Inhaltsverzeichnis

1 Maße **2**

1.1 Mengensysteme . . . 2
1.2 Maße und Inhalte . . . 3
1.3 Folgerungen für Maße . . . 3
1.4 Eigenschaften von Maßen (Inhalten) auf Ringen(Semiringen) . . . 4
1.5 Bedingte Wahrscheinlichkeit . . . 4
1.6 Der Fortsetzungssatz für Maßfunktionen . . . 4
1.7 Zusammenhang zwischen dem Maß auf dem Ring und dem Maß auf dem Sigmaring 5
1.8 Maße auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ . . . 5
1.9 Maße auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$, zweiter Anlauf . . . 6
1.10 Ergänzungen zu bedingten Wahrscheinlichkeiten . . . 6
1.11 Eigenschaften von Verteilungsfunktionen . . . 6
1.12 Maße von Mengen mit Verteilungsfunktionen . . . 6
1.13 Mehrdimensionale Lebesgue-Stieltjes Maße und Verteilungsfunktionen . . . 7
1.14 Approximationssätze und Regularität . . . 8

2 Das Lebesgue-Integral **9**

2.1 Erweiterte $\mathbb{R}$-Funktionen . . . 10
2.2 Treppenfunktionen . . . 10
2.3 Konvergenzarten . . . 10
2.4 Messbare Funktionen und Maße . . . 11
2.5 Zufallsvariable/Verteilungen . . . 12
2.5.1 Diskrete Verteilungen . . . 12
2.5.2 Stetige Verteilungen . . . 12
2.6 Das Integral . . . 12

Kapitel 1

Maße

In diesem Abschnitt werden wir uns drei Fragen stellen:

- Was können wir messen?
- Wie können wir messen?
- Wie können wir Maße ökonomisch definieren?

1.1 Mengensysteme

Lemma 1.1.1. *(i) Wenn ein Dynkinsystem abgeschlossen bezüglich $\cap$ ist, so ist es eine Sigmaalgebra.*

(ii) Sei $\mathfrak{C}$ ein Mengensystem, welches abgeschlossen bezüglich $\cap$ ist, so gilt:

$$\mathfrak{D}(\mathfrak{C}) = \mathfrak{A}_\sigma(\mathfrak{C})$$

(iii) Für endliche Maße μ, ν auf einem Ring $\mathfrak{R}$ ist

$$\{a \in \mathfrak{R} : \mu(A) = \nu(A)\}$$

ein Dynkinsystem im weiteren Sinn.

Satz 1.1.2. *Eine Mengenfunktion μ auf einem Semiring im engeren Sinn $\mathfrak{T}$ ist genau dann additiv, wenn für disjunkte Mengen $A, B \in \mathfrak{T}$ mit $A \cup B \in \mathfrak{T}$ gilt:*

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$$

Satz 1.1.3. *$\mathfrak{T}$ sei ein Semiring (in weiterem Sinne) und $I := \{1, ..., n\}$. Dann gilt:*

$$\mathfrak{R}(\mathfrak{T}) = \{\bigcup_{i=1}^{n} A_i, n \in \mathbb{N}, A_i \in \mathfrak{T}\} = \{\sum_{i=1}^{n}, n \in \mathbb{N}, A \in \mathfrak{T}\}$$

Satz 1.1.4. *Sei $\mathfrak{C}$ ein nicht leeres Mengensystem. Dann ist*

$$\{\bigcap_{i=1}^{n} A_i | n \in \mathbb{N}, A_1 \in \mathfrak{C}, A_i \in \mathfrak{C} \vee A_i^c \in \mathfrak{C}, i \geq 1\}$$

ein Semiring.

Satz 1.1.5 (monotone classstheorem)**.** *Der von einem Ring erzeugte Sigmaring stimmt mit dem erzeugten monotonen System überein (Jeder monotone Ring ist Sigmaring)*

Satz 1.1.6. *Sei* $f : \Omega_1 \to \Omega_2$, $\mathfrak{S}_2$ *Sigmaalgebra über* Ω_2 *dann ist* $f^{-1}(\mathfrak{S}_2) := \{f^{-1}(A) : A \in \mathfrak{S}_2\}$ *eine Sigmaalgebra über* Ω_1

Satz 1.1.7. *Sei* $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ *und* $\mathfrak{C}$ *ein beliebiges Mengensystem über* Ω_2

$$\Rightarrow \mathfrak{A}_\sigma(f^{-1}(\mathfrak{C})) = f^{-1}(\mathfrak{A}_\sigma(\mathfrak{C}))$$

1.2 Maße und Inhalte

Satz 1.2.1. *Seien* μ_n *Inhalte auf* $\mathfrak{C}$, *und existiere* $\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu_n(A)$. *Dann ist* μ *ein Inhalt.*

Satz 1.2.2 (Satz von Vitali-Hahn Saks:)**.** *Wenn* $\mathfrak{C}$ *ein Sigmaring ist und* μ_n *endliche Maße und für alle* $A \in \mathfrak{C} : \mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu_n(A)$, *dann ist* μ *auch ein Maß.*

Satz 1.2.3. *Sei* μ *ein Inhalt/Maß auf einem Ring. Dann gilt:*

1. *Monotonie:*
$$A, B \in \mathfrak{R}, A \subseteq B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$$

2. *Additionstheorem:*
$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$$

3. *Allgemeineres Additionstheorem:*
$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{J\subseteq\{1,\ldots,n\}, J\neq\varnothing} (-1)^{|J|-1} \mu\left(\bigcap_{i\in J} A_i\right)$$
$$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} S_k \quad \textit{für } S_k = \sum_{i\leq i_1<\ldots<i_k\leq n} \mu\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_{i_k}\right)$$

4. *Subadditivität:*
$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)$$

Satz 1.2.4. *Sei* μ *Inhalt auf* $\mathfrak{R}$, $A_n, n \in \mathbb{N}, A \subseteq \mathfrak{R}$, *dann gilt:*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} A_n \subseteq A \Rightarrow \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) \leq \mu(A)$$

1.3 Folgerungen für Maße

Satz 1.3.1. *Sei* μ *ein Maß auf* $\mathfrak{R}$*:*

1. *Stetigkeit von unten:*
$$A_n \uparrow A, A_n, A \in \mathfrak{R}$$
$$\Rightarrow \mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$$

2. *Stetigkeit von oben:*
$$A_n \downarrow A, A_n, A \in \mathfrak{R} \wedge \mu(A_1) < \infty$$
$$\Rightarrow \mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$$

1.4 Eigenschaften von Maßen (Inhalten) auf Ringen(Semiringen)

Satz 1.4.1. *Sei μ ein Maß auf dem Ring $\mathfrak{R}$, $A_n \uparrow A$, $A_n, A \in \mathfrak{R}$. Dann gilt*

$$\mu(A) = \lim_{n \to \infty} \mu(A_n)$$

Entsprechendes für $A_n \downarrow A$.

Satz 1.4.2. *Sei μ Inhalt auf Ring $\mathfrak{R}$ ist genau dann ein Maß, wenn μ stetig von unten ist.*

Satz 1.4.3. *Sei μ ein endlicher Inhalt auf einem Ring $\mathfrak{R}$. Dann ist μ genau dann ein Maß, wenn er stetig von oben bei $\varnothing$ ist, also*

$$A_n \downarrow \varnothing \Rightarrow \mu(A_n) \to 0.$$

Satz 1.4.4. *Sei μ ein Maß auf dem Ring(Semiring) $\mathfrak{R}$, $A_n, A \in \mathfrak{R}$ mit*

$$A \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$$

so gilt

$$\mu(A) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n). \text{ (μ ist abzählbar-, bzw sigmasubadditiv)}$$

Satz 1.4.5. *Sei μ ein Maß auf dem Sigmaring $\mathfrak{R}$ und A_n eine Folge von Mengen aus $\mathfrak{R}$. Dann gilt:*

$$\limsup_{n \to \infty} A_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{k \geq n} A_k$$

Satz 1.4.6. *Lemma von Borel Cantelli:*
Sei μ ein Maß auf einem Sigamring $\mathfrak{R}$. Ist $\sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n) < \infty$ für $A_n \in \mathfrak{R}$, so gilt:

$$\mu(\limsup_{n \to \infty} A_n) = 0$$

1.5 Bedingte Wahrscheinlichkeit

Satz 1.5.1 (Borel-Cantelli II)**.** *Sei $(\Omega, \mathfrak{S}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Sei $A_n \in \mathfrak{S}$ eine Folge unabhängiger Ereignisse.*
Ist nun

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = \infty$$

so folgt

$$\mathbb{P}(\limsup_{n \to \infty} A_n) = 1$$

1.6 Der Fortsetzungssatz für Maßfunktionen

In diesem Abschnitt werden wir den folgenden Satz beweisen:

Satz 1.6.1 (Fortsetzungssatz für Maßfunktionen)**.** *Sei μ ein Maß auf einem Ring $\mathfrak{R}$. Dann gilt:*

1. *μ kann zu einem Maß $\widetilde{\mu}$ auf dem erzeugten Sigmaring fortgesetzt werden.*
2. *Wenn μ sigmaendlich ist, dann ist $\widetilde{\mu}$ eindeutig bestimmt.*

Satz 1.6.2 (Eigenschaften von äußeren Maßfunktionen)**.** *Sei μ ein Maß und μ^* das von μ erzeugte äußere Maß. Dann gilt:*

1. *$\mu^*(A) \geq 0$*

2. $\mu^*(\varnothing) = 0$
3. *Monotonie:*
$$A \subseteq B \subseteq \Omega \Rightarrow \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$$
4. *Sigmasubadditivität:*
$$A \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \subseteq \Omega$$
$$\Rightarrow \mu^*(A) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(A_n)$$

Satz 1.6.3. 1. *m ist eine Sigmaalgebra, $\mu^*|_m$ ein Maß.*

2. *Wenn μ^* von einem Maß μ auf einem Ring $\mathfrak{R}$ erzeugt wird und $\mu^*(B) = \mu(B)$, so folgt $\mathfrak{R} \subseteq m$.*

Satz 1.6.4. *Ist $\widetilde{\mu}$ eine Fortsetzung von μ auf $\mathfrak{R}_\sigma(\mathfrak{R})$ ist, dann gilt*
$$\widetilde{\mu} = \mu^*|_{\mathfrak{R}_\sigma}$$

Satz 1.6.5. *Ist μ auf $\mathfrak{R}$ sigmaendlich, dann auch auf dem erzeugten Sigmaring.*

Satz 1.6.6. *Für $A \in \mathfrak{R}_\sigma(\mathfrak{R}) : \widetilde{A} \leq \mu^*(A)$*

Satz 1.6.7. *$\widetilde{\mu}(A) = \mu^*(A)$ (siehe oben)*

1.7 Zusammenhang zwischen dem Maß auf dem Ring und dem Maß auf dem Sigmaring

Satz 1.7.1 (Approximationstheorem I)**.** *Sei μ ein sigmaendliches Maß auf einem Ring $\mathfrak{R}$. Sei $A \in \mathfrak{R}_\sigma(\mathfrak{R}), \mu(A) < \infty$. Dann gilt*
$$\forall\epsilon > 0 : \exists B \in \mathfrak{R} : \mu(A\Delta B) < \epsilon$$

Satz 1.7.2. *Ist A messbar, so kann man A schreiben als Vereinigung einer Menge aus dem Sigmaring und einer Nullmenge, also*
$$A = F \cup N, F \in \mathfrak{R}_\sigma, N \subseteq M \in \mathfrak{R}_\sigma : \mu(M) = 0$$

Satz 1.7.3. *Ist $\mu*$ das von einem Maß μ auf dem Ring $\mathfrak{R}$ erzeugte äußere Maß, so ist ein $A \subseteq \Omega$ messbar genau dann, wenn*
$$\forall B \in \mathfrak{R} : (\mu^*(B) =)\mu(B) = \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \setminus A).$$
Ist zusätzlich $\mu(\Omega) < \infty$ $(\mu^*(\Omega) < \infty)$, dann ist A messbar, wenn
$$\mu(\Omega) = \mu^*(A) + \mu^*(A^c).$$

1.8 Maße auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$

Die Frage, die sich stellt ist: Ist μ^* auf $\mathbb{R}$ frei definiert, wann gilt $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{M}_{\mu^*}$?

Satz 1.8.1 (Satz von Carathéodory)**.** *$\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{M}_{\mu^*}$ genau dann, wenn μ^* arithmetisch ist.*

1.9 Maße auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$, zweiter Anlauf

Im folgenden ist immer $\mathfrak{T} := \{(a, b], a \leq b, a, b \in \mathbb{R}\}$.

Satz 1.9.1. *μ ist genau dann endliches Maß auf $\mathfrak{T}$, wenn*

$$\forall x \in \mathbb{R} \exists \delta(x) > 0 : \mu((x - \delta(x), x]) < \infty$$

Satz 1.9.2. *Zu jeder Lebesgue-Stieltjes Maßfunktion gibt es eine Verteilungsfunktion. Diese ist bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt.*

1.10 Ergänzungen zu bedingten Wahrscheinlichkeiten

Satz 1.10.1 (Satz von der vollständigen Wahrscheinlichkeit)**.** *Sei $(\Omega, \mathfrak{S}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Sei dann $(B_i, i \in I)$ eine Partition, I höchstens abzählbar mit $B_i \in \mathfrak{S}, \mathbb{P}(B_i) > 0, \sum_{i \in I} B_i = \Omega$ und $A \in \mathfrak{S}$. Dann ist*

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(B_i)\mathbb{P}(A|B_i).$$

Satz 1.10.2 (Satz von Bayes)**.** *Sei $(\Omega, \mathfrak{S}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Sei wieder $(B_i, i \in I)$ eine Partition, I höchstens abzählbar mit $B_i \in \mathfrak{S}, \mathbb{P}(B_i) > 0, \sum_{i \in I} B_i = \Omega$ und $A \in \mathfrak{S}$. Zusätzlich zu vorher gelte $\mathbb{P}(A) > 0$. Dann gilt:*

$$\mathbb{P}(B_i|A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B_i)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(B_i)\mathbb{P}(A|B_i)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(B_i)\mathbb{P}(A|B_i)}{\sum_{j \in I} \mathbb{P}(B_j)\mathbb{P}(A|B_j)}$$

1.11 Eigenschaften von Verteilungsfunktionen

Satz 1.11.1. *Sei $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Verteilungsfunktion. Dann gilt:*

1. *Monotonie:*
$$a \leq b \Rightarrow F(a) \leq F(b)$$
2. *Rechtsstetigkeit:*
$$b_n \downarrow b \Rightarrow F(b_n) \downarrow F(b)$$

Satz 1.11.2. *Sei $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nichtfallend und rechtsstetig. Dann ist durch*

$$\mu_F((A, b]) := F(b) - F(a)$$

ein Maß auf $\mathfrak{T} = \{(a, b], a \leq b, a, b, \in \mathbb{R}\}$ definiert.

1.12 Maße von Mengen mit Verteilungsfunktionen

Ab diesem Kapitel werden wir offene Intervallgrenzen auch mit eckigen Klammern schreiben.
Wir wissen schon:

$$\mu(]a, b]) = F(b) - F(a).$$

Was passiert, für$\mu([a, b]), \mu(]a, b[), \mu([a, b[)$?

$$\mu([a, b]) = \mu(\bigcap_{n \in \mathbb{N}}]a - \frac{1}{n}, b]) = \lim_{n \to \infty} \mu(F(b) - F(a - \frac{1}{n})) = F(b) - F(a - 0)$$

$$\mu(]a, b[) = \mu(\bigcup_{n \in \mathbb{N}}]a, b - \frac{1}{n}]) = \lim_{n \to \infty} (F(b - \frac{1}{n}) - F(a)) = F(b - 0) - F(a)$$

$$\mu([a,b[) = F(b-0) - F(a-0)$$

Und damit auch

$$\mu(\{x\}) = \mu([x,x]) = F(x) - F(x-0)(= \text{Sprunghöhe von } F \text{ in } x)$$

Satz 1.12.1. *Jedes (sigma-)endliche Maß μ auf $(\Omega, \mathfrak{S})$ lässt sich darstellen als Summe eines stetigen Maßes μ_c und eines diskreten Maßes μ_d, wobei*

- *μ_d diskret, wenn es eine Menge D gib, die höchstens abzählbar ist, sodass*

$$\mu(D^c) = 0.$$

- *μ_c stetig, wenn*

$$\forall w \in \Omega : \mu_c(\{w\}) = 0.$$

Nämlich

$$\mu(A) = \mu(A \cap D^c) + \mu(A \cap D) = 0 + \mu(\bigcup_{x \in A \cap D} \{x\}) = \sum_{x \in A \cap D} \mu(\{x\}) = \sum_{x \in A} \mu(\{x\})$$

Satz 1.12.2. *Jede diskrete Verteilungsfunktion (Verteilungsfunktion eines diskreten, endlichen Maßes) auf $\mathbb{R}$ lässt sich anschreiben als*

$$F(x) = \sum_{y \leq x} p(y).$$

Ist $\sum_{y \in \mathbb{R}} p(y) = 1$, so nennen wir p Wahrscheinlichkeitsfunktion. Umgekehrt gibt es zu jeder Funktion p mit $p(y) \geq 0$ eine diskrete Verteilungsfunktion.

Satz 1.12.3. *Ist eine Verteilungsfunktion $F(x)$ (stückweise) stetig differenzierbar, $f(x) := F'(x) \geq 0$, so ist*

$$\mu_F(]a,b]) = \int_a^b f(x)dx.$$

$f(x)$ heißt dann Dichtefunktion.

1.13 Mehrdimensionale Lebesgue-Stieltjes Maße und Verteilungsfunktionen

Der hier verwendete Maßraum ist $(\mathbb{R}^d, \mathfrak{B}_d)$ mit

$$\mathfrak{B}_d := \mathfrak{A}_\sigma\left(\{]a,b] : a,b \in \mathbb{R}, a \leq b\}\right),$$

wobei die Ungleichung $a \leq b$ komponentenweise zu verstehen ist, also

$$a \leq b :\Leftrightarrow \forall i \in \{1,...,d\} : a_i \leq b_i$$

und

$$]a,b] :=]a_1,b_1] \times]a_2,b_2] \times ... \times]a_d,b_d]$$

Satz 1.13.1. *F ist eine Verteilungsfunktion von einem Lebesgue-Stieltjes Maß μ, wenn*

- *F rechtsstetig ist, also*

$$x_n \downarrow x \Rightarrow F(x_n) \downarrow F(x)$$

- *F monoton ist, also*

$$a \leq b \Rightarrow F(b_1,b_2) - F(a_1,b_2) - F(b_1,a_2) + F(a_1,a_2) \geq 0$$

Satz 1.13.2. *Sei λ_d das Lebesguemaß auf $\mathfrak{B}_d$. Dann gilt:*

- λ_d *ist translationsinvariant:*
$$A \oplus c := \{x + c : x \in A\},$$
$$A \in \mathfrak{L}_d, c \in \mathbb{R}^d \Rightarrow A \oplus c \in \mathfrak{L}_d, \lambda_d(A \oplus c) = \lambda_d(A)$$

Satz 1.13.3. *Wenn μ auf $(\mathbb{R}^d, \mathfrak{B}_d)$ ein translationsinvariantes Lebesgue-Stieltjes Maß ist, dann gilt*
$$\mu = c\lambda_d, c \geq 0.$$

Satz 1.13.4. *Seien Ω_1, Ω_2 Mengen und $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2$ Mengensysteme über Ω_1, Ω_2. Dann ist*
$$\mathfrak{A}_\sigma(\mathfrak{C}_1) \times \mathfrak{A}_\sigma(\mathfrak{C}_2) = \mathfrak{A}_\sigma(\mathfrak{C}_1 \otimes \mathfrak{C}_2),$$
wobei
$$\mathfrak{C}_1 \otimes \mathfrak{C}_2 := \{A_1 \times A_2 : A_1 \in \mathfrak{C}_1, A_2 \in \mathfrak{C}_2\}$$
und
$$\mathfrak{A}_\sigma(\mathfrak{C}_1) \times \mathfrak{A}_\sigma(\mathfrak{C}_2) := \mathfrak{A}_\sigma(\mathfrak{A}_\sigma(\mathfrak{C}_1 \otimes \mathfrak{C}_2))$$

1.14 Approximationssätze und Regularität

Satz 1.14.1. *Ein regulärer Inhalt ist ein Maß.*

Satz 1.14.2. *Sei μ ein Lebesgue-Stieltjes Maß auf $(\mathbb{R}^d, \mathfrak{B}_d)$, dann ist μ regulär von oben.*

Satz 1.14.3. *Ist μ ein sigmaendliches Maß auf $(\mathbb{R}^d, \mathfrak{B}_d)$, so ist μ regulär von unten.*

Zusammenfassend ergibt das dann:

Satz 1.14.4. *Jedes Lebesgue-Stieltjes Maß ist regulär.*

Satz 1.14.5. *Ein endliches/sigmaendliches Maß μ auf $(\mathbb{R}^d, \mathfrak{B}_d)$ ist regulär von unten.*

Kapitel 2

Das Lebesgue-Integral

Motivation für dieses Kapitel: Wir wollen einen neuen Integralbegriff auf Basis des Riemann-Integrals definieren,

$$\int f = \int_0^\infty \mu([f > x])dx,$$

wobei f auf beliebigen Mengen definiert sein darf, also wenn μ Maß auf einem Messraum $(\Omega, \mathfrak{S})$, dann ist

$$f : \Omega \to \mathbb{R}$$

und $\mu([f > x])$ definiert sein soll, also $[f > x] \in \sigma$, wobei

$$[f > x] := \{\omega \in \Omega : f(\omega) > x\}.$$

Satz 2.0.1. *Sei $\mathfrak{C}$ ein Mengensystem über Ω_2, das $\mathfrak{S}_2$ erzeugt, $\mathfrak{S}_2 = \mathfrak{A}_\sigma(\mathfrak{C})$, dann ist $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ $\mathfrak{S}_1 - \mathfrak{S}_2$-messbar genau dann, wenn*

$$f^{-1}(\mathfrak{C}) \subseteq \mathfrak{S}_1$$

Satz 2.0.2. *Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, bzw $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, dann ist f Borelmessbar, wenn f*

- *monoton oder*
- *stetig*

ist.

Satz 2.0.3. *Ist*

$$f_1 : (\Omega_1, \mathfrak{S}_1) \to (\Omega_2, \mathfrak{S}_2)$$

und

$$f_2 : (\Omega_2, \mathfrak{S}_2) \to (\Omega_3, \mathfrak{S}_3),$$

dann ist auch

$$f_2 \circ f_1 : (\Omega_1, \mathfrak{S}_1) \to (\Omega_3, \mathfrak{S}_3)$$

messbar.

Satz 2.0.4. *Seien $(\Omega_1, \mathfrak{S}_1), (\Omega_2, \mathfrak{S}_2), (\Omega_3, \mathfrak{S}_3)$ Messräume. Wir bilden den Produktraum $(\Omega_2 \times \Omega_3, \mathfrak{S}_2 \times \mathfrak{S}_3)$. Dann ist*

$$f : \Omega_1 \to \Omega_2 \times \Omega_3, f = (f_2, f_3)$$

genau dann

$$f : (\Omega_1, \mathfrak{S}_1) \to (\Omega_2 \times \Omega_3, \mathfrak{S}_2 \times \mathfrak{S}_3),$$

wenn

$$f_2 : (\Omega_1, \mathfrak{S}_1) \to (\Omega_2, \mathfrak{S}_2)$$

und

$$f_3 : (\Omega_1, \mathfrak{S}_1) \to (\Omega_3, \mathfrak{S}_3).$$

Satz 2.0.5. *Ist* $f : \mathbb{R}^{d_1} \to \mathbb{R}^{d_2}$ *stetig, so ist* f *Borel-messbar.*

Satz 2.0.6. *Ist* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *monoton, so ist* f *Borel-messbar.*

Satz 2.0.7. $f := (f_1, ..., f_d) : (\Omega, \mathfrak{S}) \to (\mathbb{R}^d, \mathfrak{B}_d)$ *genau dann, wenn*

$$\forall i = 1, ..., d : f_i : (\Omega, \mathfrak{S}) \to (\mathbb{R}, \mathfrak{B}).$$

Satz 2.0.8. *Aus* $f_i : (\Omega, \mathfrak{S}) \to (\mathbb{R}, \mathfrak{B})$, $i = 1, 2$ *folgt*

1. $f_1 + f_2 : (\Omega, \mathfrak{S}) \to \mathbb{R})$,
2. $f_1 f_2 : (\Omega, \mathfrak{S}) \to \mathbb{R})$,
3. $f_1 \wedge f_2 : (\Omega, \mathfrak{S}) \to \mathbb{R})$,
4. $f_1 \vee f_2 : (\Omega, \mathfrak{S}) \to \mathbb{R})$.

2.1 Erweitert reellwertige Funktionen

Whaaaaat??
Kuso abschreiben... S.86

Satz 2.1.1. *Sei* f_n *eine Folge messbarer Funktionen. Dann ist*

$$M := [\liminf f_n = \limsup f_n] \in \mathfrak{S}$$

Satz 2.1.2 (7.24)**.**

2.2 Treppenfunktionen

Lemma 2.2.1. *Eine Funktion* $t : \Omega \to \mathbb{R}$ *ist genau dann eine Treppenfunktion, wenn es Mengen* $B_1, ..., B_m$ *und reelle Zahlen gibt, sodass* $t = \sum_{j=1}^{m} \beta_j \mathbb{1}_{B_j}$.

Satz 2.2.2. *Zu jeder messbaren positiven Funktion* f *gibt es eine monoton steigende Folge* (t_n) *aus positiven Treppenfunktionen, sodass*

$$\forall \omega \in \Omega : f(\omega) = \lim_{n\to\infty} t_n(\omega).$$

Weiters gibt es zu jeder messbaren Funktion f *eine Folge* (t_n) *aus Treppenfunktionen, sodass*

$$\forall \omega \in \Omega : f(\omega) = \lim_{n\to\infty} t_n(\omega)$$

und

$$\forall n \in \mathbb{N} : |t_n| \leq |f|.$$

Ist f *beschränkt, so konvergiert* (t_n) *gleichmäßig gegen* f.

2.3 Konvergenzarten

Satz 2.3.1. *Sei*

$$\mathfrak{F} := \{f : (\mathbb{R}^{(n)}, \mathfrak{B}_{(n)}) \to (\mathbb{R}^{(m)}, \mathfrak{B}_{(m)})\}.$$

Nun ist $\mathfrak{F}$ *die kleinste Menge der reellen Funktionen, die die stetigen Funktionen enthält und bezüglich der Bildung von punktweisen Grenzwerten abgeschlossen ist*

Satz 2.3.2. *Sei $c > 0$. Dann ist*

$$\text{ess sup}\, cf = c\, \text{ess sup}\, f.$$

Weiters ist für $f, g \geq 0$

$$\text{ess sup}\, f + g \leq \text{ess sup}\, f + \text{ess sup}\, g$$

Satz 2.3.3 (Satz von Egorov)**.** *Sei $(\Omega, \mathfrak{S}, \mu)$ endlich*

$$f_n, f : (\Omega, \mathfrak{S}) \to (\mathbb{R}, \mathfrak{B})$$

dann ist

$$f_n \to f \ \mu - \textit{fast überall} \Leftrightarrow f_n \to f \ \mu - \textit{fast gleichmäßig}.$$

Satz 2.3.4. *Gilt $f_n \to f$ im Maß und $f_n \to g$ im Maß, so folgt*

$$f = g \ \textit{fast überall.}$$

Lemma 2.3.5. *Sei $\mathcal{L}_0 = \{f : (\Omega, \mathfrak{S}) \to (\mathbb{R}, \mathfrak{B})\}$. Dann ist*

$$d(f, g) := \inf\{\varepsilon > 0 : \mu([|f - g| > \varepsilon]) < \varepsilon\}$$

eine Pseudometrik auf $\mathcal{L}_0$. d heißt Lévy-Metrik.

Im Folgenden arbeiten wir auf den folgenden Satz hin:

Satz 2.3.6. *(L_0, d) ist vollständig.*

Satz 2.3.7. *Sei (f_n). Es gilt*

$$f_n \to f \ \textit{im Maß} \Leftrightarrow d(f_n, f) \to 0.$$

Satz 2.3.8. *Sei (f_n) Cauchyfolge im Maß. Dann existiert eine Teilfolge (f_{n_k}), die fast gleichmäßig konvergiert.*

Erinnerung: Sei

$$f : \Omega_1 \to \Omega_2,$$

$\mathfrak{S}_2$ Sigmaalgebra über Ω_2, $f^{-1}(\mathfrak{S}_2)$ ist Sigmaalgebra über Ω_1 (und zwar die kleinste Sigmaalgebra, bezüglich der f messbar ist).

Satz 2.3.9. *Sei $f : \Omega_1 \to \Omega_2$, $(\Omega_2, \mathfrak{S}_2)$ ein Messraum. Dann ist*

$$g : \Omega_1 \to \mathbb{R}$$

genau dann bezüglich $f^{-1}(\mathfrak{S}_2)$ messbar (also $g : (\Omega_1, f^{-1}(\mathfrak{S}_2)) \to (\mathbb{R}, \mathfrak{B})$) wenn es ein $h : (\Omega_2, \mathfrak{S}_2) \to (\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ mit $g = h \circ f$ gibt.

2.4 Messbare Funktionen und Maße

Satz 2.4.1. *Sei $(\Omega_1, \mathfrak{S}_1, \mu_1)$ ein Maßraum und $(\Omega_2, \mathfrak{S}_2)$ ein Messraum. Für eine Funktion*

$$f : (\Omega_1, \mathfrak{S}_1) \to (\Omega_2, \mathfrak{S}_2)$$

kann man ein eindeutig bestimmtes Maß

$$\mu_2(B) = \mu_1(f^{-1}(B))$$

definieren, sodass f eine maßtreue Abbildung wird. μ_2 heißt das von f induzierte Maß.

2.5 Zufallsvariable und ihre Vertilungen

2.5.1 Diskrete Verteilungen

2.5.2 Stetige Verteilungen

Satz 2.5.1. *Sei $U \sim U[0,1]$ und F eine Verteliungsfunktion. Dann ist*

$$F^{-1}(U) \sim F.$$

Satz 2.5.2. *Sei F stetig und $X \sim F$. Dann gilt*

$$F(X) \sim U(0,1).$$

2.6 Das Integral

Anschaulich: Beim Lebesgue Integral wird im Gegensatz zum Riemann-Integral der Grenzwert nicht über vertikale, sondern über horizontale „Scheiben“ gebildet.

Satz 2.6.1.

(1) Sei $f \geq 0$. Dann gilt

$$\int f \geq 0,$$

wobei

$$\int f = 0 \Leftrightarrow f = 0\mu - \textit{fast überall}$$

gilt.

(2) Sei $f \leq g$, so folgt

$$\int f \leq \int g.$$

(3) Sei $c \geq 0$, dann gilt

$$\int cf = c \int f.$$

(4) Seien f, g. Dann gilt

$$\int (f+g) = \int f + \int g.$$

(5) Satz von der monotonen Konvergenz, Satz von Beppo-Levi:
Sei $f_n \uparrow f$. Dann folgt

$$\int f_n \uparrow \int f$$

(6) Sei $f = \sum_{i=1}^n a_i A_i(), a_i \geq 0, A_i \in \mathfrak{S}$ disjunkt, also eine Treppenfunktion. Dann gilt

$$\int f d\mu = \sum_{i=1}^n a_i \mu(A_i)$$

(7) Gilt $f = g$ μ-fast überall, so folgt

$$\int f = \int g$$

(8)

$$\mu(A) := \int_A f = \int A()f$$

ist ein Maß.

Satz 2.6.2. *Für eine messbare Funktion f gilt nun*

(1) $f = g$ *μ-fast überall, dann folgt*

$$\int f = \int g$$

(2)

$$\int cf = c \int f$$

(3)

$$\int f + g = \int f + \int g$$

(4)

$$\sigma(A) = \int_A f d\mu$$

ist sigmaadditiv.

Satz 2.6.3. *Sei f fast überall messbar. Dann kann man f erweitern:*

$$\exists \tilde{f} \; messbar : f = \tilde{f} \quad \mu - fast\ \ddot{u}berall$$