Kapitel 1

Maße

In diesem Abschnitt werden wir uns drei Fragen stellen:

- Was können wir messen?
- Wie können wir messen?
- Wie können wir Maße ökonomisch definieren?

1.1 Mengensysteme

Definition 1.1.1. *Sei Ω eine beliebige Menge. Dann heißt $\mathfrak{C} \subseteq 2^{\Omega}$ ein Mengensystem (über Ω).*

Definition 1.1.2 (Semiring)**.** *Sei $\mathfrak{T}$ ein nichtleeres Mengensystem über Ω. Dann heißt $\mathfrak{T}$ Semiring (im weiteren Sinn), falls*

1. *Durchschnittsstabilität:*
$$A, B \in \mathfrak{T} \Rightarrow A \cap B \in \mathfrak{T}$$
2. *Leiterbildung:*
$$A, B \in \mathfrak{T}, A \subseteq B \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : C_1, ..., C_n \in \mathfrak{T} : \forall i \neq j : C_i \cap C_j = \varnothing, A \setminus B = \bigcup_{i=1}^{n} C_i$$

gilt zusätzlich für die Leiter
$$\forall k = 1, ..., n : A \cup \bigcup_{i=1}^{k} C_i \in \mathfrak{T},$$
so spricht man von einem Semiring im engeren Sinn.

Definition 1.1.3 (Ring)**.** *Sei $\mathfrak{R}$ ein nichtleeres Mengensystem über Ω. $\mathfrak{R}$ heißt Ring, falls*

1. *Differenzenstabilität:*
$$A, B \in \mathfrak{R} \Rightarrow B \setminus A \in \mathfrak{R}$$
2. *Vereinigungsstabilität:*
$$A, B \in \mathfrak{R} \Rightarrow A \cup B \in \mathfrak{R}$$

Definition 1.1.4 (Sigmaring)**.** *Sei $\mathfrak{R}_\sigma$ ein nichtleeres Mengensystem über Ω. $\mathfrak{R}_\sigma$ heißt Sigmaring, falls*

1. *Differenzenstabilität:*
$$A, B \in \mathfrak{R}_\sigma \Rightarrow B \setminus A \in \mathfrak{R}_\sigma$$

2. *Sigma-Vereinigungsstabilität:*

$$A_n \in \mathfrak{R}_\sigma \Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathfrak{R}_\sigma$$

Definition 1.1.5 (Algebra)**.** *Sei $\mathfrak{A}$ ein nichtleeres Mengensystem über Ω. $\mathfrak{A}$ heißt Ring, falls*

1. *Abgeschlossenheit bzgl. Komplementbildung:*

$$A \in \mathfrak{A} \Rightarrow A^c \in \mathfrak{A}$$

2. *Vereinigungsstabilität:*

$$A, B \in \mathfrak{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathfrak{A}$$

Definition 1.1.6 (Dynkin System)**.** *Sei $\mathfrak{D}$ ein nichtleeres Mengensystem über Ω. $\mathfrak{D}$ heißt Dynkin-System (im weiteren Sinn), falls*

1. *Sigmaadditivität:*

$$A_i \in \mathfrak{D} : A_i \text{ disjunkt} \Rightarrow \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathfrak{D}$$

2. *Differenzenstabilität:*

$$\forall A, B \subseteq \Omega : A, B \in \mathfrak{D} \Rightarrow B \setminus A \in \mathfrak{D}$$

Ist zusätzlich noch

$$\Omega \in \mathfrak{D}$$

erfüllt, so spricht man von einem Dynkin-System im engeren Sinn.

1.2 Maße und Inhalte

Definition 1.2.1. *Ein Inhalt μ auf einem Mengensystem $\mathfrak{C}$ heißt endlich, wenn für alle $A \in C$:*

$$\mu(A) < \infty$$

Definition 1.2.2. *Ein Maß μ auf C heißt sigmaendlich, wenn für jedes $A \in C$ Mengen $A_n \in C, n \in \mathbb{N}$ existieren mit $\mu(A_n) < \infty, A \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$.*

Definition 1.2.3. *Ein Inhalt μ auf C heißt totalendlich, wenn*

$$\Omega \in C \wedge \mu(\Omega) < \infty$$

Definition 1.2.4. *Ein Inhalt μ auf C heißt total sigmaendlich, wenn es $A_n \in C, n \in \mathbb{N}$ gibt mit $\mu(A_n) < \infty$ und $\Omega \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$.*

Definition 1.2.5. *$A \in C$ hat sigmaendliches Maß (A ist sigmaendlich), wen es $A_n \in C, n \in \mathbb{N}$: $\mu(A_n) < \infty$ und $A \subseteq \bigcup A_n$.*

Definition 1.2.6. *μ heißt Wahrscheinlichkeitsmaß, wenn $\mu(\Omega) = 1$.*

Beispiel 1.2.1. Sei $\Omega \neq \varnothing$ endlich, $C = 2^\Omega, \mu(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$.

Beispiel 1.2.2. Sei $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, also ein „fairer Würfel".

Beispiel 1.2.3. Sei $\Omega = \{(1,1), (1,2), ..., (2,1), (2,2), ..., (6,6)\}$, also würfeln mit zwei Würfeln, Würfel sind unterscheidbar.

Definition 1.2.7. *Sei $\Omega \neq \varnothing$ beliebige Menge und $\mathscr{S}$ eine Sigmaalgebra über Ω. Dann heißt $(\Omega, \mathscr{S})$ Messraum.*

Definition 1.2.8. *Sei μ ein Maß auf $\mathscr{S}$ und $(\Omega, \mathscr{S})$ Messraum. Dann heißt $(\Omega, \mathscr{S}, \mu)$ Maßraum.*

Beispiel 1.2.4. $(\Omega, 2^\Omega, \mu), \Omega \neq \varnothing$ endlich, $C = 2^\Omega, \mu(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$ ist der Laplace-Wahrscheinlichkeitsraum.

Satz 1.2.9. *Seien μ_n Inhalte auf $\mathscr{C}$, und existiere $\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu_n(A)$. Dann ist μ ein Inhalt.*

Beweis 1.2.10. $A = \sum_{i=1}^k A_i$, $\mu(A) = \sum_{i=1}^k \mu_n(A_i)$, für $n \to \infty$ gehen beide Seiten gegen μ, stimmt also.

Satz 1.2.11 (Satz von Vitali-Hahn Saks:)**.** *Wenn $\mathscr{C}$ ein Sigmaring ist und μ_n endliche Maße und für alle $A \in \mathscr{C} : \mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu_n(A)$, dann ist μ auch ein Maß.*

Beweis 1.2.12. noch nicht, Eigenschaften fehlen noch.

Satz 1.2.13. *Sei μ ein Inhalt/Maß auf einem Ring. Dann gilt:*

1. *Monotonie:*
$$A, B \in \mathscr{R}, A \subseteq B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$$
2. *Additionstheorem:*
$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$$
3. *Allgemeineres Additionstheorem:*
$$\begin{aligned}\mu\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) &= \sum_{J\subseteq\{1,\dots,n\}, J\neq\varnothing} (-1)^{|J|-1} \mu\left(\bigcap_{i\in J} A_i\right) \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} S_k \ \ \textit{für } S_k = \sum_{i\leq i_1<\dots<i_k\leq n} \mu\left(\bigcap_{k=1}^n A_{i_k}\right)\end{aligned}$$
4. *Subadditivität:*
$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \mu(A_i)$$

Beweis 1.2.14.
1. Es gilt:
$$B = A \cup (B \setminus A) \Rightarrow \mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \geq \mu(A)$$
Nun ist außerdem mit $\mu(A) < \infty$:
$$\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$$
2. Für $A, B \in \mathscr{R}$:
$$\begin{aligned}\mu(B \setminus A) = \mu(B \setminus (A \cap B)) &= \mu(B) - \mu(A \cap B)(\text{ wenn } \mu(A \cap B) < \infty) \\ &\Rightarrow \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)\end{aligned}$$
Außerdem (Zusatz für zwei Mengen):
$\mu(A\cup B\cup C) = \mu((A\cup B)\cup C) = \mu(A)+\mu(B)+\mu(C)-\mu(A\cap B)-\mu(A\cap C)-\mu(B\cap C)+\mu(A\cap B\cap C)$
3. Es gilt:
$$A, B \in \mathscr{R} : \mu(A \cup B) = \mu(A \cup (B \setminus A)) = mu(A) + \mu(B \setminus A) \leq \mu(A) + \mu(B)$$
$$\Rightarrow \mu\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \mu(A_i)$$
4. Induktion (wahrscheinlich)

Satz 1.2.15. *Sei μ Inhalt auf $\mathscr{R}$, $A_n, n \in \mathbb{N}, A \subseteq \mathscr{R}$, dann gilt:*
$$\sum_{n\in\mathbb{N}} A_n \subseteq A \Rightarrow \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) \leq \mu(A)$$

1.2.1 Beweis:

Es gilt:

$$\sum_{n=1}^{N} A_n \subseteq A \Rightarrow \mu\left(\sum_{n=1}^{N} A_n\right) \leq \mu(A)$$
$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{N} \mu(A_n) \leq \mu(A)$$

Für $n \to \infty$:

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) \leq \mu(A)$$

1.2.2 Folgerungen für Maße

Satz 1.2.16. *Sei μ ein Maß auf $\mathscr{R}$:*

1. *Stetigkeit von unten:*
$$A_n \uparrow A, A_n, A \in \mathscr{R}$$
$$\Rightarrow \mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$$

2. *Stetigkeit von oben:*
$$A_n \downarrow A, A_n, A \in \mathscr{R} \wedge \mu(A_1) < \infty$$
$$\Rightarrow \mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$$

Beweis 1.2.17. 1. Sei $B_1 = A_1$ und $B_n = A_n \setminus A_{n-1}$. Nun sind B_n disjunkt und $A_n = \sum_{i=1}^{n} B_i$. Nun gilt:
$$\mu(A_n) \sum_{i=1}^{n} \mu(B_i)$$
und:
$$A = \sum_{i=1}^{\infty} B_i$$
$$\Rightarrow \mu(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \mu(B_i) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$$

2.
$$\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$$
$$\mu(A_1 \setminus A) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_1 \setminus A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_1) - \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$$

1.2.3 Eigenschaften von Maßen (Inhalten) auf Ringen(Semiringen)

Satz 1.2.18. *Sei μ ein Maß auf dem Ring $\mathscr{R}$, $A_n \uparrow A$, $A_n, A \in \mathscr{R}$. Dann gilt*

$$\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$$

Entsprechendes für $A_n \downarrow A$.

Satz 1.2.19. *Sei μ Inhalt auf Ring $\mathscr{R}$ ist genau dann ein Maß, wenn μ stetig von unten ist.*

Beweis 1.2.20. Seien $A_n, A \in \mathscr{R}$, $A = \sum_{n\in\mathbb{N}} A_n$, A_n paarweise disjunkt. Sei

$$B_n = \sum_{i=1}^{n} A_i$$

Nun gilt $B_n \uparrow A$. μ ist nun stetig von unten, also

$$\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(B_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(\sum_{i=1}^{n} A_i) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

$\square$.

Satz 1.2.21. *Sei μ ein endlicher Inhalt auf einem Ring $\mathscr{R}$. Dann ist μ genau dann ein Maß, wenn er stetig von oben bei $\varnothing$ ist, also*

$$A_n \downarrow \varnothing \Rightarrow \mu(A_n) \to 0.$$

Beweis 1.2.22. Sei $A_n, A \in \mathscr{R}, A = \sum_{n=1}^{\infty} A_n$.
Z: $\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$.
Nämlich:

$$A = \sum_{i=1}^{n} A_i \cup \sum_{i=n+1}^{\infty}$$

$$B_n := \sum_{i=n+1}^{\infty} \Rightarrow B_n = A \setminus (\sum_{i=1}^{n} A_i) \in \mathscr{R}$$

Nun gilt:

$$\mu(A) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) + \mu(B_n)$$

Nun gilt:

$$\lim_{n\to\infty} B_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \right) = A \setminus \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{i=1}^{n} A_i \right) = \varnothing$$

Also $B_n \downarrow \varnothing$. Also:

$$\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} A_i + \mu(B_n) \right) = \sum_{i=1}^{\infty} +0$$

$\square$.

Bemerkung 1.2.1. Dieses Argument kann auch umgedreht werden. Dies werden wir später zumindest einmal benutzen.

Satz 1.2.23. *Sei μ ein Maß auf dem Ring(Semiring) $\mathscr{R}$, $A_n, A \in \mathscr{R}$ mit*

$$A \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$$

so gilt

$$\mu(A) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n). \text{ (}\mu \textit{ ist abzählbar-, bzw sigmasubadditiv)}$$

Beweis 1.2.24. Sei $B_n = A \cap \bigcup_{i=1}^n A_i = \bigcup_{i=1}^n A \cap A_i$. Es gilt also $B_n \uparrow A$. Aus der endlichen Subadditivität erhalten wir:

$$\mu(B_n) \leq \sum_{i=1}^n \mu(A_i \cap A) \leq \sum_{i=1}^n \mu(A_i) \leq \sum_{i=1}^\infty \mu(A_i)$$

$$\Rightarrow \mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(B_n) \leq \sum_{i=1}^\infty \mu(A_i)$$

Satz 1.2.25. *Sei μ ein Maß auf dem Sigmaring $\mathscr{R}$ und A_n eine Folge von Mengen aus $\mathscr{R}$. Dann gilt:*

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\geq n} A_k$$

Satz 1.2.26. *Lemma von Borel Cantelli:*
Sei μ ein Maß auf einem Sigamring $\mathscr{R}$. Ist $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) < \infty$ für $A_n \in \mathscr{R}$, so gilt:

$$\mu(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 0$$

Beweis 1.2.27. Sei $\epsilon > 0$ beliebig. Es gilt:

$$\mu(\limsup A_n) \leq \mu\left(\bigcup_{k\geq n_0} A_k\right) \leq \sum_{k\geq n_0} \mu(A_k) \leq \epsilon$$

$\square$.

Bemerkung 1.2.2. Als Hausübung: Ist μ endliches Maß auf einem Sigmaring, so gilt

$$\mu(\limsup_{n\to\infty} A_n) \geq \limsup_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

Beispiel 1.2.5 (Additionstheorem). Die Anzahl der Permutationen von n Elementen ohne Fixpunkt.

$$\mathbb{P}(\text{kein Fixpunkt}) = 1 - \mathbb{P}(\text{Fixpunkt}) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcup A_i\right)$$

mit $A_i = [i \text{ ist Fixpunkt }]$.

$$\mathbb{P}\left(\bigcup A_i\right) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i) - \sum_{1\leq i_1 \leq i_2 \leq n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2}) + \sum \mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_2}) - ...$$

Es gilt:

$$\mathbb{P}(A_i) = \frac{(n-1)!}{n!}$$
$$\mathbb{P}(A_i \cap A_0) = \frac{(n-2)!}{n!}$$
$$\mathbb{P}(A_{i_1} \cap ... \cap A_{i_k}) = \frac{(n-k)!}{n!}$$

Jetzt: (was auch immer S_k ist...)

$$S_k = \frac{(n-k)!}{n!} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \frac{1}{k!}$$

Damit:

$$\mathbb{P}\left(\bigcup A_i\right) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{1}{k!}$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(\text{kein Fixpunkt}) = 1 - \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{1}{k!} \; n \overset{\to}{\to} \infty \; \frac{1}{e}$$

1.2.4 Bedingte Wahrscheinlichkeit

Definition 1.2.28. *Sei $(\Omega, \mathscr{S}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Nun heißt $A, B \in \mathscr{S}$ Ereignisse. Gilt $\mathbb{P}(B) \neq 0$ so heißt*

$$\mathbb{P}(A|B) := \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

die bedingte Wahrscheinlichkeit.

Definition 1.2.29. *Ereignisse A und B heißen unabhängig, wenn*

$$P(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B).$$

Definition 1.2.30. *Allgemeiner heißen Ereignisse $A_1, ..., A_n$ unabhängig, wenn*

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i).$$

Definition 1.2.31. *Ereignisse $A_1, ..., A_n$ heißen paarweise unabhängig, wenn:*

$$\forall i, j \in \{1, ..., n\} : i \neq j \Rightarrow \mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(A_j).$$

Bemerkung 1.2.3. Es gilt:

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B|A)$$

und:

$$\mathbb{P}(A_i \cap ... \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2|A_1)\mathbb{P}(A_3|A_1 \cap A_2)...P(A_n|A_1 \cap ... \cap A_n)$$

Dies ist das Multiplikationstheorem für Wahrscheinlichkeiten.

Beispiel 1.2.6 (Bedingte Wahrscheinlichkeiten (Multiplikationstheorem)). In einer Urne liegen zwei schwarze und drei weiße Kugeln. Es wird 3-mal ohne Zurücklegen gezogen, wobei das Ziehen der Laplace-Wahrscheinlichkeit folgt. Nun ist

$$\mathbb{P}(\text{Alle 3 Kugeln weiß}) = \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$$

wobei $A_i =$ „i-te Kugel ist weiß“. Also

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2|A_1)\mathbb{P}(A_3|A_1 \cap A_2)$$

mit

$$P(A_1) = \frac{3}{5}$$
$$P(A_2|A_1) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$
$$P(A_3|A_2 \cap A_1) = \frac{1}{3}$$

und damit

$$\mathbb{P}(\text{Alle 3 Kugeln weiß}) = \frac{1}{10}$$

Beispiel 1.2.7. Selbe Voraussetzungen wie im vorigen Beispiel. Nun ist

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\text{genau 2 Kugeln weiß}) &= \mathbb{P}(\text{wws}) + \mathbb{P}(\text{wsw}) + \mathbb{P}(\text{sww}) \\ &= \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3^c) + \mathbb{P}(A_1 \cap A_2^c + A_3) + \mathbb{P}(A_1^c \cap A_2 \cap A_3) \\ &= \frac{3}{5}\frac{2}{4}\frac{2}{3} + \frac{3}{5}\frac{2}{4}\frac{2}{3} + \frac{2}{5}\frac{3}{4}\frac{2}{3} = 3 \cdot \frac{12}{60} = \frac{3}{5}.\end{aligned}$$

Dieses Beispiel kann analog auf jede Anzahl an Kugeln fortgesetzt werden.

Satz 1.2.32 (Borel-Cantelli II). *Sei $(\Omega, \mathscr{S}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Sei $A_n \in \mathscr{S}$ eine Folge unabhängiger Ereignisse.*
Ist nun

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = \infty$$

so folgt

$$\mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 1$$

Beweis 1.2.33. Definition des lim sup war:

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\geq n} A_k$$

und damit nach den de Morgan'schen Regeln:

$$(\limsup_{n\to\infty} A_n)^c = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{k\geq n} A_k^c$$

Betrachten wir nun $\bigcap_{k\geq n} A_k^c$. Die A_k^c sind nun auch unabhängig. (siehe Übung) Also:

$$\bigcap_{k\geq n} A_k^c = \lim_{N\to\infty} \bigcap_{k=n}^{N} A_k^c$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}\left(\bigcap_{k\geq n} A_k^c\right) = \lim_{N\to\infty} \prod_{k=n}^{\infty} \mathbb{P}(A_k^c) = \prod_{k=n}^{\infty} \mathbb{P}(A_k^c) = \prod_{k=n}^{\infty} (1 - \mathbb{P}(A_k))$$

mit $1 + x \leq e^x$ folgt

$$\prod_{k=n}^{\infty} (1 - \mathbb{P}(A_k)) \leq \prod_{k=n}^{\infty} e^{-\mathbb{P}(A_k)} = e^{-\sum_{k\geq n}^{\infty} \mathbb{P}(A_k)} = \lim_{n\to\infty} -e^{-n} = 0$$

Damit:

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k\right) = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0$$

□.

1.2.5 Der Fortsetzungssatz für Maßfunktionen

In diesem Abschnitt werden wir den folgenden Satz beweisen:

Satz 1.2.34 (Fortsetzungssatz für Maßfunktionen). *Sei μ ein Maß auf einem Ring $\mathfrak{R}$. Dann gilt:*

1. *μ kann zu einem Maß $\widetilde{\mu}$ auf dem erzeugten Sigmaring fortgesetzt werden.*
2. *Wenn μ sigmaendlich ist, dann ist $\widetilde{\mu}$ eindeutig bestimmt.*

Bemerkung 1.2.4. Wir werden $\widetilde{\mu}$ im Folgenden immer mit μ bezeichnen, da es nicht wichtig ist, ob wir auf einem Ring oder auf dem erzeugten Sigmaring arbeiten.

Bemerkung 1.2.5. Die Motivation für diesen Satz ist das klassische Ausschöpfungs-, bzw Exhaustionsprinzip, das z.B. Archimedes und Eudoxos bearbeitet haben. Dabei wurde die Fläche eines Kreises durch Rechtecke approximiert. Damit ist (A ist die Fläche des Kreises, B die Fläche der Vierecke)

$$\mu^+(A) = \inf\{\mu(B) : A \subseteq B, B \in \mathfrak{R}\}$$
$$\mu^-(A) = \sup\{\mu(B) : B \subseteq A, B \in \mathfrak{R}\}$$

wenn $\mu^+(A) = \mu^-(A)$, dann ist A messbar (im Sinn von Jordan). Dann μ^* das Jordon-Maß.

$$\begin{aligned}\mu^*(A) &= \inf\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(B_n)\right), B_n \in \mathfrak{R}, A \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \\ &= \inf\{\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(B_n) : B_n \in \mathfrak{R}, A \subseteq \sum_{n\in\mathbb{N}} B_n\}\end{aligned}$$

Die letzte Gleichheit folgt durch Zeigen von $\leq$ und $\geq$.

Definition 1.2.35. *Das Maß von einem Maß μ erzeugte Maß*

$$\mu^*(A) = \inf\{\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(B_n) : B_n \in \mathfrak{R}, A \subseteq \sum_{n\in\mathbb{N}} B_n\}$$

heißt äußeres Maß oder Jordan-Maß. Hierbei wird

$$\inf \varnothing = \infty$$

gesetzt.

Definition 1.2.36. *Ist $\mu(\Omega) < \infty$, so ist*

$$\mu_*(A) = \mu(\Omega) - \mu^*(A^c)$$

das innere Maß.

Definition 1.2.37 (vorläufige Definition)**.** *A heißt messbar, falls*

$$\forall E \in \mathfrak{R} : \mu(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \setminus A).$$

Definition 1.2.38. *A heißt messbar, wenn*

$$\forall B \subseteq \Omega : \mu^*(B) = \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \setminus A).$$

Satz 1.2.39 (Eigenschaften von äußeren Maßfunktionen)**.** *Sei μ ein Maß und μ^* das von μ erzeugte äußere Maß. Dann gilt:*

1. $\mu^*(A) \geq 0$
2. $\mu^*(\varnothing) = 0$
3. *Monotonie:*
$$A \subseteq B \subseteq \Omega \Rightarrow \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$$
4. *Sigmasubadditivität:*
$$A \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \subseteq \Omega$$
$$\Rightarrow \mu^*(A) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(A_n)$$

Definition 1.2.40. *Eine Funktion $\mu^* : 2^\Omega \to [0, \infty]$ heißt eine äußere Maßfunktion, wenn sie die Eigenschaften 1.-4. besitzt.*

Bemerkung 1.2.6. Will man zeigen, dass μ^* ein äußeres Maß ist, so muss man nur 1.,2. und 4. zeigen, 3. folgt dann automatisch.

Beweis 1.2.41. Eigenschaften 1. und 2. sind klar. Bleibt also noch 4. zu zeigen, 3. folgt ja automatisch.
Sei also $A \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Zu zeigen ist nun, dass

$$\mu^*(A) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(A_n)$$

wenn $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(A_n) = \infty$, so sind wir fertig.
Sei also $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(A_n) < \infty$. Dann ist

$$\mu^*(A_n) = \inf\{\sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(B_k) : A_n \subseteq \bigcup B_k, B_k \in \mathfrak{R}\}$$

Sei $\epsilon > 0$. Für $B_{nk} \in \mathfrak{R} : A_n \subseteq \bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_{nk}$ und $\sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(B_{nk}) \leq \mu^*(A_n) + \frac{\epsilon}{2}$. Nun ist

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_{nk}$$

und damit

$$\mu^* \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \right) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(B_nk) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} (\mu^*(A_n) + \frac{\epsilon}{2^n}) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(A_n) + \epsilon$$

$$\Rightarrow \mu \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_N \right) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(A_n)$$

□.

Beispiel 1.2.8. Sei $|\Omega| \geq 3$ und

$$\mu^*(A) = \begin{cases} 0 : A = \varnothing \\ 1 : A \notin \{\varnothing, \Omega\}, A \subseteq \Omega \\ 2 : A = \Omega \end{cases}$$

Definition 1.2.42. *$A \subseteq \Omega$ heißt messbar (μ^*-messbar), wenn*

$$\forall B \subseteq \Omega : \mu^*(B) = \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \cap A^c).$$

Bemerkung 1.2.7. Um die Messbarkeit von A zu zeigen, genügt es zu zeigen, dass

$$\mu^*(B) \geq \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \cap A^c),$$

da die Ungleichung „$\leq$“ trivialerweise immer erfüllt ist.

Definition 1.2.43. *m_{μ^*} bezeichnet das System aller μ^*-messbaren Mengen. Ist klar, um welches Maß μ^* es sich handelt (oder das egal ist), so schreiben wir einfach m.*

Satz 1.2.44. *1. m ist eine Sigmaalgebra, $\mu^*|_m$ ein Maß.*

2. Wenn μ^* von einem Maß μ auf einem Ring $\mathfrak{R}$ erzeugt wird und $\mu^*(B) = \mu(B)$, so folgt $\mathfrak{R} \subseteq m$.

Beweis 1.2.45. Wir beweisen zunächst 2.:
Sei $B \subset \Omega, A \in \mathfrak{R} B_n \in \mathfrak{R}, B \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n, \mu^*(B) < \infty$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(B_n) &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu\left((B_n \cap A) \cup (B_n \cap A^c)\right) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\mu(B_n \cap A) + \mu(B_n \setminus A)\right) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(B_n \cap A) + \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(B_n \setminus A) \\
&\geq \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \cap A^c) \\
\Rightarrow \mu^*(B) &\geq \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \setminus A)
\end{aligned}$$

□.

Sei nun $A \in \mathfrak{R}, A \subseteq \bigcup A_n, A_n \in \mathfrak{R}$.

$$\mu(A) \leq \sum \mu(A_n)$$

wurde schon gezeigt. Sei jetzt $A_1 = A$, $A_n = \varnothing$ für $n > 1$. Dann folgt

$$\mu^*(A) \geq \mu(A),$$

A ist also messbar.

Für 1. erste Behauptung: m ist Algebra und $\mu^*|_m$ ist additiv. Wir wollen zeigen:

$$A_1, A_2 \text{ messbar} \Rightarrow A_1 \cup A_2 \text{ messbar}$$

$$A \text{ messbar} \Rightarrow A^c \text{ messbar}$$

Das zweite folgt direkt daraus, dass $A^{cc} = A$ und die Definition von „messbar“ diesbezüglich symmetrisch ist.
Für das erste sei $B \subseteq \Omega$. Nun ist A_1 messbar, also

$$\mu^*(B) = \mu^*(B \cap A_1) + \mu^*(B \cap A_1^c)$$

und mit

$$\begin{aligned}
\mu^*(B \cap A_1) &= \mu^*(B \cap A_1 \cap A_2) + \mu^*(B \cap A_1 \cap A_2^c) \\
\mu^*(B \cap A_1^c) &= \mu^*(B \cap A_1^c \cap A_2) + \mu^*(B \cap A_1^c \cap A_2^c)
\end{aligned}$$

ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\mu^*(B) &= \mu^*(B \cap A_1 \cap A_2) + \mu^*(B \cap A_1 \cap A_2^c) + \mu^*(B \cap A_1^c \cap A_2) + \mu^*(B \cap A_1^c \cap A_2^c) \\
&\geq \mu^*\left((B \cap A_1 \cap A_2) \cup (B \cap A_1 \cap A_2^c) \cup (B \cap A_1^c \cap A_2)\right) + \mu^*(B \cap (A_1 \cup A_2)^c) \\
&= \mu^*(B \cap (A_1 \cup A_2)) + \mu^*(B \cap (A_1 \cup A_2)^c)
\end{aligned}$$

Damit ist m tatsächlich eine Algebra.
Um nachzuweisen, dass $\mu^*|_m$ additiv ist, seien $A_1, A_2 \in m$, $A_1 \cup A_2 = \varnothing$. Über die Messbarkeit von A_1 erhalten wir:

$$\mu^*(A_1 \cup A_2) = \mu^*((A_1 \cup A_2) \cap A_1) + \mu^*((A_1 \cup A_2) \cap A_1^c) = \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2)$$

□.

Nun bleibt noch zu zeigen, dass m Sigmaalgebra ist, seien also $A_n \in m, A_n$ disjunkt, $B \subseteq \Omega$.
Z:

$$\mu^*(B) \geq \mu^*\left(B \cap \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) + \mu^*\left(B \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)$$

Wir wissen schon:

$$\begin{aligned}
\mu^*(B) = \mu^*\left(B \cap \bigcup_{n=1}^{N} A_n\right) + \mu^*\left(B \setminus \bigcup_{n=1}^{N} A_n\right) \\
&\geq \mu^*\left(B \cap \bigcup_{n=0}^{N} A_n\right) + \mu^*\left(B \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \\
&= \sum_{n=1}^{N} \mu^*(B \cap A_n) + \mu^*\left(B \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)
\end{aligned}$$

Für $n \to \infty$ erhalten wir also

$$\mu^*(B) \geq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(B \cap A_n) + \mu^*\left(B \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \geq \mu^*\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (B \cap A_n)\right) + \mu^*\left(B \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)$$

□.

Bemerkung 1.2.8. Der erste Teil des Fortsetzungssatzes ist damit bewiesen. Bleibt also noch der folgende Satz zu zeigen:

Satz 1.2.46. *Ist $\widetilde{\mu}$ eine Fortsetzung von μ auf $\mathfrak{R}_\sigma(\mathfrak{R})$ ist, dann gilt*

$$\widetilde{\mu} = \mu^*|_{\mathfrak{R}_\sigma}$$

Satz 1.2.47. *Ist μ auf $\mathfrak{R}$ sigmaendlich, dann auch auf dem erzeugten Sigmaring.*

Beweis 1.2.48. Z:

$$\mathfrak{R}^* = \{A \subseteq \Omega : A \text{ ist sigmaendlich}\} = \{A \subseteq \exists B_1 \in \mathfrak{R}, n \in \mathbb{N} : \mu(B_n) < \infty \wedge A \subseteq \bigcup B_n\}$$

ist Sigmaring.

- $A, B \in \mathfrak{R}^* \Rightarrow A \setminus B \in \mathfrak{R}^*$: trivial
- $A_n \in \mathfrak{R}^*, n \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup A_n \in \mathfrak{R}^*$:
  Sei $A_n \subseteq \bigcup B_{nk}, B_k \in \mathfrak{R}, \mu(B_{nk}) < \infty$. Dann ist

  $$\bigcup A_n \subseteq \bigcup_n \bigcup_k B_{nk}$$

  und damit folgt die Behauptung.

Satz 1.2.49. *Für $A \in \mathfrak{R}_\sigma(\mathfrak{R}) : \widetilde{A} \leq \mu^*(A)$*

Beweis 1.2.50. Sei $A \in \mathfrak{R}, A \subseteq \bigcup B_n, B_n \in \mathfrak{R}$. Nun gilt:

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(B_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \widetilde{\mu}(B_n) \geq \widetilde{\mu}\left(\bigcup B_N\right) \geq \widetilde{\mu}(A)$$

Nimmt man das inf über alle $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so erhält man $\mu^*(A)$.

Satz 1.2.51. $\widetilde{\mu}(A) = \mu^*(A)$ *(siehe oben)*

Beweis 1.2.52. Ist A sigmaendlich, so folgt:

$$\exists B_n \in \mathfrak{R}, n \in \mathbb{N}, \mu(B_n) < \infty, a \subseteq \bigcup B_n,$$

wobei wir die B_n oBdA als disjunkt annehmen können, da wir sie notfalls disjunkt machen können. Nun ist

$$\widetilde{\mu}(A) = \widetilde{\mu}\left(A \cap \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) = \widetilde{\mu}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A \cap B_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \widetilde{\mu}(A \cap B_n)$$

Nun zeigen wir:

$$\widetilde{\mu}(A \cap B_n) = \mu^*(A \cap B_n),$$

dann können wir die obere Gleichungskette nach hinten durchlaufen und sind fertig.
Also: Wir wissen:

$$\widetilde{\mu}(A \cap B_n) \leq \mu^*(A \cap B_n)$$
$$\widetilde{\mu}(A^c \cap B_n) \leq \mu^*(A^c \cap B_n)$$

Außerdem, da A messbar:

$$\mu(B_n) = \mu^*(B_n) = \mu^*(A^c \cap B_n) + \mu(A \cap B_n) \geq \widetilde{\mu}(A^c \cap B_n) + \widetilde{\mu}(A^c \cap B_n) = \widetilde{\mu}(B_n) = \mu(B_n),$$

womit für $\geq$ auch $=$ folgt und $\widetilde{\mu}(A \cap B_n) = \mu^*(A \cap B_n)$ bewiesen ist. Damit folgt also auch:

$$\widetilde{\mu} = \mu^*|_{\mathfrak{R}_\sigma(\mathfrak{R})}$$

Bemerkung 1.2.9. Nun ist der Fortsetzungssatz für Maßfunktionen vollständig bewiesen.

1.2.6 Zusammenhang zwischen dem Maß auf dem Ring und dem Maß auf dem Sigmaring

Satz 1.2.53 (Approximationstheorem I)**.** *Sei μ ein sigmaendliches Maß auf einem Ring $\mathfrak{R}$. Sei $A \in \mathfrak{R}_\sigma(\mathfrak{R}), \mu(A) < \infty$. Dann gilt*

$$\forall \epsilon > 0 : \exists B \in \mathfrak{R} : \mu(A \Delta B) < \epsilon$$

Beweis 1.2.54. Mit $\mu(A) < \infty$ und

$$\mu(A) = \mu^*(A) = \inf\left\{\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(B_n) : B_n \in \mathfrak{R}, A \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right\}$$

folgt: Wir wählen ein (B_n), sodass $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(B_n) \leq \mu(A) + \frac{\epsilon}{2}$. Das geht, weil wir ja beliebig nahe an das Infimum herankommen können. Wir wählen nun N so, dass $\sum_{n>N} \mu(B_n) < \frac{\epsilon}{2}$. Sei weiters

$$B := \bigcup_{n=1}^{N} B_n \in \mathfrak{R}.$$

Dann folgt:

$$\mu(A\Delta B) = \mu(A \setminus B) + \mu(B \setminus A)$$

Außerdem:

$$A \setminus B \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \setminus \bigcup_{n=1}^{N} B_n \subseteq \bigcup_{n>N} B_n.$$

Damit gilt:

$$\mu(A \setminus B) \leq \sum_{n>N} \mu(B_n) < \frac{\epsilon}{2}$$

$$\mu(B \setminus A) \leq \mu\left(\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) \setminus A\right) = \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) - \mu(A) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(B_n) - \mu(A) < \frac{\epsilon}{2}$$

und wir sind fertig.

Bemerkung 1.2.10. Es gilt auch

$$|\mu(A) - \mu(B)| \leq \mu(A\Delta B)$$

Bemerkung 1.2.11. Wir nehmen nun an, dass $\Omega \in \mathfrak{R}_\sigma(\mathfrak{R})$, der erzeugte Sigmaring ist also schon eine Sigmaalgebra.

Definition 1.2.55. *Sei* $(\Omega, \mathfrak{S}, \mu)$ *Maßraum. Ist* $\mu(A) = 0$*, so heißt* A *Nullmenge.*

Satz 1.2.56. *Ist* A *messbar, so kann man* A *schreiben als Vereinigung einer Menge aus dem Sigmaring und einer Nullmenge, also*

$$A = F \cup N, F \in \mathfrak{R}_\sigma, N \subseteq M \in \mathfrak{R}_\sigma : \mu(M) = 0$$

Beweis 1.2.57. Sei $A \subseteq \Omega$. Mit

$$\mu^*(A) = \inf\left\{\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(B_n), B_n \in \mathfrak{R}, A \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right\}$$

erhalten wir über

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(B_n) \geq \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right)$$

das folgende:

$$\mu^*(A) \geq \inf\{\mu(B) : B \in \mathfrak{R}_\sigma, A \subseteq B\}$$

und damit folgt

$$\mu^*(A) = \inf\{\mu(B) : B \in \mathfrak{R}_\sigma, A \subseteq B\}$$

Wir nehmen nun ein (C_n) mit $C_n \in \mathfrak{R}, \bigcup_{n\in\mathbb{N}} = \Omega, C_n$ disjunkt und $\forall n \in \mathbb{N} : \mu(C_n) < \infty$. Ist $A \in m_{\mu^*}$ messbar, $\mu^*(A \cap C_n) < \infty$, $\mu^*(A \cap C_n) = \inf\{\mu(B) : B \in \mathfrak{R}_\sigma, A \cap C_n \subseteq B\}$, dann wählen wir ein $B_k \in \mathfrak{R}_\sigma$, sodass

$$A \cap C_n \subseteq B_k, \mu(B_k) \leq \mu^*(A \cap C_n) + \frac{1}{k}.$$

Sei

$$D_n = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} B_k$$

also

$$A \cap C_n \subseteq D_n, \mu(D_n) = \mu^*(A \cap C_n)$$

Analog: $E_n \in \mathfrak{R}_\sigma, A^c \cap C_n \subseteq E_n, \mu(E_n) = \mu^*(A^c \cap C_n)$:

$$\mu(C_n) = \mu^*(C_n \cap A) + \mu(C_n \cap A^c) = \mu(E_n) + \mu(D_n)$$

oBdA: $E_n, D_n \subseteq C_n$. Nun ist

$$\mu(D_n) = \mu(C_n) - \mu(D_n) = \mu(C_n \subseteq D_n)$$

Über

$$D_n \supseteq A \cap C_n \wedge F_n := C_n \setminus E_n \subseteq A \cap C_n$$

$$\mu(D_n \setminus F_n) = \mu(D_n) - \mu(F_n) = 0$$

$$F_n \subseteq A \cap C_n \subseteq F_n \cup (D_n \setminus F_n)$$

erhalten wir

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n \subseteq A \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (D_n \setminus F_n)$$

Wir betrachten

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (D_n \setminus F_n)\right) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(D_n \setminus F_n) = 0$$

Nun können wir A schreiben als

$$A = F \cup N, F \in \mathfrak{R}_\sigma, N \subseteq M \in \mathfrak{R}_\sigma : \mu(M) = 0$$

Definition 1.2.58. *Ein Maßraum* $(\Omega, \mathfrak{S}, \mu)$ *heißt vollständig, wenn*

$$A \in \mathfrak{S}, \mu(A) = 0, B \subseteq A \Rightarrow B \in \mathfrak{S}$$

Definition 1.2.59. *Sei* $(\Omega, \mathfrak{S}, \mu)$ *Maßraum. Mit*

$$\overline{\mathfrak{S}} := \{A \cup N, A \in \mathfrak{S}, \exists M \in \mathfrak{S} : N \subseteq M, \mu(B) = 0\}$$

und

$$\overline{\mu}(A \cup N) = \mu(A)$$

heißt der vollständige Maßraum $(\Omega, \overline{\mathfrak{S}}, \overline{\mu})$ *die Vervollständigung von* $(\Omega, \mathfrak{S}, \mu)$.