システム最適化　第14回

包絡分析法とシステム最適化

- 包絡分析法(DEA)とは
- 1入力1出力の例
- 2入力1出力の例
- DEAの理論的背景
- 最適化に果たす役割

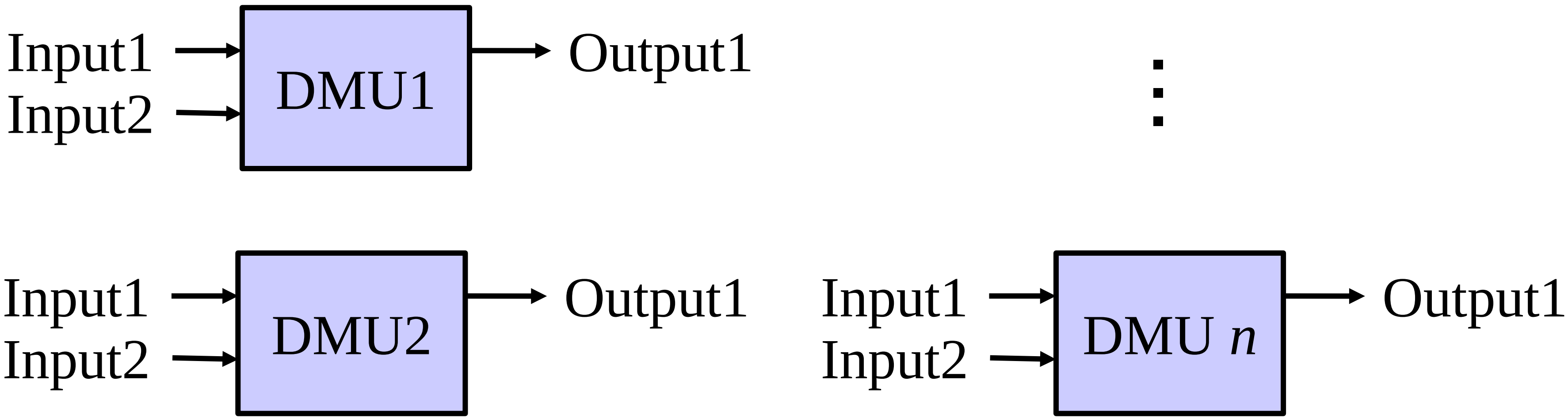
包絡分析法(DEA)とは

- DEA：Data Envelopment Analysis
  - 日本では「包絡分析法」と訳されて紹介された
  - 専門家はDEAと呼ぶ方が多い
- A.チャーンズとW.W.クーパーらが1978年に発表した

  Charnes, A., European Journal of Operational Research, 2 429-444 (1978).
- 事業体を「入力（投入）を出力（産出）に変換する過程」とみなす
- その変換過程の効率性を測定するための方法としてDEAを開発した

DEAの前提

- 同種の入力と出力をもつ事業体がn個存在するものとする
  - 事業体をDMU (Decision Making Unit)という



図は2入力1出力の例．入力数と出力数は対象事業体によって異なる．

DMUの例

次の表のような事業体をDMUの例としてみることができる

対象事業体	入力	出力
営業所	営業人数	売上高
スーパーマーケット	従業員数，売り場面積	売上高
病院	医師数，看護師数	外来患者のべ数，入院患者のべ数
製造業(売上高)	従業員数，投下資本	総売上高
製造業(利益)	人件費，製造原価	経常利益
製造業(販売)	営業所数，従業員数	国内売上高
研究開発	技術輸入額，研究費	技術輸出額
公立図書館	床面積，蔵書数，職員数，人口	登録者数，貸出書籍数，入館者数

1入力1出力での例

6つの営業所A,B,C,D,E,Fの効率を人数と売上高でみてみよう

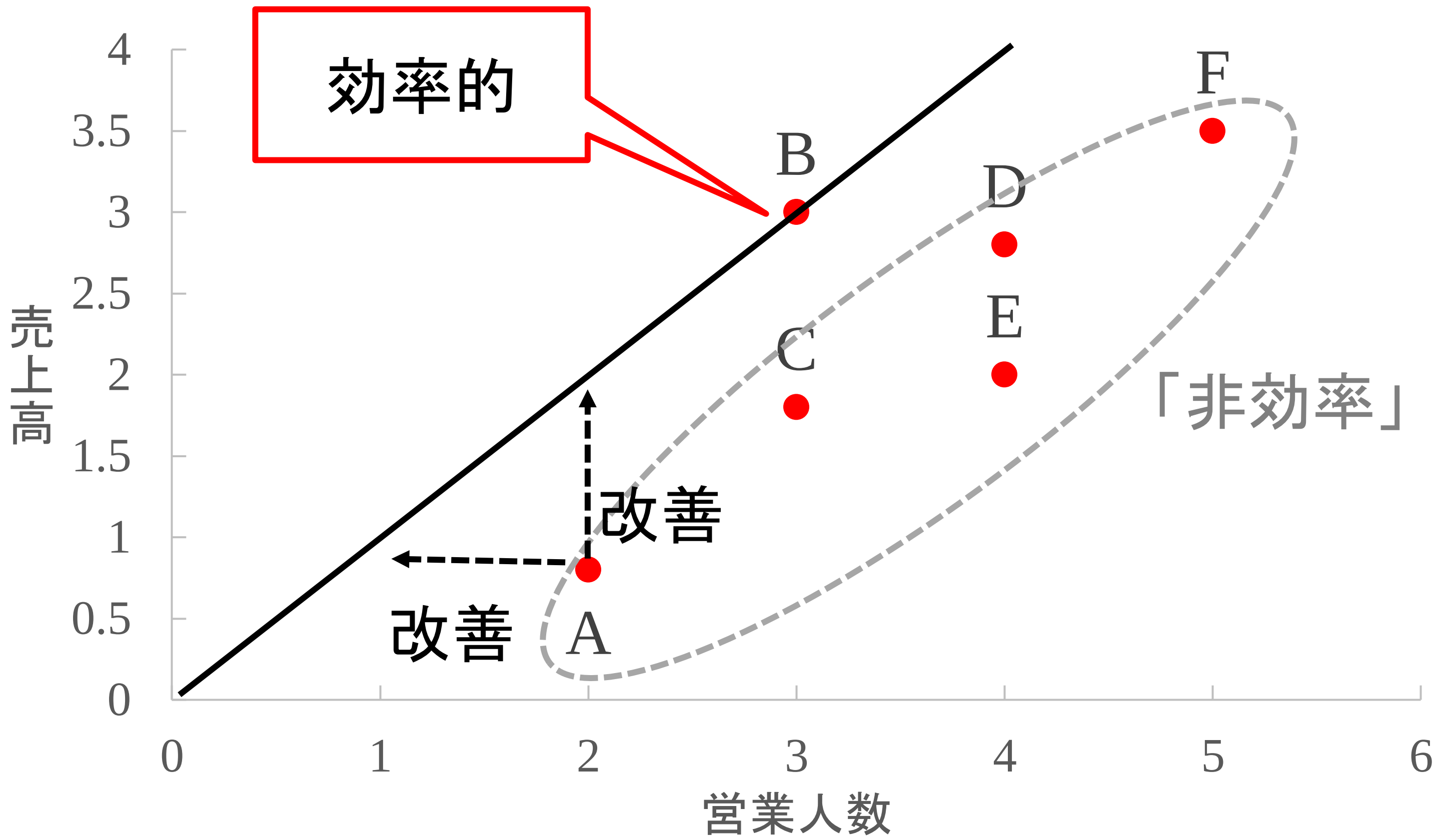
DMU	営業所	A	B	C	D	E	F
入力1	営業人数	2	3	3	4	4	5
出力1	売上高	0.8	3	1.8	2.8	2	3.5

- 売上高だけではFが優れているようにみえるが…
- 営業人数の違いを考慮するべき
- 売上高／営業人数＝効率値として計算してみる（下表）

DMU	営業所	A	B	C	D	E	F
出力1／入力1=売上高／営業人数		0.8/2	3/3	1.8/3	2.8/4	2/4	3.5/5
効率値		0.4	1	0.6	0.7	0.5	0.7

- 効率値が最も高いのはBとなる

1入力1出力でのグラフ例

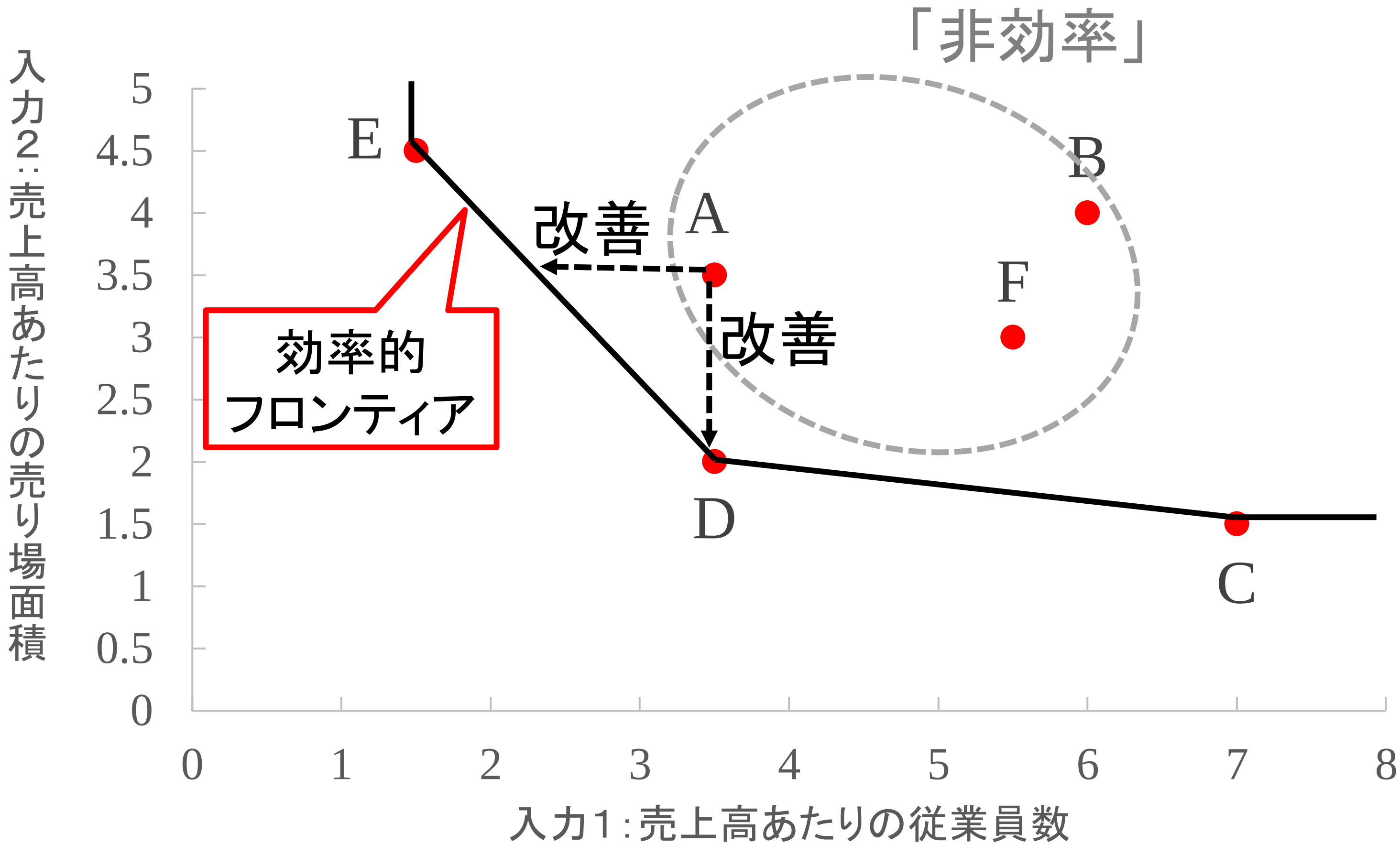


2入力1出力の例

DMU	店舗	A	B	C	D	E	F
入力1	売上高あたりの従業員数（10人／億円）	3.5	6	7	3.5	1.5	5.5
入力2	売上高あたりの売り場面積（1,000m^2／億円）	3.5	4	1.5	2	4.5	3
出力1	売上高（億円）	1	1	1	1	1	1

- 表はあるスーパーの店舗A～Fの次の数字の例を示している
  - 売上高あたりの従業員数（単位：10人／億円）
  - 売上高あたりの売り場面積（単位：1,000m^2 ／億円）
  - 現実には各店舗の売上高は異なるが，同じ売上高（1億円）になるよう換算してあるものとする

2入力1出力でのグラフ例



DEAと線形計画問題

- 入力と出力が多変数の場合，効率性の比較は容易ではなくなる
- 入力と出力のそれぞれにウェイトをかけて加え，仮想的入力変数と仮想的出力変数に変換して，効率性指標を作る
- その効率性指標を最大化するウェイトを決定する分数計画問題で効率性を測定する
- この問題は線形計画問題に変換でき，それを解くことで解が得られる

分数計画モデル

評価対象とするDMUoの効率値θは次のように表せる

目的関数 $$\underset{(\mathbf{v},\mathbf{u})}{\text{Max}}\ \theta = \frac{u_1 y_{1o} + u_2 y_{2o} + \ldots + u_s y_{so}}{v_1 x_{1o} + v_2 x_{2o} + \ldots + v_m x_{mo}}$$

制約条件 $$\frac{u_1 y_{1j} + u_2 y_{2j} + \ldots + u_s y_{sj}}{v_1 x_{1j} + v_2 x_{2j} + \ldots + v_m x_{mj}} \le 1 \quad (j = 1, \ldots, n)$$

$$\mathbf{v} \ge \mathbf{0} \quad (v_1, v_2, \ldots, v_m \ge 0)$$

$$\mathbf{u} \ge \mathbf{0} \quad (u_1, u_2, \ldots, u_s \ge 0)$$

v_i :入力iのウェイト　x_{io} :DMUoの入力iの値　x_{ij} :DMUjの入力iの値

u_k :出力kのウェイト　y_{ko} :DMUoの出力kの値　y_{kj} :DMUjの出力kの値

m :入力の数　s :出力の数　n :DMUの数

線形計画モデル

- 前ページの分数計画モデルを線形計画モデルに変換すると次のようになる

目的関数 $\underset{(\mathbf{v},\mathbf{u})}{\mathrm{Max}}\, \theta = u_1 y_{1o} + u_2 y_{2o} + \ldots + u_s y_{so}$

制約条件

$$v_1 x_{1o} + v_2 x_{2o} + \ldots + v_m x_{mo} = 1$$

$$u_1 y_{1j} + u_2 y_{2j} + \ldots + u_s y_{sj} \le v_1 x_{1j} + v_2 x_{2j} + \ldots + v_m x_{mj}$$

$$(j = 1, \ldots, n)$$

$$\mathbf{v} \ge \mathbf{0} \quad (v_1, v_2, \ldots, v_m \ge 0)$$

$$\mathbf{u} \ge \mathbf{0} \quad (u_1, u_2, \ldots, u_s \ge 0)$$

線形計画モデルの例(1)

- 2入力1出力のスーパーの例(7ページ)の店舗Aの線形計画モデルは次のようになる

目的関数 $\underset{(\mathbf{v},\mathbf{u})}{\mathrm{Max}}\,\theta = u_1$

制約条件

$$3.5v_1 + 3.5v_2 = 1$$

$$u_1 \le 3.5v_1 + 3.5v_2$$

$$u_1 \le 6v_1 + 4v_2$$

$$u_1 \le 7v_1 + 1.5v_2$$

$$u_1 \le 3.5v_1 + 2v_2$$

$$u_1 \le 1.5v_1 + 4.5v_2$$

$$u_1 \le 5.5v_1 + 3v_2$$

$$u_1 \ge 0 \qquad v_1, v_2 \ge 0$$

DMU	店舗	A	B	C	D	E	F
入力1	売上高あたりの従業員数(10人/億円)	3.5	6	7	3.5	1.5	5.5
入力2	売上高あたりの売り場面積(1,000m^2/億円)	3.5	4	1.5	2	4.5	3
出力1	売上高(億円)	1	1	1	1	1	1

線形計画モデルの例(2)

- 2入力1出力の例(7ページ)の店舗Bの線形計画モデルは次のようになる

目的関数 $\underset{(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})}{\mathrm{Max}}\,\theta = u_1$

制約条件 $6v_1 + 4v_2 = 1$

$u_1 \leq 3.5v_1 + 3.5v_2$

$u_1 \leq 6v_1 + 4v_2$

$u_1 \leq 7v_1 + 1.5v_2$

$u_1 \leq 3.5v_1 + 2v_2$

$u_1 \leq 1.5v_1 + 4.5v_2$

$u_1 \leq 5.5v_1 + 3v_2$

$u_1 \geq 0 \qquad v_1, v_2 \geq 0$

DMU	店舗	A	B	C	D	E	F
入力1	売上高あたりの従業員数(10人／億円)	3.5	6	7	3.5	1.5	5.5
入力2	売上高あたりの売り場面積(1,000m^2／億円)	3.5	4	1.5	2	4.5	3
出力1	売上高(億円)	1	1	1	1	1	1

店舗C,D,E,Fも黄色の式を変更することでモデル化できる

DEAの効率とウェイト

- 目的関数が最大となる事業体をD効率的という
  - 最大1になるよう基準化している
- 目的関数が1より小さい事業体はD非効率的という
- ウェイトは「対象としている事業体にとって最も都合の良いように決められる」
  - ただし，その同じウェイトで他の事業体も評価し相対評価する
  - 評価者の価値基準が階層分析法のように反映されないことも起こり得る

DEAの研究対象の特徴

- 同様の活動を展開している事業体が分析可能な規模(数)で存在する
- 各事業体間で共通のパターンの定量的な入出力データが得られている
- 各事業体の活動の具体的内容は効率性に導出では問題とされない
- 線形計画問題を解いて，入力変数間のウェイト，出力変数間のウェイトが客観的に得られる

最適化に果たす役割

- 唯一のDMUを選ぶのではなく，複数あるDMUのうち，効率的なDMUと非効率なDMUを分けることで最適なものたちを見つけ出すことができる
- 非効率なDMUであっても，どの入出力値が改善すれば効率的になるのかを，考えることができる