# Inhaltsverzeichnis

# Kapitel 1

# Maße

In diesem Abschnitt werden wir uns drei Fragen stellen:

- Was können wir messen?
- Wie können wir messen?
- Wie können wir Maße ökonomisch definieren?

## 1.1 Mengensysteme

**Definition 1.1.1.** *Sei $\Omega$ eine beliebige Menge. Dann heißt $\mathfrak{C} \subseteq 2^\Omega$ ein Mengensystem (über $\Omega$).*

**Definition 1.1.2.** *Eine Mengenfunktion $\mu$ auf dem Mengensystem $\mathfrak{C}$ heißt additiv, falls*

$$\mu\left(\biguplus_{i\in I} A_i\right) = \sum_{i\in I} \mu(A_i)$$

**Definition 1.1.3** (Semiring)**.** *Sei $\mathfrak{T}$ ein nichtleeres Mengensystem über $\Omega$. Dann heißt $\mathfrak{T}$ Semiring (im weiteren Sinn), falls*

1. *Durchschnittsstabilität:*
$$A, B \in \mathfrak{T} \Rightarrow A \cap B \in \mathfrak{T}$$

2. *Leiterbildung:*
$$A, B \in \mathfrak{T}, A \subseteq B \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : C_1, ..., C_n \in \mathfrak{T} : \forall i \neq j : C_i \cap C_j = \varnothing, A \setminus B = \bigcup_{i=1}^{n} C_i$$

*gilt zusätzlich für die Leiter*

$$\forall k = 1, ..., n : A \cup \bigcup_{i=1}^{k} C_i \in \mathfrak{T},$$

*so spricht man von einem Semiring im engeren Sinn.*

**Definition 1.1.4** (Ring)**.** *Sei $\mathfrak{R}$ ein nichtleeres Mengensystem über $\Omega$. $\mathfrak{R}$ heißt Ring, falls*

1. *Differenzenstabilität:*
$$A, B \in \mathfrak{R} \Rightarrow B \setminus A \in \mathfrak{R}$$

2. *Vereinigungsstabilität:*
$$A, B \in \mathfrak{R} \Rightarrow A \cup B \in \mathfrak{R}$$

**Definition 1.1.5** (Sigmaring)**.** *Sei $\mathfrak{R}_\sigma$ ein nichtleeres Mengensystem über $\Omega$. $\mathfrak{R}_\sigma$ heißt Sigmaring, falls*

1. *Differenzenstabilität:*
$$A, B \in \mathfrak{R}_\sigma \Rightarrow B \setminus A \in \mathfrak{R}_\sigma$$
2. *Sigma-Vereinigungsstabilität:*
$$A_n \in \mathfrak{R}_\sigma \Rightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathfrak{R}_\sigma$$

**Definition 1.1.6** (Algebra)**.** *Sei $\mathfrak{A}$ ein nichtleeres Mengensystem über $\Omega$. $\mathfrak{A}$ heißt Algebra, falls*

1. *Abgeschlossenheit bzgl. Komplementbildung:*
$$A \in \mathfrak{A} \Rightarrow A^c \in \mathfrak{A}$$
2. *Vereinigungsstabilität:*
$$A, B \in \mathfrak{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathfrak{A}$$

**Definition 1.1.7** (Dynkin System)**.** *Sei $\mathfrak{D}$ ein nichtleeres Mengensystem über $\Omega$. $\mathfrak{D}$ heißt Dynkin-System (im weiteren Sinn), falls*

1. *Sigmaadditivität:*
$$A_i \in \mathfrak{D} : A_i \text{ disjunkt} \Rightarrow \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \mathfrak{D}$$
2. *Differenzenstabilität:*
$$\forall A, B \subseteq \Omega : A, B \in \mathfrak{D} \Rightarrow B \setminus A \in \mathfrak{D}$$

*Ist zusätzlich noch*
$$\Omega \in \mathfrak{D}$$
*erfüllt, so spricht man von einem Dynkin-System im engeren Sinn.*

**Definition 1.1.8.** *Ein Mengensystem $\mathfrak{C}$ heißt monoton, wenn*
$$A_n \in \mathfrak{C}, A_n \subset A_{n+1}, n \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathfrak{C}$$
*oder*
$$A_n \in \mathfrak{C}, A_n \supset A_{n+1}, n \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathfrak{C}$$

**Definition 1.1.9.** *Für Zahlenfolgen:*
$$\limsup_{n\in\mathbb{N}} x_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\geq n} x_n$$
$$\liminf_{n\in\mathbb{N}} x_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{k\geq n} x_n$$
*Für Mengenfolgen:*
$$\limsup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\geq n} A_n = \{x : x \in A_n \text{ für unenlich viele } n\}$$
$$\liminf_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{k\geq n} A_n = \{x : x \in A_n \text{ für fast alle } n\}$$

**Definition 1.1.10.** *Seien $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2$ Sigmaalgebren über $\Omega$, so heißt $\mathfrak{S}_1 \times \mathfrak{S}_2 = \mathfrak{A}_\sigma(\mathfrak{S}_1 \otimes \mathfrak{S}_2)$ die Produktalgebra*

**Definition 1.1.11.** *Sei $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ und $A \in \Omega_2$, so heißt*
$$f^{-1}(A) := \{x \in \Omega_1 | f(x) \in A\}$$
*das Urbild von A.*

## 1.2 Maße und Inhalte

**Definition 1.2.1.** *Ein Inhalt $\mu$ auf einem Mengensystem $C$ heißt endlich, wenn für alle $A \in C$:*

$$\mu(A) < \infty$$

**Definition 1.2.2.** *Ein Maß $\mu$ auf $C$ heißt sigmaendlich, wenn für jedes $A \in C$ Mengen $A_n \in C, n \in \mathbb{N}$ existieren mit $\mu(A_n) < \infty, A \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$.*

**Definition 1.2.3.** *Ein Inhalt $\mu$ auf $C$ heißt totalendlich, wenn*

$$\Omega \in C \wedge \mu(\Omega) < \infty$$

**Definition 1.2.4.** *Ein Inhalt $\mu$ auf $C$ heißt total sigmaendlich, wenn es $A_n \in C, n \in \mathbb{N}$ gibt mit $\mu(A_n) < \infty$ und $\Omega \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$.*

**Definition 1.2.5.** *$A \in C$ hat sigmaendliches Maß ($A$ ist sigmaendlich), wen es $A_n \in C, n \in \mathbb{N}$ : $\mu(A_n) < \infty$ und $A \subseteq \bigcup A_n$.*

**Definition 1.2.6.** *$\mu$ heißt Wahrscheinlichkeitsmaß, wenn $\mu(\Omega) = 1$.*

**Definition 1.2.7.** *Sei $\Omega \neq \varnothing$ beliebige Menge und $\mathfrak{S}$ eine Sigmaalgebra über $\Omega$. Dann heißt $(\Omega, \mathfrak{S})$ Messraum.*

**Definition 1.2.8.** *Sei $\mu$ ein Maß auf $\mathfrak{S}$ und $(\Omega, \mathfrak{S})$ Messraum. Dann heißt $(\Omega, \mathfrak{S}, \mu)$ Maßraum.*

## 1.3 Folgerungen für Maße

## 1.4 Eigenschaften von Maßen (Inhalten) auf Ringen(Semiringen)

## 1.5 Bedingte Wahrscheinlichkeit

**Definition 1.5.1.** *Sei $(\Omega, \mathfrak{S}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Nun heißt $A, B \in \mathfrak{S}$ Ereignisse. Gilt $\mathbb{P}(B) \neq 0$ so heißt*

$$\mathbb{P}(A|B) := \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

*die bedingte Wahrscheinlichkeit.*

**Definition 1.5.2.** *Ereignisse $A$ und $B$ heißen unabhängig, wenn*

$$P(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B).$$

**Definition 1.5.3.** *Allgemeiner heißen Ereignisse $A_1, ..., A_n$ unabhängig, wenn*

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i).$$

**Definition 1.5.4.** *Ereignisse $A_1, ..., A_n$ heißen paarweise unabhängig, wenn:*

$$\forall i, j \in \{1, ..., n\} : i \neq j \Rightarrow \mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(A_j).$$

## 1.6 Der Fortsetzungssatz für Maßfunktionen

In diesem Abschnitt werden wir den folgenden Satz beweisen:

**Definition 1.6.1.** *Das Maß von einem Maß $\mu$ erzeugte Maß*

$$\mu^*(A) = \inf\{\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(B_n) : B_n \in \mathfrak{R}, A \subseteq \sum_{n\in\mathbb{N}} B_n\}$$

*heißt äußeres Maß oder Jordan-Maß. Hierbei wird*

$$\inf\varnothing = \infty$$

*gesetzt.*

**Definition 1.6.2.** *Ist $\mu(\Omega) < \infty$, so ist*

$$\mu_*(A) = \mu(\Omega) - \mu^*(A^c)$$

*das innere Maß.*

**Definition 1.6.3** (vorläufige Definition)**.** *A heißt messbar, falls*

$$\forall E \in \mathfrak{R} : \mu(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \setminus A).$$

**Definition 1.6.4.** *A heißt messbar, wenn*

$$\forall B \subseteq \Omega : \mu^*(B) = \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \setminus A).$$

**Definition 1.6.5.** *Eine Funktion $\mu^* : 2^\Omega \to [0,\infty]$ heißt eine äußere Maßfunktion, wenn sie die Eigenschaften 1.-4. besitzt.*

**Definition 1.6.6.** *$A \subseteq \Omega$ heißt messbar ($\mu^*$-messbar), wenn*

$$\forall B \subseteq \Omega : \mu^*(B) = \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \cap A^c).$$

**Definition 1.6.7.** *$m_{\mu^*}$ bezeichnet das System aller $\mu^*$-messbaren Mengen. Ist klar, um welches Maß $\mu^*$ es sich handelt (oder das egal ist), so schreiben wir einfach $m$.*

## 1.7 Zusammenhang zwischen dem Maß auf dem Ring und dem Maß auf dem Sigmaring

**Definition 1.7.1.** *Sei $(\Omega, \mathfrak{S}, \mu)$ Maßraum. Ist $\mu(A) = 0$, so heißt A Nullmenge.*

**Definition 1.7.2.** *Ein Maßraum $(\Omega, \mathfrak{S}, \mu)$ heißt vollständig, wenn*

$$A \in \mathfrak{S}, \mu(A) = 0, B \subseteq A \Rightarrow B \in \mathfrak{S}$$

**Definition 1.7.3.** *Sei $(\Omega, \mathfrak{S}, \mu)$ Maßraum. Mit*

$$\overline{\mathfrak{S}} := \{A \cup N, A \in \mathfrak{S}, \exists M \in \mathfrak{S} : N \subseteq M, \mu(B) = 0\}$$

*und*

$$\overline{\mu}(A \cup N) = \mu(A)$$

*heißt der vollständige Maßraum $(\Omega, \overline{\mathfrak{S}}, \overline{\mu})$ die Vervollständigung von $(\Omega, \mathfrak{S}, \mu)$.*

## 1.8 Maße auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$

Die Frage, die sich stellt ist: Ist $\mu^*$ auf $\mathbb{R}$ frei definiert, wann gilt $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{M}_{\mu^*}$?

**Definition 1.8.1.** *Seien $A, B \in \mathbb{R}$. Dann ist der Abstand*

$$d(A, B) := \inf\{|x - y|, x \in A, y \in B\}.$$

*Ein äußeres Maß $\mu^*$ heißt arithmetisch, wenn*

$$\forall A, B \in \mathbb{R} : d(A, B) > 0 \Rightarrow \mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B)$$

## 1.9 Maße auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$, zweiter Anlauf

Im folgenden ist immer $\mathfrak{T} := \{(a, b], a \leq b, a, b \in \mathbb{R}\}$.

**Definition 1.9.1.** *$\mu$ auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ heißt Lebesgue-Stieltjes Maß, oder lokalendlich, wenn jede beschränkte Borelmenge endliches Maß hat.*

**Definition 1.9.2.** *$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt Verteilungsfunktion von $\mu$, wenn $\mu((a, b]) = F(b) - F(a)$.*

## 1.10 Ergänzungen zu bedingten Wahrscheinlichkeiten

**Definition 1.10.1.** *Die $\mathbb{P}(B_i)$ in den Sätzen vorher heißen a-priori Wahrscheinlichkeiten, $\mathbb{P}(B_i|A)$ die a-posteriori Wahrscheinlichkeiten.*

## 1.11 Eigenschaften von Verteilungsfunktionen

## 1.12 Maße von Mengen mit Verteilungsfunktionen

Ab diesem Kapitel werden wir offene Intervallgrenzen auch mit eckigen Klammern schreiben. Wir wissen schon:

$$\mu(]a, b]) = F(b) - F(a).$$

Was passiert, für$\mu([a, b]), \mu(]a, b[), \mu([a, b[)$?

$$\mu([a, b]) = \mu(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} ]a - \frac{1}{n}, b]) = \lim_{n\to\infty} \mu(F(b) - F(a - \frac{1}{n})) = F(b) - F(a - 0)$$

$$\mu(]a, b[) = \mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} ]a, b - \frac{1}{n}]) = \lim_{n\to\infty} (F(b - \frac{1}{n}) - F(a)) = F(b - 0) - F(a)$$

$$\mu([a, b[) = F(b - 0) - F(a - 0)$$

Und damit auch

$$\mu(\{x\}) = \mu([x, x]) = F(x) - F(x - 0)(= \text{Sprunghöhe von } F \text{ in } x)$$

**Definition 1.12.1.** *Ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ heißt Verteilung.*

## 1.13 Mehrdimensionale Lebesgue-Stieltjes Maße und Verteilungsfunktionen

Der hier verwendete Maßraum ist $(\mathbb{R}^d, \mathfrak{B}_d)$ mit

$$\mathfrak{B}_d := \mathfrak{A}_\sigma\left(\{]a,b] : a,b \in \mathbb{R}, a \leq b\}\right),$$

wobei die Ungleichung $a \leq b$ komponentenweise zu verstehen ist, also

$$a \leq b :\Leftrightarrow \forall i \in \{1,...,d\} : a_i \leq b_i$$

und

$$]a,b] :=]a_1,b_1]\times]a_2,b_2] \times ...\times]a_d,b_d]$$

**Definition 1.13.1.** *Sei $\mu$ ein Lebesgue-Stieltjes Maß auf $(\mathbb{R}^d, \mathfrak{B}_d)$, wenn für beschränkte Mengen $A \in \mathfrak{B}_d$*

$$\mu(A) < \infty.$$

**Definition 1.13.2** (Differenzoperatoren)**.**

$\Delta_i(a_i,b_i) :\mathbb{R}^{\mathbb{R}^d} \to \mathbb{R}^{\mathbb{R}^d}$;

$$f \mapsto \Delta_i(a,b)f(x_1,...,x_d) := f(x_1,...,x_{i-1},b_i,x_{i+1},...x_d) - f(x_1,...,x_{i-1},a_i,x_{i+1},...,x_d)$$

**Definition 1.13.3.** *Das d-dimensionale Lebesguemaß $\lambda_d$ ist*

$$\lambda_d(]a,b]) = \prod_{i=1}^{d}(b_i - a_i)$$

*und*

$$F(x_1,...,x_d) = x_1 \cdots x_d.$$

*Mit Hilfe des Fortsetzungssatzes erhalten wir das Maß $\lambda_d$ auf $\mathfrak{B}_d$.*
*Die $\lambda_d^*$-messbaren Mengen werden mit $\mathfrak{L}_d$ (d-dimensionale Lebesguemengen) bezeichnet, wobei*

$$A \in \mathfrak{L}_d \Leftrightarrow A = B \cup N, B \in \mathfrak{B}_d, \exists M \in \mathfrak{B}_d : N \subseteq M, \lambda_d(M) = 0$$

**Definition 1.13.4.** *Sei $\Omega = [0,1]$, dann ist*

$$x \sim y :\Leftrightarrow y - x \in \mathbb{Q}$$

*eine Äquivalenzrelation.*
*Dann zerlegen wir $\Omega$ in Äquivalenzklassen und bilden mithilfe des Auswahlaxioms eine Menge $V$, die aus jeder Äquivalenzklasse genau einen Vertreter wählt. Eine solche Menge heißt Vitali-Menge und ist nicht Lebesgue-Messbar.*

## 1.14 Approximationssätze und Regularität

**Definition 1.14.1.** *Sei $\mu$ ein Inhalt auf $(\mathbb{R}^d, \mathfrak{B}_d)$ bzw $(\mathbb{R}^d, \mathfrak{S})$ mit $\mathfrak{B}_d \subseteq \mathfrak{S}$, dann heißt $A \in \mathfrak{S}$ regulär von oben, wenn*

$$\mu(A) = \inf\{\mu(U) : A \subseteq U, U \textit{ offen}\}.$$

*$\mu$ heißt dann regulär von oben, wenn alle $A \in \mathfrak{S}$ regulär von oben.*

**Definition 1.14.2.** *Sei $\mu$ ein Inhalt auf $(\mathbb{R}^d, \mathfrak{B}_d)$ bzw $(\mathbb{R}^d, \mathfrak{S})$ mit $\mathfrak{B}_d \subseteq \mathfrak{S}$, dann heißt $A \in \mathfrak{S}$ regulär von unten, wenn*

$$\mu(A) = \sup\{\mu(K) : K \subseteq A, K \textit{ kompakt}\}.$$

*$\mu$ heißt dann regulär von unten, wenn alle $A \in \mathfrak{S}$ regulär von oben.*

**Definition 1.14.3.** *Wenn $\mu$ bzw $A \in \mathfrak{S}$ sowohl regulär von oben als auch regulär von unten sind, dann heißen sie regulär.*

Zusammenfassend ergibt das dann:

# Kapitel 2

# Das Lebesgue-Integral

Motivation für dieses Kapitel: Wir wollen einen neuen Integralbegriff auf Basis des Riemann-Integrals definieren,

$$\int f = \int_0^\infty \mu([f > x])dx,$$

wobei $f$ auf beliebigen Mengen definiert sein darf, also wenn $\mu$ Maß auf einem Messraum $(\Omega, \mathfrak{S})$, dann ist

$$f : \Omega \to \mathbb{R}$$

und $\mu([f > x])$ definiert sein soll, also $[f > x] \in \sigma$, wobei

$$[f > x] := \{\omega \in \Omega : f(\omega) > x\}.$$

**Definition 2.0.1.** *Seien $(\Omega_1, \mathfrak{S}_1)$, $(\Omega_2, \mathfrak{S}_2)$ zwei Messräume, dann heißt*

$$f : \Omega_1 \to \Omega_2$$

*messbar bezüglich $(\Omega_1, \mathfrak{S}_1)$ und $(\Omega_2, \mathfrak{S}_2)$ (oder kürzer $\mathfrak{S}_1 - \mathfrak{S}_2$-messbar), wenn*

$$f^{-1}(\mathfrak{S}_2) \subseteq \mathfrak{S}_1,$$

*also wenn $\forall A \in \mathfrak{S}_2 : f^{-1}(A) \in \mathfrak{S}_1$. Für eine solche Funktion schreiben wir*

$$f : (\Omega_1, \mathfrak{S}_1) \to (\Omega_2, \mathfrak{S}_2).$$

*Eine Funktion*

$$f : (\Omega, \mathfrak{S}) \to (\mathbb{R}, \mathfrak{B})$$

*heißt dann $\mathfrak{S}$-messbar bzw*

$$f : (\mathbb{R}^{d_1}, \mathfrak{S}_{d_1}) \to (\mathbb{R}^{d_2}, \mathfrak{B}_{d_2})$$

*heißt Borelmessbar,*

$$f :: (\mathbb{R}^{d_1}, \mathfrak{L}_{d_1}) \to (\mathbb{R}^{d_2}, \mathfrak{B}_{d_2})$$

*heißt Lebesguemessbar.*

**Definition 2.0.2.** *Ist $(\Omega, \mathfrak{S}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, so nennt man*

$$S : (\Omega, \mathfrak{S}) \to (\mathbb{R}^d, \mathfrak{B}_d)$$

*eine $d$-dimensionale Zufallsvariable oder einen $d$-dimensionalen Zufallsvektor. Bei $d = 1$ spricht man von der Zufallsvariable.*

**Definition 2.0.3** (7.14).

## 2.1 Erweitert reellwertige Funktionen

Whaaaaat??
Kuso abschreiben... S.86

## 2.2 Treppenfunktionen

**Definition 2.2.1.** *Eine Funktion*

$$t : \Omega \to \mathbb{R}$$

*heißt Treppenfunktion, wenn es eine endliche Zerlegung $A_1, ..., A_n$ von $\Omega$ und reelle Zahlen $\alpha_1, ..., \alpha_n$ gibt mit*

$$\forall \omega \in \Omega : t(\omega) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}(\omega).$$

**Definition 2.2.2.** $t = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbb{1}_{[t=x_i]}$ *ist die kanonische Darstellung einer messbaren Treppenfunktion.*

## 2.3 Konvergenzarten

**Definition 2.3.1.** *Zwei Funktionen $f, g$ sind fast überall gleich, falls sie auf dem Komplement einer Nullmenge gleich sind.*

**Definition 2.3.2.** *Eine Folge $(f_n)$ messbarer Funktionen konvergiert gleichmäßig $\mu-$fast überall (bzw $P - fs$) gegen eine Funktion $f$, wenn es eine $\mu$-Nullmenge $N$ gibt, sodass $(f_n)$ auf $N^c$ gleichmäßig konvergiert.*

**Definition 2.3.3.** *Eine messbare Funktion $f$ auf einem Maßraum heißt $\mu$-fast überall beschränkt, wenn es ein $c \in \mathbb{R}$ gibt mit $\mu(|f| > c) = 0$.*

$$\|f\|_\infty := \text{ess sup} f := \inf\{c \in \mathbb{R} : \mu(|f| > c) = 0\}$$

*wird als das essentielle Supremum von $f$ bezeichnet.*

**Definition 2.3.4.** *Sei $P$ eine Aussage und $(\Omega, \mathfrak{S}, \mu)$ ein Maßraum. Wir sagen, $P$ gilt fast überall oder fast sicher, wenn es eine Menge $N \in \mathfrak{S}$, $\mu(N) = 0$ gibt mit $P(\omega)$ für alle $\omega \in N^c$.*

**Definition 2.3.5.** *Seien $(\Omega_1, \mathfrak{S}_1, \mu)$ ein Maßraum und $(\Omega_2, \mathfrak{S}_2)$ ein Messraum. Sei $f : \Omega_1 \to \Omega_2$. $f$ heißt fast überall messbar, wenn*

$$\exists \Omega_1' \in \mathfrak{S}_1 : \mu(\Omega_1'^c) = 0,$$

*wobei $f$ auch nur auf $\Omega_1'$ definiert sein kann. Dann ist*

$$f : (\Omega_1', \mathfrak{S} \cap \Omega_1') \to (\Omega_2, \mathfrak{S}_2)$$

**Definition 2.3.6.** *$f_n \to f$ heißt $\mu$-fast überall*

$$f_n : (\Omega, \mathfrak{S}, \mu) \to (\mathbb{R}, \mathfrak{B}),$$

*wenn es $N \in \mathfrak{S} : \mu(N) = 0$ mit*

$$f_n(\omega) \to f(\omega)$$

*für fast alle $\omega \in N^c$.*

**Definition 2.3.7** (gleichmäßige Konvergenz)**.** *$f_n \to f$ ist gleichmäßig konvergent, wenn*

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_0(\epsilon) \forall \omega \in \Omega \forall n \geq n_0(\epsilon) : |f_n(\omega) - f(\omega)| < \epsilon$$

**Definition 2.3.8** (fast überall gleichmäßige Konvergenz)**.** *$f_n \to f$ ist fast überall gleichmäßig konvergent für*

$$f_n, f : (\Omega, \mathfrak{S}, \mu) \to (\mathbb{R}, \mathfrak{B})$$

*wenn es eine Menge $M \in \mathfrak{S}, \mu(M) = 0$ gibt mit $f_n \to f$ gleichmäßig auf $M^c$.*

**Definition 2.3.9.** *Sei $f(\Omega, \mathfrak{S}) \to (\mathbb{R}, \mathfrak{B})$, $(\Omega, \mathfrak{S}, \mu)$ Maßraum. Dann ist das Essentielle Supremum von $f$*

$$\text{ess sup} f := \inf\{y \in \mathbb{R} : \mu([f > y]) = 0\}.$$

**Definition 2.3.10.**

$$\|f\|_\infty := \text{ess sup} |f|.$$

*Dies ist fast eine Norm, die erste Eigenschaft fehlt, da*

$$\|f\|_\infty = 0 \Leftrightarrow \mu([|f| > 0]) = 0$$

**Definition 2.3.11.** *Sei*

$$\mathcal{L}_\infty(\Omega, \mathfrak{S}, \mu) := \left\{f : (\Omega, \mathfrak{S}) \to (\overline{\mathbb{R}}, \overline{\mathfrak{B}}) : f \textit{ ist fast überall messbar, } \|f\|_\infty < \infty\right\},$$

*dann ist*

$$f \sim g \Leftrightarrow \|f - g\|_\infty = 0 \Leftrightarrow f = g \textit{ fast überall}$$

*eine Äquivalenzrelation (trivial). Damit ist*

$$\mathcal{L}_\infty(\Omega, \mathfrak{S}, \mu) = \mathcal{L}_\infty \setminus \sim$$

*und $\|.\|_\infty$ eine Norm auf $\mathcal{L}_\infty$ und somit auch $\mathcal{L}_\infty$ ein normierter Vektorraum, bzw. sogar ein Banachraum.*

**Definition 2.3.12.** *Sei $(f_n)$ eine Folge von Funktionen,*

$$f_n : (\Omega, \mathfrak{S}) \to (\mathbb{R}, \mathfrak{B}),$$

*die gegen ein $f$ fast gleichmäßig konvergiert, wenn*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists A \in \mathfrak{S} : \mu(A^c) < \varepsilon \textit{ mit } f_n \to f \textit{ gleichmäßig auf } A.$$

**Definition 2.3.13.** *Sei $(\Omega, \mathfrak{S}, \mu)$*

$$f_n, f : (\Omega, \mathfrak{S}) \to (\mathbb{R}, \mathfrak{B}).$$

*Dann ist $f_n \to f$ im Maß (in Wahrscheinlichkeit, wenn $(\Omega, \mathfrak{S}, \mu)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum ist), wenn*

$$\forall \varepsilon > 0 : \lim_{n\to\infty} \mu([|f_n - f|] \geq \varepsilon]) = 0.$$

**Definition 2.3.14.** *Sei $(f_n) \to f$ eine Folge von fast überall messbaren, fast überall endlichen, rellwertigen Funktionen. Sei $f$ ebenfall fast überall messbar, fast überall endlich. Wenn*

$$\forall \varepsilon > 0 : \mu([|f_n - f| > \varepsilon) \to 0 \Rightarrow f_n \to f \textit{ im Maß}$$

*gilt, dann nennen wir $f_n$ Barock.* *??? - nicht sicher ob das stimmt*

**Definition 2.3.15.** *$(f_n), f_n \in \mathcal{L}_0$ ist eine Cauchyfolge im Maß, wenn*

$$\forall \varepsilon > 0 : \lim_{m,n\to\infty} \mu([|f_n - f_m| > \varepsilon]) = 0,$$

*das heißt*

$$\forall \delta > 0 \exists n_0 \forall m, n \geq n_0 : \mu([|f_n - f_m| > \varepsilon] < \delta$$

Im Folgenden arbeiten wir auf den folgenden Satz hin:
Erinnerung: Sei

$$f : \Omega_1 \to \Omega_2,$$

$\mathfrak{S}_2$ Sigmaalgebra über $\Omega_2$, $f^{-1}(\mathfrak{S}_2)$ ist Sigmaalgebra über $\Omega_1$ (und zwar die kleinste Sigmaalgebra, bezüglich der $f$ messbar ist).

**Definition 2.3.16.** *Sei $(f_i)_{i\in I}$ eine Familie von Funktionen $\Omega \to \Omega_i$, $\mathfrak{S}_i$ Sigmaalgebra über $\Omega_i$. Die von $(f_i)_{i\in I}$ erzeugte Sigmaalgebra $\mathfrak{S}_\sigma((f_i)_{i\in I})$ ist die kleinste Sigmaalgebra, bezüglich der alle $f_i$ messbar sind.*

$$\mathfrak{S}_\sigma((f_i)_{i\in I}) = \mathfrak{S}_\sigma(\{f_i^{-1}(B), i \in I, B \in \mathfrak{S}_i\}$$

## 2.4 Messbare Funktionen und Maße

**Definition 2.4.1.** *Seien $(\Omega_1, \mathfrak{S}_1, \mu_1), (\Omega_2, \mathfrak{S}_2, \mu_2)$ Maßräume. Dann heißt $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ maßtreu, wenn*

$$f : (\Omega_1, \mathfrak{S}_1) \to (\Omega_2, \mathfrak{S}_2)$$

*und*

$$\forall B \in \mathfrak{S}_2 : \mu_2(B) = \mu_1(f^{-1}(B)).$$

## 2.5 Zufallsvariable und ihre Vertilungen

**Definition 2.5.1.** *Sei $(\Omega, \mathfrak{S}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und*

$$X_i : (\Omega, \mathfrak{S}) \to (\Omega_i, \mathfrak{S}_i), i \in I.$$

*Wir nennen $(X_i)_{i\in I}$ unabhängig, wenn*

$$\forall n \in N \forall \{i_1, ..., i_n\} \subseteq I : \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} X_{i_k}^{-1}(A_{i_k})\right) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X_{i_k}^{-1}(A_{i_k})), A_{i_k} \in \mathfrak{S}_{i_k}.$$

### 2.5.1 Diskrete Verteilungen

**Definition 2.5.2** (Alternativ- oder Bernoulliverteilung)**.** *Sei $X$ eine Indikatorfunktion $X = A(), A \in \mathfrak{S}$.*

$$\mathbb{P}_X(\{1\}) = \mathbb{P}(A), \mathbb{P}(A) = p, \mathbb{P}_x(\{0\}) = 1 - \mathbb{P}(A)$$

*mit $0 \leq p \leq 1$ heißt Alternativ- oder Bernoulliverteilung. $p = \frac{1}{2}$ werden wir dann als Münzwurf bezeichnen.*

**Definition 2.5.3** (Diskrete Gleichverteilung: (Laplacescher Warhscheinlichkeitsraum))**.**

$$\mathbb{P}(X = x) = \frac{1}{b - a + 1}, x = a, a + 1, ..., b; a, b \in \mathbb{Z}$$

**Definition 2.5.4** (Binomialverteilung)**.** *Seien $A_1, ..., A_n$ unabhängig $\mathbb{P}(A) = p$.*

$$X = \textit{Anzahl der Ereignisse, die eintreten} \in \{0, ..., n\}$$

**Definition 2.5.5** (Poisson-Verteilung)**.** $\mathbb{P}(X = n) = \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}, n = 0, 1, ...; \lambda > 0$. *Dies ist der Grenzfall der Binomialverteilungen für $np \to \lambda$ für $n \to \infty$ (vgl Übung.)*

**Definition 2.5.6** (Geometrische Verteilung)**.**

$$G(p) : \mathbb{P}(X = n) = p(1-p)^n, n \geq 0$$

$$\tilde{G}(p), \mathbb{P}(X = n) = p(1-p)^{n-1}, n \geq 1$$

**Definition 2.5.7** (negative Binomialverteilung)**.**

$$NB(\alpha, p) : \mathbb{P}(X = n) = (1-p)^n p^\alpha \binom{n+\alpha-1}{n}, n \geq 0$$

**Definition 2.5.8** (Hypergeometrische Verteilung)**.** *Bsp: Sei eine Urne mit $N$ Kugeln, $A$ schwarze, $N - A$ weiße. Es werden $n$ Kugeln ohne zurücklegen gezogen. Sei*

$$X = \textit{Anzahl der schwarzen Kugeln unter den gezogenen}$$

*Dann ist*

$$H(N, A, n) : \mathbb{P}(X = x) = \frac{\binom{A}{x}\binom{N-A}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

$$\left(= \binom{n}{x} \frac{A \cdot (A-1) \cdots (A-x+1) \cdot (N-A) \cdots (N-A-n+x+1)}{N \cdots (N-n+1)}\right)$$

### 2.5.2 Stetige Verteilungen

**Definition 2.5.9** (Stetige Gleichverteilung)**.**

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\lambda(A)}{b-a}, A \subseteq [a, b], A \in \mathfrak{B},$$

$$F_X(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 : & x < a \\ \frac{x-a}{b-a} : & a \leq x < b \\ 1 : & x \geq b \end{array} \right\} = \int_{-\infty}^x f_x(u) du,$$

$$f_x(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} : & a \leq x \leq b \\ 0 : & \textit{sonst} \end{cases}$$

**Definition 2.5.10** (Normalverteilung)**.**

$$F_X(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

$$\mathbb{P}_X = \mathbb{P} \circ X^{-1}$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$\Rightarrow \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

**Definition 2.5.11.** *Ist die Verteilungsfunktion $F_X$ differenzierbar, so heißt $f_X = F_X'$ die Dichte (-funktion) von $X$. Es gilt hierbei*

$$f \textit{ ist Dichte} \Leftrightarrow f \geq 0, \int_{-\infty}^\infty f(x) dx = 1.$$

**Definition 2.5.12** (Exponentialverteilung $E(\lambda)$)**.**

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, x \geq 0$$

*bzw*

$$F(x) = (1 - e^{-\lambda x}), x \geq 0.$$

**Definition 2.5.13** (Gammaverteilung)**.**

$$f(x) = \frac{x^{\alpha-1}\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} e^{-\lambda x}, x \geq 0, \alpha 0, \lambda > 0$$

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$$

*wobei*

$$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha)$$

*und*

$$\forall n \in \mathbb{N} : \Gamma(n) = (n - 1)!$$

*gilt.*

**Definition 2.5.14** (Betaverteilung 1. Art, $B_1(\alpha, \beta)$)**.**

$$f(x) = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} x^{\alpha-1}(1 - x)^{\beta-1}, 0 \leq x \leq 1$$

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1 - x)^{\beta-1} dx = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)}$$

**Definition 2.5.15** (Betaverteilung 2. Art, $B_2(\alpha, \beta)$)**.**

$$f(x) = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} \cdot \frac{x^{\alpha-1}}{(1 + x)^{\alpha+\beta}}, x \geq 0.$$

**Definition 2.5.16** (Chiquadratverteilung mit $n$ Freiheitsgraden)**.**

$$\Gamma(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}) = \chi^2 n,$$

*ist für uns derzeit nicht besonders wichtig, aber in der Statistik schon.*

**Definition 2.5.17.** *Sei $X$ eine Zufallsvariable. Dann bedeutet $X \sim F$, dass $X$ die Verteilung $F$ besitzt.*

**Definition 2.5.18** (Verallgemeinerte Inverse)**.** *Die Verallgemeinerte Inverse einer Verteilungsfunktion $F$ ist*

$$F^{-1}(y) = \inf\{x : F(x) \geq y\}.$$

*Damit folgt*

$$x < F^{-1}(y) \Rightarrow F(x) < y.$$

## 2.6 Das Integral

Anschaulich: Beim Lebesgue Integral wird im Gegensatz zum Riemann-Integral der Grenzwert nicht über vertikale, sondern über horizontale „Scheiben“ gebildet.

**Definition 2.6.1.** *Sei*

$$f : (\Omega, \mathfrak{S}) \to (\mathbb{R}_0^+, \mathfrak{B})$$

*in einem Maßraum* $(\Omega, \mathfrak{S}, \mu)$. *Dann definieren wir das Lebesgue-Maß als*

$$\int f d\mu = \int_0^\infty \mu([f > y])dy,$$

*also als uneigentliches Riemann-Integral, wobei wir das Integral gleich* $\infty$ *setzen, falls es ein* $y$ *gibt, sodass* $\mu([f > y]) = \infty$.

**Definition 2.6.2** (Allgemeiner)**.** *Für*

$$f : (\Omega, \mathfrak{S}) \to (\mathbb{R}, \mathfrak{B})$$

*definieren wir*

$$f_+ := \max(f, 0)$$
$$f_- := \max(-f, 0).$$

*Dann gilt*

$$f = f_+ - f_-$$

*und wir können*

$$\int f d\mu = \int f_+ d\mu - \int f_- d\mu$$

*schreiben, falls der Ausdruck definiert ist, also nicht „*$\infty - \infty$*“ ist. Andernfalls sagen wir, dass* $\int f d\mu$ *nicht existiert. Existiert* $\int f d\mu$, *so nennen wir* $f$ *integrierbar, falls*

$$\int f d\mu < \infty.$$

**Definition 2.6.3.** *Sei*

$$\mathfrak{L}_1(\Omega, \mathfrak{S}, \mu) := \left\{ f : \left| \int f d\mu \right| < \infty \right\},$$

*also die Menge der integrierbaren Funktionen.*