Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Maße

In diesem Abschnitt werden wir uns drei Fragen stellen:

- Was können wir messen?
- Wie können wir messen?
- Wie können wir Maße ökonomisch definieren?

1.1 Mengensysteme

Beispiel 1.1.0.1.

- Für ein beliebiges Ω ist $\mathfrak{C} := \{A \subset \Omega : |A| < \infty\}$ ein Ring und damit auch ein Semiring.

- Sei $a \in \mathbb{N}$, so ist $\mathfrak{C} := \{A \subset \Omega : |A| < a\}$ für $|\Omega| > a$ nur ein Semiring

- $\mathfrak{C} := \{A \subset \Omega : card(A) \leq \aleph_0\}$ eine Sigmaalgebra

Beispiel 1.1.0.2. Intervalle
$\mathfrak{T} := \{(a, b] | a \leq b \wedge a, b \in \mathbb{R}\}$ "westlich" und $\{[a, b) | a \leq b \wedge a, b \in \mathbb{R}\}$ "russisch"bilden Semiringe.
Im $\mathbb{R}^n : (a, b] = (a_1, b_1] \times (a_2, b_2] \times ... \times (a_n, b_n]$
Der erzeugte Sigmaring von $\mathfrak{T}$ sind die Borelmengen $\mathfrak{B}(\mathfrak{B}_n)$
Für zwei Semiringe $\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2$ ist

$$\mathfrak{T}_1 \times \mathfrak{T}_2 = \{A_1 \times A_2 | A_1 \in \mathfrak{T}_1 \wedge A_2 \in \mathfrak{T}_2\}$$

ein Semiring.

Bemerkung. Es gibt einige Tricks, wenn man mit Mengen arbeitet:

1. Folgen monoton machen:
   Sei $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Mengenfolge, so ist $B_n = \bigcup_{i=1}^n A_i$ eine monoton wachsende Folge.

2. Folgen disjunkt machen:
   Sei $C_1 = B_1 = A_1$

$$C_n = B_n \backslash B_{n-1} = \left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j \right) \backslash \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i = \left(\bigcup_{j=1}^{n-1} A_j \cup A_n \right) \backslash \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i = \emptyset \cup A_n \backslash \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i$$

   mit $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$

3. Klassische Tauschgeschäft:
   Wenn du eine Gleichung willst, musst du 2 Ungleichungen zeigen

$$x = y \Leftrightarrow (x \leq y) \wedge (x \geq y)$$
$$A = B \Leftrightarrow (A \subset B) \wedge (A \supset B)$$

4. Prinzip der guten Menge: Wenn du zeigen willst, dass alle Elemente x aus einer Menge X eine Eigenschaft haben, dann zeigt man $Y \supset X$ für:

$$Y := \{x \in X | x \text{ hat die Eigenschaft}\}$$

Bemerkung. Dieser Satz funktioniert auch für:

- Semiringe

Jedoch nicht für

- Dynkin-Systeme
- monotone Systeme

1.2 Maße und Inhalte

Beispiel 1.2.0.1. Sei $\Omega \neq \varnothing$ endlich, $C = 2^\Omega, \mu(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$.

Beispiel 1.2.0.2. Sei $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, also ein „fairer Würfel".

Beispiel 1.2.0.3. Sei $\Omega = \{(1, 1), (1, 2), ..., (2, 1), (2, 2), ..., (6, 6)\}$, also würfeln mit zwei Würfeln, Würfel sind unterscheidbar.

Beispiel 1.2.0.4. $(\Omega, 2^\Omega, \mu)$, $\Omega \neq \varnothing$ endlich, $C = 2^\Omega, \mu(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$ ist der Laplace-Wahrscheinlichkeitsraum.

1.3 Folgerungen für Maße

1.4 Eigenschaften von Maßen (Inhalten) auf Ringen(Semiringen)

Bemerkung. Dieses Argument kann auch umgedreht werden. Dies werden wir später zumindest einmal benutzen.

Bemerkung. Als Hausübung: Ist μ endliches Maß auf einem Sigmaring, so gilt

$$\mu(\limsup_{n\to\infty} A_n) \geq \limsup_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

Beispiel 1.4.0.1 (Additionstheorem)**.** Die Anzahl der Permutationen von n Elementen ohne Fixpunkt.

$$\mathbb{P}(\text{kein Fixpunkt}) = 1 - \mathbb{P}(\text{Fixpunkt}) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcup A_i\right)$$

mit $A_i = [i \text{ ist Fixpunkt }]$.

$$\mathbb{P}\left(\bigcup A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) - \sum_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2}) + \sum \mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_2}) - ...$$

Es gilt:

$$\mathbb{P}(A_i) = \frac{(n-1)!}{n!}$$

$$\mathbb{P}(A_i \cap A_0) = \frac{(n-2)!}{n!}$$
$$\mathbb{P}(A_{i_1} \cap ... \cap A_{i_k}) = \frac{(n-k)!}{n!}$$

Jetzt: (was auch immer S_k ist...)

$$S_k = \frac{(n-k)!}{n!} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) = \frac{1}{k!}$$

Damit:

$$\mathbb{P}\left(\bigcup A_i\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{1}{k!}$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(\text{kein Fixpunkt}) = 1 - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k} \frac{1}{k!} \ n \overset{\rightarrow}{\rightarrow} \infty \ \frac{1}{e}$$

1.5 Bedingte Wahrscheinlichkeit

Bemerkung. Es gilt:

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B|A)$$

und:

$$\mathbb{P}(A_i \cap ... \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2|A_1)\mathbb{P}(A_3|A_1 \cap A_2)...P(A_n|A_1 \cap ... \cap A_n)$$

Dies ist das Multiplikationstheorem für Wahrscheinlichkeiten.

Beispiel 1.5.0.1 (Bedingte Wahrscheinlichkeiten (Multiplikationstheorem))**.** In einer Urne liegen zwei schwarze und drei weiße Kugeln. Es wird 3-mal ohne Zurücklegen gezogen, wobei das Ziehen der Laplace-Wahrscheinlichkeit folgt. Nun ist

$$\mathbb{P}(\text{Alle 3 Kugeln weiß}) = \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$$

wobei $A_i =$ „i-te Kugel ist weiß“. Also

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2|A_1)\mathbb{P}(A_3|A_1 \cap A_2)$$

mit

$$P(A_1) = \frac{3}{5}$$
$$P(A_2|A_1) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$
$$P(A_3|A_2 \cap A_1) = \frac{1}{3}$$

und damit

$$\mathbb{P}(\text{Alle 3 Kugeln weiß}) = \frac{1}{10}$$

Beispiel 1.5.0.2. Selbe Voraussetzungen wie im vorigen Beispiel. Nun ist

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\text{genau 2 Kugeln weiß}) &= \mathbb{P}(\text{wws}) + \mathbb{P}(\text{wsw}) + \mathbb{P}(\text{sww}) \\ &= \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3^c) + \mathbb{P}(A_1 \cap A_2^c + A_3) + \mathbb{P}(A_1^c \cap A_2 \cap A_3) \\ &= \frac{3}{5}\frac{2}{4}\frac{2}{3} + \frac{3}{5}\frac{2}{4}\frac{2}{3} + \frac{2}{5}\frac{3}{4}\frac{2}{3} = 3 \cdot \frac{12}{60} = \frac{3}{5}. \end{aligned}$$

Dieses Beispiel kann analog auf jede Anzahl an Kugeln fortgesetzt werden.

1.6 Der Fortsetzungssatz für Maßfunktionen

In diesem Abschnitt werden wir den folgenden Satz beweisen:

Bemerkung. Wir werden $\widetilde{\mu}$ im Folgenden immer mit μ bezeichnen, da es nicht wichtig ist, ob wir auf einem Ring oder auf dem erzeugten Sigmaring arbeiten.

Bemerkung. Die Motivation für diesen Satz ist das klassische Ausschöpfungs-, bzw Exhaustionsprinzip, das z.B. Archimedes und Eudoxos bearbeitet haben. Dabei wurde die Fläche eines Kreises durch Rechtecke approximiert. Damit ist (A ist die Fläche des Kreises, B die Fläche der Vierecke)

$$\mu^+(A) = \inf\{\mu(B) : A \subseteq B, B \in \mathfrak{R}\}$$

$$\mu^-(A) = \sup\{\mu(B) : B \subseteq A, B \in \mathfrak{R}\}$$

wenn $\mu^+(A) = \mu^-(A)$, dann ist A messbar (im Sinn von Jordan). Dann μ^* das Jordon-Maß.

$$\begin{aligned}\mu^*(A) &= \inf\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(B_n)\right), B_n \in \mathfrak{R}, A \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \\ &= \inf\{\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(B_n) : B_n \in \mathfrak{R}, A \subseteq \sum_{n\in\mathbb{N}} B_n\}\end{aligned}$$

Die letzte Gleichheit folgt durch Zeigen von $\leq$ und $\geq$.

Bemerkung. Will man zeigen, dass μ^* ein äußeres Maß ist, so muss man nur 1.,2. und 4. zeigen, 3. folgt dann automatisch.

Beispiel 1.6.0.1. Sei $|\Omega| \geq 3$ und

$$\mu^*(A) = \begin{cases} 0 : A = \varnothing \\ 1 : A \notin \{\varnothing, \Omega\}, A \subseteq \Omega \\ 2 : A = \Omega \end{cases}$$

Bemerkung. Um die Messbarkeit von A zu zeigen, genügt es zu zeigen, dass

$$\mu^*(B) \geq \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \cap A^c),$$

da die Ungleichung „$\leq$" trivialerweise immer erfüllt ist.

Bemerkung. Der erste Teil des Fortsetzungssatzes ist damit bewiesen. Bleibt also noch der folgende Satz zu zeigen:

Bemerkung. Nun ist der Fortsetzungssatz für Maßfunktionen vollständig bewiesen.

1.7 Zusammenhang zwischen dem Maß auf dem Ring und dem Maß auf dem Sigmaring

Bemerkung. Es gilt auch

$$|\mu(A) - \mu(B)| \leq \mu(A \Delta B)$$

Bemerkung. Wir nehmen nun an, dass $\Omega \in \mathfrak{R}_\sigma(\mathfrak{R})$, der erzeugte Sigmaring ist also schon eine Sigmaalgebra.

1.8 Maße auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$

Die Frage, die sich stellt ist: Ist μ^* auf $\mathbb{R}$ frei definiert, wann gilt $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{M}_{\mu^*}$?

1.9 Maße auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$, zweiter Anlauf

Im folgenden ist immer $\mathfrak{T} := \{(a, b], a \leq b, a, b \in \mathbb{R}\}$.

Bemerkung. Dazu muss man ein Maß finden, dass für alle $a < b$ $\mu((a, b])$ festlegt. Dies ist nicht ganz frei möglich, die Additivität muss erfüllt werden, also

$$\mu((a, c]) = \mu((a, b]) + \mu((b, c]).$$

Wir beginnen dazu mit einem Spezialfall, dass $\mu(\mathbb{R}) < \infty$:

Beispiel 1.9.0.1. Sei

$$F(x) = \mu((-\infty, x]) < \infty$$

dann ist für $a < b$:

$$(-\infty, a] \cup (a, b] = (-\infty, b]$$
$$\mu((-\infty, a]) + \mu((a, b]) = \mu((-\infty, b])$$
$$\Rightarrow \mu((a, b]) = F(b) - F(a)$$

Bemerkung.

$$F(x) = \mu((0, x]), x \geq 0,$$

damit:

$$\mu((a, b]) = F(b) - F(a)$$

und $F(0) = 0$.
für

$$\mu((x, 0]) = F(0) - F(x)$$
$$\Rightarrow F(x) = -\mu((x, 0]),$$

eine Verteilungsfunktion muss also die Form

$$F(x) = \begin{cases} \mu((0, x]) : x \geq 0 \\ -\mu((x, 0]) : x < 0 \end{cases}$$

dies funktioniert, siehe Aufgaben (Z$\mu((a, b]) = F(b) - F(a)$). Dies fassen wir im folgenden Satz zusammen:

1.10 Ergänzungen zu bedingten Wahrscheinlichkeiten

Beispiel 1.10.0.1. Es gibt vier Blutgruppen, A, B, AB, 0. Die Blutgruppe der Frau ist A, die des Sohnes ist 0. Wie ist die Wahrscheinlichkeit für die Blutgruppe des Mannes?
Mit zusätzlichem Wissen über Genetik, kann man über die Wahrscheinlichkeiten p_a, p_b, p_0 für das Auftreten der Allele $a, b, 0$ die Wahrscheinlichkeit der Blutgruppen ausrechnen. In der Bevölkerung haben Blutgruppe 0 40% der Bevölkerung, Blutgruppe A 47%, B 9% und AB 4%. Damit erhalten wir:

$$0.4 = p_0^2$$
$$0.47 = p_a^2 + 2p_a p_0$$
$$0.09 = p_b^2 + 2p_b p_0$$
$$0.04 = 2p_a p_b$$

Eine gute Approximation ist

$$p_a \approx \frac{9}{30}, \quad p_b \approx \frac{2}{30}, \quad p_0 \approx \frac{19}{30}.$$

Damit erhält man:

$$\mathbb{P}(\text{Sohn } 0|0) = 1$$
$$\mathbb{P}(\text{Sohn } 0|\text{A}) = \frac{1}{2}$$
$$\mathbb{P}(\text{Sohn } 0|\text{B}) = \frac{1}{2}$$

und

$$\mathbb{P}(0|\text{Sohn } 0) = \frac{p_0^2}{p_0^2 + p_a p_0 + p_b p_0} = p_0,$$

genauso für A und B, also ist die Wahrscheinlichkeit für Blutgruppe 0 am größten.

1.11 Eigenschaften von Verteilungsfunktionen

Bemerkung. Für Wahrscheinlichkeitsmaße μ hat die Verteilungsfunktion

$$F(x) := \mu((-\infty, x])$$

die zusätzlichen Eigenschaften:

- $$0 \leq F \leq 1$$
- $$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$$
- $$\lim_{x \to +\infty} F(X) = 1.$$

Eine Verteilungsfunktion, die das erfüllt, heißt Verteilungsfunktion im engeren Sinn.

1.12 Maße von Mengen mit Verteilungsfunktionen

Ab diesem Kapitel werden wir offene Intervallgrenzen auch mit eckigen Klammern schreiben. Wir wissen schon:

$$\mu(]a, b]) = F(b) - F(a).$$

Was passiert, für$\mu([a, b]), \mu(]a, b[), \mu([a, b[)$?

$$\mu([a, b]) = \mu(\bigcap_{n \in \mathbb{N}}]a - \frac{1}{n}, b]) = \lim_{n \to \infty} \mu(F(b) - F(a - \frac{1}{n})) = F(b) - F(a - 0)$$

$$\mu(]a, b[) = \mu(\bigcup_{n \in \mathbb{N}}]a, b - \frac{1}{n}]) = \lim_{n \to \infty} (F(b - \frac{1}{n}) - F(a)) = F(b - 0) - F(a)$$

$$\mu([a, b[) = F(b - 0) - F(a - 0)$$

Und damit auch

$$\mu(\{x\}) = \mu([x, x]) = F(x) - F(x - 0)(= \text{Sprunghöhe von } F \text{ in } x)$$

Beispiel 1.12.0.1. Sei μ ein endliches Lebesgue-Stieltjes Maß auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$. Für die Verteilungsfunktion $F(x) = \mu(]-\infty, x[)$ kann man nun, da μ dargestellt werden kann als

$$\mu = \mu_c + \mu_d$$

auch zerlegen in

$$F = F_c + F_d, F_d(x) = \sum_{y \leq x} \mu_d(\{y\}).$$

Wir erhalten den folgenden Satz:

Bemerkung. Ist $\mu_F(\mathbb{R}) = 1$, so ist

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx.$$

Bemerkung. Wir werden anstatt des Riemann-Integrals bald ein Lebesgue-Integral schreiben.

Beispiel 1.12.0.2 (Standardnormalverteilung)**.**

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Aus der Analysis ist schon bekannt

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi},$$

also

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)dx = 1.$$

Wir erhalten die Verteilungsfunktion

$$\Phi(x) := \int_{-\infty}^{x} \varphi(x)dx.$$

Dann ist

$$\mathbb{P}_\Phi(]a, b]) = \Phi(b) - \Phi(a).$$

Zum Beispiel also

$$\mathbb{P}_\Phi(]-1, 2]) = \Phi(2) - \Phi(-1) = 0.9772 - 0.1587 = 0.8185,$$

$$\Phi(1.67) = 0.9525$$

Beispiel 1.12.0.3. Allgemeiner nimmt man

$$\mathcal{N}(\mu, \sigma^2, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

1.13 Mehrdimensionale Lebesgue-Stieltjes Maße und Verteilungsfunktionen

Der hier verwendete Maßraum ist $(\mathbb{R}^d, \mathfrak{B}_d)$ mit

$$\mathfrak{B}_d := \mathfrak{A}_\sigma\left(\{]a, b] : a, b \in \mathbb{R}, a \leq b\}\right),$$

wobei die Ungleichung $a \leq b$ komponentenweise zu verstehen ist, also

$$a \leq b :\Leftrightarrow \forall i \in \{1, ..., d\} : a_i \leq b_i$$

und

$$]a, b] :=]a_1, b_1] \times]a_2, b_2] \times ... \times]a_d, b_d]$$

Bemerkung. Sei μ ein endliches Maß. Dann können wir die Verteilungsfunktion wieder anschreiben als

$$F(x) = \mu(]-\infty, x]) = \mu(]-\infty, x_1]) \times ... \times \mu(]-\infty, x_d]).$$

Genügt dies, um μ festzulegen?

Beispiel 1.13.0.1. Für $d = 2$ erhalten wir:

$$\mu(]a, b]) = F(b_1, b_2) - F(a_1, b_2) - F(b_1, a_2) + F(a_1, a_1).$$

Wir können den Satz von oben also zmd. für den 2-dimensionalen Raum erweitern:

Beispiel 1.13.0.2. Für $d \geq 2$ erhalten wir:

$$\mu(]a, b]) = \mu(]a_1, b_1] \times ...\times]a_d, b_d]) = \sum_{e \in \{0,1\}^d} F(ae + b(1-e)),$$

wobei

$$ae + b(1-e) = \big(a_1 e_1 + b_1(1-e_1), ..., a_d e_d + b_d(1-e_d)\big).$$

Beispiel 1.13.0.3. $d = 2$. $f(x_1, x_2) = x_1 x_2$.

$$\Delta_1(4, 17) f(x_1, x_2) = 17x_2 - 4x_2 - 13x_2 - 13x_2$$

bzw

$$\Delta_1(a_1, b_1) f(x_1, x_2) = (b_1 - a_1)x_2$$

$$\Delta_1(a_1, b_1)\Delta_2(a_2, b_2) f(x_1, x_2) = (b_1 - a_1)b_2 - (b_1 - a_1)a_2 = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)$$

Bemerkung. Damit ist (für $d \in \mathbb{N}$)

$$\mu_F(a, b) = \Delta_1(a_1, b_1)\Delta_2(a_2, b_2)...\Delta_d(a_d, b_d)F$$

Und

$$\Delta_i(a_i, b_i)F(x_1, ..., x_d) = \int_{a_i}^{b_i} \frac{\partial}{\partial x_i} F(x_1, ..., x_d) dx_i$$

Beispiel 1.13.0.4. Endliche Maße:

$$F(x) = \mu(]-\infty, x])$$

Wir betrachten den Spezialfall für $d = 2$. Dann ist

$$\mu(]0, x]) = F(x_1, x_2) - F(x_1, 0) - F(0, x_2) + F(0, 0).$$

Setze $F(x_1, 0) = F(0, x_2) = 0$. Dann ist für $x > 0$

$$F(x_1, x_2) = \mu(]0, x_1] \times]0, x_2])$$

und für $x_1 \geq 0, x_2 < 0$

$$\mu(]0, x_1] \times]x_2, 0]) = F(x_1, 0) - F(0, 0) - F(x_1, x_2) + F(0, x_2) = -F(x_1, x_2).$$

Dies lässt sich quadrantenweise durchführen.
Allgemein:

$$F(x) = \mu(]\min(x, 0), \max(x, 0)])\operatorname{sgn}(x),$$

wobei das Minimum und Maximum koordinatenweise zu verstehen ist und

$$\operatorname{sgn}(x) = \prod_{i=1}^{n} \operatorname{sgn}(x_i)$$

Bemerkung. Übliche Schlamperei:

$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{m+n},$$

und

$$\mathfrak{B}_n \times \mathfrak{B}_m = \mathfrak{B}_{n+m}$$

1.14 Approximationssätze und Regularität

Zusammenfassend ergibt das dann:

Bemerkung. Eine Funktion $F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ heißt Verteilungsfunktion im engeren Sinn, wenn es ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ auf $(\mathbb{R}^d, \mathfrak{B}_d)$ mit

$$F(x) = \mathbb{P}(]-\infty, x]) \quad (= \mathbb{P}(]-\infty, x_1] \times ... \times]-\infty, x_d]))$$

gibt und F rechtsstetig ist, also

$$\Delta_1(a_1, b_1) ... \Delta_d(a_d, b_d) F \geq 0.$$

Zusätzlich muss ein solches F nichtfallend in jeder Argumentvariable $x_1, ..., x_d$ sein, also

$$\forall i = 1, ..., d : \lim_{x_i \to -\infty} F(x_1, ..., x_d) = 0$$

$$\lim_{\min(x_1, ..., x_d) \to \infty} F(x_1, ..., x_d) = 1$$

Kapitel 2

Das Lebesgue-Integral

Motivation für dieses Kapitel: Wir wollen einen neuen Integralbegriff auf Basis des Riemann-Integrals definieren,

$$\int f = \int_0^\infty \mu([f > x])dx,$$

wobei f auf beliebigen Mengen definiert sein darf, also wenn μ Maß auf einem Messraum $(\Omega, \mathfrak{S})$, dann ist

$$f : \Omega \to \mathbb{R}$$

und $\mu([f > x])$ definiert sein soll, also $[f > x] \in \sigma$, wobei

$$[f > x] := \{\omega \in \Omega : f(\omega) > x\}.$$

Bemerkung. Für $\mathfrak{S}_2 = \mathfrak{B}$ ist $\mathfrak{C}$ z.B. die Menge der halboffenen Intervalle. Wir können aber auch $\mathfrak{C} = \{]-\infty, b], b \in \mathbb{R}\}$ oder $\mathfrak{C} = \{U \subseteq \mathbb{R}, U \text{ offen}\}$ hernehmen. Damit können wir schon einige Sätze beweisen.

2.1 Erweitert reellwertige Funktionen

Whaaaaat??
Kuso abschreiben... S.86

2.2 Treppenfunktionen

Bemerkung. Sind die oben genannten Mengen A_i und B_i alle messbar, so ist auch t messbar. Die Umkehrung gilt jedoch im Allgemeinen nicht, man kann also auch eine messbare Treppenfunktoin mit Hilfe einer nichtmessbaren Zerlegung darstellen kann, z.B. $t \equiv 0 = 0\mathbb{1}_A + 0\mathbb{1}_{A^c}$ mit $A \notin \mathfrak{S}$.

2.3 Konvergenzarten

Bemerkung. $f_n \to f$ gleichmäßig, wenn, wie aus der Analysis bekannt,

$$\|f_n - f\|_{\sup} = \sup\{|f_n(\omega) - f(\omega)| : \omega \in \Omega\} \to 0.$$

Bemerkung. Es gilt

$$\mu([f > \text{ess sup} f]) = 0,$$

da

$$\mu([f > \text{ess sup} f]) = \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} [f > \text{ess sup} f + \frac{1}{n}]\right) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu([f > \text{ess sup} f + \frac{1}{n}]) = \sum_{n\in\mathbb{N}} 0 = 0.$$

Beispiel 2.3.0.1. Sei $([0,1], \mathfrak{B}) \cap [0,1], \lambda\big|_{\mathfrak{B}\cap[0,1]})$ und

$$f_n(\omega) = \omega^n,$$

dann ist

$$\lim_{n\to\infty} f_n(\omega) = \begin{cases} 0: & 0 \leq \omega < 1 \\ 1: & \omega = 1 \end{cases},$$

wir können also ein beliebig kleines Intervall A um 1 herausnehmen, sodass f_n gleichmäßig auf A^c konvergiert, also konvergiert f_n fast gleichmäßig.

Bemerkung. Diese Konvergenz ist später wichtig in der Statistik. Dies ist auf endlichen Maßräumen die schwächste Konvergenzart.

Bemerkung.

$$\begin{array}{ccc} & & \text{fast überall gleichmäßig} \\ & & \Downarrow \\ & & \text{fast gleichmäßig} \\ & \swarrow & \Downarrow \\ \text{fast überall} & & \text{im Maß} \end{array}$$

Bemerkung. Es gilt

$$d(f,g) = 0 \Leftrightarrow f = g \;\; \mu - \text{fast überall}$$

Mithilfe der Äquivalenzrelation

$$f \sim g :\Leftrightarrow f = g \;\; \mu\text{-fast überall},$$

zerfällt $\mathcal{L}_0$ in Äquivalenzklassen. Auf

$$L_0 = \mathcal{L}_0 \backslash \sim = \{[f]_\sim : f \in \mathcal{L}_0\}, [f]_\sim = \{g \in \mathcal{L}_0 : g \sim f\}$$

ist damit d eine Metrik.

Im Folgenden arbeiten wir auf den folgenden Satz hin:
Erinnerung: Sei

$$f : \Omega_1 \to \Omega_2,$$

$\mathfrak{S}_2$ Sigmaalgebra über Ω_2, $f^{-1}(\mathfrak{S}_2)$ ist Sigmaalgebra über Ω_1 (und zwar die kleinste Sigmaalgebra, bezüglich der f messbar ist).

Bemerkung. Anschaulich: $\{f : \mathfrak{S}_\sigma((f_i)_{i\in I}) \to (\mathbb{R}, \mathfrak{B})\}$ sind alle Funktionen, die wir aus den Funktionen $(f_i)_{i\in I}$ berechnen können. (kleine Lüge, eigentlich ist es alles, was wir „vernünftig“ aus den Funktionen berechnen können)

2.4 Messbare Funktionen und Maße

Bemerkung. Ist $(\Omega, \mathfrak{S}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum so heißt $X : (\Omega, \mathfrak{S}) \to (\Omega_2, \mathfrak{S}_2)$,

$$\mathbb{P} \circ X^{-1} = \mathbb{P}_X$$

die Verteilung von X.

2.5 Zufallsvariable und ihre Vertilungen

Bemerkung. Sei $(\Omega, \mathfrak{S}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. $(\mathfrak{S}_i)_{i\in I}$ Teilsigmaalgebra von $\mathfrak{S}$ (d.h. $\mathfrak{S}_i \subseteq \mathfrak{S}$), dann heißen $(\mathfrak{S}_i)_{i\in I}$ unabhängig, wenn

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall\{i_1, ..., i_n\} \subseteq I : \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^n A_{i_k}\right) = \prod_{k=1}^n \mathbb{P}(A_{i_k})$$

Bemerkung. Ab jetzt: $\Omega_i = \mathbb{R}$, $\mathfrak{S}_i = \mathfrak{B}$.

2.5.1 Diskrete Verteilungen

Beispiel 2.5.1.1. Binomialverteilung:

$$\mathbb{P}(X=n)=\mathbb{P}(A_1\cap ...\cap A_n)=\mathbb{P}(A_1)\cdots\mathbb{P}(A_n)=p^n$$

$$\mathbb{P}(X=0)=\mathbb{P}(A_1^c\cap ...\cap A_n^c)=(1-p)^n$$

Alles weitere ist etwas komplizierter:

$$\mathbb{P}(X=1)=\mathbb{P}((A_1\cap A_2^c\cap ...\cap A_n^c)\cup(A_1^c\cap A_2\cap ...)\cup ...\cup(A_1^c\cap ...\cap A_{n-1}^c\cap A_n))=$$

$$n\cdot p^1\cdot(1-p)^{n-1}.$$

Der allgemeine Fall sieht dann wie folgt aus:

$$\mathbb{P}(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}, k=0,...,n$$

mit der Konvention $\binom{n}{k}=0$, wenn $k<0$ oder $k>n$. Diese Verteilung heißt Binomialverteilung $B(n,p)$.

2.5.2 Stetige Verteilungen

Beispiel 2.5.2.1. Sei X eine Zufallsvariable mit stetiger und streng monotoner Verteilungsfunktion F_X. Sei

$$Y=F_X(X)$$

die Verteilung von Y. Da F_X stetig und streng monoton steigend ist, existiert eine Umkehrfunktion F_X^{-1}. Damit ist

$$F_Y(y)=\mathbb{P}(Y\leq y)=\mathbb{P}(F_X(X)\leq y)=\mathbb{P}(X\leq F_X^{-1}(y))=F(F^{-1}(y))=y.$$

Damit hat Y die Verteilungsfunkiton $F(X)\sim U(0,1)$. Setzt man also eine Zufallsvariable in ihre Verteilungsfunktion ein, so erhält man eine Gleichverteilung.
Sei umgekehrt U auf $[0,1]$ gleichverteilt, dann ist $F^{-1}(U)\sim F$. (Beweis übergangen)

2.6 Das Integral

Anschaulich: Beim Lebesgue Integral wird im Gegensatz zum Riemann-Integral der Grenzwert nicht über vertikale, sondern über horizontale „Scheiben“ gebildet.

Bemerkung (Notation)**.** Man kann auch

$$\int f d\mu=\int f(x)d\mu(x)=\int f(x)\mu(dx)$$

schreiben. Wissen wir, von welchem Maß die Rede ist, so schreibt man auch einfach

$$\int f.$$

Außerdem schreibt man für eine messbare Menge $A\in\mathfrak{S}$

$$\int_A f=\int A()\cdot f,$$

also das bestimmte Integral.

Bemerkung. Für komplexe Funkionen

$$f : (\Omega, \mathfrak{S}) \to (\mathbb{C}, \mathfrak{B}(\mathbb{C})),$$

wobei $\mathfrak{B}(\mathbb{C})$ zweidimensionale Borelmengen sind, können wir schreiben

$$f = f_1 + i f_2,$$

womit wir

$$\int f = \int f_1 + i \int f_2$$

erhalten. Die obigen Sätze gelten somit auch für komplexe Funktionen/Konstanten.