

# Kapitel 1

## Maße

In diesem Abschnitt werden wir uns drei Fragen stellen:

- Was können wir messen?
- Wie können wir messen?
- Wie können wir Maße ökonomisch definieren?

### 1.1 Mengensysteme

**Definition 1.1.1.** Sei  $\Omega$  eine beliebige Menge. Dann heißt  $\mathfrak{C} \subseteq 2^\Omega$  ein Mengensystem (über  $\Omega$ ).

**Definition 1.1.2** (Semiring). Sei  $\mathfrak{T}$  ein nichtleeres Mengensystem über  $\Omega$ . Dann heißt  $\mathfrak{T}$  Semiring (im weiteren Sinn), falls

1. Durchschnittsstabilität:

$$A, B \in \mathfrak{T} \Rightarrow A \cap B \in \mathfrak{T}$$

2. Leiterbildung:

$$A, B \in \mathfrak{T}, A \subseteq B \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : C_1, \dots, C_n \in \mathfrak{T} : \forall i \neq j : C_i \cap C_j = \emptyset, A \setminus B = \bigcup_{i=1}^n C_i$$

gilt zusätzlich für die Leiter

$$\forall k = 1, \dots, n : A \cup \bigcup_{i=1}^k C_i \in \mathfrak{T},$$

so spricht man von einem Semiring im engeren Sinn.

**Definition 1.1.3** (Ring). Sei  $\mathfrak{R}$  ein nichtleeres Mengensystem über  $\Omega$ .  $\mathfrak{R}$  heißt Ring, falls

1. Differenzenstabilität:

$$A, B \in \mathfrak{R} \Rightarrow B \setminus A \in \mathfrak{R}$$

2. Vereinigungsstabilität:

$$A, B \in \mathfrak{R} \Rightarrow A \cup B \in \mathfrak{R}$$

**Definition 1.1.4** (Sigmaring). Sei  $\mathfrak{R}_\sigma$  ein nichtleeres Mengensystem über  $\Omega$ .  $\mathfrak{R}_\sigma$  heißt Sigmaring, falls

1. Differenzenstabilität:

$$A, B \in \mathfrak{R}_\sigma \Rightarrow B \setminus A \in \mathfrak{R}_\sigma$$

2. Sigma-Vereinigungsstabilität:

$$A_n \in \mathfrak{R}_\sigma \Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathfrak{R}_\sigma$$

**Definition 1.1.5** (Algebra). Sei  $\mathfrak{A}$  ein nichtleeres Mengensystem über  $\Omega$ .  $\mathfrak{A}$  heißt Ring, falls

1. Abgeschlossenheit bzgl. Komplementbildung:

$$A \in \mathfrak{A} \Rightarrow A^c \in \mathfrak{A}$$

2. Vereinigungsstabilität:

$$A, B \in \mathfrak{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathfrak{A}$$

**Definition 1.1.6** (Dynkin System). Sei  $\mathfrak{D}$  ein nichtleeres Mengensystem über  $\Omega$ .  $\mathfrak{D}$  heißt Dynkin-System (im weiteren Sinn), falls

1. Sigmaadditivität:

$$A_i \in \mathfrak{D} : A_i \text{ disjunkt} \Rightarrow \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathfrak{D}$$

2. Differenzenstabilität:

$$\forall A, B \subseteq \Omega : A, B \in \mathfrak{D} \Rightarrow B \setminus A \in \mathfrak{D}$$

Ist zusätzlich noch

$$\Omega \in \mathfrak{D}$$

erfüllt, so spricht man von einem Dynkin-System im engeren Sinn.

## 1.2 Maße und Inhalte

**Definition 1.2.1.** Ein Inhalt  $\mu$  auf einem Mengensystem  $\mathfrak{C}$  heißt endlich, wenn für alle  $A \in \mathfrak{C}$ :

$$\mu(A) < \infty$$

**Definition 1.2.2.** Ein Maß  $\mu$  auf  $C$  heißt sigmaendlich, wenn für jedes  $A \in C$  Mengen  $A_n \in C, n \in \mathbb{N}$  existieren mit  $\mu(A_n) < \infty, A \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ .

**Definition 1.2.3.** Ein Inhalt  $\mu$  auf  $C$  heißt totalendlich, wenn

$$\Omega \in C \wedge \mu(\Omega) < \infty$$

**Definition 1.2.4.** Ein Inhalt  $\mu$  auf  $C$  heißt total sigmaendlich, wenn es  $A_n \in C, n \in \mathbb{N}$  gibt mit  $\mu(A_n) < \infty$  und  $\Omega \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ .

**Definition 1.2.5.**  $A \in C$  hat sigmaendliches Maß ( $A$  ist sigmaendlich), wenn es  $A_n \in C, n \in \mathbb{N} :$   $\mu(A_n) < \infty$  und  $A \subseteq \bigcup A_n$ .

**Definition 1.2.6.**  $\mu$  heißt Wahrscheinlichkeitsmaß, wenn  $\mu(\Omega) = 1$ .

*Beispiel 1.2.1.* Sei  $\Omega \neq \emptyset$  endlich,  $C = 2^\Omega, \mu(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$ .

*Beispiel 1.2.2.* Sei  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ , also ein „fairer Würfel“.

*Beispiel 1.2.3.* Sei  $\Omega = \{(1, 1), (1, 2), \dots, (2, 1), (2, 2), \dots, (6, 6)\}$ , also würfeln mit zwei Würfeln, Würfel sind unterscheidbar.

**Definition 1.2.7.** Sei  $\Omega \neq \emptyset$  beliebige Menge und  $\mathcal{S}$  eine Sigmaalgebra über  $\Omega$ . Dann heißt  $(\Omega, \mathcal{S})$  Messraum.

**Definition 1.2.8.** Sei  $\mu$  ein Maß auf  $\mathcal{S}$  und  $(\Omega, \mathcal{S})$  Messraum. Dann heißt  $(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$  Maßraum.

*Beispiel 1.2.4.*  $(\Omega, 2^\Omega, \mu)$ ,  $\Omega \neq \emptyset$  endlich,  $C = 2^\Omega$ ,  $\mu(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$  ist der Laplace-Wahrscheinlichkeitsraum.

**Satz 1.2.9.** Seien  $\mu_n$  Inhalte auf  $\mathcal{C}$ , und existiere  $\mu(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(A)$ . Dann ist  $\mu$  ein Inhalt.

*Beweis 1.2.10.*  $A = \sum_{i=1}^k A_i$ ,  $\mu(A) = \sum_{i=1}^k \mu_n(A_i)$ , für  $n \rightarrow \infty$  gehen beide Seiten gegen  $\mu$ , stimmt also.

**Satz 1.2.11** (Satz von Vitali-Hahn Saks:). Wenn  $\mathcal{C}$  ein Sigmaring ist und  $\mu_n$  endliche Maße und für alle  $A \in \mathcal{C}$ :  $\mu(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(A)$ , dann ist  $\mu$  auch ein Maß.

*Beweis 1.2.12.* noch nicht, Eigenschaften fehlen noch.

**Satz 1.2.13.** Sei  $\mu$  ein Inhalt/Maß auf einem Ring. Dann gilt:

1. Monotonie:

$$A, B \in \mathcal{R}, A \subseteq B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$$

2. Additionstheorem:

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$$

3. Allgemeineres Additionstheorem:

$$\begin{aligned} \mu\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) &= \sum_{J \subseteq \{1, \dots, n\}, J \neq \emptyset} (-1)^{|J|-1} \mu\left(\bigcap_{i \in J} A_i\right) \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} S_k \quad \text{für } S_k = \sum_{i \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \mu\left(\bigcap_{k=1}^n A_{i_k}\right) \end{aligned}$$

4. Subadditivität:

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \mu(A_i)$$

*Beweis 1.2.14.* 1. Es gilt:

$$B = A \cup (B \setminus A) \Rightarrow \mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \geq \mu(A)$$

Nun ist außerdem mit  $\mu(A) < \infty$ :

$$\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$$

2. Für  $A, B \in \mathcal{R}$ :

$$\mu(B \setminus A) = \mu(B \setminus (A \cap B)) = \mu(B) - \mu(A \cap B) \quad (\text{wenn } \mu(A \cap B) < \infty)$$

$$\Rightarrow \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$$

Außerdem (Zusatz für zwei Mengen):

$$\mu(A \cup B \cup C) = \mu((A \cup B) \cup C) = \mu(A) + \mu(B) + \mu(C) - \mu(A \cap B) - \mu(A \cap C) - \mu(B \cap C) + \mu(A \cap B \cap C)$$

3. Es gilt:

$$A, B \in \mathcal{R} : \mu(A \cup B) = \mu(A \cup (B \setminus A)) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \leq \mu(A) + \mu(B)$$

$$\Rightarrow \mu\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \mu(A_i)$$

4. Induktion (wahrscheinlich)

**Satz 1.2.15.** Sei  $\mu$  Inhalt auf  $\mathcal{R}$ ,  $A_n, n \in \mathbb{N}$ ,  $A \subseteq \mathcal{R}$ , dann gilt:

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} A_n \subseteq A \Rightarrow \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n) \leq \mu(A)$$

**1.2.1 Beweis:**

Es gilt:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N A_n \subseteq A &\Rightarrow \mu\left(\sum_{n=1}^N A_n\right) \leq \mu(A) \\ &\Rightarrow \sum_{n=1}^N \mu(A_n) \leq \mu(A) \end{aligned}$$

Für  $n \rightarrow \infty$ :

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n) \leq \mu(A)$$

**1.2.2 Folgerungen für Maße**

**Satz 1.2.16.** Sei  $\mu$  ein Maß auf  $\mathcal{R}$ :

1. Stetigkeit von unten:

$$\begin{aligned} A_n \uparrow A, A_n, A \in \mathcal{R} \\ \Rightarrow \mu(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) \end{aligned}$$

2. Stetigkeit von oben:

$$\begin{aligned} A_n \downarrow A, A_n, A \in \mathcal{R} \wedge \mu(A_1) < \infty \\ \Rightarrow \mu(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) \end{aligned}$$

*Beweis 1.2.17.* 1. Sei  $B_1 = A_1$  und  $B_n = A_n \setminus A_{n-1}$ . Nun sind  $B_n$  disjunkt und  $A_n = \sum_{i=1}^n B_i$ .  
Nun gilt:

$$\mu(A_n) = \sum_{i=1}^n \mu(B_i)$$

und:

$$\begin{aligned} A &= \sum_{i=1}^{\infty} B_i \\ \Rightarrow \mu(A) &= \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \mu(B_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} \mu(A) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) \\ \mu(A_1 \setminus A) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_1 \setminus A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_1) - \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) \end{aligned}$$

**1.2.3 Eigenschaften von Maßen (Inhalten) auf Ringen(Semiringen)**

**Satz 1.2.18.** Sei  $\mu$  ein Maß auf dem Ring  $\mathcal{R}$ ,  $A_n \uparrow A$ ,  $A_n, A \in \mathcal{R}$ . Dann gilt

$$\mu(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$$

Entsprechendes für  $A_n \downarrow A$ .

**Satz 1.2.19.** Sei  $\mu$  Inhalt auf Ring  $\mathcal{R}$  ist genau dann ein Maß, wenn  $\mu$  stetig von unten ist.

*Beweis* 1.2.20. Seien  $A_n, A \in \mathcal{R}$ ,  $A = \sum_{n \in \mathbb{N}} A_n$ ,  $A_n$  paarweise disjunkt. Sei

$$B_n = \sum_{i=1}^n A_i$$

Nun gilt  $B_n \uparrow A$ .  $\mu$  ist nun stetig von unten, also

$$\mu(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(B_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu\left(\sum_{i=1}^n A_i\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \mu(A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

□.

**Satz 1.2.21.** *Sei  $\mu$  ein endlicher Inhalt auf einem Ring  $\mathcal{R}$ . Dann ist  $\mu$  genau dann ein Maß, wenn er stetig von oben bei  $\emptyset$  ist, also*

$$A_n \downarrow \emptyset \Rightarrow \mu(A_n) \rightarrow 0.$$

*Beweis* 1.2.22. Sei  $A_n, A \in \mathcal{R}$ ,  $A = \sum_{n=1}^{\infty} A_n$ .

**Z:**  $\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ .

Nämlich:

$$A = \sum_{i=1}^n A_i \cup \sum_{i=n+1}^{\infty} A_i$$

$$B_n := \sum_{i=n+1}^{\infty} A_i \Rightarrow B_n = A \setminus \left(\sum_{i=1}^n A_i\right) \in \mathcal{R}$$

Nun gilt:

$$\mu(A) = \sum_{i=1}^n \mu(A_i) + \mu(B_n)$$

Nun gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A \setminus \left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = A \setminus \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \emptyset$$

Also  $B_n \downarrow \emptyset$ . Also:

$$\mu(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^n \mu(A_i) + \mu(B_n)\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) + 0$$

□.

*Bemerkung* 1.2.1. Dieses Argument kann auch umgedreht werden. Dies werden wir später zumindest einmal benutzen.

**Satz 1.2.23.** *Sei  $\mu$  ein Maß auf dem Ring(Semiring)  $\mathcal{R}$ ,  $A_n, A \in \mathcal{R}$  mit*

$$A \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$$

so gilt

$$\mu(A) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n). \quad (\mu \text{ ist abzählbar-, bzw sigmasubadditiv})$$

*Beweis 1.2.24.* Sei  $B_n = A \cap \bigcup_{i=1}^n A_i = \bigcup_{i=1}^n A \cap A_i$ . Es gilt also  $B_n \uparrow A$ . Aus der endlichen Subadditivität erhalten wir:

$$\begin{aligned}\mu(B_n) &\leq \sum_{i=1}^n \mu(A_i \cap A) \leq \sum_{i=1}^n \mu(A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \\ \Rightarrow \mu(A) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(B_n) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)\end{aligned}$$

**Satz 1.2.25.** Sei  $\mu$  ein Maß auf dem  $\sigma$ -Ring  $\mathcal{R}$  und  $A_n$  eine Folge von Mengen aus  $\mathcal{R}$ . Dann gilt:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{k \geq n} A_k$$

**Satz 1.2.26.** Lemma von Borel Cantelli:

Sei  $\mu$  ein Maß auf einem  $\sigma$ -Ring  $\mathcal{R}$ . Ist  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n) < \infty$  für  $A_n \in \mathcal{R}$ , so gilt:

$$\mu(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n) = 0$$

*Beweis 1.2.27.* Sei  $\epsilon > 0$  beliebig. Es gilt:

$$\mu(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n) \leq \mu\left(\bigcup_{k \geq n_0} A_k\right) \leq \sum_{k \geq n_0} \mu(A_k) \leq \epsilon$$

□.

*Bemerkung 1.2.2.* Als Hausübung: Ist  $\mu$  endliches Maß auf einem  $\sigma$ -Ring, so gilt

$$\mu(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n).$$

*Beispiel 1.2.5* (Additionstheorem). Die Anzahl der Permutationen von  $n$  Elementen ohne Fixpunkt.

$$\mathbb{P}(\text{kein Fixpunkt}) = 1 - \mathbb{P}(\text{Fixpunkt}) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcup A_i\right)$$

mit  $A_i = [i \text{ ist Fixpunkt}]$ .

$$\mathbb{P}\left(\bigcup A_i\right) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i) - \sum_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2}) + \sum \mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}) - \dots$$

Es gilt:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_i) &= \frac{(n-1)!}{n!} \\ \mathbb{P}(A_i \cap A_0) &= \frac{(n-2)!}{n!} \\ \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) &= \frac{(n-k)!}{n!}\end{aligned}$$

Jetzt: (was auch immer  $S_k$  ist...)

$$S_k = \frac{(n-k)!}{n!} \binom{n}{k} = \frac{1}{k!}$$

Damit:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\bigcup A_i\right) &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{1}{k!} \\ \Rightarrow \mathbb{P}(\text{kein Fixpunkt}) &= 1 - \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{1}{k!} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e}\end{aligned}$$

### 1.2.4 Bedingte Wahrscheinlichkeit

**Definition 1.2.28.** Sei  $(\Omega, \mathcal{S}, \mathbb{P})$  ein Wahrscheinlichkeitsraum. Nun heißt  $A, B \in \mathcal{S}$  Ereignisse. Gilt  $\mathbb{P}(B) \neq 0$  so heißt

$$\mathbb{P}(A|B) := \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

die bedingte Wahrscheinlichkeit.

**Definition 1.2.29.** Ereignisse  $A$  und  $B$  heißen unabhängig, wenn

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B).$$

**Definition 1.2.30.** Allgemeiner heißen Ereignisse  $A_1, \dots, A_n$  unabhängig, wenn

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i).$$

**Definition 1.2.31.** Ereignisse  $A_1, \dots, A_n$  heißen paarweise unabhängig, wenn:

$$\forall i, j \in \{1, \dots, n\} : i \neq j \Rightarrow \mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(A_j).$$

*Bemerkung 1.2.3.* Es gilt:

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B|A)$$

und:

$$\mathbb{P}(A_i \cap \dots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2|A_1)\mathbb{P}(A_3|A_1 \cap A_2) \dots \mathbb{P}(A_n|A_1 \cap \dots \cap A_{n-1})$$

Dies ist das Multiplikationstheorem für Wahrscheinlichkeiten.

*Beispiel 1.2.6* (Bedingte Wahrscheinlichkeiten (Multiplikationstheorem)). In einer Urne liegen zwei schwarze und drei weiße Kugeln. Es wird 3-mal ohne Zurücklegen gezogen, wobei das Ziehen der Laplace-Wahrscheinlichkeit folgt. Nun ist

$$\mathbb{P}(\text{Alle 3 Kugeln weiß}) = \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$$

wobei  $A_i = \text{„}i\text{-te Kugel ist weiß“}$ . Also

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2|A_1)\mathbb{P}(A_3|A_1 \cap A_2)$$

mit

$$\mathbb{P}(A_1) = \frac{3}{5}$$

$$\mathbb{P}(A_2|A_1) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\mathbb{P}(A_3|A_2 \cap A_1) = \frac{1}{3}$$

und damit

$$\mathbb{P}(\text{Alle 3 Kugeln weiß}) = \frac{1}{10}$$

*Beispiel 1.2.7.* Selbe Voraussetzungen wie im vorigen Beispiel. Nun ist

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\text{genau 2 Kugeln weiß}) &= \mathbb{P}(\text{wsw}) + \mathbb{P}(\text{wsw}) + \mathbb{P}(\text{sww}) \\ &= \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3^c) + \mathbb{P}(A_1 \cap A_2^c \cap A_3) + \mathbb{P}(A_1^c \cap A_2 \cap A_3) \\ &= \frac{3}{5} \frac{2}{4} \frac{2}{3} + \frac{3}{5} \frac{2}{4} \frac{2}{3} + \frac{2}{5} \frac{3}{4} \frac{2}{3} = 3 \cdot \frac{12}{60} = \frac{3}{5}. \end{aligned}$$

Dieses Beispiel kann analog auf jede Anzahl an Kugeln fortgesetzt werden.

**Satz 1.2.32** (Borel-Cantelli II). *Sei  $(\Omega, \mathcal{S}, \mathbb{P})$  ein Wahrscheinlichkeitsraum. Sei  $A_n \in \mathcal{S}$  eine Folge unabhängiger Ereignisse.*

*Ist nun*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = \infty$$

*so folgt*

$$\mathbb{P}(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n) = 1$$

*Beweis* 1.2.33. Definition des  $\limsup$  war:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{k \geq n} A_k$$

und damit nach den de Morgan'schen Regeln:

$$(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n)^c = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{k \geq n} A_k^c$$

Betrachten wir nun  $\bigcap_{k \geq n} A_k^c$ . Die  $A_k^c$  sind nun auch unabhängig. (siehe Übung) Also:

$$\bigcap_{k \geq n} A_k^c = \lim_{N \rightarrow \infty} \bigcap_{k=n}^N A_k^c$$

$$\Rightarrow \mathbb{P} \left( \bigcap_{k \geq n} A_k^c \right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{k=n}^{\infty} \mathbb{P}(A_k^c) = \prod_{k=n}^{\infty} \mathbb{P}(A_k^c) = \prod_{k=n}^{\infty} (1 - \mathbb{P}(A_k))$$

mit  $1 + x \leq e^x$  folgt

$$\prod_{k=n}^{\infty} (1 - \mathbb{P}(A_k)) \leq \prod_{k=n}^{\infty} e^{-\mathbb{P}(A_k)} = e^{-\sum_{k=n}^{\infty} \mathbb{P}(A_k)} = \lim_{n \rightarrow \infty} -e^{-n} = 0$$

Damit:

$$\mathbb{P} \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P} \left( \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \right) = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0$$

□.

**Satz 1.2.34** (Fortsetzungssatz für Maßfunktionen). *Sei  $\mu$  ein Maß auf einem Ring  $\mathfrak{R}$ . Dann gilt:*

1.  $\mu$  kann zu einem Maß  $\tilde{\mu}$  auf dem erzeugten  $\sigma$ -Ring fortgesetzt werden.
2. Wenn  $\mu$  sigmaendlich ist, dann ist  $\tilde{\mu}$  eindeutig bestimmt.

*Bemerkung 1.2.4.* Wir werden  $\tilde{\mu}$  im Folgenden immer mit  $\mu$  bezeichnen, da es nicht wichtig ist, ob wir auf einem Ring oder auf dem erzeugten  $\sigma$ -Ring arbeiten.

*Bemerkung 1.2.5.* Die Motivation für diesen Satz ist das klassische Ausschöpfungs-, bzw Exhaustionsprinzip, das z.B. Archimedes und Eudoxos bearbeitet haben. Dabei wurde die Fläche eines Kreises durch Rechtecke approximiert. Damit ist ( $A$  ist die Fläche des Kreises,  $B$  die Fläche der Vierecke)

$$\begin{aligned} \mu^+(A) &= \inf\{\mu(B) : A \subseteq B, B \in \mathfrak{R}\} \\ \mu^-(A) &= \sup\{\mu(B) : B \subseteq A, B \in \mathfrak{R}\} \end{aligned}$$



wenn  $\mu^+(A) = \mu^-(A)$ , dann ist  $A$  messbar (im Sinn von Jordan). Dann  $\mu^*$  das Jordan-Maß.

$$\begin{aligned}\mu^*(A) &= \inf \left( \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(B_n) \right), B_n \in \mathfrak{R}, A \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \\ &= \inf \left\{ \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(B_n) : B_n \in \mathfrak{R}, A \subseteq \sum_{n \in \mathbb{N}} B_n \right\}\end{aligned}$$

Die letzte Gleichheit folgt durch Zeigen von  $\leq$  und  $\geq$ .

**Definition 1.2.35.** Das Maß von einem Maß  $\mu$  erzeugte Maß

$$\mu^*(A) = \inf \left\{ \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(B_n) : B_n \in \mathfrak{R}, A \subseteq \sum_{n \in \mathbb{N}} B_n \right\}$$

heißt äußeres Maß oder Jordan-Maß. Hierbei wird

$$\inf \emptyset = \infty$$

gesetzt.

**Definition 1.2.36.** Ist  $\mu(\Omega) < \infty$ , so ist

$$\mu_*(A) = \mu(\Omega) - \mu^*(A^c)$$

das innere Maß.

**Definition 1.2.37** (vorläufige Definition).  $A$  heißt messbar, falls

$$\forall E \in \mathfrak{R} : \mu(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \setminus A).$$

**Definition 1.2.38.**  $A$  heißt messbar, wenn

$$\forall B \subseteq \Omega : \mu^*(B) = \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \setminus A).$$

**Satz 1.2.39** (Eigenschaften von äußeren Maßfunktionen). Sei  $\mu$  ein Maß und  $\mu^*$  das von  $\mu$  erzeugte äußere Maß. Dann gilt:

$$1. \mu^*(A) \geq 0$$

$$2. \mu^*(\emptyset) = 0$$

3. Monotonie:

$$A \subseteq B \subseteq \Omega \Rightarrow \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$$

4. Sigmasubadditivität:

$$\begin{aligned}A &\subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \subseteq \Omega \\ \Rightarrow \mu^*(A) &\leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu^*(A_n)\end{aligned}$$

**Definition 1.2.40.** Eine Funktion  $\mu^* : 2^\Omega \rightarrow [0, \infty]$  heißt eine äußere Maßfunktion, wenn sie die Eigenschaften 1.-4. besitzt.

*Bemerkung 1.2.6.* Will man zeigen, dass  $\mu^*$  ein äußeres Maß ist, so muss man nur 1., 2. und 4. zeigen, 3. folgt dann automatisch.

*Beweis 1.2.41.* Eigenschaften 1. und 2. sind klar. Bleibt also noch 4. zu zeigen, 3. folgt ja automatisch.

Sei also  $A \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ . Zu zeigen ist nun, dass

$$\mu^*(A) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu^*(A_n)$$

wenn  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \mu^*(A_n) = \infty$ , so sind wir fertig.

Sei also  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \mu^*(A_n) < \infty$ . Dann ist

$$\mu^*(A_n) = \inf \left\{ \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu(B_k) : A_n \subseteq \bigcup_{k \in \mathbb{N}} B_k, B_k \in \mathfrak{R} \right\}$$

Sei  $\epsilon > 0$ . Für  $B_{nk} \in \mathfrak{R} : A_n \subseteq \bigcup_{k \in \mathbb{N}} B_{nk}$  und  $\sum_{k \in \mathbb{N}} \mu(B_{nk}) \leq \mu^*(A_n) + \frac{\epsilon}{2}$ . Nun ist

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{k \in \mathbb{N}} B_{nk}$$

und damit

$$\begin{aligned} \mu^* \left( \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) &\leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu(B_{nk}) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \left( \mu^*(A_n) + \frac{\epsilon}{2} \right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu^*(A_n) + \epsilon \\ &\Rightarrow \mu^* \left( \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu^*(A_n) \end{aligned}$$

□.

*Beispiel 1.2.8.* Sei  $|\Omega| \geq 3$  und

$$\mu^*(A) = \begin{cases} 0 & : A = \emptyset \\ 1 & : A \notin \{\emptyset, \Omega\}, A \subseteq \Omega \\ 2 & : A = \Omega \end{cases}$$

**Definition 1.2.42.**  $A \subseteq \Omega$  heißt messbar ( $\mu^*$ -messbar), wenn

$$\forall B \subseteq \Omega : \mu^*(B) = \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \cap A^c).$$

*Bemerkung 1.2.7.* Um die Messbarkeit von  $A$  zu zeigen, genügt es zu zeigen, dass

$$\mu^*(B) \geq \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \cap A^c),$$

da die Ungleichung „ $\leq$ “ trivialerweise immer erfüllt ist.

**Definition 1.2.43.**  $m_{\mu^*}$  bezeichnet das System aller  $\mu^*$ -messbaren Mengen. Ist klar, um welches Maß  $\mu^*$  es sich handelt (oder das egal ist), so schreiben wir einfach  $m$ .

**Satz 1.2.44.** 1.  $m$  ist eine Sigmaalgebra,  $\mu^*|_m$  ein Maß.

2. Wenn  $\mu^*$  von einem Maß  $\mu$  auf einem Ring  $\mathfrak{R}$  erzeugt wird und  $\mu^*(B) = \mu(B)$ , so folgt  $\mathfrak{R} \subseteq m$ .

*Beweis 1.2.45.* Wir beweisen zunächst 2.:

Sei  $B \subset \Omega$ ,  $A \in \mathfrak{R}$ ,  $B_n \in \mathfrak{R}$ ,  $B \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$ ,  $\mu^*(B) < \infty$ . Dann ist

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(B_n) &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu((B_n \cap A) \cup (B_n \cap A^c)) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} (\mu(B_n \cap A) + \mu(B_n \setminus A)) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(B_n \cap A) + \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(B_n \setminus A) \\ &\geq \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \cap A^c) \\ &\Rightarrow \mu^*(B) \geq \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \setminus A) \end{aligned}$$

□.

Sei nun  $A \in \mathfrak{R}$ ,  $A \subseteq \bigcup A_n$ ,  $A_n \in \mathfrak{R}$ .

$$\mu(A) \leq \sum \mu(A_n)$$

wurde schon gezeigt. Sei jetzt  $A_1 = A$ ,  $A_n = \emptyset$  für  $n > 1$ . Dann folgt

$$\mu^*(A) \geq \mu(A),$$

$A$  ist also messbar.

Für 1. erste Behauptung:  $m$  ist Algebra und  $\mu^*|_m$  ist additiv. Wir wollen zeigen:

$$A_1, A_2 \text{ messbar} \Rightarrow A_1 \cup A_2 \text{ messbar}$$

$$A \text{ messbar} \Rightarrow A^c \text{ messbar}$$

Das zweite folgt direkt daraus, dass  $A^{cc} = A$  und die Definition von „messbar“ diesbezüglich symmetrisch ist.

Für das erste sei  $B \subseteq \Omega$ . Nun ist  $A_1$  messbar, also

$$\mu^*(B) = \mu^*(B \cap A_1) + \mu^*(B \cap A_1^c)$$

und mit

$$\mu^*(B \cap A_1) = \mu^*(B \cap A_1 \cap A_2) + \mu^*(B \cap A_1 \cap A_2^c)$$

$$\mu^*(B \cap A_1^c) = \mu^*(B \cap A_1^c \cap A_2) + \mu^*(B \cap A_1^c \cap A_2^c)$$

ergibt sich:

$$\begin{aligned} \mu^*(B) &= \mu^*(B \cap A_1 \cap A_2) + \mu^*(B \cap A_1 \cap A_2^c) + \mu^*(B \cap A_1^c \cap A_2) + \mu^*(B \cap A_1^c \cap A_2^c) \\ &\geq \mu^*((B \cap A_1 \cap A_2) \cup (B \cap A_1 \cap A_2^c) \cup (B \cap A_1^c \cap A_2)) + \mu^*(B \cap (A_1 \cup A_2)^c) \\ &= \mu^*(B \cap (A_1 \cup A_2)) + \mu^*(B \cap (A_1 \cup A_2)^c) \end{aligned}$$

Damit ist  $m$  tatsächlich eine Algebra.

Um nachzuweisen, dass  $\mu^*|_m$  additiv ist, seien  $A_1, A_2 \in m$ ,  $A_1 \cup A_2 = \emptyset$ . Über die Messbarkeit von  $A_1$  erhalten wir:

$$\mu^*(A_1 \cup A_2) = \mu^*((A_1 \cup A_2) \cap A_1) + \mu^*((A_1 \cup A_2) \cap A_1^c) = \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2)$$

□.

Nun bleibt noch zu zeigen, dass  $m$  Sigmaalgebra ist, seien also  $A_n \in m$ ,  $A_n$  disjunkt,  $B \subseteq \Omega$ .

$\mathbb{Z}$ :

$$\mu^*(B) \geq \mu^*\left(B \cap \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) + \mu^*\left(B \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right)$$

Wir wissen schon:

$$\begin{aligned} \mu^*(B) &= \mu^*\left(B \cap \bigcup_{n=1}^N A_n\right) + \mu^*\left(B \setminus \bigcup_{n=1}^N A_n\right) \\ &\geq \mu^*\left(B \cap \bigcup_{n=0}^N A_n\right) + \mu^*\left(B \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \\ &= \sum_{n=1}^N \mu^*(B \cap A_n) + \mu^*\left(B \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \end{aligned}$$

Für  $n \rightarrow \infty$  erhalten wir also

$$\mu^*(B) \geq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu^*(B \cap A_n) + \mu^*\left(B \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \geq \mu^*\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (B \cap A_n)\right) + \mu^*\left(B \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right)$$

□.

*Beweis 1.2.46* (Fortsetzungssatz für Maßfunktionen).