Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

$\mathfrak{L}_p$ Räume

1.1 Voraussetzungen

Frage: Wann gibt es für zwei Maßfunktionen μ, ν auf dem selben Messraum so, dass

$$\nu(A) = \int_A f d\mu?$$

Satz 1.1.1 (Radon-Nikodym)**.** *Seien μ eine Maßfunktion und f eine messbare Funkion. Dann ist durch*

$$\nu(A) = \int_A f d\mu$$

ein Maß definiert und es ist äquivalent

$$\mu \text{ ist sigmaendlich} \Leftrightarrow \nu \text{ absolutstetig bezüglich } \mu.$$

Beweis. wird später bewiesen, wir benötigen ihn nur in diesem Kapitel.

Definition 1.1.2. *Es ist*

$$\mathfrak{L}_p = \mathfrak{L}_p(\Omega, \mathfrak{S}, \mu) = \{f : (\Omega, \mathfrak{S}) \to (\mathbb{R}, \mathfrak{B}), \int |f|^p d\mu < \infty\}.$$

Weiters ist die p-Norm

$$\|f\|_p := \left(\int |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

für $0 < p < \infty$.

Satz 1.1.3. *Für $p \geq 1$ ist $\|\cdot\|_p$ eine Seminorm auf $\mathfrak{L}_p$. Für $0 < p < 1$ ist $\|\cdot\|_p$ eine Pseudonorm. $\mathfrak{L}_p$ sind weiters Vektorräume (über $\mathbb{R}$).*

Beweis. Dass $\|\cdot\|_p$ Semi/Pseudonormen sind, wird durch die folgenden Hilfssätzen bewiesen.
Seien also $f, g \in \mathfrak{L}_p$, $c \in \mathbb{R}$. Dann ist wegen

$$\|cf\| = |c| \, \|f\|$$

auch $cf \in \mathfrak{L}_p$. Weiters gilt

$$|f+g|^p \leq (|f| + |g|)^p \leq (2 \cdot \max(|f|, |g|))^p = 2^p \max(|f|^p, |g|^p) \leq 2^p(|f|^p + |g|^p),$$

womit

$$\|f+g\|_p^p \leq 2^p(\|f\|_p^p + \|g\|_p^p)$$

folgt, also $f + g \in \mathfrak{L}_p$.

Lemma 1.1.4 (Hilfssatz 1, Ungleichung von Jensen). *Sei $(\Omega, \mathfrak{S}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $f \in \mathfrak{L}_1(\Omega, \mathfrak{S}, \mathbb{P})$, $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvex. Dann gilt*

$$\int h \circ f d\mathbb{P} \geq h\left(\int f d\mathbb{P}\right).$$

Beweis. Sei

$$m = \int f d\mathbb{P}.$$

Nun gilt, da h konvex ist

$$h(x) \geq h(m) + h'(m)(x - m)$$

also

$$h \circ f \geq h(m) + h'(m)(f - m)$$

$$\int h \circ f d\mathbb{P} \geq h(m) + h'(m)\left(\underbrace{\int f d\mathbb{P}}_{m} - m\right) = h(m).$$

Lemma 1.1.5 (Hilfssatz 2, Ungleichung von Hölder). *Sei $(\Omega, \mathfrak{S}, \mu)$ ein Maßraum, $f, g \geq 0 \in \mathfrak{L}_1(\Omega, \mathfrak{S}, \mu)$ und $0 < \alpha < 1$. Dann ist*

$$\int f^\alpha g^{1-\alpha} d\mu \leq \left(\int f d\mu\right)^\alpha \left(\int g d\mu\right)^{1-\alpha}.$$

Beweis. Fall 1: $\int f d\mu = 0$. Also verschwindet f fast überall, also auch f^α, womit beide Seiten der Ungleichung gleich 0 sind.
Fall 2: $\int f d\mu > 0$. Wir können nun das Wahrscheinlichkeitsmaß

$$\mathbb{P}(A) := \frac{\int_A f d\mu}{\int f d\mu}$$

definieren. Behauptung:

$$\frac{\left(\int g d\mu\right)^{1-\alpha}}{\left(\int f d\mu\right)^{1-\alpha}} \geq \frac{\int f^\alpha g^{1-\alpha} d\mu}{\int f d\mu}$$

$$\left(\int \frac{g}{f} d\mathbb{P}\right)^{1-\alpha} \geq \int \left(\frac{g}{f}\right)^{1-\alpha} d\mathbb{P}$$

$$\int \left(\left(\frac{g}{f}\right)^{1-\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} d\mathbb{P} \geq \left(\int \left(\frac{g}{f}\right)^{1-\alpha} d\mathbb{P}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

Wir setzen nun $h(x) = x^{\frac{1}{1-\alpha}}$, also h konvex. Dann setzen wir in der Ungleichung von Jensen $f := \left(\frac{g}{f}\right)^{1-\alpha}$ und die Ungleichung ist gezeigt.

Satz 1.1.6 (Alternative Formulierung der Ungleichung von Hölder). *Ist $f \in \mathfrak{L}_p, g \in \mathfrak{L}_q$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, also $q = \frac{p}{p-1}$, so ist $f \cdot g \in \mathfrak{L}_1$ und*

$$\left|\int f g\right| \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q.$$

Beweis. Wir setzen $\alpha := \frac{1}{p}, f := |f|^p, g := |g|^p$.

Bemerkung. Die Hölderungleichung gilt auch für $p = 1, q = \infty \to$ HÜ

Satz 1.1.7 (Hilffsatz 3, Dreiecksungleichung der p-Norm, Ungleichung von Minkowski). *Für $f, g \in \mathfrak{L}_p$ und $1 \leq p < \infty$ ist*

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p \,.$$

Beweis. Fall 1: $\|f+g\|_p = 0$, in diesem Fall sind wir fertig. Fall 2: $\|f+g\|_p \neq 0$. Es gilt:

$$\|f+g\|_p^p = \int |f+g|^p = \int |f+g| \cdot |f+g|^{p-1} \leq \int (|f|+|g|)|f+g|^{p-1} \leq \int |f| \cdot |f+g|^{p-1}$$

Mit der Hölderschen Ungleichung folgt dann

$$\int |f| \cdot |f+g|^{p-1} \leq \|f\|_p \cdot \left\| |f+g|^{p-1} \right\| + \|g\|_p \cdot \left\| |f+g|^{p-1} \right\|_q$$

Nun ist

$$\| |f+g|^p \|_q = \left(\int |f+g|^{(p-1)\frac{p}{p-1}} \right)^{\frac{p-1}{p}} = \left(\int |f+g|^p \right)^{\frac{p-1}{p}} = \|f+g\|_p^{p-1}$$

also insgesamt

$$\|f+g\|_p^p \leq (\|f\|_p + \|g\|_p) \cdot \|f+g\|_p^{p-1} \,.$$

Definition 1.1.8. *Es ist*

$$L_p = \mathfrak{L}_p \backslash \sim$$

wobei

$$f \sim g \Leftrightarrow f = g \;\; \mu \text{ fast überall.}$$

Damit ist $(L_p, \|\cdot\|_p)$ ein normierter Vektorraum.

Lemma 1.1.9 (Hilfssatz). *Sind $x, y \geq 0$, $0 < p < 1$, so gilt*

$$(x+y)^p \leq x^p + y^p.$$

Beweis. Sei $f(x) := (x+y)^p - x^p$. Dann ist

$$f'(x) = p((x+y)^p - x^p - 1) \leq 0$$

also f monoton fallend.

Satz 1.1.10. *Für $0 < p < 1$ ist $\|\cdot\|_p$ eine Norm.*

Beweis. Mit dem Hilfssatz folgt

$$\|f+g\|_p^p = \int |f+g|^p \leq \int |f|^p + \int |g|^p = \|f\|_p + \|g\|_p \,.$$

Satz 1.1.11. *Auf L_p ist $d(f,g) = \|f-g\|_p^p$ eine Metrik.*

Beweis.

$$\|f+g\|_p \leq \left(\|f\|_p^p + \|g\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq 2^{\frac{1}{p}} \left(\frac{\|f\|_p^p + \|g\|_p^p}{2} \right)^{\frac{1}{p}} \leq 2^{\frac{1}{p}} \left(\frac{\|f\|_p + \|g\|_p}{2} \right)$$

womit wir mit $c = 2^{\frac{1}{p}-1}$ die Behauptung erhalten.

Definition 1.1.12. *Sei (f_n) eine Folge, $f_n \in \mathfrak{L}_p$. Dann sagen wir, (f_n) konvergiert im p-ten Mittel gegen $f \in \mathfrak{L}_p$, $f_n \to_p f$, wenn*

$$\|f_n - f\|_p \to 0.$$

Analog definiert man eine Cauchyfolge im $p-$ten Mittel.

1.2 Kriterien für die Konvergenz im p-ten Mittel

Wir suchen zunächst nach notwendigen Bedingungen:

1. $\|f_n\|_p \to \|f\|_p$, da
$$|\,\|f_n\|_p - \|f\|_p\,| \le \|f_n - f\|_p\,.$$
2. $f_n \to f$ im Maß aufgrund der Ungleichung von Markov
$$\mu([|f_n - f| \ge \varepsilon]) = \mu([|f_n - f|^p \ge \varepsilon^p]) \le \frac{\int |f_n - f|^p}{\varepsilon^p} = \frac{\|f_n - f\|_p^p}{\varepsilon^p}$$

zusammen sind diese schon hinreichend:

Satz 1.2.1.
$$f_n \to_p f \Leftrightarrow (1)\ \textit{und}\ (2)$$

Beweis. am Donnerstag

Satz 1.2.2 (Riesz-Fischer)**.** *Die L_p sind vollständig.*

Satz 1.2.3 (Kriterium für L_p-Konvergenz)**.** *Es ist äquivalent:*

$$\underbrace{f_n \to_p f}_{C} \Leftrightarrow \underbrace{f_n \to f \ \textit{im Maß}\ \|f_n\|_p \to \|f\|_p}_{A}$$

und

$$f_n \to_p f \Leftrightarrow \underbrace{f_n \to f \ \textit{im Maß und}\ |f_n|^p \ \textit{gleichmäßig integrierbar}}_{B}$$

Beweis. Wir wissen schon $(C) \Rightarrow (A)$.
Wir zeigen nun $(A) \Rightarrow (B)$.
Behauptung:
$$|f_n|^p \Rightarrow |f|^p \text{ im Maß}$$

Es gilt

$$\begin{aligned}\mu(||f_n|^p - |f|^p| > \varepsilon) &\le \mu(||f_n|^p - |f|^p| > \varepsilon, |f_n|, |f| \le M) + \mu(|f_n| > M) + \mu(|f| > M)\\ &\le \mu(||f_n|^p - |f|^p > \varepsilon, |f_n|, |f| \le M) + \frac{\|f_n\|_p^p}{M^p} + \frac{\|f\|_p^p}{M^p}\end{aligned}$$

Für M hinreichend groß können wir die rechte Seite beliebig klein machen, damit folgt aus einem früheren Satz die gleichmäßige Integrierbarkeit.
$(B) \Rightarrow (C)$: Es ist klarerweise $|f - f_n|$ integrierbar, damit erhalten wir

$$\int |f - f_n|^p \to \int \underbrace{|f - f_n|^p}_{0} = 0.$$

Beweis (Riesz-Fischer). Sei (f_n) eine Cauchy-Folge in L_p, also

$$\lim_{n,m\to\infty} \|f_n - f_m\|_p = 0.$$

Es gilt

$$\mathbb{P}(|f_n - f_m| \ge \varepsilon)) \le \frac{\|f_n - f_m\|^p}{\varepsilon^p} \to 0$$

also ist (f_n) eine Cauchyfolge im Maß. Daher

$$\exists f_n \to f \text{ im Maß}$$

$$\exists f_{m_k} : f_{m_k} \to f \text{ fast überall}$$

also $f \in \mathcal{L}_p$. Damit auch

$$|f_{m_k}|^p \to |f|^p \text{ fast überall}$$

und mit dem Lemma von Fatou:

$$\int \liminf_{k\to\infty} |f_{m_k}|^p \leq \liminf_{k\to\infty} \int |f_{m_k}|^p = \liminf_{k\to\infty} \|f_{m_k}\|_p^p < \infty$$

Damit ist $f \in L_p$.
Seien $n, m_k \geq n_0$, also

$$\int |f_n - f_{m_k}|^p \leq \varepsilon^p$$

und mit Fatou

$$\int |f_m - f|^p \leq \varepsilon^p,$$

damit sind die L_p vollständig.

Satz 1.2.4. *Für $1 \leq p \leq \infty$ ist L_p ein Banachraum. Für $p = 2$ ist L_2 ein Hilbertraum, also die Norm ist von einem Skalarprodukt erzeugt, nämlich*

$$(f, g) := \int fg d\mu$$

bzw für komplexe Zahlen

$$(f, g) := \int f\overline{g} d\mu$$

Beweis. Direkte Folgerung aus dem Riesz-Fischer.

Bemerkung. Sei B ein Banachraum, dann ist der Dualraum $B^* = \{\ell : B \to \mathbb{R}, \ell \text{ linear und beschränkt}\}$, wobei beschränkt

$$\exists c : |\ell(f)| \leq c \|f\|$$

bedeutet. Weiters ist

$$\|\ell\| = \sup_{\|f\|\neq 0} \frac{|\ell(f)|}{\|f\|}.$$

Bemerkung. Sei $f \in \mathcal{L}_p, g \in \mathcal{L}_q$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, dann ist

$$\int fg \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_p$$

und

$$\ell_g(f) = \int fg$$

ein lineares Funktional auf $\mathcal{L}_p$ und es gilt

$$\|\ell_g\|_{p^*} \leq \|g\|_q$$

Satz 1.2.5. *Sei $f \in \mathcal{L}_p$, dann folgt*

$$\|f\|_p = \sup\{\int fg : g \in \mathcal{L}_q, \|g\|_q \leq 1\}$$

Beweis. Gilt $\|f\|_p = 0$, so ist die Behauptung klar.
Sei also $\|f\|_p > 0$. Sei

$$g(\omega) = \begin{cases} 0, \text{ wenn } f(\omega = 0) \\ \frac{\overline{f}(\omega)\cdot|f(\omega)|^{p-2}}{|f|_p^{p-1}}, \text{ sonst} \end{cases}$$

Nun gilt

$$|g| = \frac{|f|^{p-1}}{\|f\|_p^{p-1}}, \|g\|_q = 1$$

und

$$\int fg = \frac{1}{\|f\|_p^{p-1}} \int |f|^p = \|f\|_p .$$

Beispiel 1.2.1. Sei $\Omega = \mathbb{R}$, $\mathfrak{S} = 2^\Omega$,

$$\mu(A) = \begin{cases} 0 : & |A| \leq \aleph_0 \\ \infty : & \text{sonst} \end{cases}$$

Es ist also $L_p = \{0\}$.

Satz 1.2.6. *Ist μ sigmaendlich, dann ist $|f|_p = \sup\{\int fg : g \in \mathcal{L}_p, \|g\|_q = 1\}$*

Satz 1.2.7 (Darstellungssatz von Riesz)**.** *Für $1 < p < \infty$ gilt*

$$L_p^* \cong L_q.$$

Ist μ sigmaendlich, dann ist

$$L_1^* \cong L_\infty.$$

Ist μ endlich, so gilt

$$l \in L_p^* \Rightarrow \exists! g \in L_q, \ell(f) = \int fgd\mu$$

Beweis. Sei $A \in \mathfrak{S}$, $\nu(A) = \ell(A())$. Behauptung: ν ist signiertes Maß und $\nu \ll \mu$. Für $A = \sum_{n\in\mathbb{N}}, A_n \in \mathfrak{S}$ muss also gelten

$$\nu(A) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \nu(A_n).$$

Wir zeigen zunächst die Additivität:

$$\nu(A+B) = \ell(A+B) = \ell(A) + \ell(B) = \nu(A) + \nu(B)$$

Es gilt nun

$$\mu(A) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$$

und für $\varepsilon > 0$ gibt es ein $N = N(\varepsilon)$, sodass

$$\sum_{n>N} \mu(A_n) = \mu(\bigcup_{n>N} A_n) < \varepsilon$$

und natürlich

$$A = A_1 \cup ... \cup A_n \cup \bigcup_{n>N} A_n$$

also

$$\ell(A) = \ell(A_1) + ... + \ell(A_n) + \ell\left(\bigcup_{n>N} A_n\right)$$

also

$$\begin{aligned}|\ell(A) - \sum_{n=1}^{N} \ell(A_n)| &\leq |\ell\left(\sum_{n>N} A_n\right)| \leq \|\ell\| \cdot \left\|\sum_{n>N} A_n\right\|_p \\ &\leq \|\ell\| \cdot \mu\left(\sum_{n>N} A_n\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\Rightarrow \sum_{n=1}^{N} \ell(A_n) \stackrel{N\to\infty}{\longrightarrow} \ell(A)\end{aligned}$$

und damit schließlich

$$\nu(A) = \sum \nu(A_n)$$

Nun

$$\exists g : \ell(A) = \int_A g d\mu$$

d.h.

$$\ell(f) = \int f g d\mu, \ f \text{ Indikator } \rightarrow \text{ Treppenfunktion } \rightarrow \text{ messbar } (\in \mathcal{L}_p)$$

Satz 1.2.8. *Ist μ sigmaendlich, dann ... (?)*

Satz 1.2.9. *für $1 < p < \infty$ kann auf die Sigmaendlichkeit verzichtet werden. (im Satz davor (?))*

Definition 1.2.10. *Das Lebesgue Integral eines signierten Maßes ist*

$$\int g d\mu := \int g d\mu_+ - \int g d\mu_-$$

Beispiel 1.2.2. Sei μ ein komplexes Maß, also

$$\mu(A) = \mu_1(A) + i \cdot \mu_2(A)$$

Nun betrachte

$$\int_A f_1 d|\mu_1| + i \int_A f_2 d|\mu_2|.$$

Nach Satz von Radon-Nikodym ist für ein sigmaendliches μ

$$\nu(A) = \int_A f d\mu \Leftrightarrow \nu \ll \mu$$

Wir suchen also ein ν sodass $|\mu_1| \ll \nu$ und $|\mu_2| \ll \nu$. Wir setzen $\nu = |\mu_1| + |\mu_2|$. Es gibt nun ein $0 \leq g_1 \leq 1$ sodass

$$|\mu_1|(A) = \int_A g_1 d\nu$$

und für $g_2 := 1 - g_1$

$$|\mu_2|(A) = \int_A g_2 d\nu$$

Es ist also

$$\mu(A) = \int_A f_1 g_1 d\nu + \int i f_2 g_2 d\nu = \int_A (f_1 g_1 + i f_2 g_2) d\nu$$

Wir wissen $|f_1| = |f_2| = 1$, also

$$|f_1 g_1| + |f_2 g_2| = |g_1| + |g_2| = 1$$

Damit folgt

$$= \int_A \underbrace{\frac{f_1g_1 + if_2g_2)}{|f_1g_1 + if_2g_2|}}_{f} \cdot \underbrace{|f_1g_1 + if_2g_2|d\nu}_{d|\mu|} = \int_A fd|\mu|$$

Also

$$|\mu|(A) = \int_A \overline{f}d\mu$$

Beispiel 1.2.3. Sei μ ein signiertes Maß auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$. Dann ist

$$F(x) = \mu(]-\infty, x]) = \mu_+(]-\infty, x]) - \mu_-(]-\infty, x]) = F_+(x) - F_-(x)$$

Definition 1.2.11. *Eine Funktion f heißt von beschränkter Variation, falls es g, h mit*

$$f = g - h$$

gibt und g, h nicht fallend und beschränkt.

Bemerkung. Das ist nicht die offizielle Version.

Definition 1.2.12. *Es sei*

$$V_a^b f = V_{[a,b]} f = \sup\{\sum_{i=1}^n |f(t_i) - f(t_{i-1})| : n \in= t_0 < t_1 < ... < t_n = b\}$$

$$V_{[a,b]}^{+/-} f = \sup\{\sum_{i=1}^n |(f(t_i) - f(t_{i-1}))_{+/-}| : n \in= t_0 < t_1 < ... < t_n = b\}$$

Definition 1.2.13 (offiziell)**.** *f heißt von beschränkter Variation, wenn*

$$V_{\mathbb{R}} = \{V_{[a,b]} f, a < b, a, b \in \mathbb{R}\}$$

beschränkt ist.

Definition 1.2.14. *Es ist*

$$F_+(x) = V_{]-\infty,x]}^+ F$$

Satz 1.2.15. *Die offizielle und inoffizielle Definition der beschränkten Variation sind äquivalent.*