $a^2$ 의 약수	2023
② $p^2$ 의 배수이므로 $p$ 도 $a^2$ 의 배수	2024
③ $p^2$ 이 약수이므로 $a^2$ 도 $p$ 의 배수	2023
④ $p^2$ 이 약수이므로 $p$ 도 $a^2$ 의 약수	2024
⑤ $p^2$ 이 약수이므로 $a^2$ 도 $p$ 의 배수	2025

9. 은재와 유리는  $3 \leq n \leq 15$ 인 자연수  $n$ 에 대하여 제비뽑기 놀이를 하려고 한다. 1부터  $n$ 까지의 자연수가 적힌 제비를 동시에 2개 택하여 둘 중 큰 수를 분모로, 작은 수를 분자로 하는 분수가 유한소수가 되면 은재, 순환소수가 되면 유리가 이기는 것으로 정하였다. 은재와 유리가 본인이 이길 확률이 최대가 되도록 제안할  $n$ 의 값 중 더 작은 수를  $N$ , 그때의 확률 중 더 큰 수를  $P$ 라고 할 때,  $NP$ 의 값은? [5.6점]

- ①  $\frac{58}{21}$
- ②  $\frac{68}{21}$
- ③  $\frac{26}{7}$
- ④  $\frac{88}{21}$
- ⑤  $\frac{98}{21}$

10. 두 함수  $f(x) = x^2 + 6x + a$ ,  $g(x) = x^2 - 4x + 5$ 에 대하여 방정식  $g(f(x)) = g(x)$ 의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되도록 하는 정수  $a$ 의 개수는? [6.4점]

① 6

② 7

③ 8

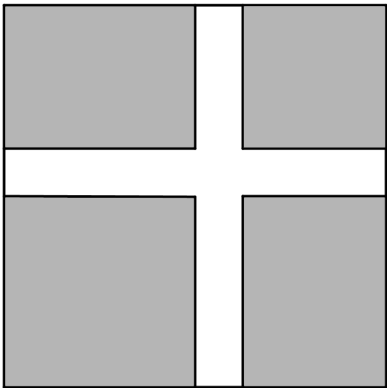
④ 9

⑤ 10

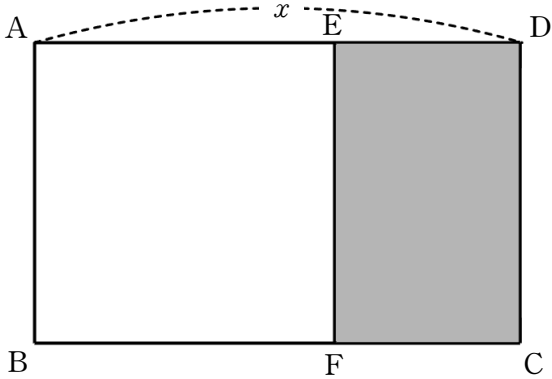
단답형

11. 집합  $A = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ 의 부분집합 중에서 2, 3, 4를 반드시 포함하는 부분집합의 개수가 16이 되도록 하는 자연수  $n$ 의 값을 구하시오. [3점]

12. 그림과 같이 한 변의 길이가 40 m인 정사각형 모양의 꽃밭에 일정한 폭의 도로를 가로, 세로와 평행하게 만들었다. 꽃밭의 넓이가  $100\text{ m}^2$  이상이 되도록 하는 도로 폭의 최댓값을 구하시오. (단, 단위는 m이다.) [3.2점]



12. 그림과 같이  $\overline{AB}=12$ 인 직사각형 ABCD에서 정사각형 ABEF를 잘라내고 남은 사각형 EDCF가 사각형 ABCD와 닮은 도형일 때,  $x$ 의 값을 구하시오. [4.3점]



14. 실수 전체의 집합을  $R$ , 유리수 전체의 집합을  $Q$ , 정수 전체의 집합을  $Z$ , 자연수 전체의 집합을  $N$ 이라고 하자. 집합  $R$ 에서  $R$ 로의 함수

$$f(x)=|x|$$

$$g(x)=\lceil x \rceil$$

$$h(x)=\begin{cases} x & (x\in Q) \\ -x & (x\in(R-Q)) \end{cases}$$

에 대하여 ㉠, ㉡, ㉢, ㉣이 집합  $R, Q, Z, N$ 을 순서 없이 나타낸 것일 때 빈칸의 ㉠, ㉡, ㉢, ㉣에 들어갈 집합을 순서대로 구하시오. [4.3점]

- $x\in$  ㉠ 이면  $(f\circ g)(x)=(g\circ f)(x)$ 이다.

○  $x\in$  ㉡ 이면  $(g\circ h)(x)=(h\circ g)(x)$ 이다.

○  $x\in$  ㉢ ,  $y\in$  ㉣ 이면  $x+y\in$  ㉤ 이다.

○  $x\in$  ㉠ 이면  $\sqrt{x}\in$  ㉢ 이다.

15. 원점  $O$ 와 좌표평면 위의 두 점  $P(6, 8)$ ,  $Q(15, 8)$ 에 대하여  $\angle POQ$ 의 이등분선과 선분  $PQ$ 와의 교점의  $x$ 좌표를  $\frac{b}{a}$ (단,  $a$ 와  $b$ 는 서로소인 자연수)라고 할 때,  $b-a$ 의 값을 구하시오. [5.1점]

16. 도형  $x^2 + y^2 + 8x - 6y = 0$ 이  $x$ 축과 만나는 두 점을  $A$ ,  $B$ 라고 할 때, 제2사분면에 있는 원 위의 점  $P$ 에 대하여 삼각형  $APB$ 의 넓이가 자연수가 되도록 하는 점  $P$ 의 개수를  $m$ 이라고 하자.  ${}_mP_2 + {}_mC_2$ 의 값을 구하시오. [6.7점]

17. 이차방정식  $x^2 - 4x - 8 = 0$ 의 서로 다른 두 근  $\alpha$ ,  $\beta$ 에 대하여 이차함수  $f(x)$ 가 조건을 모두 만족시킨다.

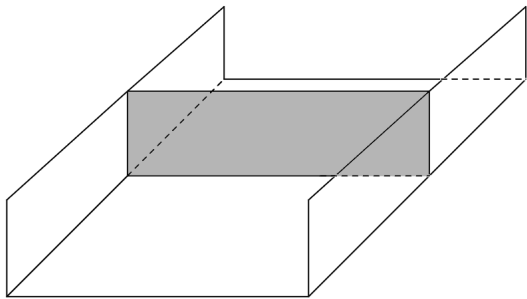
- (가)  $f(\alpha^2 - 7) = 2\alpha$ ,  $f(\beta^2 - 7) = 2\beta$   
(나)  $f(\alpha + 12) + f(\beta + 12) = -8$

$f(2)$ 의 값을 구하시오. [6.7점]

서술형

18. 두 함수  $y = \sqrt{x+4}$ ,  $y = \sqrt{x-6}$ 의 그래프와  $x$ 축 및 직선  $y = 2$ 로 둘러싸인 도형의 넓이를  $K$ 라고 하자.  $K$ 각형의 대각선의 개수를 풀이 과정과 함께 구하시오. [5.3점]

19. 두 직선  $2x - y - 2 = 0$ 과  $2x - y + a = 0$  사이의 거리가  $\sqrt{5}$ 가 되도록 하는 모든 실수  $a$ 의 값의 합을  $p$ 라고 하자. 한편 폭이  $5|p|$  cm인 철판의 양쪽을 접어 그림과 같이 단면의 모양이 직사각형인 물받이를 만들고자 한다. 색칠한 단면의 넓이가 최대가 될 때, 물받이의 높이를 풀이 과정과 함께 구하시오, (단, 철판의 두께는 무시한다.) [7점]



20. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{3x} & (x \geq 0) \\ 6x & (x < 0) \end{cases}$$

에 대하여  $g(x)$ 는  $f(x)$ 의 역함수이다. 집합

$$A = \left\{ x \mid g(x) \geq x^2 - \frac{1}{2} \right\}$$

$$B = \{ x \mid x \text{는 } 245 \text{의 양의 약수 중 } 7 \text{의 배수} \}$$

라고 할 때,  $(A^c \cup B)^c \cup (A^c \cup B^c)^c$ 의 원소 중 정수의 개수를 풀이 과정과 함께 구하시오. [7점]

※ 확인 사항

- 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.